رشد

برهان

فصلنامه ی آموزشی، تحلیلی، اطلاع رسانی

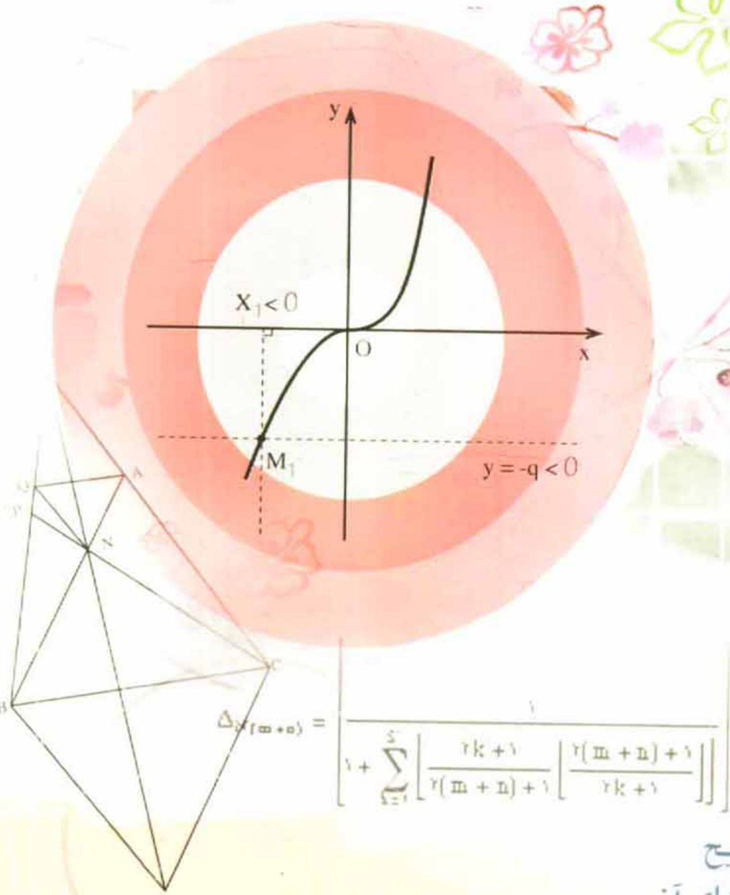
مجله ریاضی

دوره ی متوسطه

۵۳

• دوره‌ی شانزدهم • شماره‌ی ۳

• بهار ۱۳۸۶ • بها ۳۰۰۰ ریال



- انسان فرزانه
- درخت چیست؟
- تابع جزء صحیح
- مربع لاتین و کاربردهای آن
- کشف فرمول اعداد اول و نتایج آن

وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه ریزی آموزشی
دفتر انتشارات کمک آموزشی

مشاهیر ریاضی مسلمان

کاشانی



کاشانی. غیاث‌الدین جمشیدبن مسعودبن محمود طبیب کاشانی، ریاضی‌دان و منجم مشهور ایرانی، متوفی به سال ۸۳۲.

ریاضی‌دانی عالی‌مقام، محاسبی ماهر، منجمی زبردست، مؤلفی توانا و مخترع آلات دقیق رصد بود. در حدود سال ۸۲۴ به دعوت الغ بیک به سمرقند رفت و مدیر رصدخانه‌ی سمرقند شد.

از کارهای وی، تعیین عدد π با دقتی است که تقریباً تا ۱۵۰ سال بعد در دنیا بی‌رقیب ماند. کار دیگرش محاسبه‌ی جیب زاویه‌ی یک درجه، با روشی بسیار جالب و بی‌سابقه است.

کار مهم دیگر کاشانی، اختراع کسرهای دهدهی به قیاس با کسرهای شصت‌گانی است، که هر چند سابقه‌اش به دو قرن و نیم پیش از کاشانی می‌رسد، وی نخستین کسی است که با صراحت کامل مدعی اختراع آن‌ها شده است.

بعضی از آثار ریاضی کاشانی عبارت است از:

۱ـ مفتاح‌الحساب، که به زبان عربی، و بسیار استادانه تألیف شده است، و بعضی یا تمام مطالب آن را به زبان‌های فرانسوی، آلمانی، روسی و انگلیسی ترجمه کرده‌اند.

۲ـ رساله‌ی محیطیه، که به زبان عربی است و بعضی از ریاضی‌دان‌ها و مورخان مغرب‌زمین آن را شاهکار فن محاسبه نامیده‌اند.

۳ـ رساله‌ی وتر و جیب

۴ـ زیج خاقانی در تکمیل زیج ایلخانی.

قاضی‌زاده‌ی رومی

قاضی‌زاده‌ی رومی. صلاح‌الدین پاشا موسی‌بن محمدبن محمود قاضی‌زاده‌ی رومی، منجم و ریاضی‌دان ترک، متولد حدود ۷۶۶ و متوفی حدود ۸۴۰.

پدرش قاضی بروسه از شهرهای ترکیه بود. وی در همین شهر به‌دنیا آمد؛ اما برای تکمیل معلوماتش در ریاضیات، به ماوراءالنهر رفت و مدتی را نیز در جرجان و خراسان گذراند.

قاضی‌زاده در کارهای رصدخانه‌ی سمرقند، که مدیریت آن به‌عهده‌ی غیاث‌الدین جمشید کاشانی بود، شرکت داشت، و پس از درگذشت کاشانی، به مدیریت رصدخانه رسید.

آثار ریاضی موجود وی عبارت‌اند از:

۱ـ رسالة‌الجیب، که در واقع تحریر رساله‌ی «وتر و جیب» کاشانی است. این تحریر به زبان روسی ترجمه شده است.

۲ـ شرح اشکال‌التأسیس، که متن اصلی از شمس‌الدین سمرقندی است.

۳ـ رسالة فی الحساب، که در حساب و جبر و مساحت است.

۴ـ حاشیه بر تحریر اصول اقلیدس، که اصل آن از خواجه‌نصیر طوسی است.

۵ـ رسالة فی الهیئة و الهندسة.

منبع: فرهنگ ریاضیات/گروه ریاضیات انتشارات مدرسه/ناشر: انتشارات مدرسه

بسم الله الرحمن الرحیم

رشد برهان ۵۳

مجله ی ریاضی

دوره ی متوسطه

فصلنامه آموزشی، تحلیلی، اطلاع رسانی

دوره‌ی شانزدهم /شماره‌ی ۳/ بهار ۱۳۸۶/شمارگان: ۲۵۰۰۰ نسخه

• مدیر مسؤول: علیرضا حاجیان زاده
• سردبیر: حمیدرضا امیری
• مدیر داخلی: میرشهرام صدر
• طراح گرافیک: آزیتا کوثری
• ویراستار ادبی: کبری محمودی
• اعضای هیأت تحریریه: حمیدرضا امیری
محمد هاشم رستمی، احمد قندهاری،
میرشهرام صدر، هوشنگ شرقی،
سید محمدرضا هاشمی موسوی،
غلامرضا یاسی‌پور
و با تشکر از همکاری ارزنده‌ی
استاد پرویز شهریاری
• چاپ و صحافی: شرکت افست (سهامی عام)
• نشانی دفتر مجله: تهران، صندوق پستی ۱۵۸۷۵/۶۵۸۵
تلفن دفتر مجله: ۹ـ ۸۸۸۳۱۱۶۰ داخلی ۳۹۷
تلفن امور مشترکین: ۷۷۳۳۶۶۵۶ـ ۷۷۳۳۵۱۱۰
www.roshdmag.ir
ISSN 1735 - 4951

وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه ریزی آموزشی
دفتر انتشارات کمک آموزشی

رشد برهان متوسطه هر سه ماه، یکبار منتشر می شود.
مجلّه در حکّ، اصلاح، حذف و اضافه ی مقاله ها آزاد است.
مقاله های وارده ،باید خوانا و حتی‌الامکان کوتاه باشد.
مقاله های رسیده مسترد نمی شود.
استفاده از مطالب مجلّه در کتاب ها یا مجله های دیگر با ذکر دقیق مأخذ بلامانع است.

رشد برهان متوسطه، تمامی دبیران محترم و دانش‌آموزان عزیز را در زمینه‌های زیر به همکاری دعوت می کند:

- نگارش مقاله‌های کمک درسی (شرح و بسط و رفع مشکلات مبحث درسی کتاب‌های ریاضی دوره‌ی متوسطه و پیش‌دانشگاهی)
- طرح مسائل کلیدی به همراه حل آن‌ها (برای دانش‌آموزان)
- طرح مسائل مسابقه‌ای به همراه حل آن‌ها (برای دانش‌آموزان)
- طرح معماهای ریاضی
- نگارش یا ترجمه‌ی مقاله‌های عمومی ریاضی (مانند تاریخ ریاضیات، زندگینامه‌ی علمی و اجتماعی ریاضیدانان، نکته‌های تازه و لطیف ریاضیات، آموزش ریاضیات، آموزش کامپیوتر و ...)

یادداشت سردبیر

همواره ریاضیات در دنیا به دلیل نیازهای بشر و یا فرهنگ جوامع گوناگون بشری، دوران‌های نظری یا کاربردی یا هر دو را طی کرده است. به عبارت دیگر، در یک زمان، ریاضیات سمت‌گیری نظری یا به قول امروز محض داشته است و در زمانی دیگر و یا مکانی دیگر، سمت و سوی کاربردی به خود گرفته است. اگر بخواهیم به طور اجمالی به تقسیم‌بندی این دوره‌ها از ریاضیات بپردازیم، می‌توانیم آن‌ها را به پنج دوره‌ی عمده تقسیم کنیم:

۱. دوره‌ی پیدایش ریاضیات که ریاضیات این دوره به طور کامل سمت و سوی کاربردی داشته است.

۲. دوره‌ی تکامل ریاضیات یا ریاضیات یونانی که سمت و جهتی نظری داشته است.

۳. دوره‌ی ریاضیات ایرانی که در این دوره، ریاضیات هم تحت تأثیر سنت‌های ریاضیات نظری بوده است و هم به دلیل نیازهای بشری، به سمت الگوریتمی شدن پیش می‌رود (سده‌های نهم تا پانزدهم).

۴. دوره‌ی پیدایش ریاضیات با کمیت‌های متغیر که مجدداً سمت‌گیری ریاضیات به طرف ریاضیات نظری بوده است (سده‌های ۱۶، ۱۷ و ۱۸).

۵. دوره‌ی ریاضیات امروزی یا دوره‌ی گسترش موضوعات ریاضی.

همان‌طور که در بالا ذکر شد، در یک دوره‌ی کامل از ریاضیات که آن را ریاضیات ایرانی نامیدیم، ایرانیان سردمدار ریاضیاتِ سیاره‌ی خاکی زمین بوده‌اند. متأسفانه غربی‌ها نسبت به بیان این دوره و کارهای بسیار ارزشمند انجام شده توسط ریاضی‌دانان ایرانی و مسلمان آن، یا سکوت کرده‌اند و یا خیلی گذرا و بدون ادای حق کلام، از آن عبور کرده‌اند. در این دوره و براساس مستندات تاریخی، کارهای ریاضی‌دانانِ ایرانی چنان عظیم هستند که در سده‌های بعد، فقط از طریق ترجمه‌ی اکثر آن‌ها به زبان‌های لاتین و اروپایی، دانش ریاضی جایگاه و مقام خود را در اروپا به دست آورد.

دوره‌ی ریاضیات ایرانی که حدود ۷۰۰ سال از تاریخ دانش ریاضی را از آنِ خود کرد است!، ریاضیاتی کاربردی به شمار می‌رود. در این دوره، جبر و مثلثات به عنوان شاخه‌های مستقلی از ریاضیات شکل گرفتند و ساختار «محاسبه‌ای ـ الگوریتمی» در ریاضیات، به نوعی بین نظریه و کاربرد، پیوند ایجاد کرد و از ویژگی‌های اصلی ریاضیات ایرانی، پیدایش ساختمان الگوریتمی دانش ریاضی است که بیش از همه جنبه‌ی محاسبه‌ای دارد که عامل منحصر به فرد توسعه‌ی کمیت (کمیت‌گرایی) در سایر دانش‌ها شد! یعنی شاه کلید توسعه‌ی علم و تکنولوژی! ریاضیات در دوره‌ی ریاضیات ایرانی، توسط یک عامل بسیار باارزش به نام «آموزش»، به یکی از عوامل مهم در پیشرفت و توسعه در جامعه دست می‌یابد. کتاب **ابوالوفای بوزجانی** با عنوان «آنچه از اعمال هندسی به کار صنعتگران می‌آید»، نمونه‌ی بارزی از این آموزش است. این سند تاریخی می‌تواند ایرانیان را در زمره‌ی پیشگامان در آموزش ریاضی قرار دهد.

ریاضیات ایرانی دوره‌ی کامل و برجسته‌ای از تاریخ تکامل ریاضیات را شامل می‌شود و ستارگانی درخشان همچون: **خوارزمی، نیریزی، فارابی، بوزجانی، بیرونی، ابن سینا، کرجی، خیام، طوسی،** و **جمشید کاشانی** را در این دوره مشاهده می‌کنیم که کارهای بسیاری از آن‌ها، قرن‌ها پس از خودشان توسط اروپاییان کشف شد. در پایان این شرح اجمالی، از شما دانش‌آموزان و دبیران محترم سؤال می‌کنم، چرا امروزه افرادی چون خیام یا جمشید غیاث‌الدین کاشانی نداریم؟

نظر شما چیست؟ اگر نظری دارید بنویسید و برای ما ارسال کنید.

والسلام

۱.

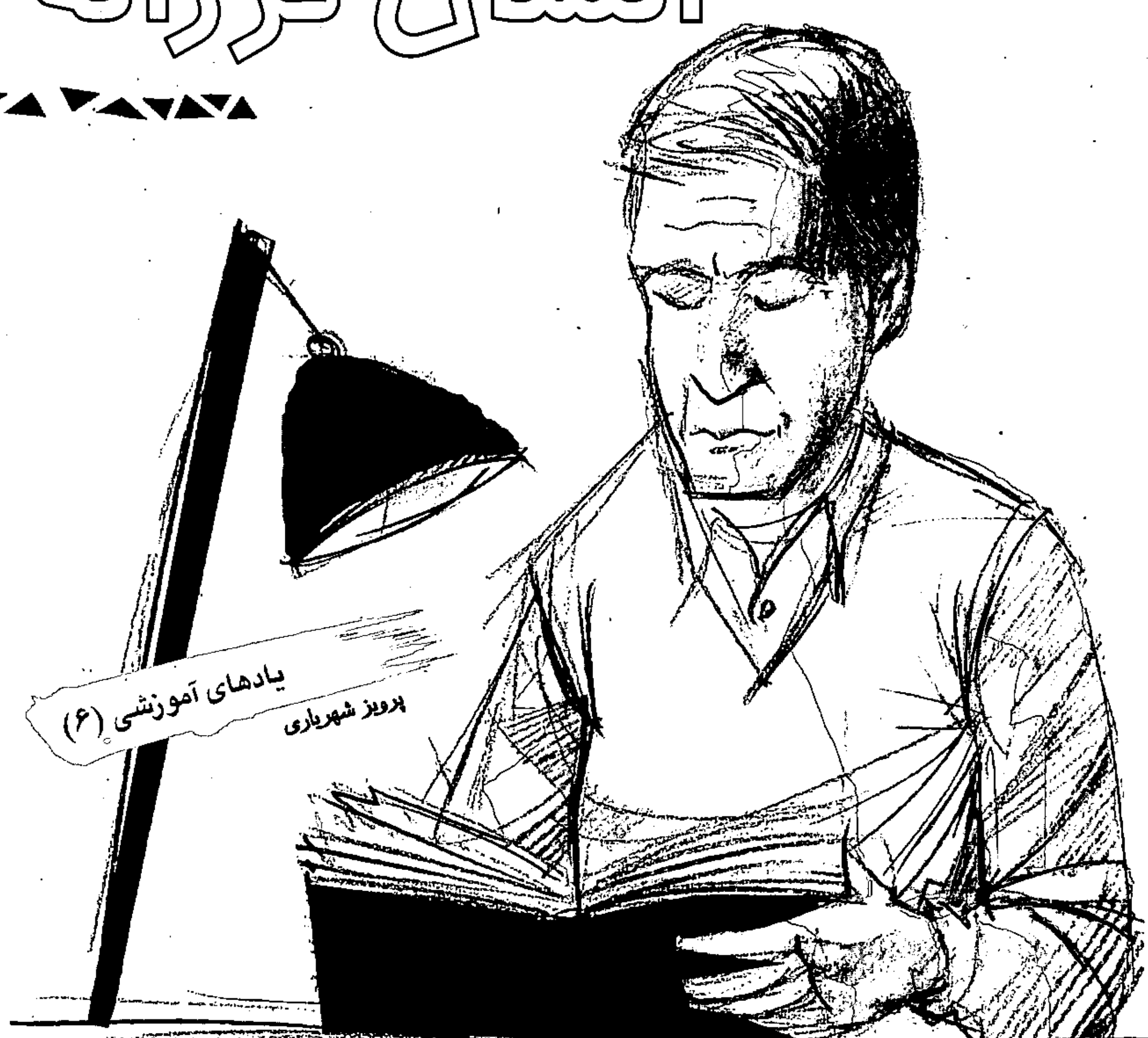
با چهره‌ای شاد که شور جوانی و شوق دانستن از آن می‌بارید، نزد من آمد. کاغذ و خودکاری به دست داشت و آرزومندانه گفت: «می‌توانم از شما خواهش کنم، نصیحتی به من بکنید که راهنمای زندگی من باشد؟»

او را روبه‌روی خود نشاندم و گفتم: «این روزها بازار نصیحت گرم است. همه در روزنامه‌ها، مجله‌ها و کتاب‌ها، در صدا و سیما، در سخن‌رانی‌ها و مصاحبه‌ها و... ما را نصیحت می‌کنند و گاه این نصیحت‌ها حکم فرمان و **دستور** دارد. اغلب دستوردهندگان، خود را **عقل کل** می‌دانند و گمان می‌برند، همه‌ی **حقیقت** را یافته‌اند و ما را از عواقب ناشی از سرپیچی از دستورهای خود هشدار می‌دهند. مرا از نصیحت کردن معاف کنید، چرا که نمی‌خواهم کدورتی از من به دل بگیری.»

گفت: «بسیار خب، از نصیحت می‌گذرم. دست‌کم از تجربه‌های زندگی خودتان بگویید.»

گفتم: «غالباً **پندها** را زیر همین لفاف **تجربه‌ی زندگی** و **خاطره** پنهان می‌کنند، به‌ویژه که روش‌های خوب‌زیستن و انسانی‌زیستن کم‌تر قابل تقلید هستند. هرکس باید خود و با آزمایش و خطا در صحنه‌ی زندگی و اجتماع و با درس گرفتن از تاریخ، راه **انسان بودن** را بیابد. به سختی می‌توان **دستوری** یا **فرمولی همگانی** در این‌باره ارائه کرد: با ندیدن‌های

انسان فرزانه



یادهای آموزشی (۶)

پرویز شهریاری

حقیقت‌های تاریخی، به یک دیکتاتور کوچک یا یک دیکتاتور بزرگ، همچون شی هوانگ‌تی، امپراتور سفاک سده‌ی سوم پیش از میلاد در چین تبدیل می‌شویم. شی هوانگ‌تی برای این‌که به گمان خود، جباری‌اش را از دید آیندگان پنهان کند، دستور داد همه‌ی کتاب‌های تاریخی و علمی را بسوزانند و ۴۶۰ نفر از تاریخ‌نویسان و دانشمندان چینی را سر ببرند. روزی که امپراتور برای نیایش به معبد می‌رفت، هوا توفانی شد و باد و باران تندی درگرفت. همراه با صدای رعد و برق و توفان، فریادهای نارضایتی مردم هم بلند شد و «روح امپراتور را آزرد». به همین مناسبت، به کمان‌داران خود دستور داد آسمان را تنبیه کنند و با شلیک تیر به سوی آسمان، آن را از هیاهو بازدارند. جنگل تسیانک را نیز بسوزانند. ولی امروز، نه تاریخ چین گم شده است و نه آن روز آسمان آرام شد. تاریخ همیشه به ما درس می‌دهد.»

گفت: «واژه‌ها را خوب انتخاب می‌کنید، ولی نتوانستید مرا قانع کنید. شما در تمام زندگی خود معلم بوده‌اید. آیا در کلاس هم به پرسش‌های دانش‌آموزان خود، همین‌گونه پاسخ می‌دهید؟ من هم پرسشی دارم: صریح و روشن بگویید از جوان امروزی، البته در موقعیت اجتماعی موجود در ایران، چه انتظاری دارید، تا هم برای خود و هم برای جامعه‌ای که در آن زندگی می‌کند، سودمند باشد؟»

گفتم: «از همه‌ی مردم از جمله جوانان، نمی‌توان انتظار داشت با درکی فلسفی و علمی، به زندگی و جامعه بنگرند. برای پدید آمدن دگرگونی‌های مثبت اجتماعی هم نباید و نمی‌توان منتظر درست‌اندیشیدن همه‌ی افراد جامعه و همه‌ی جوانان ماند. برای جامعه‌ی ما، چند صد و یا چند هزار جوان فرزانه کافی است تا بتوانند دگرگونی‌های لازم را در آغاز در اندیشه‌ها و سپس در عمل جامعه ایجاد کنند. ما به جوانانی نیاز داریم که در مسیر فرزانگی گام بردارند.»

اندکی برآشفت و با لحنی گله‌آمیز گفت: «فرزانگی؟ این یک مفهوم کلی است و هر کسی آن را به گونه‌ی مورد نظر خود تعبیر می‌کند. فرزانگی یعنی چه؟ چه کسی را می‌توان فرزانه دانست؟ ما جوانان چه کنیم که فرزانه باشیم؟»

ادعای نخستین خود را که نباید بر صندلی «اندرز» بنشینیم، فراموش کردم. گرمی و اشتیاق جوان، مرا به دام انداخت.

ـ شرط اصلی فرزانگی آن است که همچون ملاصدرا (صدرالدین شیرازی مشهور به صدر المتألهین) در کتاب «اسفار» (یعنی سفرها) در نظریه‌ی «حرکت جوهری» خود، این حقیقت عقلی را بپذیریم که «حرکت در ذات طبیعت است». هیچ پدیده یا روندی ثابت و بی‌تغییر نیست و در طول زمان تکامل می‌یابد. این اعتقاد موجب می‌شود، انسان به دیدگاه‌های دیگران احترام بگذارد. حرف و استدلال آن‌ها را بشنود، درباره‌ی آن‌ها بیندیشد و دیدگاه خود را در جهت تکامل پیش ببرد. به این ترتیب، انسان فرزانه در همان حال که به انسان‌های دیگر و به اعتقادها و باورهای آن‌ها احترام می‌گذارد، استقلال اندیشه‌ی خود را حفظ می‌کند و هرگز به میل این و آن به هدف رسیدن به مقام یا نگهداری مقام خود، و به خاطر کسب مال یا حفاظت از مال خود، استقلال فکری‌اش را از دست نمی‌دهد.

استقلال فکری انسان فرزانه، همان آزاداندیشی است، چرا که به قول یکی از اندرزنامه‌های مانده در زبان پهلوی: «اگر در میان خوی‌های کسی، خرد او نیرومندترین خوی‌ها نباشد، زوال او، در خوی‌های اوست.» به قول ابوریحان بیرونی در «تحقیق ماللهند» که نزدیک به هزار سال از نوشتن آن می‌گذرد: «طبیعت دل‌ها بر عشق به دانش استوار است و خمیره‌ی وجود آدمی از ضد دانش، یعنی نادانی بیزار است. کار دانش، آزادی جان و رهانیدن آن [از تاریکی‌ها] است. دانش مفهوم‌های کلی را دربر می‌گیرد و درست را از نادرست جدا می‌کند؛ وابسته به استقرا و استدلال سطحی و غیر کلی نیست. تردیدها را برطرف و آدمی را به یقین نزدیک‌تر می‌کند.»

انسان فرزانه، آزادی اندیشه و گفتار را حق طبیعی انسان‌ها می‌داند. می‌پذیرد که هر کسی حق دارد، بدون سوء استفاده از مقام خود، بدون تهمت زدن به دیگران، و بدون استفاده از خشونت، سخن خود را بر پایه‌ی اعتقاد خود و بدون هراس از تعقیب عرضه کند و منتظر پاسخ بماند. استفاده از «تمثیل» یا نمونه آوردن یک بیت شعر، شیوه‌ی استدلال آدم فرزانه نیست و به شرطی به آن استناد می‌کند که برهانی خردمندانه و علمی به دنبال آن داشته باشد. استدلال تمثیلی به قول منطق‌دانان، استدلالی کودکانه است. تنها کودک است که با یک یا چند مثال قانع می‌شود و حکمی کلی را می‌پذیرد. برای نمونه، اگر از مردی بلند قد و عینک‌دار خشونتی دید، از هر مرد بلند قد عینکی دیگری هم دچار هراس می‌شود.

انسان فرزانه شجاع است، ولی بی‌پروا نیست. از اعتقاد

خود برنمی‌گردد، ولی به قول گاوس (کارل فردریش؛ ۱۸۵۵ ـ ۱۷۷۷)، ریاضی‌دان و اخترشناس آلمانی، مثل کسی است که در «غار کوران» نمایش‌نامه‌ی خود را اجرا نمی‌کند و برای بیان اعتقاد خود، نه به خطرهایی که برای او دارد، بلکه به اندازه و مقیاس اثربخشی آن می‌اندیشد. آن‌گاه هوشیار است و می‌داند چه مطلبی را و در کجا باید مطرح کند. ولی هرگز و به هیچ قیمتی، چیزی برخلاف اعتقاد خود نمی‌گوید و نمی‌نویسد و به عملی که با اعتقادهایش ناسازگار باشد، دست نمی‌زند.

انسان فرزانه تلاش می‌کند تک‌بعدی نباشد و در روزگاری که جهان سرمایه‌داری، همه را به سوی تخصص‌گرایی و غرق‌شدن در تخصص خود سوق می‌دهد، ضمن داشتن آگاهی بالا در زمینه‌ای خاص، زمینه‌های دیگر را فراموش نمی‌کند. صاحبان سرمایه در جهان سرمایه‌داری آرزو دارند، هر کسی تنها به حرفه و تخصص خود بیندیشد. سر خود را بالا نگیرد و به عمل دیگران توجه نکند. به او چه مربوط است که سیاست‌مداران چه می‌کنند یا سودهای کلان ناشی از زحمت دیگران به جیب چه کسانی می‌رود؟ او باید تنها به کار خودش مشغول باشد، تخصص خود را بالا ببرد و تنها به آن بیندیشد و...

ولی در واقع انسان فرزانه می‌داند که آدمی مجموعه‌ی پیچیده‌ای است که هم سرچشمه‌ی هنر است و هم زاینده‌ی دانش. کسی که برای نمونه، تنها به ریاضیات بپردازد و چشم و گوش خود را به روی آن‌چه دور و بر او می‌گذرد ببندد، از هنر و تفریح و شادی گریزان باشد، دردهای انسان‌ها را در وجود خود نداشته باشد و برای التیام آن‌ها نکوشد، زندگی را تنها در زیبایی‌های دستورها و مسئله‌های ریاضیات ببیند و زشتی‌هایی را که بر او و انسان‌های دیگر تحمیل کرده‌اند، نبیند و با رنج‌هایی که بر او و دیگران تحمیل شده‌اند، آشنا نباشد، رمان‌های کلاسیک را که بازگوکننده‌ی غم و شادی انسان‌ها هستند، نخوانده باشد، از موسیقی، تابلوهای زیبای نقاشی و یا مجسمه‌های زیبای صاحبان ذوق لذت نبرد، عدالت اجتماعی را برای همه‌ی انسان‌ها و طنز و تفریح و شادی را برای خود و دیگران نخواهد... چنین کسی نه‌تنها انسان کامل نیست که یک ریاضی‌دان خوب هم نمی‌تواند باشد. یک آکادمی تک‌بعدی است که ابزار کار را در اختیار زورمندان و سرمایه‌داران می‌گذارد و راه را برای یکه‌تازی آن‌ها باز می‌کند.

انسان فرزانه دیگران را تحقیر نمی‌کند. از نابرابری‌هایی که بر آن‌ها تحمیل شده، بیزار است و علیه آن‌ها می‌جنگد. جدایی انسان‌ها را به دلیل ملیت آن‌ها، نژاد آن‌ها، جنسیت آن‌ها، مذهب و اعتقاد آن‌ها و... نمی‌پذیرد. انسان‌ها را درجه‌بندی نمی‌کند که برخی شهروند درجه اول و برخی دیگر شهروند درجه دوم هستند. برای همه انسان‌ها، حقوق برابر قائل است و در راه رسیدن به این آرمان‌ها می‌کوشد.

انسان فرزانه، در همان حال که روی اعتقادهای انسانی پای می‌فشارد، به طور دائم در جست‌وجوی حقیقت است. واقعیت‌ها را می‌پذیرد و از آن‌جا که می‌داند، همه‌چیز را همگان دانند و همگان هنوز از مادر نزاده‌اند، در اصلاح خود و اندیشه‌هایش تردید نمی‌کند. قاطعیت و خودباوری را با شک نسبت به نادانسته‌های خود، به همراه دارد و از بیان اشتباه یا اشتباهات گذشته‌ی خود نمی‌هراسد.

انسان فرزانه...

سخنم را برید و گفت: «اجازه بدهید! همین اندازه برای امروز کافی است. تا همین‌جا می‌توان تصور کرد، «فرزانه بودن» تا چه اندازه، زیبا و انسانی است در عین حال چه قدر دشوار. از نصیحت‌های شما سپاس گزارم!»

۲.

کسانی هستند که با ذهن بیمار خود، پرسش یا پرسش‌هایی در برابر مردم می‌گذارند که تنها می‌تواند انسان را آشفته کند و آزار دهد. از آن جمله است مسابقه‌هایی که گاه چنین مسئله‌هایی در برابر افراد قرار می‌دهند: «در دقایقی همراه با مادر و همسر خود در میان دریا پارو می‌زنید و از زندگی لذت می‌برید. ناگهان دریا توفانی می‌شود و هر سه نفر شما را به دریا می‌اندازد. تنها شما شنا می‌دانید و می‌توانید غریق را نجات دهید؛ ولی تنها یک نفر را: مادر یا همسرتان. باید زود تصمیم بگیرید، چه کسی را: مادرتان که عمر و زندگی خود را برای بزرگ شدن و موفقیت شما صرف کرده است، یا همسرتان که تازه آغاز زندگی اوست و امیدها به دل دارد؟» بعد هم از شما می‌خواهند، نظر خود را با استدلال بنویسید و تلاش کنید، برای تصمیم خود دیدگاهی منطقی داشته باشید.

جز یک ذهن بیمار، چه کسی می‌تواند چنین پرسش هراس‌انگیزی را طرح کند؟ از طرح این پرسش و یا پرسش‌های

مشابه آن، جز آزار روانی، پریشانی و درماندگی، چه چیزی عاید شنونده می‌شود؟ نه می‌توان مادر را به کام مرگ فرستاد و نه همسر را در گرداب توفان رها کرد. از دست دادن هر کدام، آن هم با میل و تصمیم خود، تنها یک فاجعه است و هیچ انسان خردمند و با احساسی، توانایی انتخاب در چنین شرایطی را ندارد. یکی از پاسخ‌دهندگان، چه خوب توانسته بود، احساس خود را بیان کند: «امیدوارم هرگز در برابر این گونه دوراهی که زاده‌ی ذهن بیمار، و بی‌عاطفه‌ی طرح کننده‌ی آن است، قرار نگیرم.»

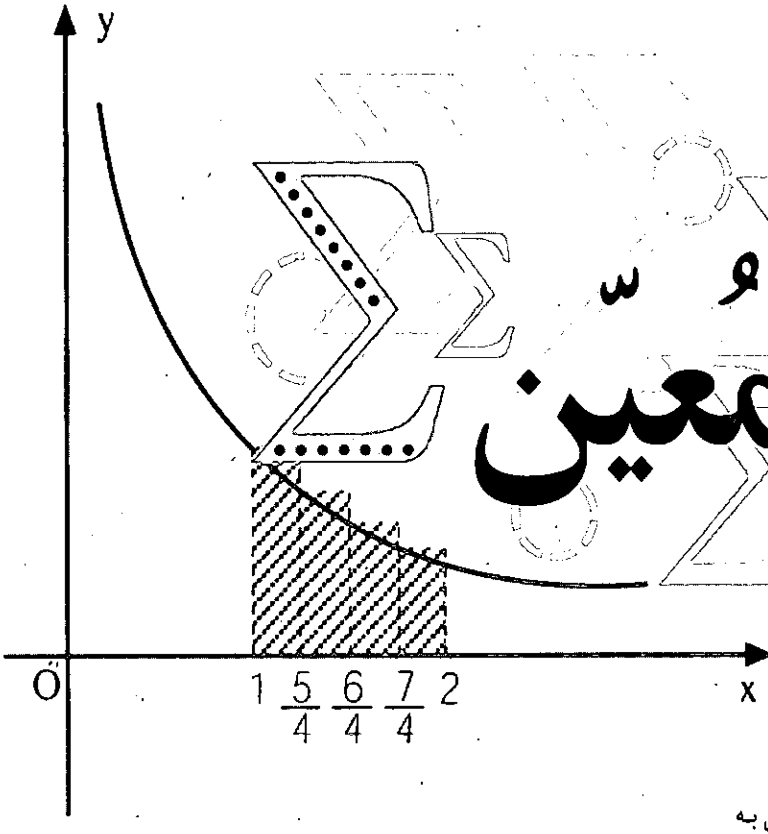
از این گونه پرسش‌ها، پرسش‌هایی هستند که کم و بیش همه‌ی ما در دوران تحصیل در برابر آن‌ها قرار گرفته‌ایم؛ مثل: «دانش موجب خوشبختی است یا خواسته» «علم یا ثروت، کدام را می‌پسندید؟» و... گرچه این پرسش‌ها به اندازه‌ی پرسش پیشین آزاردهنده نیستند و روان آدمی را دچار آشفتگی و درماندگی نمی‌کنند، ولی به همان اندازه نابخردانه‌اند. مگر دانش و خواسته باید با هم ناسازگار باشند؟ مگر دانشمند نباید زندگی کند؟ مگر آدم مال‌دار باید ابله باشد و از دانش برکنار؟ مگر نمی‌شود جامعه‌ای به دور از نابرابری‌های جامعه‌ی سرمایه‌داری داشته باشیم که همه‌ی افراد، هم دانش بیاموزند و هم با آسایش زندگی کنند؟ چرا باید تسلیم این شعار سوداگرانه‌ی جهان سرمایه‌داری شویم و به جوانان خود تلقین کنیم که نباید به دنبال دانش و هنر بروند، وگرنه برای گذران زندگی خود درمی‌مانند؟ دوست دانا و فرزانه‌ای که از یکی از شهرستان‌های استان فارس تلفن می‌کرد، از بیداد زمان می‌نالید که هیچ اهمیتی به تخصص او نمی‌دهند و از هر دری وارد می‌شود، «با احترام» از در دیگر بیرونش می‌کنند و برای نیازهای زندگی خود و خانواده‌اش درمانده است.

و نمونه‌ای دیگر: چند روز پیش یکی از پیکان‌هایی که مسافرکشی می‌کرد، مرا سوار کرد. قیافه‌ی راننده آشنا بود، ولی او را به یاد نمی‌آوردم. او مرا شناخت. از همکاران قدیمی من بود. هم تدریس می‌کرد و هم به ترجمه و تألیف می‌پرداخت. از او پرسیدم: «چرا سال‌هاست اثری یا نوشته‌ای از تو نمی‌بینم.» پاسخ کوتاه بود: «برای هزینه‌ی ضروری خانواده مسافرکشی می‌کنم و تازه زندگی لنگ است و همیشه شرمنده‌ی زن و فرزندانم هستم. نه حواس آماده‌ای و نه فرصت لازم که به کار کتاب بپردازم. خیلی چیزها در ذهنم وجود دارند که باید روی کاغذ بیایند، ولی گمان می‌کنم باید در همان ذهنم دفن شوند.»

نمی‌توان جامعه‌ای را که در آن، دانشمندان، هنرمندان و ویژه‌کاران در تنگ‌دستی به سر می‌برند و برای زندگی خود خاطری آسوده ندارند، جامعه‌ای سالم و انسانی شمرد. استاد یا دانشمندی که برای تأمین هزینه‌ی زندگی خود ناچار است با هواپیما به این شهر و آن شهر برود، دبیری که به دلیل حقوق ناچیز خود به کار تدریس خصوصی (که به نظر من اعتبار معلم را پایین می‌آورد) بپردازد، ویژه‌کاری که ناچار است با مسافرکشی، زندگی خود را تأمین کند و...، نمی‌تواند برای ساختن ایرانی پیشرفته، آن طور که باید خدمت کرد. پژوهشگران، هنرمندان، دانشمندان و ویژه‌کاران، ستون‌های اصلی پیشرفت‌اند. بدون تأمین زندگی آن‌ها و بدون آرامش خاطر آن‌ها، نمی‌توان منتظر جامعه‌ای سالم و پیشرفته بود. تا کی باید طنز **عبید زاکانی** (۷۷۲ ـ ۷۰۰ هجری قمری) مصداق داشته باشد که می‌گفت:

«لولئی با پسر خود ماجرا می‌کرد که تو هیچ کار نمی‌کنی و عمر در بطالت به سر می‌بری. چند با تو بگویم که معلق زدن بیاموز و سنگ از چنبر جهانیدن در سن بازی تعلیم کن تا از عمر خود برخوردار شوی. اگر از من نمی‌شنوی، به خدا تو را به مدرسه اندازم تا در آن علم مرده ریگ ایشان بیاموزی و دانشمند شوی و تا زنده باشی، در مذلت و فلاکت و ادبار بمانی و یک جو از هیچ جا حاصل نتوانی برد.»

با همه‌ی این‌ها، فرزانگان، دانشمندان و هنرمندان می‌توانند امیدی بزرگ داشته باشند. در سال ۵۳۴ هجری قمری، **مستنجد**، سی و دومین خلیفه‌ی عباسی، وقتی آگاه شد، در خانه‌ی یکی از قاضیان او کتابخانه‌ای است و کتاب‌های فیلسوف و دانشمند ایرانی، یعنی پورسینا ملقب به «شیخ‌الرئیس» (۴۲۸ ـ ۳۷۰ هجری قمری) هم در بین کتاب‌های اوست، دستور داد کتابخانه‌ی قاضی را آتش بزنند. زیرا مستنجد که مشهور به «ابوالمظفر» و «المستنجد بالله» بود، رسالت اصلی خود را، مبارزه با «فساد» می‌دانست. ولی امروز در سراسر جهان، میلیون‌ها نفر «پورسینا» را می‌شناسند و صدها هزار نفر از کتاب‌های او استفاده می‌کنند، درحالی که تردید دارم، تعداد کسانی که نام مستنجد را شنیده باشند، به پانصد نفر برسند.

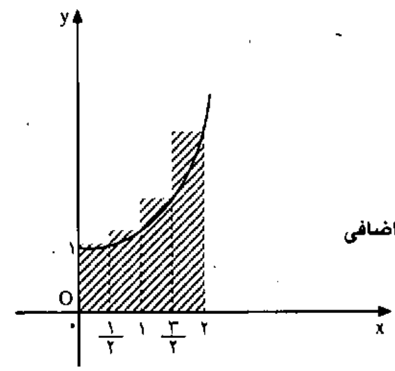


انتگرال معیّن

(قسمت اول)

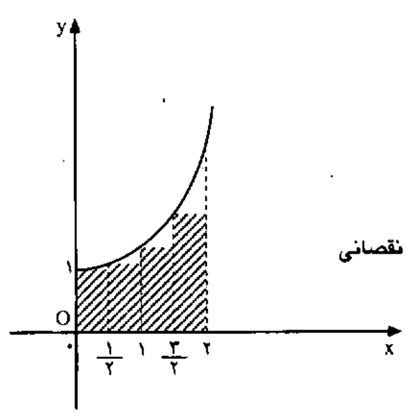
فرض کنید، می‌خواهیم اندازه‌ی مساحت زیرمنحنی به معادله‌ی $f(x) = x^{۲} + ۱$ و محور xها را از خط $x = ۰$ تا خط $x=۲$ با تقریب محاسبه کنیم.

اندازه‌ی مساحت مورد نظر را A می‌نامیم. برای این کار، سطح زیر منحنی را به مستطیل‌های محیطی و محاطی با عرض‌های مساوی، مانند شکل‌های ۱ و ۲ تقسیم می‌کنیم.



تقریب اضافی

شکل۱



تقریب نقصانی

شکل۲

به طوری که در شکل‌ها ملاحظه می‌کنید، بازه‌ی $[۰,۲]$ را به چهار قسمت مساوی تقسیم کرده‌ایم.

در شکل۱، مستطیل‌ها محیطی و در شکل ۲ مستطیل‌ها محاطی‌اند و عرض هر مستطیل $\frac{۱}{۲}$ است. در شکل۱، مجموع مساحت‌های مستطیل‌های محیطی، از مساحت سطح زیر منحنی بیشتر است (تقریب اضافی) و در شکل ۲، مجموع مساحت‌های مستطیل‌های محاطی از مساحت سطح زیر منحنی کمتر است (تقریب نقصانی).

تذکر: مجموع مساحت‌های مستطیل‌های محیطی را بالاریمان (U_nf) و مجموع مساحت‌های مستطیل‌های محاطی را پایین ریمان (L_nf) می‌گوییم. در قسمت‌های بعد، در این‌باره بحث مفصلی خواهیم داشت. در محاسبه‌ی بالاریمان (تقریب اضافی) طول هر مستطیل در هر بازه برابر ماکزیمم مطلق تابع و در محاسبه‌ی پایین ریمان (تقریب نقصانی)، طول هر مستطیل در هر بازه برابر می‌نیمم مطلق تابع است. مثلاً دربازه‌ی $[\frac{۱}{۲},۱]$ با توجه به شکل، ماکزیمم مطلق تابع $f(۱)$ و می‌نیمم مطلق تابع $f(\frac{۱}{۲})$ است. حال به ادامه‌ی حل

می‌پردازیم:

$$\text{عرض هر مستطیل}=\frac{۲-۰}{۴}=\frac{۱}{۲}$$

$$U_nf=\frac{۱}{۲}\left(f(\frac{۱}{۲})+f(۱)+f(\frac{۳}{۲})+f(۲)\right)$$

$$=\frac{۱}{۲}(\frac{۵}{۴}+۲+\frac{۱۳}{۴}+۵)=۵/۷۵ \text{ واحد مربع}$$

$$L_nf=\frac{۱}{۲}\left(f(۰)+f(\frac{۱}{۲})+f(۱)+f(\frac{۳}{۲})\right)$$

$$=\frac{۱}{۲}(۱+\frac{۵}{۴}+۲+\frac{۱۳}{۴})=۳/۷۵ \text{ واحد مربع}$$

بنابراین:

۵٫۷۵> مساحت سطح زیر منحنی=A>۳٫۷۵

چنانچه بازه‌ی [۰,۲] را به جای چهار قسمت مساوی، به هشت قسمت مساوی تقسیم و مانند محاسبات بالا عمل کنیم، خواهیم داشت:

اندازه‌ی تقریب اضافی مساحت‌ها $=U_nf=۵/۱۸۷۵$

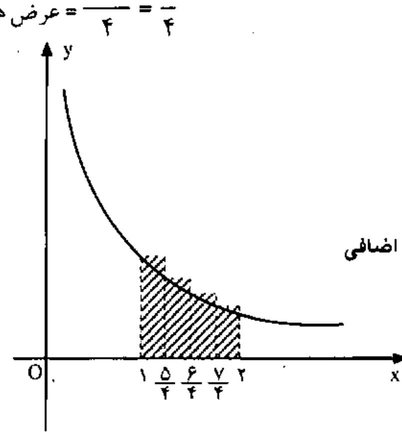
اندازه‌ی تقریب نقصانی مساحت‌ها $=L_nf=۴/۱۸۷۵$

بنابراین: ۴٫۱۸۷۵<A<۵٫۱۸۷۵

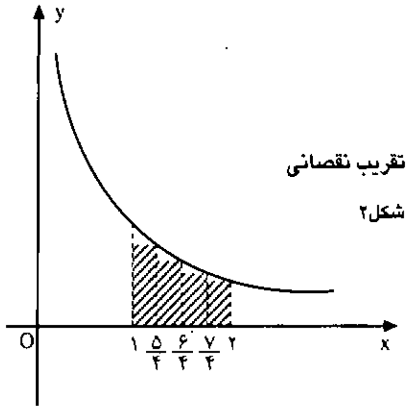
اگر بازه‌ی [۰,۲] را به جای هشت قسمت مساوی به هشتاد قسمت مساوی یا به هشتصد قسمت مساوی تقسیم کنیم، آن‌گاه مقادیر عددی تقریب اضافی مساحت‌ها و تقریب نقصانی مساحت‌ها خیلی به‌هم نزدیک خواهد شد. چنانچه بازه‌ی [۰,۲] را به n قسمت مساوی تقسیم کنیم، سپس n را به سمت ∞ میل دهیم، آن‌گاه حدّ مجموع تقریب نقصانی مساحت‌ها برابر حد مجموع تقریب اضافی مساحت‌ها و برابر سطح زیر منحنی خواهد شد.

مثال۱. اندازه‌ی سطح زیر منحنی به معادله‌ی $f(x)=\frac{۱}{x}$ و محور xها را از خط x=۱ تا خط x=۲ با تقریب اضافی و تقریب نقصانی برای n=۴ بیابید.

حل: $\text{عرض هر مستطیل}=\frac{۲-۱}{۴}=\frac{۱}{۴}$



تقریب اضافی
شکل۱



تقریب نقصانی
شکل۲

$$\text{اندازه‌ی تقریب اضافی مساحت‌ها}=U_nf=\frac{۱}{۴}\left(f(۱)+f(\frac{۵}{۴})+f(\frac{۶}{۴})+f(\frac{۷}{۴})\right)$$

$$=\frac{۱}{۴}(۱+\frac{۴}{۵}+\frac{۴}{۶}+\frac{۴}{۷})=۰/۷۶ \text{ واحد مربع}$$

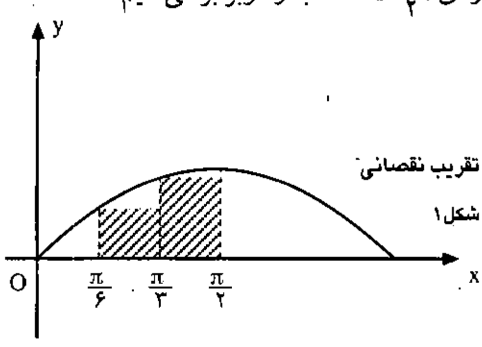
$$\text{اندازه‌ی تقریب نقصانی مساحت‌ها}=L_nf=\frac{۱}{۴}\left(f(\frac{۵}{۴})+f(\frac{۶}{۴})+f(\frac{۷}{۴})+f(۲)\right)$$

$$=\frac{۱}{۴}(\frac{۴}{۵}+\frac{۴}{۶}+\frac{۴}{۷}+\frac{۱}{۲})=۰/۶۳ \text{ واحد مربع}$$

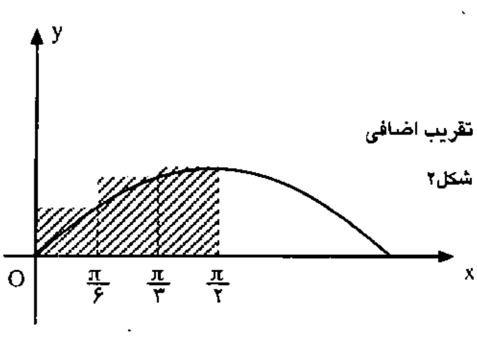
پس: ۰/۷۶ > اندازه‌ی سطح زیر منحنی= A > ۰/۶۳

مثال۲. در تابع با ضابطه‌ی f(x)=sinx، مجموع اندازه‌های بالاریمان و پایین‌ریمان را در بازه‌ی [۰,π] برای n=۶ بیابید.

حل: تابع با ضابطه‌ی f(x)=sinx در بازه‌ی $[۰,\frac{\pi}{۲}]$ صعودی اکید و نامنفی است، بنابراین مجموع بالاریمان و پایین‌ریمان را در بازه‌ی $[۰,\frac{\pi}{۲}]$ محاسبه و دوبرابر می‌کنیم.



تقریب نقصانی
شکل۱



تقریب اضافی
شکل۲

عرض هر مستطیل $\Delta_x = \frac{\pi - 0}{6} = \frac{\pi}{6}$

$$U_n f = 2 \times \Delta x\left(f(\frac{\pi}{6}) + f(\frac{\pi}{3}) + f(\frac{\pi}{2})\right)$$

$$= 2 \times \frac{\pi}{6}(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} + 1) = \frac{(3+\sqrt{3})\pi}{6}$$

$$L_n f = 2 \times \Delta x\left(f(0) + f(\frac{\pi}{6}) + f(\frac{\pi}{3})\right)$$

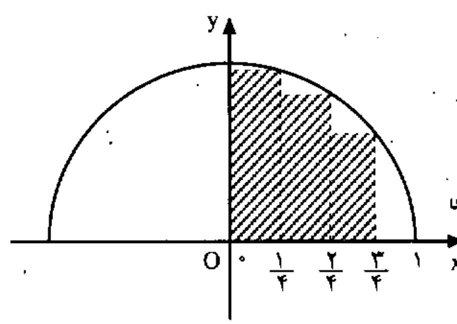
$$= 2 \times \frac{\pi}{6}(0 + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{(1+\sqrt{3})\pi}{6}$$

مثال۳. در تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \sqrt{1-x^2}$، مجموع بالاریمان و پایین‌ریمان را در بازه‌ی [۱,۱-] برای n=8 بیابید.

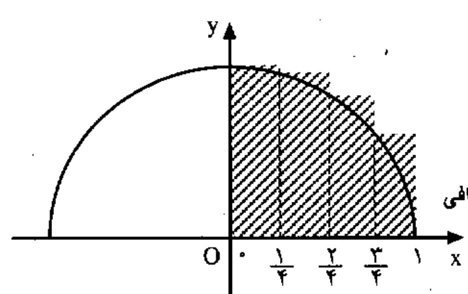
حل: نمودار این تابع یک نیم‌دایره به مرکز مبدأ مختصات و شعاع ۱ است.

مجموع بالاریمان، پایین‌ریمان را دربازه‌ی[۰,۱] که تابع نزولی اکید و نامنفی است، محاسبه و آن‌گاه آن را دوبرابر می‌کنیم.

عرض هر مستطیل $\Delta x = \frac{1-(-1)}{8} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$



تقریب نقصانی



تقریب اضافی

$$L_n f = 2 \times \Delta x\left(f(\frac{1}{4}) + f(\frac{2}{4}) + f(\frac{3}{4}) + f(1)\right)$$

$$= 2(\frac{1}{4})(\sqrt{1-\frac{1}{16}} + \sqrt{1-\frac{4}{16}} + \sqrt{1-\frac{9}{16}} + 0)$$

$$= \frac{1}{2}(\sqrt{\frac{15}{16}} + \sqrt{\frac{12}{16}} + \sqrt{\frac{7}{16}}) = \frac{1}{2}(\frac{\sqrt{15}}{4} + \frac{2\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{7}}{4})$$

$= \frac{1}{2}(0/97 + 0/87 + 0/66) = 1/24$ واحد مربع

$$U_n f = 2 \times \Delta x\left(f(0) + f(\frac{1}{4}) + f(\frac{2}{4}) + f(\frac{3}{4})\right)$$

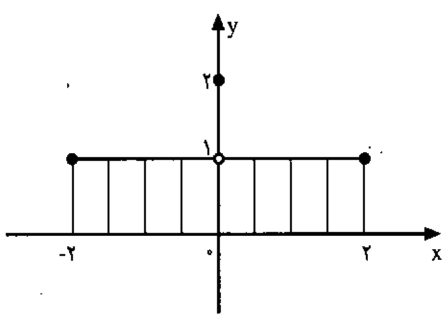
$$= 2(\frac{1}{4})(1 + \frac{\sqrt{15}}{4} + \frac{2\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{7}}{4})$$

$= \frac{1}{2}(1 + 0/97 + 0/87 + 0/66) = 1/74$ واحد مربع

مثال۴. تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \begin{cases} 2 & x = 0 \text{ اگر } \\ 1 & x \neq 0 \text{ اگر } \end{cases}$ مفروض است. مجموع بالاریمان و پایین‌ریمان این تابع در بازه‌ی [۲ , ۲-] را تعیین کنید.

الف) برای n=8 ب) برای n=9 ج) برای n=n

حل:



$L_n f = \Delta x(\underbrace{1+1+1+\cdots+1}_{8}) = \frac{1}{2}(8) = 4$ واحد مربع

$U_n f = \Delta x(1+1+1+2+2+1+1+1) = \frac{1}{2}(6+4) = 5$ واحد مربع

توجه فرمایید، در دو مستطیلی که محور yها یک ضلع آن‌هاست، ماکزیمم مطلق تابع در هریک برابر ۲ است.

ب) n=9؛ عرض هر مستطیل $\Delta x = \frac{2-(-2)}{9} = \frac{4}{9}$

$L_n f = \Delta x(\underbrace{1+1+1+\cdots+1}_{9}) = \frac{4}{9}(9) = 4$ واحد مربع

$L_n f = \Delta x(1+1+1+1+2+1+1+1+1) = \frac{4}{9}(10) = \frac{40}{9}$ واحد مربع

ج) n=n؛ اگر n فرد باشد: $\Delta x = \frac{4}{n}$

$L_n f = \Delta x(\underbrace{1+1+1+\cdots+1}_{n}) = \frac{4}{n}(n) = 4$ واحد مربع

$$U_nf = \Delta x(\underbrace{۱+۱+۱+\cdots+۱}_{n-۱}+۲) = \frac{۴}{۹}(n+۱) = \frac{۴(n+۱)}{۹}$$

واحد مربع

اگر n زوج باشد: $\Delta x = \frac{۴}{n}$

$$L_nf = \Delta x(\underbrace{۱+۱+۱+\cdots+۱}_{n}) = \frac{۴}{n}(n) = ۴$$ واحد مربع

$$U_nf = \Delta x(\underbrace{۱+۱+۱+\cdots+۱}_{n-۲}+۲+۲) = \frac{۴}{n}(n+۲) = \frac{۴(n+۲)}{n}$$

واحد مربع

مجموع n جمله

$$۱)\ \sum_{i=p}^{n} a = (n-p+۱)a \qquad n,p \in N \quad , \quad a \neq ۰$$

$$۲)\ \sum_{i=۱}^{n} a = an \qquad n \in N \quad , \quad a \neq ۰$$

$$۳)\ \sum_{i=۱}^{n} i = ۱+۲+۳+\cdots+n = \frac{n(n+۱)}{۲}$$

$$۴)\ \sum_{i=۱}^{n} ki = k\sum_{i=۱}^{n} i \qquad k \in \mathbb{R} \quad , \quad k \neq ۰$$

$$۵)\ \sum_{i=۱}^{n} i^۲ = ۱^۲+۲^۲+۳^۲+\cdots+n^۲ = \frac{n(n+۱)(۲n+۱)}{۶}$$

$$۶)\ \sum_{i=۱}^{n} i^۳ = ۱^۳+۲^۳+۳^۳+\cdots+n^۳ = \frac{n^۲(n+۱)^۲}{۴}$$

مثال۱. در تابع با ضابطه‌ی $f(x) = ۵x - ۲$، مطلوب است محاسبه‌ی $\sum_{i=۱}^{n} f(\frac{i}{n})$.

حل:

$$\sum_{i=۱}^{n} f(\frac{i}{n}) = \sum_{i=۱}^{n} (\frac{۵i}{n} - ۲) = \sum_{i=۱}^{n} \frac{۵i}{n} - \sum_{i=۱}^{n} ۲ = \frac{۵}{n}\sum_{i=۱}^{n} i - \sum_{i=۱}^{n} ۲$$

$$= \frac{۵}{n} \times \frac{n(n+۱)}{۲} - ۲n = \frac{۵}{۲}(n+۱) - ۲n = \frac{۵n+۵-۴n}{۲} = \frac{n+۵}{۲}$$

مثال۲. در تابع با ضابطه‌ی $f(x) = ۶x^۲ + ۳$، مطلوب است محاسبه‌ی $\sum_{i=۱}^{n} f(\frac{i}{n})$.

حل:

$$\sum_{i=۱}^{n} f(\frac{i}{n}) = \sum_{i=۱}^{n} (\frac{۶i^۲}{n^۲} + ۳) = \sum_{i=۱}^{n} \frac{۶i^۲}{n^۲} + \sum_{i=۱}^{n} ۳ = \frac{۶}{n^۲}\sum_{i=۱}^{n} i^۲ + ۳n$$

$$= \frac{۶}{n^۲} \times \frac{n(n+۱)(۲n+۱)}{۶} + ۳n = \frac{(n+۱)(۲n+۱)}{n} + ۳n$$

$$= \frac{۲n^۲+۳n+۱+۳n^۲}{n} = \frac{۵n^۲+۳n+۱}{n}$$

مثال۳. در تابع با ضابطه‌ی $f(x) = ۶x^۲ + ۴x$، مطلوب است محاسبه‌ی $\lim_{n\to\infty} \frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^{n} f(\frac{i}{n})$.

حل: ابتدا $\sum_{i=۱}^{n} f(\frac{i}{n})$ را مانند مثال۲ محاسبه می‌کنیم.

$$\sum_{i=۱}^{n} f(\frac{i}{n}) = \sum_{i=۱}^{n} (\frac{۶i^۲}{n^۲} + \frac{۴i}{n}) = \sum_{i=۱}^{n} \frac{۶i^۲}{n^۲} + \sum_{i=۱}^{n} \frac{۴i}{n}$$

$$= \frac{۶}{n^۲}\sum_{i=۱}^{n} i^۲ + \frac{۴}{n}\sum_{i=۱}^{n} i = \frac{۶}{n^۲} \times \frac{n(n+۱)(۲n+۱)}{۶} + \frac{۴}{n} \times \frac{n(n+۱)}{۲}$$

$$= \frac{(n+۱)(۲n+۱)}{n} + ۲(n+۱) = \frac{۴n^۲+۵n+۱}{n}$$

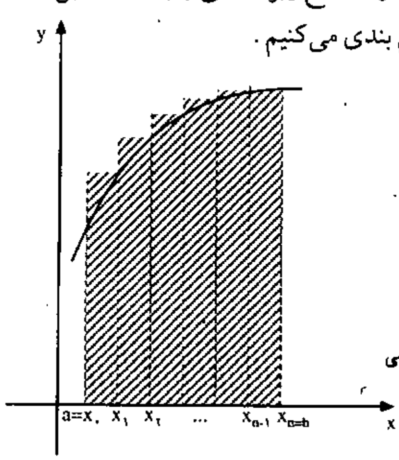
حال $\lim_{n\to\infty} \frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^{n} f(\frac{i}{n})$ را محاسبه می‌کنیم.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{۱}{n}(\frac{۴n^۲+۵n+۱}{n}) = \lim_{n\to\infty} \frac{۴n^۲+۵n+۱}{n^۲} = ۴$$

مجموع ریمان‌ها

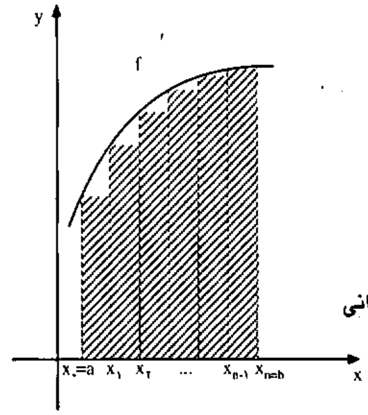
فرض می‌کنیم تابع با ضابطه‌ی $y=f(x)$، تابعی پیوسته و در بازه‌ی $[a,b]$ نامنفی و صعودی اکید باشد. می‌خواهیم اندازه‌ی سطح زیر نمودار تابع را با محور xها، در فاصله‌ی دو خط $x=a$ و $x=b$ به طور دقیق محاسبه کنیم.

برای این کار، سطح زیر منحنی را به n مستطیل محیطی و محاطی تقسیم بندی می‌کنیم.



تقریب اضافی

شکل۱

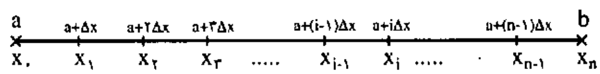


تقریب نقصانی

شکل۲

به طوری که در شکل‌ها ملاحظه می‌کنید، هرچه تعداد مستطیل‌ها زیادتر شود، مجموع مساحت‌های مستطیل‌های محیطی و محاطی، به اندازه‌ی سطح زیر منحنی دربازه‌ی [a,b] نزدیک‌تر خواهد شد.

اگر $\Delta x = \frac{b-a}{n}$، عرض مستطیل‌ها باشد، بازه‌ی [a,b] دارای تقسیمات زیر است:



در قسمت پایین خط، اسم نقطه‌ها و در قسمت بالای خط، طول نقطه‌ها نوشته شده است.

=مجموع مساحت‌های مستطیل‌های تقریب نقصانی

$$\Delta x\big(f(x_0)+f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_{n-1})\big)=\Delta x\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})$$

=مجموع مساحت‌های مستطیل‌های تقریب اضافی

$$\Delta x\big(f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)+\cdots+f(x_n)\big)=\Delta x\sum_{i=1}^{n} f(x_i)$$

مجموع مساحت‌های مستطیل‌های تقریب نقصانی را پایین ریمان و مجموع مساحت‌های مستطیل‌های تقریب اضافی را بالاریمان گویند.

در این مثال:

$$\text{مجموع پایین ریمان} = \Delta x\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})$$

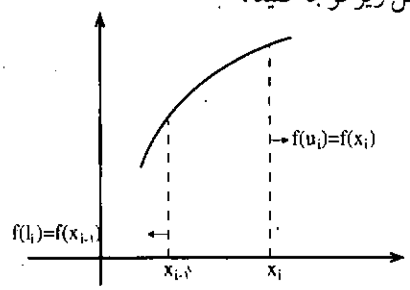
$$\text{مجموع بالاریمان} = \Delta x\sum_{i=1}^{n} f(x_i)$$

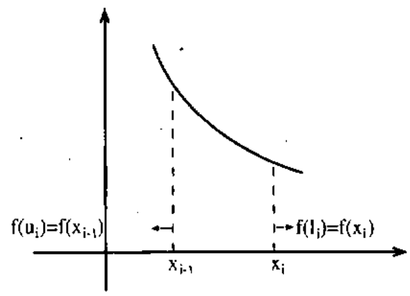
در حالت کلی، اگر ماکزیمم مطلق تابع f در بازه‌ی $[x_{i-1},x_i]$ را با $f(u_i)$ و می‌نیمم مطلق تابع f را در این بازه با $f(l_i)$ نشان دهیم، آن‌گاه:

$$\text{مجموع پایین ریمان} = \Delta x\sum_{i=1}^{n} f(l_i)$$

$$\text{مجموع بالاریمان} = \Delta x\sum_{i=1}^{n} f(u_i)$$

به دو شکل زیر توجه کنید:





بنابراین می‌توان نوشت، اگر تابع f صعودی اکید باشد، آن‌گاه:

$$\begin{cases} \text{مجموع بالاریمان} = \Delta x\sum_{i=1}^{n} f(u_i) = \Delta x\sum_{i=1}^{n} f(x_i) \\ \text{مجموع پایین ریمان} = \Delta x\sum_{i=1}^{n} f(l_i) = \Delta x\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1}) \end{cases}$$

اگر تابع f نزولی اکید باشد، آن‌گاه:

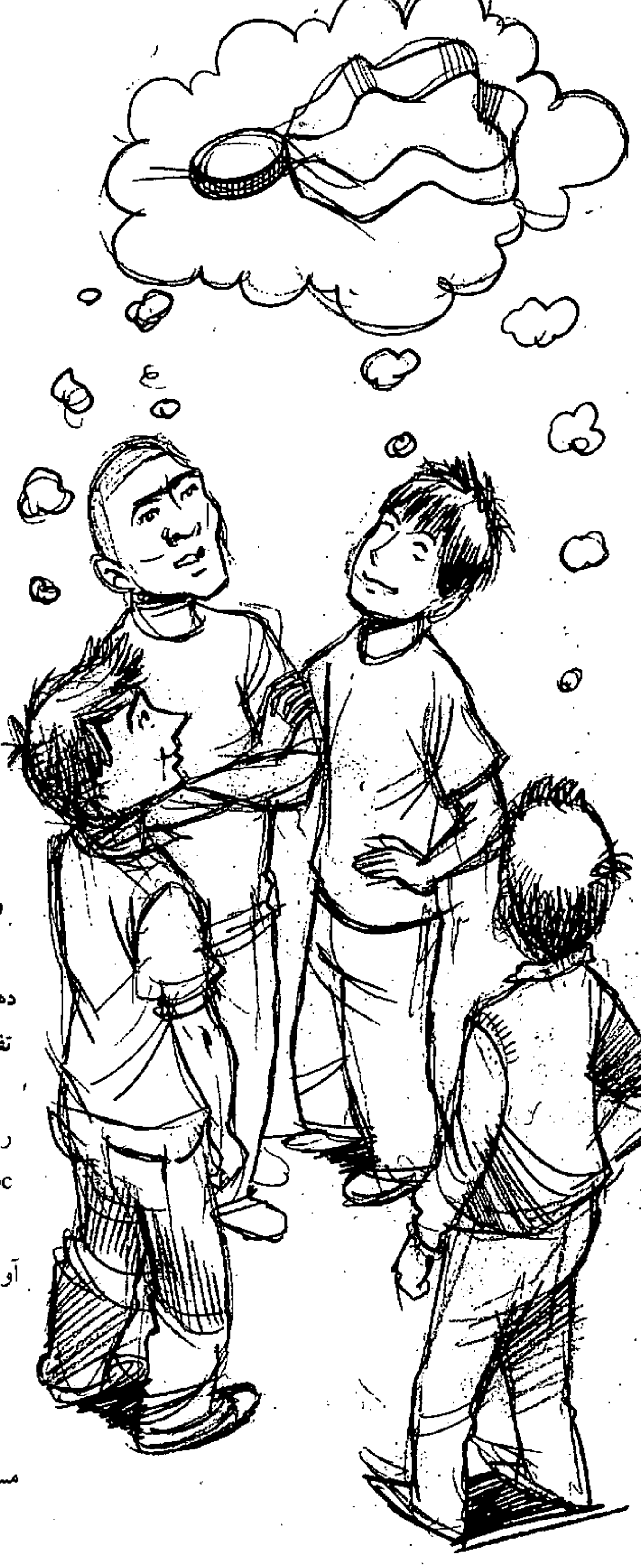
$$\begin{cases} \text{مجموع بالاریمان} = \Delta x\sum_{i=1}^{n} f(u_i) = \Delta x\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1}) \\ \text{مجموع پایین ریمان} = \Delta x\sum_{i=1}^{n} f(l_i) = \Delta x\sum_{i=1}^{n} f(x_i) \end{cases}$$

اگر C_i نقطه‌ی دلخواهی در بازه‌ی $[x_{i-1},x_i]$ باشد، آن‌گاه:

$$\text{مجموع ریمان} = \Delta x\sum_{i=1}^{n} f(c_i)$$

مسابقه های ریاضی در

○ هوشنگ شرقی



منتخبی از مسائل مسابقات ریاضی دبیرستان‌های آمریکا

اشاره

مسابقات ریاضی دبیرستانی آمریکا در سه سطح متفاوت برگزار می‌شود :

● سطح مقدماتی : که با ۳۰ سؤال پنج گزینه‌ای نسبتاً آسان برگزار می‌شود .

● سطح متوسط : که با ۱۵ سؤال تشریحی متوسط برگزار می‌شود .

● سطح عالی : که همان المپیاد ملی ریاضی کشور آمریکاست و مشابه المپیاد بین‌المللی برگزار می‌شود .

اینک سؤال‌های منتخب سطح متوسط (AIME) در دهه‌ی ۱۹۸۰ میلادی را به شرح زیر همراه با راه‌حل آن‌ها تقدیم می‌کنیم .

۱ . تعداد عددهای صحیح پنج رقمی به فرم «۳۷abc» را در مبنای ۱۰ به‌دست آورید ، به طوری که عددهای ۳۷abc ، ۳۷bca و ۳۷cab ، بر ۳۷ بخش‌پذیر باشند .

۲ . مقدار $10(x+y)$ را از دستگاه معادلات زیر به دست آورید .

$$\begin{cases} \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + y = \text{۴۳/۸} \\ x + y - \lfloor x \rfloor = \text{۱۸/۴} \end{cases}$$

توضیح : $\lfloor z \rfloor$ بزرگ‌ترین عدد صحیح کوچک‌تر یا مساوی z است .

کشورهای گوناگون دنیا (۵)

۳ . در جدول ۳×۳ ذیل ، هر حرف معرف یک عدد صحیح متمایز غیرصفر است . هریک از اعداد سه رقمی abc ، def ، ghi ، adg ، beh ، cfi و aei بر ۱۱ بخش‌پذیر هستند . حداکثر مقدار ممکن برای عدد سه رقمی ceg چیست؟

a	b	c
d	e	f
g	h	i

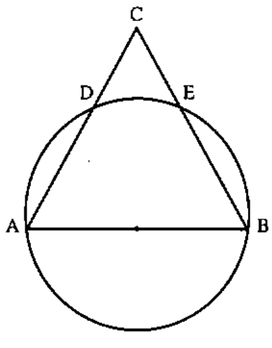
۴ . در مثلث ABC ، فرض کنید D و E به ترتیب نقاطی روی اضلاع AC و BC باشند ، به طوری که DE موازی AB باشد و فرض کنید P نقطه‌ی برخورد AE و BD باشد . اگر مساحت مثلث ABP ، ۳۶ واحد و مساحت مثلث EDP ، ۲۵ واحد سطح باشد ، مساحت مثلث ABC را به‌دست آورید .

۵ . فرض کنید x و y عددهای حقیقی باشند با قدرمطلق‌های متفاوت که در معادلات $\begin{cases} x^۳ = ۱۳x + ۳y \\ y^۳ = ۳x + ۱۳y \end{cases}$ صدق کنند . مقدار عددی $(x^۲ - y^۲)^۲$ را به‌دست آورید .

۶ . برای هر آرایش از اعداد ۱ ، ۴ ، ۷ ، ۱۰ ، ۱۳ ، ۱۶ ، ۱۹ ، ۲۲ ، ۲۵ و ۲۸ روی محیط یک دایره ، فرض کنید N معرف بزرگ‌ترین ده عددی باشد که از جمع هر عدد و دو عدد همسایه‌اش به‌دست می‌آید . کمترین مقدار N که قابل نمایش است ، چیست؟

۷ . اگر x ، y و z عددهای صحیح مثبت متمایزی باشند ، به طوری که $y^۲ - zx = -۱۰۳$ و $z^۲ - xy = ۲۲$ ، مقدار $x^۲ - yz$ را به‌دست آورید .

۸ . در شکل ذیل در مثلث ABC ، $AB = ۳۰$ قطر دایره است . اگر $AD = \frac{AC}{۳}$ و $BE = \frac{BC}{۴}$ ، مساحت مثلث چه‌قدر است؟



۹ . عدد طبیعی N را دارای خاصیت «جمع وارون» گوییم هرگاه عدد صحیح سه رقمی abc یافت شود ، به طوری که a و c غیرصفر باشند و $N = abc + cba$. چند عدد طبیعی با خاصیت جمع وارون وجود دارند؟

حل مسائل

۱ . اگر x ، y و z را به ترتیب معادل با عددهای سه رقمی abc ، bca و cab درنظر بگیریم ، به راحتی می‌توان دید که :

$۱۰z - x = ۹۹۹c$ ، $۱۰y - z = ۹۹۹b$ و $۱۰x - y = ۹۹۹a$

و چون ۹۹۹ بر ۳۷ بخش‌پذیر است ، با توجه به روابط بالا نتیجه می‌شود که اگر از میان x ، y و z ، یکی بر ۳۷ بخش‌پذیر باشد ، دوتای دیگر هم چنین خواهند بود . بنابراین کافی است ، مضرب‌های ۳۷ را به جای سه رقم سمت راست عدد قرار دهیم :

۳۷۰۰۰ و ۳۷۰۳۷ و ۳۷۰۷۴ و ۳۷۱۱۱ و ... و ۳۷۹۹۹

و چون $۲۷ \times ۳۷ = ۹۹۹$ ، لذا ۲۸ عدد متفاوت وجود دارند .

۲ . فرض کنید p و q جزء اعشاری عددهای x و y باشند ؛ یعنی : $x = \lfloor x \rfloor + p$ و $y = \lfloor y \rfloor + q$. با جایگزینی در معادله‌ها داریم :

$$\begin{cases} \lfloor x \rfloor + ۲\lfloor y \rfloor + q = ۴۳/۸ \\ \lfloor y \rfloor + p + q = ۱۸/۴ \end{cases}$$

و از این دو معادله نتیجه می‌شود :

$$\begin{cases} q = ۰/۸ \\ p + q = ۱/۴ \end{cases}$$

$$\begin{cases}\lfloor x\rfloor + 2\lfloor y\rfloor = 43\\ \lfloor y\rfloor = 17\end{cases}$$

و درنتیجه: $p = 0/6$ و:

و از آن‌جا: $\lfloor x\rfloor = 9$ و: $y = 17/8$ ، $x = 9/6$ و:

$$10(x+y) = 274$$

۳. با توجه به قوانین بخش‌پذیری بر ۱۱ (به کتاب‌های تئوری اعداد مراجعه کنید)، می‌توان نوشت:

$$a+c \overset{11}{\equiv} b \;\text{و}\; d+f \overset{11}{\equiv} e \;\text{و}\; g+i \overset{11}{\equiv} h \;\text{و}\; a+g \overset{11}{\equiv} d$$

$$b+h \overset{11}{\equiv} e \;\text{و}\; c+i \overset{11}{\equiv} f \;\text{و}\; a+i \overset{11}{\equiv} e$$

و از جمع چند مورد از روابط بالا خواهیم داشت:

$$(a+c)+(g+i)+(d+f)+(b+h)+e \overset{11}{\equiv} b+h+e+e+e \overset{11}{\equiv} 4e$$

و درنتیجه: $4e \overset{11}{\equiv} 1$ (زیرا سمت چپ، مجموع همه‌ی رقم‌های جدول و برابر است با: $1+2+3+\dots+9 = 45 \overset{11}{\equiv} 1$) و بنابراین: $e = 3$ و درنتیجه از برابری‌های $d+f \overset{11}{\equiv} b+h \overset{11}{\equiv} a+i \overset{11}{\equiv} 3$ خواهیم داشت:

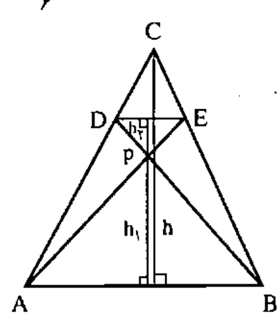
$$\{\{d,f\},\{b,h\},\{a,i\}\} = \{\{1,2\},\{5,9\},\{6,8\}\}$$

که از آن‌جا داریم: $\{c,g\} = \{4,7\}$

برای حداکثر کردن ceg، باید $c = 7$ و $g = 4$ باشد. این کار مقدور است و آرایش زیر شرایط مسأله را تأمین می‌کند. بنابراین حداکثر ceg، ۷۳۴ است.

۱	۸	۷
۵	۳	۹
۴	۶	۲

۴. چون مثلث‌های ABC و ABP قاعده‌ی مشترک AB را دارند، لذا اگر بتوانیم نسبت ارتفاع‌های آن‌ها (h و h_1) را به‌دست آوریم، می‌توانیم مساحت مثلث ABC را بیابیم. فرض کنید h_2 ارتفاع مثلث DEP باشد. چون $\Delta DEP \sim \Delta ABP$ (با نسبت مساحت‌های $\frac{25}{36}$)، لذا نسبت ارتفاع‌های آن‌ها برابر نسبت تشابه آن‌ها، یعنی $\frac{5}{6}$ است. علاوه بر آن، مثلث‌های DEC و ABC با نسبت تشابه $\frac{5}{6}$، متشابه هستند. درنتیجه:



$$h_1 + h_2 = \frac{1}{6}h \;,\; h_1 = \frac{6}{11}(h_1+h_2) = \frac{1}{11}h$$

$$\Rightarrow S_{ABC} = 11S_{ABP} = 396$$

۵. با جمع و تفریق دو معادله‌ی مسئله نتیجه می‌گیریم:

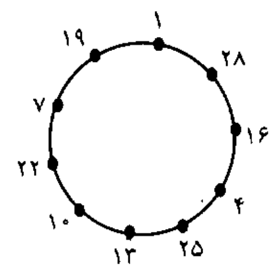
$$\begin{cases}x^3+y^3 = 16(x+y)\\ x^3-y^3 = 10(x-y)\end{cases} \overset{(x\neq\pm y)}{\Rightarrow} \begin{cases}x^2-xy+y^2 = 16\\ x^2+xy+y^2 = 10\end{cases}$$

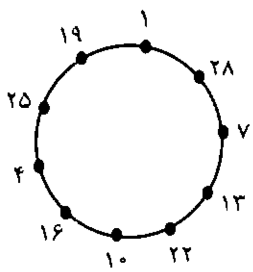
$$\Rightarrow x^2+y^2 = 13 \;,\; xy = -3$$

$$(x^2+y^2)^2 = (x^2-y^2)^2 + (2xy)^2 \Rightarrow 169 = (x^2-y^2)^2 + 36$$

$$\Rightarrow (x^2-y^2)^2 = 133$$

۶. با کمی دقت درمی‌یابیم که این عددها جملات یک تصاعد حسابی با قدر نسبت ۳ (و جمله‌ی اول ۱) هستند. مجموع همه‌ی این عددها به جز ۱، مساوی ۱۴۴ است. چون $48 = \frac{144}{3}$، پس اگر ۱ را جدا کنیم و بقیه‌ی عددها را در سه بخش سه‌تایی منظم کنیم، میانگین مقدار هر بخش مساوی ۴۸ خواهد بود و درنتیجه، جواب مسئله حداقل ۴۸ می‌شود و می‌توان با آرایش‌های زیر نشان داد که همین جواب مسئله است:





۷. با تفریق معادله‌ی اول از معادله‌ی دوم به تساوی زیر می‌رسیم:

$$(x+y+z)(z-y) = 5^3$$

و چون حاصل $x+y+z$ مثبت و از $z-y$ بزرگ‌تر است، نتیجه می‌شود که: $z-y = 5$ یا ۱ و یا $z = y+1$ یا $z = y+5$

در حالت اول، $x+y+z = 125$ و درنتیجه:

$$x = 125-y-z = 125-y-(y+1)$$

یعنی: $x = 124-2y$. با جایگزینی x و z در معادله‌ی اولیه خواهیم داشت: $3y^2-122y-21 = 0$ و با حل این معادله درمی‌یابیم که برای y جواب صحیح به‌دست نمی‌آید.

در حالت دوم $x+y+z = 25$ و درنتیجه:

$$x = 25-y-z = 25-y-(y+5) = 20-2y$$

با جایگزینی x و z در معادله‌ی اولیه به معادله‌ی

$۰ = ۳ + ۱۰y - ۳y^۲$ می‌رسیم و از آن‌جا: $y = ۳$ یا $\frac{۱}{۳}$. که با توجه به صحیح بودن y، $y = ۳$ قابل قبول است و از آن‌جا: $z = ۸$ و $x = ۱۴$ و درنتیجه: $x^۲ - yz = ۱۴^۲ - ۲۴ = ۱۷۲$

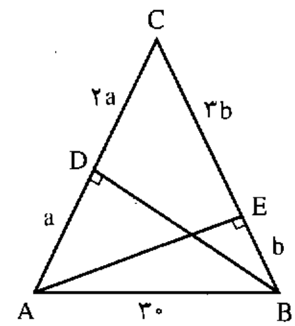
۸ . چون AB قطر دایره است، $DB \perp AC$ و $AE \perp BC$. بنابراین با رسم شکل به معادله‌های زیر می‌رسیم:

$$CB^۲ = (۴b)^۲ = (۲a)^۲ + DB^۲ = (۲a)^۲ + ۳۰^۲ - a^۲ = ۳a^۲ + ۳۰^۲$$

$$AC^۲ = (۳a)^۲ = (۳b)^۲ + AE^۲ = (۳b)^۲ + ۳۰^۲ - b^۲ = ۸b^۲ + ۳۰^۲$$

و از معادلات بالا نتیجه می‌شود: $a = ۶\sqrt{۵}$ و $DB = ۱۲\sqrt{۵}$ و درنتیجه:

$$S_{ABC} = \frac{۱}{۲}(۳a)(DB) = ۵۴۰$$



۹ . می‌توان نوشت:

$$(abc) + (cba) = (۱۰۰a + ۱۰b + c) + (۱۰۰c + ۱۰b + a) = ۱۰۱(a + c) + ۲۰b$$

با فرض $a + c = s$ ، با توجه به این که a و c غیرصفر هستند و a+c هر مقدار از ۲ تا ۱۸ را می‌پذیرد، لذا برای s، ۱۷ مقدار متفاوت ممکن است. چون هیچ محدودیتی در مورد رقم b وجود ندارد، پس ده امکان متفاوت برای ما وجود دارد. با این محدودیت‌ها می‌بینیم که عبارت $۱۰۱s + ۲۰b$ حداکثر می‌تواند $۱۷۰ = ۱۰ \times ۱۷$ مقدار متفاوت را بپذیرد. نشان می‌دهیم این ۱۷۰ ترکیب s و b نتایج متمایزی می‌دهند.

فرض کنید، s و s' عددهای صحیح مثبت متمایزی باشند، به طوری که: $۱۸ \le s'$ و $۲ \le s$. b و b' نیز عددهای صحیحی باشند، به طوری که: $۰ \le b, b' \le ۹$. اگر $۱۰۱s + ۲۰b = ۱۰۱s' + ۲۰b'$، آن‌گاه $۱۰۱(s - s') = ۲۰(b' - b)$. و از این معادله نتیجه می‌شود: $۱۰۱|b' - b$. چون b و b' رقم هستند و ۱۰۱ عددی اول است، لذا: $|b' - b| \le ۹$. و این ممکن نیست مگر این که $b' - b = ۰$ باشد. درنتیجه $b = b'$ و از آن‌جا $s = s'$. بنابراین ۱۷۰ عدد صحیح مثبت با خاصیت «جمع وارون» وجود دارد.

تفریح اندیشه

● حسین نامی ساعی

کارگران خاک بردار

مسئله: تعدادی کارگر، خاک‌برداری جوی آبی را به عهده گرفتند. اگر همه‌ی کارگران با هم شروع به کار می‌کردند، جوی آب در ۲۴ ساعت کنده می‌شد. ولی ابتدا فقط یک نفر شروع به کار کرد و پس از مدتی، دومی به او ملحق شد. سپس بعد از همین مدت سومی و بعد از او پس از گذشت همان مدت، چهارمی و... تا آخری شروع به‌کار کردند. ضمناً معلوم شد که نفر اول ۱۱ برابر آخری کار کرده است. نفر آخر چند ساعت کار کرده است؟

حل: اگر نفر آخر x ساعت کار کرده باشد، اولی ۱۱x ساعت کار کرده است. اگر عده‌ی کل کارگران را y فرض کنیم، تعداد کل ساعت‌های کار عبارت است از مجموع جملات یک تصاعد حسابی نزولی که جمله‌ی اول آن ۱۱x و جمله‌ی آخرش x است؛ یعنی:

$$Sn = \frac{n}{۲}(t_۱ + t_n) = \frac{y(۱۱x + x)}{۲} = ۶xy$$

از طرف دیگر می‌دانیم که اگر تمام y کارگر با هم شروع به کار کنند، کندن جوی آب را در ۲۴ ساعت تمام می‌کنند. یعنی برای انجام تمام کار ۲۴y ساعت وقت لازم است. بنابراین:

$$۶xy = ۲۴y$$

عدد y نمی‌تواند مساوی صفر شود و بنابراین می‌توان طرفین معادله را به y ساده کرد. در این صورت خواهیم داشت:

$$۶x = ۲۴ \Rightarrow x = ۴$$

بنابراین، آخرین کارگری که وارد کار شده، ۴ ساعت کار کرده است.

ما به مسئله جواب دادیم، ولی اگر علاقه‌مند باشیم که عده‌ی کارگران را بدانیم، موفق به تعیین آن نمی‌شویم. با وجودی که برای حل مسئله عده‌ی کارگران را y گرفتیم و این y در معادله هم وارد شد، ولی برای محاسبه‌ی آن، مفروضات مسئله کافی نیستند.

برای دانش‌آموزان سال سوم وپیش دانشگاهی

بحث در وجود و علامت ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی سوم

قسمت ۱

● محمدهاشم رستمی

معادله‌ی درجه‌ی سوم به صورت کلی زیر است.

$$(a \neq 0) \quad ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

اگر ضریب‌های b، c و d نیز همگی مخالف صفر باشند، معادله‌ی درجه‌ی سوم را کامل می‌نامند؛ مانند معادله‌های زیر:

$$2x^3 - 5x^2 + 3x - 2 = 0$$

$$x^3 + 2x^2 + 5x + 6 = 0$$

اما اگر یکی از ضریب‌های b یا c یا d مساوی صفر باشد، معادله‌ی درجه‌ی سوم را ناقص می‌نامند؛ مانند معادله‌های زیر:

الف) $d = 0$ ، $ax^3 + bx^2 + cx = 0$

ب) $c = 0$ ، $ax^3 + bx^2 + d = 0$

پ) $b = 0$ ، $ax^3 + cx + d = 0$

ت) $b = d = 0$ ، $ax^3 + cx = 0$

ث) $c = d = 0$ ، $ax^3 + bx^2 = 0$

ج) $b = c = d = 0$ ، $ax^3 = 0$

حل این معادله‌ها در حالت‌های (الف)، (ت)، (ث) و (ج) ساده است، زیرا با فاکتورگیری از عامل مشترک در حالت‌های (الف)، (ت) و (ث)، معادله‌ی درجه‌ی ۳ به حاصل ضرب یک معادله‌ی درجه‌ی اول و یک معادله‌ی درجه‌ی دوم تبدیل می‌شود که با حل آن‌ها، جواب‌های معادله به‌دست می‌آید و در حالت (ج)، نیز جواب معادله $x = 0$ است.

اما در حالت‌های (ب) و (پ)، حل معادله‌ی درجه‌ی سوم ناقص، مانند حالت‌های دیگر نیست و ما اینک در جست‌وجوی راه‌حل آن‌ها هستیم. یعنی، مسئله‌ای که ما با آن سروکار داریم، حل معادله‌ی درجه‌ی سوم کامل و یا حل معادله‌ی درجه‌ی سوم ناقص به صورت‌های زیر است:

$ax^3 + bx^2 + d = 0$ یا $ax^3 + cx + d = 0$

با توجه به $a \neq 0$ ، با تقسیم کردن دو طرف معادله‌های (ب) و (پ) بر a داریم:

(بَ) $$x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{d}{a} = 0$$

(پَ) $$x^3 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a} = 0$$

معادله‌ی (بَ) با فرض $\frac{b}{a} = A$ و $\frac{d}{a} = B$ به صورت $x^3 + Ax^2 + B = 0$ ، و معادله‌ی (پَ) با فرض $\frac{c}{a} = p$ و $\frac{d}{a} = q$ به صورت $x^3 + px + q = 0$ درمی‌آید. نکته‌ی جالب توجه آن است که با تبدیل $x = \frac{1}{X}$ در معادله‌ی (بَ)، این معادله به صورت معادله‌ی (پَ) درمی‌آید. توجه کنید:

$$x=\frac{1}{X},\ x^3+Ax^2+B=0$$
$$\Rightarrow (\frac{1}{X})^3+A(\frac{1}{X})^2+B=0$$
$$\Rightarrow \frac{1}{X^3}+\frac{A}{X^2}+\frac{B}{1}=0 \Rightarrow \frac{1+AX+BX^3}{X^3}=0 \Rightarrow$$
$$BX^3+AX+1=0 \Rightarrow X^3+\frac{A}{B}X+\frac{1}{B}=0$$
$$\Rightarrow X^3+PX+q=0$$

- اما نکته‌ی جالب‌تر آن است که با تبدیل $x=X-\frac{b}{3a}$، معادله‌ی درجه‌ی سوم کامل $ax^3+bx^2+cx+d=0$ نیز به معادله‌ی درجه‌ی سوم ناقص $X^3+PX+q=0$ تبدیل می‌شود. (چرا؟) توجه کنید:

$x=X-\frac{b}{3a}$ و $ax^3+bx+cx+d=0$

$$\Rightarrow a(X-\frac{b}{3a})^3+b(X-\frac{b}{3a})^2+c(X-\frac{b}{3a})+d=0$$
$$\Rightarrow a(X^3-3X^2\times\frac{b}{3a}+3(\frac{b}{3a})^2X-\frac{b^3}{27a^3})$$
$$+b(X^2+\frac{b^2}{9a^2}-\frac{2b}{3a}X)+cX-\frac{bc}{3a}+d=0$$
$$\Rightarrow aX^3-bX^2+\frac{b^2}{3a}X-\frac{b^3}{27a^2}+bX^2+\frac{b^3}{9a^2}$$
$$-\frac{2b^2}{3a}X+cX-\frac{bc}{3a}+d=0$$
$$\Rightarrow aX^3+(\frac{-b^2}{3a}+c)X+(\frac{2b^3}{27a^2}-\frac{bc}{3a}+d)=0$$
$$\Rightarrow X^3+(-\frac{b^2}{3a^2}+\frac{c}{a})X+(\frac{2b^3}{27a^3}-\frac{bc}{3a^2}+\frac{d}{a})=0 \quad (☼)$$

با فرض $p=\frac{-b^2}{3a^2}+\frac{c}{a}$ و $q=\frac{2b^3}{27a^3}-\frac{bc}{3a^2}+\frac{d}{a}$

خواهیم داشت:

$$X^3+pX+q=0$$

مثال. معادله‌های درجه‌ی سوم زیر را به صورت معادله‌ی درجه‌ی سوم $X^3+PX+q=0$ درآورید.

الف) $2x^3-12x^2+5x-7=0$

ب) $3x^3+9x^2+5=0$

حل: داریم:

الف. در این معادله، $a=2$، $b=-12$، $c=5$ و $d=-7$ است و داریم:

$$x=X-\frac{b}{3a}\Rightarrow x=X-\frac{-12}{3(2)}=X+2\Rightarrow x=X+2$$

پس در معادله‌ی داده شده x را به $X+2$ تبدیل می‌کنیم. خواهیم داشت:

$$2(X+2)^3-12(X+2)^2+5(X+2)-7=0$$
$$\Rightarrow 2(X^3+6X^2+12X+8)-12(X^2+4X+4)$$
$$+5X+10-7=0$$
$$\Rightarrow 2X^3+12X^2+24X+16-12X^2-48X$$
$$-48+5X+10-7=0$$
$$\Rightarrow 2X^3-19X-29=0$$

طرفین این معادله را بر ضریب X^3 یعنی بر 2 تقسیم می‌کنیم. داریم:

$$X^3-\frac{19}{2}X-\frac{29}{2}=0$$

و این معادله به صورت $X^3+pX+q=0$ است $(q=\frac{-29}{2} \quad p=-\frac{19}{2})$.

نکته: می‌توانستیم در دستور (☼) به جای a، b، c و d مقدار قرار دهیم تا معادله‌ی بالا به دست آید. اما حفظ کردن دستور (☼) مشکل است، پس ترجیح دارد، به روش مستقیم عمل کنیم.

ب) در معادله‌ی درجه‌ی سوم $3x^3+9x^2+5=0$، داریم:

$$a=3 \text{ و } b=9 \text{ و } c=0 \text{ و } d=5$$
$$x=X-\frac{b}{3a}\Rightarrow x=X-\frac{9}{9}=X-1\Rightarrow x=X-1$$
$$x=X-1\xrightarrow{\text{در معادله ی داده شده}}3(X-1)^3+9(X-1)^2+5=0$$
$$\Rightarrow 3(X^3-3X^2+3X-1)+9(X^2-2X+1)+5=0$$

$$\Rightarrow ۳X^۳ - ۹X^۲ + ۹X - ۳ + ۹X^۲ - ۱۸X + ۹ + ۵ = ۰$$

$$۳X^۳ - ۹X + ۱۱ = ۰$$

دو طرف این معادله را بر ضریب $X^۳$ یعنی بر ۳ تقسیم می‌کنیم. خواهیم داشت:

$$X^۳ - ۳X + \frac{۱۱}{۳} = ۰$$

و این معادله به صورت $X^۳ + PX + q = ۰$ است $(q = \frac{۱۱}{۳}\ ,\ P = -۳)$.

نکته‌ی۱. برای تبدیل معادله‌ی $۳x^۳ + ۹x^۲ + ۵ = ۰$ به معادله‌ی درجه‌ی سوم به‌صورت $X^۳ + PX + q = ۰$، می‌توانیم از تغییر متغیر $x = \frac{۱}{X}$ استفاده کنیم. توجه کنید:

$$۳x^۳ + ۹x^۲ + ۵ = ۰, x = \frac{۱}{X} \Rightarrow ۳(\frac{۱}{X})^۳ + ۹(\frac{۱}{X})^۲ + ۵ = ۰$$

$$\Rightarrow \frac{۳}{X^۳} + \frac{۹}{X^۲} + ۵ = ۰ \Rightarrow \frac{۳ + ۹X + ۵X^۳}{X^۳} = ۰$$

$$\Rightarrow ۳ + ۹X + ۵X^۳ = ۰ \Rightarrow ۵X^۳ + ۹X + ۳ = ۰$$

$$\Rightarrow X^۳ + \frac{۹}{۵}X + \frac{۳}{۵} = ۰$$

و این معادله به صورت $X^۳ + pX + q = ۰$ است.

نکته‌ی۲. چون در روش اول $x = X - ۱$ و در روش دوم $x = \frac{۱}{X}$ اختیار شده است، پس معادله‌های ناقص به‌دست آمده در دو روش بالا، از نظر ضرایب عددی، متفاوت خواهند بود؛ یعنی نباید این تصور را داشته باشیم که در هر دو راه‌حل، به یک معادله‌ی درجه‌ی سوم ناقص به صورت $X^۳ + pX + q = ۰$ و با ضرایب یکسان می‌رسیم.

نکته‌ی۳. به طور کلی، معادله‌ی درجه‌ی سوم $ax^۳ + bx^۲ + d = ۰$، با تغییر متغیر $x = \frac{۱}{X}$، به معادله‌ی درجه‌ی سوم به صورت $X^۳ + pX + q = ۰$ تبدیل می‌شود.

نکته‌ی مهم۱. با توجه به مطالب بیان شده، هر معادله‌ی درجه‌ی سوم کامل را می‌توان با استفاده از تغییر متغیر، به معادله‌ی درجه‌ی سوم به صورت $X^۳ + pX + q = ۰$ تبدیل کرد. بنابراین، برای بحث در وجود و علامت ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی سوم کامل $ax^۳ + bx^۲ + cx + d = ۰$ کافی است در وجود و علامت ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی سوم ناقص $X^۳ + pX + q = ۰$ بحث کنیم.

برای این کار، معادله‌ی بالا را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$X^۳ + pX + q = ۰ \Rightarrow X^۳ + pX = -q$$

اما این معادله، معادله‌ی تقاطع منحنی تابع $y = X^۳ + pX$ و خط $y = -q$ است.

$$\begin{cases} y = X^۳ + pX \\ y = -q \end{cases}$$

بنابراین، برای بحث در وجود و علامت ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی سوم $X^۳ + pX + q = ۰$ کافی است، طول‌های نقطه‌های برخورد منحنی $y = X^۳ + pX$ و خط $y = -q$ را تعیین کنیم. برای این کار، این منحنی و خط را در یک دستگاه محورهای مختصات رسم می‌کنیم و به ازای مقدارهای متفاوت p و q، تعداد نقطه‌های برخورد آن‌ها و اندازه‌ی جبری طول این نقطه‌های برخورد را تعیین می‌کنیم.

نکته‌ی مهم۲. هرگاه معادله‌ی درجه‌ی سوم داده شده، خود به صورت $x^۳ + px + q = ۰$ باشد، برای بحث در وجود و علامت ریشه‌های آن نیازی به تغییر متغیر نیست و این معادله را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$x^۳ + px = -q$$

این معادله، معادله‌ی تقاطع منحنی تابع $y = x^۳ + px$ و خط راست $y = -q$ است. بنابراین، برای بحث در وجود و علامت ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی سوم $x^۳ + px + q = ۰$، منحنی تابع $y = x^۳ + px$ و خط $y = -q$ را در یک دستگاه محورهای مختصات رسم می‌کنیم و تعداد نقطه‌های برخورد آن‌ها و همچنین اندازه‌ی جبری طول نقطه‌های برخوردشان را به ازای مقدارهای متفاوت p و q مشخص می‌سازیم.

بدیهی است که به تعداد نقطه‌های برخورد منحنی تابع $y = x^۳ + px$ و خط $y = -q$، معادله‌ی درجه‌ی سوم $x^۳ + px + q = ۰$ دارای جواب است و علامت ریشه‌ها را نیز با توجه به محل نقطه‌های تقاطع می‌توان تعیین کرد. برای رسم نمودار تابع $y = x^۳ + px$، مشتق این تابع را محاسبه می‌کنیم و مساوی صفر قرار می‌دهیم. داریم:

$$y = x^۳ + px \Rightarrow y' = ۳x^۲ + p\ ,\ y' = ۰ \Rightarrow ۳x^۲ + p = ۰$$

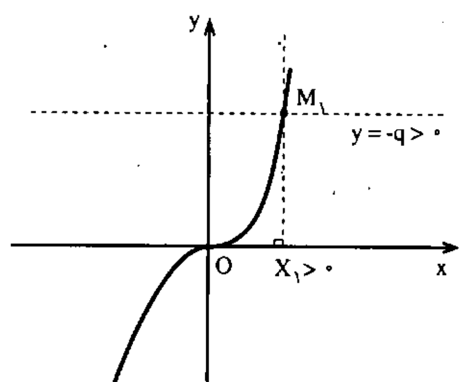
دو حالت وجود دارد:

حالت اول: $p > 0$ است. در این صورت، مشتق ریشه ندارد، زیرا:

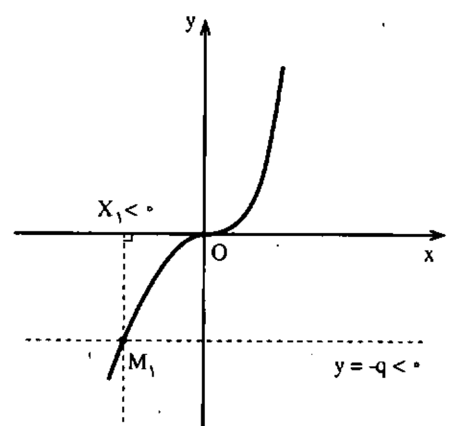
$$3x^2 + p = 0 \Rightarrow 3x^2 = -p \Rightarrow x^2 = \frac{-p}{3} < 0$$

بنابراین، جهت تغییرات تابع در این حالت ثابت است که چون ضریب x^2 در مشتق مثبت است، مشتق تابع همواره مثبت و نمایش تغییرات آن همواره صعودی است. جدول تغییرات این تابع در این حالت به صورت زیر و نمودار آن به صورت شکل زیر است.

x	$-\infty$				$+\infty$
y′		+	+	+	
y	$-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$



(الف)



(ب)

خط $y = -q$، نمودار تغییرات تابع $y = x^3 + px$ را تنها در یک نقطه قطع می‌کند که:

۱. اگر $-q > 0$، یعنی $q < 0$ باشد، طول نقطه‌ی تلاقی مثبت است. لذا معادله‌ی $x^3 + px + q = 0$ تنها یک ریشه‌ی مثبت دارد (شکل الف).

۲. اگر $-q < 0$، یعنی $q > 0$ باشد، طول نقطه‌ی تلاقی منفی است. لذا معادله‌ی $x^3 + px + q = 0$، تنها یک ریشه‌ی منفی دارد (شکل ب).

پس در حالت اول، یعنی وقتی $p > 0$ است، معادله‌ی درجه‌ی سوم $x^3 + px + q = 0$ تنها یک ریشه دارد که علامت آن مخالف علامت q است و اندازه‌ی این ریشه از دستور زیر که به دستور «کاردان» معروف است به‌دست می‌آید:

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

حالت دوم: $p < 0$ است. در این حالت مشتق دو ریشه دارد:

$$y' = 0 \Rightarrow 3x^2 + p = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{-p}{3} > 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{-\frac{p}{3}}$$

چون دو ریشه متمایزند، پس تابع دو نقطه‌ی ماکزیمم و می‌نیمم دارد. برای تعیین اندازه‌ی ماکزیمم یا می‌نیمم تابع باید ریشه‌های مشتق، یعنی $x = \sqrt{\frac{-p}{3}}$ و $x = -\sqrt{\frac{-p}{3}}$ را در تابع قرار دهیم. داریم:

$$x_1 = -\sqrt{\frac{-p}{3}} \xrightarrow{\text{در تابع}} y_1 = \left(-\sqrt{\frac{-p}{3}}\right)^3 + p\left(-\sqrt{\frac{-p}{3}}\right)$$

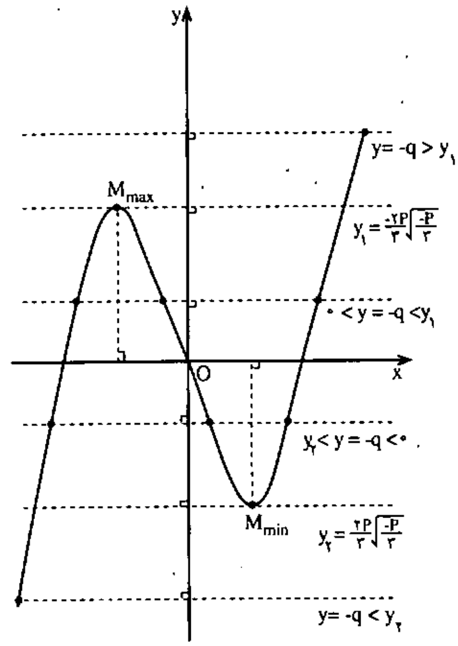
$$\Rightarrow y_1 = \frac{+p}{3}\sqrt{\frac{-p}{3}} - p\sqrt{\frac{-p}{3}} = \frac{-2p}{3}\sqrt{\frac{-p}{3}}$$

$$x_2 = +\sqrt{\frac{-p}{3}} \xrightarrow{\text{در تابع}} y_2 = \left(+\sqrt{\frac{-p}{3}}\right)^3 + p\left(+\sqrt{\frac{-p}{3}}\right)$$

$$\Rightarrow y_2 = \frac{-p}{3}\sqrt{\frac{-p}{3}} + p\sqrt{\frac{-p}{3}} = +\frac{2p}{3}\sqrt{\frac{-p}{3}}$$

جدول تغییرات تابع در این حالت به صورت زیر است:

x	$-\infty$		$-\sqrt{-\frac{p}{3}}$		$\sqrt{-\frac{p}{3}}$		$+\infty$
y'		+	0	−	0	+	
y	$-\infty$	↗	$\frac{-2p}{3}\sqrt{\frac{-p}{3}}$	↘	$\frac{2p}{3}\sqrt{\frac{-p}{3}}$	↗	$+\infty$
			max		min		



نمودار تغییرات تابع در این حالت، به صورت شکل بالا است. اکنون اگر خط $y=-q$ را در همین دستگاه محورهای مختصات رسم کنیم، وقتی q در بازه‌ی $(-\infty,+\infty)$ تغییر کند، حالت‌های زیر را خواهیم داشت:

۱. اگر $\frac{2p}{3}\sqrt{\frac{-p}{3}} < y=-q < \frac{-2p}{3}\sqrt{\frac{-p}{3}}$، یا $q^2 < \frac{-4p^3}{27}$ یا $4p^3+27q^2<0$ باشد، خط $y=-q$، نمودار تغییرات تابع $y=x^3+px$ را در سه نقطه قطع می‌کند؛ یعنی معادله‌ی $x^3+px+q=0$ سه ریشه دارد. در این صورت، اگر $-q<0$، یعنی $q>0$ باشد، معادله دارای یک ریشه‌ی منفی و دو ریشه‌ی مثبت است. و اگر $-q>0$، یعنی $q<0$ باشد، یک ریشه‌ی مثبت و دو ریشه‌ی منفی خواهد داشت.

۲. اگر خط $y=-q$ بر نمودار تغییرات تابع مماس باشد، یعنی $-q=\frac{-2p}{3}\sqrt{\frac{-p}{3}}$، و یا $-q=\frac{2p}{3}\sqrt{\frac{-p}{3}}$، یعنی $q^2=\frac{-4p^3}{27}$ و یا $4p^3+27q^2=0$ باشد، معادله‌ی $x^3+px+q=0$ یک ریشه‌ی ساده و یک ریشه‌ی مضاعف دارد که:

● اگر $-q<0$، یعنی $q>0$ باشد، ریشه‌ی ساده منفی و ریشه‌ی مضاعف مثبت است.

● و اگر $-q>0$، یعنی $q<0$ باشد، ریشه‌ی ساده مثبت و ریشه‌ی مضاعف منفی است.

در این حالت، ریشه‌ی ساده و ریشه‌ی مضاعف از دستورهای زیر به دست می‌آیند:

ریشه‌ی ساده $= x_1 = -2\sqrt[3]{\frac{q}{2}}$

ریشه‌ی مضاعف $= x_2 = x_3 = \sqrt[3]{\frac{q}{2}}$

۳. اگر $-q$ خارج بازه‌ی $[y_2, y_1]$، یعنی $-q>y_1=\frac{-2p}{3}\sqrt{\frac{-p}{3}}$ و یا $-q<y_2=\frac{2p}{3}\sqrt{\frac{-p}{3}}$ و یا $q^2>\frac{-4p^3}{27}$ و یا $4p^3+27q^2>0$ باشد، خط $y=-q$ نمودار تغییرات تابع را تنها در یک نقطه قطع می‌کند که:

● اگر $-q<0$، یعنی $q>0$ باشد، طول نقطه‌ی تقاطع منفی است.

● اگر $-q>0$، یعنی $q<0$ باشد، طول نقطه‌ی تقاطع مثبت است.

پس در این حالت معادله تنها یک ریشه دارد که اگر $q>0$ باشد، ریشه‌ی معادله منفی است و اگر $q<0$ باشد، ریشه‌ی معادله مثبت است.

نکته: با توجه به این‌که وقتی $p>0$ است، $4p^3+27q^2>0$ است، می‌توان گفت که اگر در معادله‌ی $x^3+px+q=0$، $4p^3+27q^2>0$ باشد، معادله تنها یک ریشه دارد که علامت آن مخالف علامت q است.

ادامه دارد...



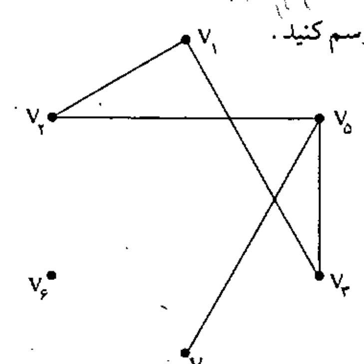
درخت چیست؟

برای دانش‌آموزان دوره‌ی پیش‌دانشگاهی

● حمیدرضا امیری

هر مجموعه‌ی n عضوی مانند V، و هر مجموعه شامل تعدادی یا هیچ یا همه‌ی زیرمجموعه‌های دوعضوی از V مانند E، گرافی چون $G = (V,E)$ را تعریف می‌کنند که این نمودار یا گراف، شامل تعدادی نقطه یا رأس، به تعداد اعضای V و تعدادی خط (یال) بین رئوس، به تعداد اعضای E می‌باشد؛ به طوری که بین دو رأس V_i و V_j یال رسم می‌شود، هرگاه $\{V_i, V_j\} \in E$، که در این حالت دو رأس مذکور را رأس‌های **مجاور** می‌نامند (می‌توان برای راحتی به جای $\{v_i, v_j\}$ نوشت: V_iV_j).

مثال: اگر $V = \{V_1, V_2, V_3, V_4, V_5, V_6\}$ و $E = \{V_1V_2, V_1V_3, V_2V_5, V_3V_5, V_4V_5\}$ در این صورت گراف $G = (V,E)$ را رسم کنید.



اصطلاحات و قراردادهای مقدماتی

در هر گراف، تعداد رأس‌ها را مرتبه‌ی گراف و تعداد یال‌ها را اندازه‌ی گراف می‌نامند و به ترتیب با p و q نمایش می‌دهند. هم‌چنین، تعداد یال‌هایی که از رأس a عبور می‌کنند، درجه‌ی آن رأس نامیده و با (dega) نشان داده می‌شود. اگر درجه‌ی یک رأس عددی زوج باشد، آن رأس را رأس زوج و اگر فرد باشد، آن را رأس فرد می‌نامیم. چنان‌چه از یک رأس یالی عبور نکند، آن رأس را **ایزوله** می‌نامند. بزرگ‌ترین درجه‌ی یک رأس در یک گراف، ماکزیمم درجه‌ی گراف، و کوچک‌ترین درجه، می‌نیمم درجه‌ی گراف نامیده می‌شود. این دو عدد را به ترتیب با Δ و δ نشان می‌دهند.

در مثال قبل، گرافی رسم شده از مرتبه‌ی ۶ و با اندازه‌ی ۴ (۶ رأس و ۴ یال) که رأس V_6 ایزوله است و داریم:

$$\deg V_6 = 0, \deg V_1 = 2, \deg V_2 = 2, \deg V_3 = 2$$
$$\deg V_4 = 1, \deg V_5 = 3$$

رأس‌های V_6 و V_1 و V_2 و V_3 همگی زوج، و رأس‌های V_4 و V_5 فرد هستند. در این گراف، همواره $\Delta = 3$ و $\delta = 0$ (ماکزیمم و می‌نیمم درجه).

حال که یادآوری اجمالی روی مقدمات و تعاریف در

گراف‌های ساده انجام شد، آماده‌ایم تا به سراغ دسته‌ی خاصی از گراف‌ها به نام «درخت» برویم. ولی قبل از آن توصیه می‌کنم، مفاهیمی چون مسیر، دور، هم‌بندی گراف‌ها، گراف کامل، گراف‌های r ـ منتظم و گراف تهی را یک بار مطالعه کنید، تا آماده باشیم برای کشیدن درخت!

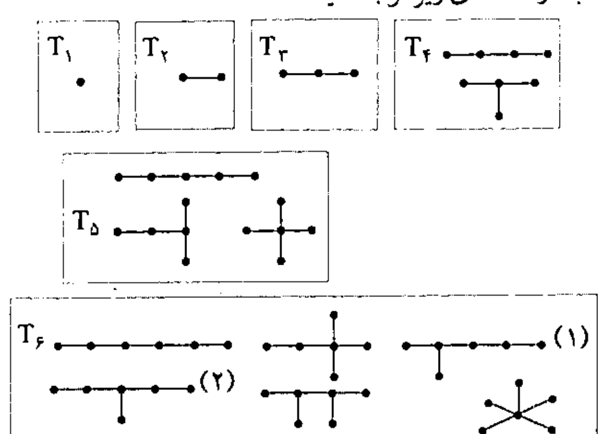
تعریف درخت

هر گراف هم‌بند که دور نداشته باشد، «درخت» نامیده می‌شود. پس در واقع درخت‌ها دسته‌ی خاصی از گراف‌های هم‌بند هستند که ویژگی‌های خاص خودشان را دارند. مهم‌ترین ویژگی آن‌ها، فاقد دور بودن است. از تعریف درخت چنین برمی‌آید که اگر گرافی هم‌بند نباشد یا دور داشته باشد، درخت نیست.

گراف‌های زیر درخت نیستند:



درخت از مرتبه‌ی P را با نماد T_p نشان می‌دهیم که درخت‌های T_1 و T_2 و T_3 درخت‌هایی منحصربه‌فرد هستند و از T_3 به بالا، یعنی T_4 و T_5 و ...، منحصربه‌فرد نیستند. به درخت‌های زیر توجه کنید:



توجه دارید که در T_6، درخت‌های شماره‌ی (۱) و (۲) با هم فرق اساسی دارند. اگرچه تعداد رأس‌های درجه‌ی ۳، ۲ و ۱ در آن‌ها برابر است، ولی رأس درجه‌ی ۳، در (۱) با دو رأس درجه‌ی ۱ و یک رأس درجه‌ی ۲ مجاور است و در (۲) با دو رأس درجه‌ی ۲ و یک رأس درجه‌ی ۱ مجاورت دارد.

اگر اطلاعاتی راجع به هیدروکربن‌ها در شیمی آلی داشته باشید، شباهت‌های بسیاری را بین ساختمان مولکولی آن‌ها و درخت‌ها مشاهده می‌کنید. در واقع، اگر هر هیدروژن و کربن را در حکم یک رأس و پیوند مولکولی بین آن‌ها را یال تصور کنیم، هر هیدروکربن یک درخت است که در این صورت، از تمام قضایا و نکته‌هایی که در گراف‌ها بیان و اثبات می‌شود، می‌توان در این بخش از علم شیمی استفاده کرد.

نکته‌ی بسیار مهمی که از تعریف درخت می‌توان دریافت این است که چون درخت، گرافی هم‌بند است که دور ندارد، پس می‌توان گفت در بین گراف‌های هم‌بند از مرتبه‌ی P، درخت T_p کمترین تعداد یال را دارد و البته K_p (گراف کامل) دارای بیشترین یال ممکن است. در واقع، اگر حتی یک یال به یک درخت اضافه شود (بدون اضافه کردن رأس)، در آن دور ایجاد می‌شود و دیگر درخت نیست. و نیز اگر یک یال از هر جای آن حذف کنیم، گرافی ناهم‌بند پدید می‌آید که باز هم درخت نیست. همین خاصیت درخت‌ها ما را به یک شرط لازم برای هم‌بندی می‌رساند. بدین صورت که: «در هر گراف از مرتبه‌ی p و اندازه‌ی q، اگر $q < p - 1$ آن‌گاه این گراف همواره ناهم‌بند است.»

به بیان دیگر، اگر گراف G هم‌بند باشد، در این صورت حداقل مقدار برای تعداد یال‌های آن $q = p - 1$ است. (رابطه‌ی $p = q + 1$ یا $q = p - 1$ بین مرتبه و اندازه، در تمام درخت‌ها برقرار است که به صورت قضیه‌ای در درخت‌ها بیان و اثبات می‌شود.) بین درخت‌های از مرتبه‌ی $p \geq 3$، همواره برای هر $p \geq 3$ یک درخت وجود دارد که به صورت یک خط مستقیم است یا می‌توان آن را به یک خط مستقیم تبدیل کرد. برای مثال، برای $p = 5$ و $p = 4$ در شکل‌های قبل ملاحظه کردید که درخت‌های زیر:

ویژگی خط مستقیم را دارند که ما از این به بعد به چنین درخت‌هایی، «درخت ساده» می‌گوییم.

واضح است که در هر درخت ساده از مرتبه‌ی p، همواره $\Delta = 2$ (ماکزیمم درجه‌ی درخت ۲ است) و چنین درخت‌هایی دارای ۲ رأس از درجه‌ی ۱ و $(p - 2)$ رأس از درجه ۲ هستند. و برعکس اگر در یک درخت از مرتبه‌ی p داشته باشیم: $\Delta = 2$، چنین درختی حتماً درخت ساده خواهد بود! بنابراین می‌توان گفت: «شرط لازم و کافی برای آن‌که درخت T از مرتبه‌ی p درختی ساده باشد، آن است که: $\Delta = 2$.»

حال به بیان و در مواردی اثبات قضیه‌های مقدماتی در درخت‌ها می‌پردازیم و سپس کاربردهای این قضایا را در حل آزمون‌ها و آزمون‌ها با هم بررسی می‌کنیم.

قضیه‌ی ۱ : در هر درخت از مرتبه‌ی p ، همواره بین هر دو رأس دقیقاً یک مسیر وجود دارد (اثبات این قضیه در کتاب درسی ریاضیات گسسته وجود دارد).

نتیجه از قضیه‌ی۱ : تعداد کل مسیرهای متمایز در هر درخت از مرتبه‌ی p ، برابر است با : $\binom{p}{۲}$. و می‌دانیم :

$$\binom{p}{۲} = \frac{p(p-۱)}{۲}$$

اثبات : مطابق قضیه‌ی ۱ ، بین هر دو رأس که بتوان از میان p رأس انتخاب کرد ، فقط و فقط یک مسیر منحصربه‌فرد قابل تعریف است . لذا تعداد مسیرها برابر است با تعداد انتخاب‌های ۲ رأس از بین p رأس ؛ یعنی : $\binom{p}{۲}$.

آزمون : در درخت T از مرتبه‌ی p ، ۳۶ مسیر متمایز بین رأس‌ها قابل تعریف است . در این درخت در حالت ساده چند رأس درجه‌ی ۲ وجود دارد؟

الف) ۹ ب) ۷ ج) ۶ د) ۸

حل : با توجه به نتیجه‌ی قبل داریم :

$$\binom{p}{۲} = \frac{p(p-۱)}{۲} = ۳۶ \Rightarrow p(p-۱) = ۷۲ \Rightarrow p = ۹$$

(حاصل ضرب دو عدد صحیح و متوالی برابر با ۷۲ است ؛ یعنی : ۹×۸ .)

در درخت ساده‌ی $T_۹$ ، تعداد رأس‌های درجه‌ی ۲ برابر است با : ۷=۲-۹ . پس گزینه‌ی ب صحیح است .

قضیه‌ی ۲ : اگر در یک درخت داشته باشیم : $\Delta = k$ ، آن‌گاه این درخت حداقل k رأس از درجه‌ی ۱ دارد .

اثبات : می‌دانیم در هر درخت ، هر یال که از یک رأس عبور کند ، در نهایت حداقل به یک رأس درجه‌ی ۱ ختم خواهد شد . زیرا دو سر یال‌های از درجه‌ی ۱ در درخت‌ها نمی‌توانند به هم وصل باشند (چون دور ایجاد می‌شود که با تعریف درخت تناقض دارد) . لذا اگر $\Delta = k$ فرض شود ، پس حداقل یک رأس در گراف وجود دارد که درجه‌ی آن k است و بنابراین k یال از آن رأس عبور می‌کند . چون هر یال حداقل به یک رأس درجه‌ی ۱ ختم می‌شود . پس حداقل k رأس از درجه‌ی ۱ در چنین درختی وجود خواهد داشت .

قضیه‌ی ۳ : در هر درخت از مرتبه‌ی $p \ge ۲$ ، حداقل دو رأس از درجه‌ی ۱ وجود دارد .

اثبات : حکم قضیه برای درخت از مرتبه‌ی ۲ برقرار است ؛ زیرا $T_۲$ ، دقیقاً دو رأس از درجه‌ی ۱ دارد . حال برای $p \ge ۳$ حکم را در دو حالت ثابت می‌کنیم :

I) اگر $\Delta = ۲$ ، طبق قضایای قبل درخت ساده است و دقیقاً دو رأس از درجه‌ی ۱ دارد .

II) اگر $\Delta \ge ۳$ طبق قضیه‌ی۲ ، درخت حداقل سه رأس از درجه‌ی۱ و درنتیجه حداقل دو رأس از درجه‌ی ۱ خواهد داشت .

قضیه‌ی ۴ : در هر درخت از مرتبه‌ی p و با اندازه‌ی q داریم : $p = q + ۱$. (اثبات این قضیه در کتاب درسی ریاضیات گسسته وجود دارد .)

نتیجه‌ی مهم : در هر درخت ، همواره مجموع مرتبه و اندازه‌ی عددی فرد است .

اثبات) روش اول : چون $p = q + ۱$ ، پس : $p - q = ۱$. بنابراین p و q می‌باید دو عدد نامنفی و متوالی باشند . و می‌دانیم ، از هر دو عدد صحیح و متوالی ، همواره یکی زوج و دیگری فرد است و مجموع یک عدد زوج با یک عدد فرد ، همواره فرد است .

روش دوم:

$$p = q + ۱ \Rightarrow p + q = q + ۱ + q \Rightarrow p + q = \underbrace{۲q + ۱}_{\text{فرد}}$$

قضیه‌ی ۵ : در هر درخت از مرتبه‌ی p و با اندازه‌ی q ، همواره تعداد رأس‌های درجه۱ از رابطه‌ی زیر به‌دست می‌آید :

$$\text{تعداد رأس‌های درجه‌ی ۱} = ۲ + \sum_{d_i \ge ۳} (d_i - ۲)$$

اثبات : فرض کنیم ، x تعداد رأس‌های درجه‌ی۱ در گراف T از مرتبه‌ی p و با اندازه‌ی q باشد . در این صورت با توجه به قضیه‌ی اصلی در گراف‌ها (مجموع درجات رئوس دو برابر تعداد یال‌هاست) داریم :

$$\sum_{i=۱}^{p} d_i = ۲q \xrightarrow{q=p-۱} \sum_{i=۱}^{p} d_i = ۲p - ۲ \Rightarrow \sum_{i=۱}^{p} d_i - ۲p = -۲$$

$$\xrightarrow{\sum_{i=۱}^{p} ۲ = ۲p} \sum_{i=۱}^{p} d_i - \sum_{i=۱}^{p} ۲ = -۲ \Rightarrow \sum_{i=۱}^{p} (d_i - ۲) = -۲$$

$$\Rightarrow \sum_{d_i = ۱} (d_i - ۲) + \sum_{d_i = ۲} (d_i - ۲) + \sum_{d_i \ge ۳} (d_i - ۲) = -۲$$

$$\Rightarrow -x + ۰ + \sum_{d_i \ge ۳} (d_i - ۲) = -۲ \Rightarrow x = \sum_{d_i \ge ۳} (d_i - ۲) + ۲$$

آزمون : اگر S: ۴, ۴, x, ۳, y, ۲, ۱, ۱, ۱, ۱, ۱, ۱, ۱, ۱, ۱ دنباله‌ی

درجه‌ی رئوس یک درخت باشد، در این صورت $(x^2 + y^2)$ کدام است؟

الف) ۱۷ ب) ۱۳ ج) ۲۵ د) ۱۶

حل: با توجه به رابطه‌ی $p = q + 1$ در هر درخت، چون در این درخت تعداد رئوس $p = 14$ است، پس $q = 13$ و $2q = 26$. در صورتی که مجموع درجات رئوس یا مجموع جملات دنباله عبارت است از:

$$5 + 4 + x + 3 + y + 2 + 1 + 1 + \dots + 1 = 26 \Rightarrow x + y = 5$$

و با توجه به نزولی بودن دنباله و این که تعداد رأس‌های فرد باید زوج باشد، یکی از دو عدد x و y باید فرد باشد. لذا تنها حالت ممکن $x = 3$ و $y = 2$ حاصل می‌شود که در این صورت $x^2 + y^2 = 13$ پس گزینه‌ی ب صحیح است.

آزمون: در یک درخت، چهار رأس درجه‌ی ۳ و دو رأس درجه‌ی ۴ و سه رأس درجه‌ی ۵ موجود است و $\Delta = 5$، این گراف چند رأس از درجه‌ی ۱ دارد؟

الف) ۱۴ ب) ۱۳ ج) ۱۵ د) ۱۶

حل: گزینه‌ی د صحیح است، زیرا:

$$\text{تعداد رأس‌های درجه‌ی ۱} = 2 + \sum_{d_i \ge 3}(d_i - 2)$$

$$= 2 + (3-2) + (3-2) + (3-2) + (3-2) + (4-2) + (4-2) + (5-2) + (5-2) + (5-2) = 2 + 4 + 4 + 6 = 16$$

آزمون: در یک درخت از مرتبه‌ی p و با اندازه‌ی q داریم: $2q - p = 6$. در این درخت حاصل $(p + q)$ کدام است؟

الف) ۱۳ ب) ۱۵ ج) ۱۶ د) ۱۸

حل: گزینه‌ی ب صحیح است؛ زیرا:

$$\begin{cases} 2q - p = 6 \\ p - q = 1 \end{cases} \qquad q = 7 \Rightarrow p = 8 \Rightarrow p + q = 15$$

(توجه دارید که گزینه‌های ج و د اعداد زوج هستند و مجموع مرتبه و اندازه هیچ‌گاه نمی‌تواند زوج باشد.)

آزمون: اگر در درخت T، همه‌ی رأس‌ها فرد باشند، کدام گزینه درست است؟

الف) اندازه‌ی T فرد است.

ب) اندازه‌ی T زوج است.

ج) T حداقل سه رأس درجه‌ی ۱ دارد.

د) درخت T ساده است.

حل: گزینه‌ی الف صحیح است، زیرا تعداد رأس‌های فرد باید زوج باشد. طبق فرض، همه‌ی رأس‌ها فرد هستند و اگر p تعداد آن‌ها باشد، باید p زوج باشد و چون p و q متوالی هستند، پس q فرد است.

آزمون: میانگین درجات رئوس یک درخت ۱/۸ است. در این درخت مجموع مرتبه و اندازه کدام است؟

الف) ۱۷ ب) ۱۹ ج) ۲۱ د) ۱۳

حل: میانگین درجات رئوس عبارت است از مجموع درجات رئوس تقسیم بر تعداد رئوس؛ یعنی:

$$\text{میانگین درجات رئوس} = \frac{2q}{p}$$

پس داریم:

$$\frac{2q}{p} = 1/8 \Rightarrow \frac{2q}{q+1} = 1/8 \Rightarrow 2q = 1/8q + 1/8$$

$$\Rightarrow 0/2q = 1/8 \Rightarrow q = \frac{1/8}{0/2} = 9 \Rightarrow p = 10 \Rightarrow p + q = 19$$

پس گزینه‌ی ب صحیح است.

آزمون: در یک درخت، درجه‌ی هر رأس ۱ یا ۲ است و تعداد رئوس درجه‌ی ۲، سه برابر تعداد رئوس درجه‌ی ۱ است. مجموع درجات رئوس زوج در این گراف کدام است؟

الف) ۱۰ ب) ۱۲ ج) ۱۴ د) ۱۶

حل: گزینه‌ی ب صحیح است؛ زیرا فرض می‌کنیم x و y به ترتیب تعداد رأس‌های درجه‌ی ۱ و درجه‌ی ۲ باشند. در این صورت، طبق فرض داریم: $y = 3x$ و می‌توان نوشت:

$$\text{تعداد رئوس} = x + y = p$$

$$\text{مجموع درجات رئوس} = x + 2y = 2q = 2(p-1) = 2p - 2$$

$$\Rightarrow -2\begin{cases} x + y = p \\ x + 2y = 2p - 2 \end{cases} \Rightarrow -x = -2 \Rightarrow x = 2 \xrightarrow{3x = y} y = 6$$

پس این درخت شش رأس از درجه‌ی ۲ (رأس زوج) دارد و مجموع درجات رئوس زوج برابر است با: $6 \times 2 = 12$.

آزمون: اگر به گرافی هم‌بند، ۴ یال اضافه شود، گراف k_5 حاصل می‌شود. از این گراف چند یال حذف کنیم تا به درختی از مرتبه‌ی ۵، یعنی T_5 تبدیل شود؟

الف) ۱ ب) ۲ ج) ۳ د) ۴

حل: گزینه‌ی ب صحیح است؛ زیرا فرض کنیم، گراف موردنظر G باشد و اندازه‌ی G، همان q باشد. پس طبق فرض:

$$q + 4 = \frac{5 \times 4}{2} \Rightarrow q = 10 - 4 = 6$$

و می‌دانیم، درخت از مرتبه‌ی ۵ دارای ۴ یال است، پس باید از ۶ یال، ۲ یال کم کنیم تا به درخت مرتبه‌ی ۵ تبدیل شود.

(حل مسأله‌های لاینحل ۲۳۰۰ ساله)

کشف فرمول اعداد اول و نتایج آن*

قسمت ۲

● سید محمدرضا هاشمی موسوی**
hashemi – moosavi@yahoo.com

اشاره:

در قسمت اول مقاله با تاریخ جستجو برای کشف فرمول اعداد اول و تلاش‌های فراوان ریاضیدانان در طی ۲۳۰۰ سال گذشته آشنا شدیم و اینک با کشف فرمول اعداد اول و نتایج بسیار ارزنده آن که به قرار ذیل است آشنا می‌شویم:

- ✓ توابع تشخیص اعداد اول
- ✓ توابع مولد اعداد اول
- ✓ توابع مولد اعداد اول بسیار بزرگ ناشناخته
- ✓ تعیین تعداد اعداد اول به طور دقیق
- ✓ حل معادله زتای ریمان
- ✓ تعیین kامین عدد اول
- ✓ تعریف مجموعه اعداد اول
- ✓ تعریف مجموعه‌های اعداد اول مرسن و تام
- ✓ اثبات بی‌نهایت بودن اعداد اول دوقلو و تعریف مجموعه دوقلوهای اول
- ✓ حل معادله‌های درجه‌ی nام سیال در حالت عمومی

۱. کشف تابع مولد همه‌ی اعداد اول (۱۳۸۲/۵/۱۴)

ابتدا ماتریسی از صفر و یک برای اعداد فرد طبیعی با توجه به بخش‌پذیری آن‌ها بر هریک از اعداد فرد تشکیل می‌دهیم:

+	۱	۳	۵	۷	۹	۱۱	۱۳	۱۵	۱۷	۱۹	۲۱	۲۳	۲۵	۲۷	۲۹	۳۱	۳۳	۳۵	۳۷	۳۹	۴۱	
۱	۱	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	…
۳	۱	۱	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	…
۵	۱	۰	۱	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	…
۷	۱	۰	۰	۱	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	…
۹	۱	۱	۰	۰	۱	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	…
۱۱	۱	۰	۰	۰	۰	۱	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	…
۱۳	۱	۰	۰	۰	۰	۰	۱	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	…
۱۵	۱	۱	۱	۰	۰	۰	۰	۱	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	…
۱۷	۱	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۱	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	…
۱۹	۱	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۱	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	…
۲۱	۱	۱	۰	۱	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۱	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	…
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	…

جدول (۱)

توضیح : در صورتی که اعداد ستونی بر اعداد سطری بخش‌پذیر باشند، در جدول تقاطع آن‌ها را یک و در غیر این صورت صفر قرار می‌دهیم. توجه داشته باشید:

● ستون اول فقط ۱ است؛ زیرا همه‌ی اعداد، مضرب عدد ۱ هستند.

● ستون دوم مضارب عدد ۳ را نشان می‌دهد.

● ستون سوم مضارب عدد ۵ را نشان می‌دهد.

● به همین ترتیب هر ستون مضارب یک عدد است.

با توجه به سطرهای جدول ملاحظه می‌شود، در حالتی که در مقابل هر عدد ستونی فقط دو عدد ۱ نوشته شده باشد، در واقع آن عدد ستونی عددی اول است؛ زیرا:

«هر عدد اول تنها بر یک و خودش بخش‌پذیر است.»

می‌دانیم: «برای تشخیص عدد مفروض N کافی است که N را بر اعداد اول نابیش‌تر از $\sqrt{N}$ تقسیم کنیم.» برای تشخیص اعداد ستونی کافی است به سطر آن عدد توجه شود. در صورتی که در هر سطر بیش‌تر از دو عدد ۱ وجود داشته باشد، در واقع آن عدد ستونی اول نیست. برای مثال، سطر مربوط به عدد ۱۵ دارای چهار عدد ۱ است؛ زیرا بر ۱، ۳، ۵ و ۱۵ بخش‌پذیر است. بنابراین، عدد ۱۵ مرکب است. ولی سطرهای مربوط به اعداد ۳، ۵، ۷، ...، ۱۷ و ۱۹، و... فقط دارای دو عدد ۱ است، پس این اعداد اول هستند.

برای تشخیص اعداد، کافی است توابعی را بیابیم که هریک از ستون‌های جدول را تولید کنند؛ به‌عبارت دیگر، همه‌ی اعداد صفر یا یک هر ستون را به همان ترتیب ستونی (از بالا به پایین) ارایه کنند. ضابطه‌ی عمومی این گونه توابع به صورت زیر است:

$$F_{2k+1}(x)=\left[\frac{2k+1}{x}\left[\frac{x}{2k+1}\right]\right]$$

x	$F_3(x)=\left[\frac{3}{x}\left[\frac{x}{3}\right]\right]$	$F_5(x)=\left[\frac{5}{x}\left[\frac{x}{5}\right]\right]$	$F_7(x)=\left[\frac{7}{x}\left[\frac{x}{7}\right]\right]$	$F_9(x)=\left[\frac{9}{x}\left[\frac{x}{9}\right]\right]$	$F_{11}(x)=\left[\frac{11}{x}\left[\frac{x}{11}\right]\right]$	…
۱	۰	۰	۰	۰	۰	…
۳	۱	۰	۰	۰	۰	…
۵	۰	۱	۰	۰	۰	…
۷	۰	۰	۱	۰	۰	…
۹	۱	۰	۰	۱	۰	…
۱۱	۰	۰	۰	۰	۱	…
۱۳	۰	۰	۰	۰	۰	…
۱۵	۱	۱	۰	۰	۰	…
۱۷	۰	۰	۰	۰	۰	…
۱۹	۰	۰	۰	۰	۰	…
	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	

جدول(۲)

با توجه به جدول و با توجه به این که برای تشخیص عدد N کافی است، آن را بر اعداد اول نابیش‌تر از $\sqrt{N}$ تقسیم کنیم، N را بر اعداد فرد نابیش‌تر از آن تقسیم می‌کنیم. پس، مجموع توابع اعداد ستونی x کافی است تا عدد فرد نابیش‌تر از $\left\lfloor\sqrt{N}\right\rfloor$ محاسبه شود. درنتیجه، اگر N اول باشد، تنها یک عدد ۱ در سطر عدد N خواهیم داشت:

$$S^* = \left\lfloor \frac{\sqrt{2m+1}+1}{2} \right\rfloor \quad \text{و} \quad (1)\quad \sum_{k=0}^{S^*} F_{2k+1}(x) = 1 \quad (\text{عدد اول } N)$$

اگر N مرکب باشد:

$$(2) \qquad \sum_{k=0}^{S^*} F_{2k+1}(x) > 1 \quad (\text{عدد مرکب } N)$$

$(F_1(x) = 1$: ستون اول$)$

بنابراین، اگر N عددی فرد باشد و $(N = 2m+1)\ m \in \mathbb{N}$:

$$\Delta_{N(m)} = \left\lfloor \frac{1 + \left\lfloor \frac{3}{2m+1} \right\rfloor}{1 + \sum_{k=1}^{S^*} \left\lfloor \frac{2k+1}{2m+1} \left\lfloor \frac{2m+1}{2k+1} \right\rfloor \right\rfloor} \right\rfloor$$

$$(3) \qquad = \begin{cases} 1 & N = 2m+1 \text{ اول باشد} \\ 0 & N = 2m+1 \text{ مرکب باشد} \end{cases}$$

توجه: عدد $N = 2m+1$، یا اول است و یا مرکب و این دو حالت توسط تابع تشخیص $\Delta_{N(m)}$ معین خواهد شد و همیشه تنها دو حالت (۳)، یعنی ۰ و ۱ پیش خواهد آمد. بنابراین اگر تابعی با استفاده از $\Delta_{N(m)}$ بنویسیم، یک تابع پوشاست (در مجموعه اعداد فرد بزرگ‌تر از ۱):

$$1)\ H(m) = (2m+1-p)\Delta_{N(m)} + p$$

$$2)\ H(m) = p\left(\frac{2m+1}{p}\right)^{\Delta_{N(m)}}$$

٭ توجه: p عدد اول دلخواه است.

توضیح: عبارت $\left\lfloor \frac{3}{2m+1} \right\rfloor$ فقط برای تشخیص استثنایی عدد ۳ است و اگر $m > 1$ اختیار شود، این عبارت از $\Delta_{N(m)}$ حذف می‌شود:

$$m > 1:\ \Delta_{N(m)} = \left\lfloor \frac{1}{1 + \sum_{k=1}^{S^*} \left\lfloor \frac{2k+1}{2m+1} \left\lfloor \frac{2m+1}{2k+1} \right\rfloor \right\rfloor} \right\rfloor$$

این دو تابع هم‌ارز هستند و با فرض این‌که $p = 2$ اختیار شود، دامنه و برد آن‌ها چنین است:

$\mathbb{P} = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, \ldots\}$ (مجموعه اعداد اول)

$D_H = \mathbb{N}$ (مجموعه اعداد طبیعی) و $R_H = \mathbb{P}$

توجه: با فرض $p = 2$، برد هر یک از توابع با ضابطه‌های (۱) یا (۲)، مجموعه اعداد اول است.

● **نتیجه**: مجموعه اعداد اول تعریف‌پذیر است:

$$\mathbb{P} = \left\{ H(m) : m \in \mathbb{N},\ H(m) = 2\left(\frac{2m+1}{2}\right)^{\Delta_{N(m)}} \right\}$$

۲. تابع مولد اعداد اول با استفاده از قضیه‌ی ویلسن

قضیه‌ی ویلسن: اگر p اول باشد، آن‌گاه $(p-1)! \equiv -1$ و برعکس.

نکته: با توجه به قضیه‌ی ویلسن، توابع تشخیص اعداد طبیعی مثل N را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

تذکر: عدد یک نه اول است و نه مرکب.

$$1)\ \Delta_1 = \left\lfloor \cos^2 \pi \frac{(n-1)!+1}{n} \right\rfloor = \begin{cases} 1 & n \text{ اول باشد} \\ 0 & n \text{ اول نباشد} \end{cases}$$

$$2)\ \Delta_2 = \frac{\sin^2 \pi \frac{(n-1)!^2}{n}}{\sin^2 \frac{\pi}{n}}$$

$$= \begin{cases} 1 & n \text{ اول باشد } \left(\frac{(n-1)!^2}{n} = \frac{1}{n} + k \ (\text{عدد صحیح})\right) \\ 0 & n \text{ اول نباشد } \left(n \mid (n-1)!^2\right) \end{cases}$$

$$3)\ \Delta_3^{(*)} = \left\lfloor \frac{n}{(n-1)!+1} \left\lfloor \frac{(n-1)!+1}{n} \right\rfloor \right\rfloor = \begin{cases} 1 & n \text{ اول باشد} \\ 0 & n \text{ اول نباشد} \end{cases}$$

هریک از این توابع (Δ_i) را می‌توان برای تشخیص عددی

طبیعی مثل N به کار برد. ولی چون کار با عدد $(N-1)!$ حتی برای N نه چندان بزرگ غیر عملی است، پس این نوع توابع را فقط به عنوان برهانی تئوریک می‌پذیریم.

با توجه به قضیه‌ی ویلسن، تابع تشخیص اعداد را می‌توان یکی از توابع فوق (Δ_i) در نظر گرفت و با آن، تابع مولد اعداد اول را ساخت. چون هر عدد زوج بزرگ‌تر از ۲ مرکب است، پس بهتر است N را عدد فرد بزرگ‌تر از یک در نظر بگیریم:

$$N = 2m+1:\ \Delta_m = \left\lfloor \frac{N}{(N-1)!+1}\left\lfloor \frac{(N-1)!+1}{N} \right\rfloor \right\rfloor$$

در صورتی که p عدد اول دلخواهی باشد، با توجه به تابع تشخیص Δ_m توابع مولد اعداد اول پوشا به صورت زیر هستند:

$$1)\,H_p(m) = p\left(\frac{2m+1}{p}\right)^{\Delta_m}$$

$$2)\,H_p(m) = (2m+1-p)\Delta_m + p$$

نکته: این دو تابع هم‌ارز هستند و هریک را می‌توان به‌عنوان تابع مولد اعداد اول به کار برد. واضح است که به تعداد اعداد اول (نامحدود)، تابع مولد اعداد اول می‌توان نوشت:

$$P = 2: H_2(m) = 2\left(\frac{2m+1}{2}\right)^{\Delta_m};\ H_2(m) = (2m-1)\Delta_m + 2$$

$$P = 3: H_3(m) = 3\left(\frac{2m+1}{3}\right)^{\Delta_m};\ H_3(m) = 2(m-1)\Delta_m + 3$$

$$P = 5: H_5(m) = 5\left(\frac{2m+1}{5}\right)^{\Delta_m};\ H_5(m) = 2(m-2)\Delta_m + 5$$

$$P = 7: H_7(m) = 7\left(\frac{2m+1}{7}\right)^{\Delta_m};\ H_7(m) = 2(m-3)\Delta_m + 7$$

. . . .

m	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰...
$H_2(m)$	۳	۵	۷	۲	۱۱	۱۳	۲	۱۷	۱۹	۲...
$H_3(m)$	۳	۵	۷	۳	۱۱	۱۳	۳	۱۷	۱۹	۳...
$H_5(m)$	۳	۵	۷	۵	۱۱	۱۳	۵	۱۷	۱۹	۵...
$H_7(m)$	۳	۵	۷	۷	۱۱	۱۳	۷	۱۷	۱۹	۷...
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
$H_p(m)$	۳	۵	۷	p	۱۱	۱۳	p	۱۷	۱۹	p...

نتیجه: دو تابع پوشای مولد اعداد که همه‌ی اعداد اول را به ترتیب تولید می‌کنند و به جای اعداد مرکب، عدد اول ۲ را جایگزین می‌کنند، به صورت زیر هستند:

$$1)\,H(m) = 2\left(\frac{2m+1}{2}\right)^{\left\lfloor \frac{m}{(m-1)!+1}\left\lfloor \frac{(m-1)!+1}{m} \right\rfloor \right\rfloor};\ D_H = \mathbb{N},\ R_H = \mathbb{P}$$

$$2)\,H(m) = 2\left(\frac{2m+1}{2}\right)^{\left\lfloor \frac{1+\left\lfloor \frac{3}{2m+1} \right\rfloor}{1+\sum_{k=1}^{S^*} \left\lfloor \frac{2k+1}{2m+1}\left\lfloor \frac{2m+1}{2k+1} \right\rfloor \right\rfloor} \right\rfloor};\ D_H = \mathbb{N},\ R_H = \mathbb{P}$$

توجه: این دو تابع و توابع معادل آن‌ها به نام «**فرمول‌های اعداد اول**» (**H.M**) نام‌گذاری شده‌اند که دامنه‌ی این توابع، مجموعه اعداد طبیعی ($\mathbb{N}$) و برد آن‌ها، مجموعه اعداد اول ($\mathbb{P}$) هستند.

۳. تابع مولد اعداد اول با استفاده از تابع حسابی φ اویلر

با استفاده از تابع $\varphi(n)$ (فی اویلر)، تابع با ضابطه زیر را می‌توان برای تشخیص اعداد به‌کار برد ($n \neq 1$):

$$4)\ \Delta_4^{(*)} = \left\lfloor \frac{\varphi(n)}{n-1} \right\rfloor = \begin{cases} 1 & \text{n اول باشد} \\ 0 & \text{n اول نباشد} \end{cases}$$

$\varphi(n)$ از دترمینان مرتبه‌ی n زیر به دست می‌آید:

$$\varphi(n) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & \cdots & & & & n \end{vmatrix}$$

توجه: با استفاده از ماتریسی نظیر ماتریسی که ابتدای مقاله ارایه شد، ثابت می‌شود که $\varphi(n)$ از دترمینان بالا محاسبه می‌شود و هم‌چنین می‌دانیم:

$$n = p^r.q^s.t^u\cdots,\quad \varphi(n) = n\left(1-\frac{1}{p}\right)\left(1-\frac{1}{q}\right)\left(1-\frac{1}{t}\right)\cdots$$

توضیح: ستون اول این دترمینان همه یک و ستون آخر آن اعداد طبیعی $1,2,3,\cdots,n$ است. در ستون kام، هر درایه‌ای که سطرش به k بخش‌پذیر است یک و بقیه جاهای ستون، صفر قرار می‌دهیم (($\varphi(n)$: تعداد اعداد پیش از n که نسبت به n اول هستند).

نتایج کشف فرمول اعداد اول:

۱. تابع تعیین تعداد اعداد اول یعنی $\pi(N)$، تا عدد فردی مثل N به طور دقیق:

$$\pi(N)=\frac{N+1}{2}-\sum_{m=1}^{\frac{N-1}{2}}\left\lfloor 2^{-\Delta_{N(m)}}\right\rfloor$$

توجه: توسط این تابع (π)، حل یکی از مسأله‌های هفت‌گانه‌ی انستیتوی clay (مسأله‌های لاینحل جهانی هزاره‌ی هفت میلیون دلاری) ارایه شده است که دو سال به داوری گذاشته می‌شود (معادله‌ی زتای ریمان $\zeta(s)=0$).

● جواب معادله‌ی زتای ریمان:

$$\lfloor s\rfloor>1:\quad \pi(p)=\frac{p+1}{2}-\sum_{m=1}^{\frac{p-1}{2}}\left\lfloor s^{-\Delta_{N(m)}}\right\rfloor$$

۲. تعیین k امین عدد اول:

(k امین عدد اول $k: N=2m+1$) $\pi(N)=k$:

$$P_k(m)=\left\lfloor\frac{1}{\left|k-\frac{N+1}{2}+\sum_{m=1}^{\frac{N-1}{2}}\left\lfloor 2^{-\Delta_{N(m)}}\right\rfloor\right|+1}\right\rfloor .N$$

$$P_k(m)=\begin{cases}N & \text{اگر N، k امین عدد اول باشد}\\ 0 & \text{اگر N، k امین عدد اول نباشد}\end{cases}$$

بنابراین، اگر k امین عدد اول را به P_k نمایش دهیم، می‌توان نوشت (با استفاده از قضیه‌ی چبیچف داریم: $P_k<2^k$):

$$P_k=\sum_{m=1}^{2^k}P_k(m)$$

۳. تعریف مجموعه‌های اعداد اول مرسن و تام:

($\mathbb{M}$: مجموعه اعداد اول مرسن)

$$\mathbb{M}=\left\{M(n): n\in\mathbb{N}, M(n)=3\left(\frac{2^{n+1}-1}{3}\right)^{\Delta_{N(2^n-1)}}\right\}$$

$$=\left\{3,7,31,127,\dots,2^{30402457}-1,\dots\right\}$$

($\mathbb{F}$: مجموعه اعداد تام)

$$\mathbb{F}=\left\{F(n): n\in\mathbb{N}, M(n)\in\mathbb{M}, F(n)=2^{n-1}M(n)\right\}$$

$$=\left\{6,28,496,\dots\right\}$$

توضیح: عدد تام عددی است که مجموع همه‌ی مقسوم‌علیه‌های کوچک‌تر از آن برابر خود عدد است.

۴. تابع مولد اعداد اول بسیار بزرگ ناشناخته

تابع مولد اعداد بزرگ‌تر از بزرگ‌ترین عدد اول $M_{43}=2^{30402457}-1$ (عدد مرسن سال ۲۰۰۶) به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$M_{43}=2^{30402457}-1=2n+1;\quad n=\frac{M_{43}-1}{2}=2^{30402456}-1$$

$$H(m)=\left[2(m+n)+1-M_{43}\right]\Delta_{N(m+n)}+M_{43}$$

یا:

$$H(m)=M_{43}\left[\frac{2(m+n)+1}{M_{43}}\right]^{\Delta_{N(m+n)}}$$

با توجه به عبارت زیر:

$$\Delta_{N(m+n)}=\left\lfloor\frac{1}{1+\sum_{k=1}^{S'}\left\lfloor\frac{2k+1}{2(m+n)+1}\left\lfloor\frac{2(m+n)+1}{2k+1}\right\rfloor\right\rfloor}\right\rfloor$$

$$=\begin{cases}1 & \text{اول باشد } N=2(m+n)+1\\ 0 & \text{مرکب باشد } N=2(m+n)+1\end{cases}$$

تابع با ضابطه‌های زیر، همیشه یا عدد اول M (بزرگ‌ترین عدد شناخته شده‌ی اول مرسن) را و یا عددهای اول بعد از این عدد را تولید می‌کنند:

$$1)\ m\in\mathbb{N}: H(m)=\left[2(m+n)+1-M_{43}\right]^{\Delta_{N(m+n)}}+M_{43}$$

$$=\begin{cases}N & \text{اول باشد } N=2(m+n)+1\\ M_{43} & \text{مرکب باشد } N=2(m+n)+1\end{cases}$$

$$2)\ m\in\mathbb{N}: H(m)=M_{43}\left[\frac{2(m+n)+1}{M_{43}}\right]^{\Delta_{N(m+n)}}$$

$$= \begin{cases} N & \text{اول باشد } N \\ M_{۴۲} & \text{مرکب باشد } N \end{cases}$$

❋ توجه : این دو تابع را می‌توان توابع مولد اعداد بسیار بزرگ اول ناشناخته منظور کرد .

۵. اثبات بی‌نهایت بودن اعداد اول دوقلو و تعریف مجموعه‌ی T (Twin):

$$T = \{n \in \mathbb{N} - \mathbb{H} : (۶n - ۱, ۶n + ۱)\} \cup \{(۳,۵)\}$$
$$= \{(۳,۵),(۵,۷),(۱۱,۱۳),(۱۷,۱۹),(۲۹,۳۱),(۴۱,۴۳),\cdots\}$$

زیرنویس

❋ این توابع تشخیص ، توسط مؤلف مقاله ارایه شده‌اند .

منبع

❋ کتاب انتشارات بین‌المللی Brill/Vsp ، نوشته‌ی سید محمدرضا هاشمی موسوی :

The discovery of prime numbers formula and its results & other top researches

(uthor: S. M. R. Hashemi Moosavi)

❋❋ سایت کاشف :

www.primenumbersformula.com



خبر _ مجله‌ی ریاضی توان

ناشر : مبتکران
سال نشر : ۱۳۸۵
قیمت : ۴۰۰ تومان
محل نشر : تهران
تعداد صفحات : ۴۸

به مجموعه‌ی نشریات ریاضی کشورمان ، یک نشریه‌ی جدید اضافه شد!

مجله‌ی ریاضی توان ویژه دوره‌ی متوسطه ، نخستین شماره خود را در نیمه آبان سال ۸۵ منتشر کرد . پیش از این مجله‌ی ریاضی توان ویژه دوره‌ی راهنمایی تحصیلی به صورت فصل‌نامه در پانزده شماره منتشر شده بود و اکنون مجله‌ی ریاضی توان ویژه دوره‌ی متوسطه و پیش‌دانشگاهی پا به عرصه مطبوعات گذاشته است .

در نخستین شماره این مجله مطالب زیر را ملاحظه می‌کنید :

آشنایی بیشتر با سه جمله‌ای درجه دوم ، گزارشی از چهل و هفتمین المپیاد بین‌المللی ریاضی ، مسائل مسابقه‌ای برای دانش‌آموزان و مسائلی برای حل ، آمار و احتمال ، ایستگاه اندیشه و سرگرمی ، روش‌های تدریس ریاضی و تاریخ ریاضیات (سخنرانی استاد پرویز شهریاری) ، سئوالات المپیاد آزمایشی ریاضی مبتکران ، مسابقه آزاد ریاضی و... دست‌اندرکاران مجله ریاضی رشد برهان متوسطه ، انتشار مجله ریاضی توان ویژه دوره‌ی متوسطه را نشانه اعتلای فرهنگ ریاضی کشور دانسته و برای نویسندگان و مسئولین آن آرزوی موفقیت می‌کنند .

پاسخ جدول های سودوکو

۶	۷	۵	۴	۸	۹	۳	۲	۱
۸	۳	۴	۶	۱	۲	۷	۵	۹
۱	۹	۲	۳	۷	۵	۶	۸	۴
۴	۱	۷	۲	۶	۸	۵	۹	۳
۵	۲	۸	۹	۳	۴	۱	۷	۶
۹	۶	۳	۷	۵	۱	۲	۴	۸
۲	۸	۶	۵	۹	۳	۴	۱	۷
۷	۵	۱	۸	۴	۶	۹	۳	۲
۳	۴	۹	۱	۲	۷	۸	۶	۵

حل جدول ۱

۷	۶	۳	۹	۸	۵	۲	۱	۴
۸	۱	۲	۷	۶	۴	۳	۹	۵
۵	۹	۴	۳	۱	۲	۸	۶	۷
۱	۴	۵	۲	۹	۸	۶	۷	۳
۳	۷	۹	۴	۵	۶	۱	۸	۲
۶	۲	۸	۱	۷	۳	۴	۵	۹
۴	۵	۱	۸	۲	۷	۹	۳	۶
۹	۳	۶	۵	۴	۱	۷	۲	۸
۲	۸	۷	۶	۳	۹	۵	۴	۱

حل جدول ۲

۴	۱	۶	۲	۵	۹	۳	۸	۷
۷	۳	۹	۴	۸	۱	۲	۶	۵
۸	۲	۵	۷	۳	۶	۹	۱	۴
۳	۵	۸	۶	۲	۴	۷	۹	۱
۲	۷	۱	۸	۹	۵	۶	۴	۳
۶	۹	۴	۳	۱	۷	۸	۵	۲
۵	۸	۳	۱	۶	۲	۴	۷	۹
۱	۶	۷	۹	۴	۳	۵	۲	۸
۹	۴	۲	۵	۷	۸	۱	۳	۶

حل جدول ۳



با راهیان المپیادهای ریاضی

قسمت ۵

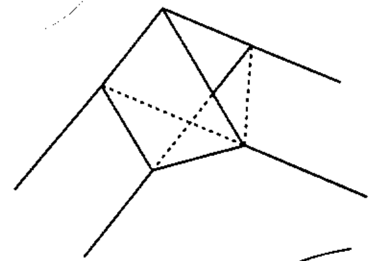
● غلامرضا یاسی‌پور

سؤال‌ها

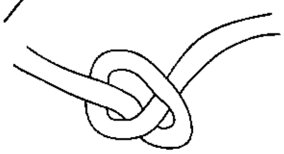
چندضلعی‌های منتظم

در این بخش، به بحث درباره‌ی دو روشی می‌پردازیم که برای حل مسائل مربوط به چندضلعی‌های منتظم به کار می‌روند.

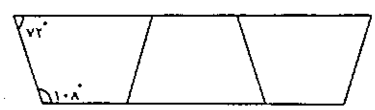
روش اول شامل استفاده از تقارن‌های این چندضلعی‌هاست. این روش را با واقعیت جالب مربوط به ترسیم پنج ضلعی منتظم توضیح می‌دهیم. البته روش کلاسیک ترسیم این چندضلعی با خط‌کش و پرگار موجود است، اما راه ساده‌تری نیز برای انجام این کار وجود دارد. بر نواری کاغذی، ساده‌ترین گره، گره‌ی یک پیچی را انجام می‌دهیم. سپس آن را مانند شکل ۱ تسطیح می‌کنیم. پس از بریدن دو سر نوار، پنج ضلعی منتظم به دست می‌آید.



شکل ۱



برای متقاعد شدن در این مورد که پنج ضلعی به‌دست آمده منتظم است، شکل ۲ را ملاحظه کنید. در این شکل، پنج ضلعی مزبور از تا کردن ذوزنقه‌های متساوی‌الساقین برابر حاصل شده است. ویژگی توضیح دهنده‌ی این پدیده آن است که با دوران پنج ضلعی، اقطار پنج ضلعی را می‌توان به یکدیگر تبدیل کرد و به این ترتیب، ذوزنقه‌های تعیین شده با سه ضلع و یک قطر را می‌توان با عمل دوران، یکی از دیگری به دست آورد.



شکل ۲

در روش دوم از مثلثات استفاده می‌کنیم. این روش یا از تحویل روابط متری به اتحادهای مثلثاتی بهره می‌گیرد، یا به استفاده از اعداد مختلطی رجوع می‌کند که به صورت مثلثاتی نوشته شده‌اند. مثال استفاده از مثلثات را با مسأله‌ی زیر به‌دست می‌دهیم؛ مثالی که به توصیف رابطه‌ای می‌پردازد که در چندضلعی منتظمی با ۱۴ ضلع برقرار است:

فرض می‌کنیم $A_1A_2A_3\ldots A_{14}$، چندضلعی منتظمی با ۱۴ ضلع و محاط در دایره‌ای به شعاع R باشد. ثابت کنید:

$$A_1A_3^2 + A_1A_7^2 + A_3A_7^2 = 7R^2$$

طول‌های سه قطعه‌ی مورد بحث را بر حسب زوایا، و R (شعاع دایره‌ی محیطی چندضلعی) بیان می‌کنیم. از آن‌جا که وترهای A_1A_3، A_3A_7 و A_1A_7 در کمان‌هایی به ترتیب به اندازه‌های $\pi/7$، $2\pi/7$ و $3\pi/7$ محاط شده‌اند (شکل ۳)، طول‌هایشان برابر $2R\sin\pi/7$، $2R\sin 2\pi/7$ و $2R\sin 3\pi/7$ است. درنتیجه، اتحاد مورد اثبات با اتحاد زیر هم‌ارز است.

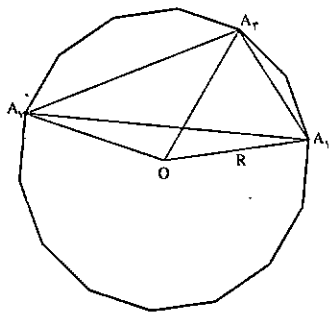
$$4R^2\left(\sin^2\frac{\pi}{7} + \sin^2\frac{2\pi}{7} + \sin^2\frac{3\pi}{7}\right) = 7R^2$$

با استفاده از فرمول‌های دو برابر زاویه به‌دست می‌آوریم:

$$4R^2\left(\sin^2\frac{\pi}{7} + \sin^2\frac{2\pi}{7} + \sin^2\frac{3\pi}{7}\right)$$
$$= 2R^2\left(1-\cos\frac{2\pi}{7} + 1-\cos\frac{4\pi}{7} + 1-\cos\frac{6\pi}{7}\right)$$

برای محاسبه‌ی مجموع:

$$\cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{4\pi}{7} + \cos\frac{6\pi}{7}$$



شکل ۳

آن را در $\sin 2\pi/7$ ضرب و از فرمول‌های ضرب به جمع استفاده می‌کنیم و به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{1}{2}\left(\sin\frac{4\pi}{7} + \sin\frac{6\pi}{7} - \sin\frac{2\pi}{7} + \sin\frac{8\pi}{7} - \sin\frac{4\pi}{7}\right) = -\frac{1}{2}\sin\frac{2\pi}{7}$$

در این مورد از این واقعیت استفاده کرده‌ایم که:

$$\sin 8\pi/7 = \sin(2\pi - 6\pi/7) = -\sin 6\pi/7$$

درنتیجه، مجموع فوق برابر $-\frac{1}{2}$ است، و اتحاد به دست می‌آید.

در ادامه مسائلی را در این زمینه به خوانندگان تقدیم می‌کنیم.

۱. فرض می‌کنیم ABC و BCD دو مثلث متساوی‌الاضلاع مشترک در یک ضلع است. خطی گذرنده از D، AC را در M و AB را در N قطع می‌کند. ثابت کنید زاویه‌ی بین خطوط BM و CN $60°$ است.

۲. فرض می‌کنیم ABCDE یک پنج‌ضلعی منتظم و M نقطه‌ای درون آن و چنان است که $\angle MBA = \angle MEA = 42°$. ثابت کنید: $\angle CMD = 60°$.

۳. بر اضلاع یک شش ضلعی دارای مرکز تقارن، مثلث‌های متساوی‌الاضلاعی بیرون از آن رسم می‌کنیم. رأس‌هایی از این مثلث‌ها که رئوس شش‌ضلعی درونی نیستند، یک شش‌ضلعی منتظم می‌سازند. ثابت کنید که وسط‌های اضلاع این شش‌ضلعی، رأس‌های یک شش‌ضلعی منتظم‌اند.

۴. فرض می‌کنیم $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7$ یک هفت‌ضلعی منتظم است. ثابت کنید:

$$\frac{1}{A_1A_2}=\frac{1}{A_1A_3}+\frac{1}{A_1A_4}$$

۵. فرض می‌کنیم $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7$ ، $B_1B_2B_3B_4B_5B_6B_7$ و $C_1C_2C_3C_4C_5C_6C_7$ ، هفت‌ضلعی‌های منتظمی با سطوح به ترتیب S_A ، S_B و S_C هستند و نیز فرض می‌کنیم: $A_1A_2=B_1B_3=C_1C_4$. ثابت کنید:

$$\frac{1}{2}<\frac{S_B+S_C}{S_A}<2-\sqrt{2}$$

۶. فرض می‌کنیم $P_1P_2P_3...P_{12}$ یک دوازده‌ضلعی منتظم است. ثابت کنید که P_1P_5 ، P_4P_8 و P_3P_6 متقارب‌اند.

۷. درون مربع ABCD، مثلث‌های متساوی‌الاضلاع ABK ، BCL ، CDM و DAN را رسم می‌کنیم. ثابت کنید، وسط‌های قطعات KL ، LM ، MN و NK ، و وسط‌های AN ، AK ، BK ، BL ، CL ، CM ، DM و DN رأس‌های یک دوازده‌ضلعی منتظم‌اند.

جواب‌ها

۱. به خاطر بیاورید اگر نقطه‌ی B را حول نقطه‌ی A به اندازه‌ی زاویه‌ی °۶۰ به نقطه‌ی C دوران دهیم، مثلث ABC متساوی‌الاضلاع است. این موضوع، مستلزم آن است که مثلث متساوی‌الساقین با زاویه‌ی °۶۰ متساوی‌الاضلاع است. این ملاحظه این مطلب را مطرح می‌کند که بسیاری از مسائل شامل مثلث‌های متساوی‌الاضلاع را می‌توان با یافتن دوران °۶۰ پنهانی حل کرد. و همانطور که در زیر خواهیم دید، این همان وضعیت مسئله‌ی مورد بحث‌مان است. فرض می‌کنیم که نقطه‌ی Q محل تقاطع BM با موازی از A با BC است (شکل ۴). ابتدا ثابت می‌کنیم، مثلث AQN متساوی‌الاضلاع است. از آن‌جا که $\angle QAN=60°$ ، کافی است نشان دهیم دو ضلع این مثلث برابرند. از مثلث‌های مشابه MQA و MBC نتیجه می‌گیریم:

$$AQ/BC=MA/MC=MA/(MA+BC)$$

نیز، از مثلث‌های مشابه NMA و NDB نتیجه می‌گیریم:

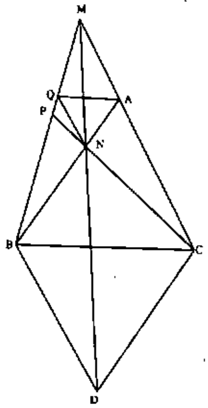
$$NA/NB=MA/BD$$

از آن‌جا که:

$$AB=BC=BD$$

نتیجه می‌شود:

$$NA/AB=MA/(MA+BC)=AQ/AB$$



شکل ۴

بنابراین: AQ=NA. از آن‌جا که مثلث AQN متساوی‌الاضلاع است، Q را می‌توان از N با دورانی °۶۰ حول A به دست آورد. و نیز از آن‌جا که مثلث ABC متساوی‌الاضلاع است، B را می‌توان از C با همین دوران حاصل کرد. درنتیجه، BM را می‌توان از CN با دورانی °۶۰ به دست آورد که نشان می‌دهد، دو خط مورد بحث زاویه‌ی °۶۰ می‌سازند [کتاب درسی دبیرستانی رومانی].

۲. ثابت می‌کنیم مثلث MCD متساوی‌الاضلاع است. از آن‌جا که مثلث متساوی‌الاضلاع شکل متقارن‌تری نسبت به مثلث متساوی‌الساقین دارد، ساده‌تر آن است که مسأله را قهقرایی درنظر بگیریم و از یکتایی شکل هندسی مورد بحث استفاده کنیم. به این منظور، فرض می‌کنیم M' نقطه‌ای درون پنج ضلعی منتظم و چنان است که $\overset{\Delta}{M'CD}$ متساوی‌الاضلاع است (شکل ۵). در این صورت، مثلث‌های $CM'B$ و $DM'E$ ، هر دو با داشتن دو ضلع برابر متساوی‌الساقین‌اند. داریم:

$$\angle M'CB=\angle DCB-\angle DCM'=108°-60°=48°$$

و بنابه تقارن:

$$\angle M'DE=48°$$

بنابراین:

$$\angle M'BC=\angle M'ED=(180°-48°)/2=66°$$

نتیجه می‌شود که:

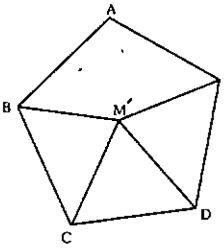
$$\angle M'BA=\angle M'EA=42°$$

بنابراین، $M=M'$ و مطلب به اثبات می‌رسد.

۳. برای حل مسأله، از مثلثات و دقیق‌تر، از اعداد مختلط نوشته شده به صورت مثلثاتی استفاده می‌کنیم. با قرار دادن شکل هندسی مورد بحث در صفحه‌ی مختلط، هر رأس را به مختصات اعداد مختلطی وابسته می‌کنیم که آن را به عنوان یک نقطه با همان حرف نمایش می‌دهیم. فرمول‌های جمع مربوط به سینوس و کسینوس مبین آن هستند که ضرب در $e^{i\alpha}$ ، دوران

پاد ساعتگردی به اندازه‌ی زاویه‌ی α حول مبدأ به دست می‌دهد.

دستگاه مختصاتی چنان اختیار می‌کنیم که مبدأ آن در مرکز تقارن شش‌ضلعی منتظم باشد. فرض می‌کنیم، $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ شش‌ضلعیی در جهت ساعتگرد، و $A_2A_3B_2$ ، $A_3A_4B_3$ ، $A_4A_5B_4$ ، $A_5A_6B_5$ ، $A_6A_1B_6$ و $A_1A_2B_1$ مثلث‌هایی متساوی‌الاضلاع، و C_1 ، C_2 ، C_3 ، C_4 ، C_5 و C_6 به ترتیب، وسط‌های قطعات $B_1B_2, B_2B_3, \dots, B_6B_1$ باشند. از آن‌جا که B_1 از دوران A_2 حول A_1 ، به اندازه‌ی $\frac{\pi}{3}$ ، در جهت پاد ساعتگرد به دست آمده است.



شکل ۵

$$B_1 = A_1 + e^{i\frac{\pi}{3}}(A_2 - A_1) = (1 - e^{i\frac{\pi}{3}})A_1 + e^{i\frac{\pi}{3}}A_2$$
$$= e^{-i\frac{\pi}{3}}A_1 + e^{i\frac{\pi}{3}}A_2$$

به همین ترتیب،

$$B_2 = e^{-i\frac{\pi}{3}}A_2 + e^{i\frac{\pi}{3}}A_3$$

نتیجه می‌گیریم که:

$$C_1 = \frac{1}{2}(e^{-i\frac{\pi}{3}}A_1 + A_2 + e^{i\frac{\pi}{3}}A_3)$$

$$C_2 = \frac{1}{2}(e^{-i\frac{\pi}{3}}A_2 + A_3 + e^{i\frac{\pi}{3}}A_4)$$

از طرف دیگر، اگر C_1 را حول مبدأ، در جهت ساعتگرد، به اندازه‌ی $\frac{\pi}{3}$ دوران دهیم، نقطه‌ای به مختصات $\frac{1}{2}(e^{-i\frac{2\pi}{3}}A_1 + e^{-i\frac{\pi}{3}}A_2 + A_3)$ را به دست می‌آوریم که همان C_2 است؛ زیرا بنابه تقارن: $A_4 = -A_1$ ، و:

$$e^{-2\pi i/3} = -e^{\pi i/3}$$

همین استدلال را برای نشان دادن این موضوع به‌کار می‌بریم که C_i از دوران C_{i+1} حول مبدأ، در جهت ساعتگرد، به اندازه‌ی $\frac{\pi}{3}$ ، به‌دست می‌آید. درنتیجه، $C_1C_2C_3C_4C_5C_6$ شش‌ضلعی منتظمی به مرکز مبدأ است.

۴ . این مسئله شباهت بسیاری با مسئله‌ای دارد که در مقدمه‌ی این بخش حل کردیم، و از همان نوع اعمال مثلثاتی باید استفاده کنیم. شش‌ضلعی مورد بحث را در دایره‌ای به شعاع R محاط می‌کنیم. اضلاع AB ، AC و AD مقابل کمان‌هایی به اندازه‌های ۲π / ۷ ، ۴π / ۷ و ۶π / ۷ هستند. درنتیجه:

$$AB = 2R\sin\pi/7$$
$$AC = 2R\sin 2\pi/7$$
$$AD = 2R\sin 3\pi/7$$

اتحادی که می‌خواهیم اثبات کنیم، هم‌ارز اتحاد مثلثاتی زیر است:

$$\frac{1}{\sin\frac{\pi}{7}} = \frac{1}{\sin\frac{2\pi}{7}} + \frac{1}{\sin\frac{3\pi}{7}}$$

با حذف مخرج‌ها به دست می‌آوریم:

$$\sin\frac{2\pi}{7}\sin\frac{3\pi}{7} = \sin\frac{\pi}{7}\sin\frac{3\pi}{7} + \sin\frac{\pi}{7}\sin\frac{2\pi}{7}$$

به اثبات این برابری می‌پردازیم. فرمول ضرب به جمع را در مورد هریک از این جملات به کار می‌بریم و به دست می‌آوریم:

$$-\cos\frac{5\pi}{7} + \cos\frac{\pi}{7} = -\cos\frac{\pi}{7} + \cos\frac{2\pi}{7} - \cos\frac{3\pi}{7} + \cos\frac{\pi}{7}$$

از آن‌جا که:

$$2\pi/7 + 5\pi/7 = 3\pi/7 + 4\pi/7 = \pi$$

نتیجه می‌گیریم:

$$\cos 2\pi/7 = -\cos 5\pi/7$$
$$\cos 3\pi/7 = -\cos 4\pi/7$$

که برابری را اثبات می‌کند [کتاب درسی دبیرستانی رومانی].

تبصره: این اتحاد از قضیه‌ی بطلمیوس که در مورد چهارضلعی محاطی ABCD به کار رفته است نیز به دست می‌آید.

۵ . فرض می‌کنیم: $A_1A_3 = b$ ، $A_1A_4 = c$ و $A_1A_2 = a$. مسأله‌ی پیشین نشان می‌دهد:

$$a/b + a/c = 1$$

از آن‌جا که مثلث‌های $A_1A_2A_3$ و $B_1B_2B_3$ مشابه‌اند:

$$B_1B_2 / B_1B_3 = a/b$$

درنتیجه:

$$B_1B_2 = a^2/b$$

به همین ترتیب:

$C_1C_2 = a^2/c$

بنابراین:

$$\frac{S_B+S_C}{S_A} = \frac{a^2}{b^2}+\frac{a^2}{c^2}$$

در این صورت:

$$\frac{a^2}{b^2}+\frac{a^2}{c^2} > \frac{1}{2}\left(\frac{a}{b}+\frac{a}{c}\right)^2 = \frac{1}{2}$$

توجه داشته باشید که برابری به این علت ممکن نیست که: $a/b \neq a/c$. این مطلب نیمی از نابرابری را اثبات می‌کند. از طرف دیگر،

$$\frac{a^2}{b^2}+\frac{a^2}{c^2} = \left(\frac{a}{b}+\frac{a}{c}\right)^2 - \frac{2a^2}{bc} = 1-\frac{2a^2}{bc}$$

در مثلث $A_1A_2A_4$، $A_2A_4 = a$. درنتیجه، با استفاده از قانون سینوس‌ها رابطه‌ی

$$\frac{a^2}{bc} = \frac{\sin^2\frac{\pi}{7}}{\sin\frac{2\pi}{7}\sin\frac{4\pi}{7}} = \frac{\sin^2\frac{\pi}{7}}{8\sin^2\frac{\pi}{7}\cos^2\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}}$$

$$= \frac{1}{8\cos^2\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}} = \frac{1}{4(\cos\frac{2\pi}{7}+1)\cos\frac{2\pi}{7}}$$

را به دست می‌آوریم که مخرج آن را با استفاده از فرمول‌های دو برابر زاویه، تبدیل کرده‌ایم. از آن‌جا که:

$2\pi/7 > \pi/4, \cos 2\pi/7 < \cos \pi/4 = \sqrt{2}/2$

خواهیم داشت:

$$\frac{a^2}{bc} > \frac{1}{4\frac{\sqrt{2}}{2}(1+\frac{\sqrt{2}}{2})} = \frac{\sqrt{2}-1}{2}$$

نتیجه می‌شود:

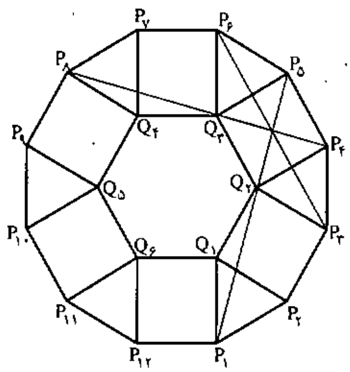
$a^2/b^2 + a^2/c^2 < 1-(\sqrt{2}-1) = 2-\sqrt{2}$

که سمت راست نابرابری مسأله را به اثبات می‌رساند [المپیاد ریاضی بلغارستان، ۱۹۹۵].

۶. حل مسأله مبتنی بر این ویژگی دوازده ضلعی منتظم است که می‌توان آن را مطابق شکل ۶، به شش مثلث متساوی‌الاضلاع $P_3P_4Q_2$، $P_5P_6Q_3$، $P_7P_8Q_4$، $P_9P_{10}Q_5$ و $P_{11}P_{12}Q_6$، $P_1P_2Q_1$، شش مربع $P_{12}P_1Q_1Q_6$، $P_{10}P_{11}Q_6Q_5$، $P_2P_3Q_2Q_1$ و $P_4P_5Q_3Q_2$، $P_6P_7Q_4Q_3$، $P_8P_9Q_5Q_4$، و یک شش‌ضلعی منتظم $Q_1Q_2Q_3Q_4Q_5Q_6$ تجزیه کرد. در مثلث متساوی‌الساقین $Q_1P_1Q_2$، $\angle P_1Q_1Q_2 = 150°$. درنتیجه: $\angle Q_1Q_2P_1 = 15°$. از آن‌جا که:

$\angle Q_1Q_2P_1 + \angle Q_1Q_2Q_3 + \angle Q_3Q_2P_5 = 15°+120°+45° = 180°$

نقاط P_1، Q_2 و P_5 بر یک خط راست واقع‌اند. به همین ترتیب، P_4، Q_3 و P_8 بر خط راست قرار دارند. آنچه باقی می‌ماند، نشان دادن این نکته است که خط P_3P_6 از مرکز مربع $P_4P_5Q_3Q_2$ می‌گذرد، و این موضوع، از این واقعیت سرچشمه می‌گیرد که شش‌ضلعی $P_3P_4P_5P_6Q_3Q_2$ نسبت به مرکز این مربع متقارن است [23rd W.L. Putnam Mathematical Competition, 1963].



شکل ۶

۷. راه‌حلی صرفاً هندسی ممکن است، اما اعداد مختلط، تنظیم اطلاعات داده شده را بهتر امکان‌پذیر می‌کنند. با رأس‌های مربع داده شده، مختصات زیر را وابسته می‌کنیم:

$A(-1-i), B(1-i), C(1+i), D(-1+i)$

در این صورت، مختصات K، L، M و N، به‌ترتیب عبارت‌اند از:

$(\sqrt{3}-1)i, -(\sqrt{3}-1), -(\sqrt{3}-1)i, (\sqrt{3}-1)$

درنتیجه، وسط‌های قطعات KL، LM، MN و NK دارای مختصات $\pm(\sqrt{3}-1)\pm(\sqrt{3}-1)i$ و وسط‌های قطعات AK، BK، BL، CL، CM، DM، DN و AN دارای مختصات زیرند:

$\pm(2-\sqrt{3})\pm i$ و $\pm1\pm(2-\sqrt{3})i$

اگر تمام موارد را توسط عامل $\sqrt{2}/2(\sqrt{3}-1)$ ساده کنیم، ملاحظه خواهیم کرد که دوازده رأس دوازده ضلعی، با تمام اختیارات علامت‌های بعلاوه و منها، عبارت‌اند از:

$$\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\pm\frac{\sqrt{2}}{2}i, \pm\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\pm\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}i, \pm\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\pm\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}i$$

با نوشتن این اعداد به صورت مثلثاتی ملاحظه می‌کنیم که می‌شوند:

$\cos 2k\pi/12 + i\sin 2k\pi/12, k = 0,1,2,\dots,11$

درنتیجه، مختصات مختلط رئوس دوازده ضلعی موردنظر، ریشه‌های دوازدهم واحدند که ثابت می‌کنند، دوازده ضلعی، منتظم است [19th IMO, 1977].

۲
دنباله های عددی

دکتر محمدصادق عسکری

عضو هیأت علمی دانشگاه آزاد اسلامی ـ واحد مرکز

تعریف زیر دنباله‌ی اعداد طبیعی

اگر $\{n\}_{n=1}^{\infty}$ دنباله‌ی اعداد طبیعی باشد، آن‌گاه با حذف تعداد متناهی یا تعداد نامتناهی از جملات این دنباله، دنباله‌ای جدید حاصل می‌شود که آن را زیردنباله‌ای از اعداد طبیعی می‌گویند. به عبارت دیگر، دنباله‌ی $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ را یک زیردنباله از دنباله‌ی $\{n\}_{n=1}^{\infty}$ می‌گویند، هرگاه به ازای هر $t \in \mathbb{N}$ و k، اگر $k < t$، آن‌گاه $n_k < n_t$.

به اجمال می‌توان گفت، زیردنباله‌ی $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ از اعداد طبیعی، دنباله‌ای از اعداد طبیعی است که جملاتش رفته رفته بزرگ‌تر و بزرگ‌تر می‌شوند. مثلاً هریک از دنباله‌های:

$۲, ۳, ۵, ۷, ۱۱, ۱۳, ۱۷, \cdots, P_n, \cdots$

$۲, ۴, ۶, ۸, ۱۰, ۱۲, ۱۴, \cdots, ۲n, \cdots$

$۱, ۳, ۵, ۷, ۹, ۱۱, ۱۳, \cdots, ۲n-۱, \cdots$

زیردنباله‌هایی از $\{n\}_{n=1}^{\infty}$ هستند.

تعریف زیردنباله

اگر $f = \{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ یک دنباله از اعداد حقیقی باشد، آن‌گاه با حذف تعداد متناهی یا تعداد نامتناهی از جملات این دنباله، دنباله‌ای جدید به‌وجود می‌آید که آن را زیردنباله‌ای از دنباله‌ی $f = \{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ می‌گویند. همچنین، اگر $N = \{n_i\}_{i=1}^{\infty}$ زیردنباله‌ای از اعداد طبیعی باشد، در این صورت دنباله‌ی foN را یک زیردنباله از دنباله‌ی $f = \{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ می‌گویند که جمله‌ی عمومی آن به صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad foN(k) = f(n_k) = f_{n_k}$$

بنابراین $foN = \{f_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ را یک زیردنباله از دنباله‌ی $f = \{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ می‌گویند.

تعریف ساده‌تر زیر دنباله

اگر $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ یک دنباله از اعداد حقیقی و $\{n_i\}_{i=1}^{\infty}$ یک زیر دنباله از اعداد طبیعی باشد، در این صورت، دنباله‌ی $\{a_{n_i}\}_{i=1}^{\infty}$ را یک زیر دنباله از دنباله‌ی $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ می‌گویند.

مثال: دنباله‌ی $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ با جمله‌ی عمومی $a_n=(-1)^n$ مفروض است. می‌دانیم، این دنباله به صورت $-1,1,-1,1,\dots,(-1)^n,\dots$ نیز نمایش داده می‌شود.

اگر زیر دنباله‌ی $n_i=2i$ از اعداد طبیعی را در نظر بگیریم، آن‌گاه $a_{n_i}=a_{2i}=(-1)^{2i}=1$ یک زیر دنباله از دنباله‌ی $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ است که به صورت $1,1,1,\dots$ و یا $\{a_{2i}\}_{i=1}^{\infty}$ نمایش داده می‌شود.

هم‌چنین، اگر زیر دنباله‌ی $n_i=2i+1$ از اعداد طبیعی را در نظر بگیریم، آن‌گاه دنباله‌ی $a_{n_i}=a_{2i+1}=(-1)^{2i+1}=-1$ یک زیر دنباله از دنباله‌ی $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ است که به صورت $-1,-1,-1,\dots$ یا $\{a_{2i+1}\}_{i=1}^{\infty}$ نمایش داده می‌شود.

نکته: در هر دنباله‌ی $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$؛ زیر دنباله‌ی $\{a_{2k}\}_{k=1}^{\infty}$ را زیر دنباله‌ی حاصل از جملات با اندیس زوج و زیر دنباله‌ی $\{a_{2k-1}\}_{k=1}^{\infty}$ را زیر دنباله‌ی حاصل از جملات با اندیس فرد می‌گویند.

مثال: در دنباله‌ی $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ با جمله‌ی عمومی $a_n=\frac{(-1)^n}{n}$ زیر دنباله‌های حاصل از جمله‌های با اندیس زوج و اندیس فرد را مشخص کنید.

حل:

زیر دنباله‌ی حاصل از جمله‌های با اندیس زوج، دنباله‌ی $\{a_{2k}\}_{k=1}^{\infty}$ است که a_{2k} به صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$a_{2k}=\frac{(-1)^{2k}}{2k}=\frac{1}{2k}$$

این زیر دنباله به صورت $\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{6},\dots,\frac{1}{2k},\dots$ و یا $\left\{\frac{1}{2k}\right\}_{k=1}^{\infty}$ نمایش داده می‌شود.

به طور مشابه، زیر دنباله‌ی حاصل از جملات با اندیس فرد، دنباله‌ی $\{a_{2k-1}\}_{k=1}^{\infty}$ است که در آن a_{2k-1} برابر است با:

$$a_{2k-1}=\frac{(-1)^{2k-1}}{2k-1}=\frac{-1}{2k-1}$$

این زیر دنباله نیز به صورت $-1,-\frac{1}{3},-\frac{1}{5},\dots,\frac{-1}{2k-1},\dots$ و یا $\left\{\frac{-1}{2k-1}\right\}_{k=1}^{\infty}$ نمایش داده می‌شود.

مثال: هر یک از دنباله‌های زیر، یک زیر دنباله از دنباله‌ی $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ با جمله‌ی عمومی $a_n=\frac{n}{n+1}$ است.

$$a_n=\frac{n}{n+1}:\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\frac{5}{6},\dots,\frac{n}{n+1},\dots$$

$$a_{2k}=\frac{2k}{2k+1}:\frac{2}{3},\frac{4}{5},\frac{6}{7},\dots,\frac{2k}{2k+1},\dots$$

$$a_{2k-1}=\frac{2k-1}{2k}:\frac{1}{2},\frac{3}{4},\frac{5}{6},\frac{7}{8},\dots,\frac{2k-1}{2k},\dots$$

$$a_{3k}=\frac{3k}{3k+1}:\frac{3}{4},\frac{6}{7},\frac{9}{10},\frac{12}{13},\dots,\frac{3k}{3k+1},\dots$$

$$a_{3k+1}=\frac{3k+1}{3k+2}:\frac{4}{5},\frac{7}{8},\frac{10}{11},\frac{13}{14},\dots,\frac{3k+1}{3k+2},\dots$$

$$a_{3k-1}=\frac{3k-1}{3k}:\frac{2}{3},\frac{5}{6},\frac{8}{9},\frac{11}{12},\frac{14}{15},\dots,\frac{3k-1}{3k},\dots$$

$$a_{2^k}=\frac{2^k}{2^k+1}:\frac{2}{3},\frac{4}{5},\frac{8}{9},\frac{16}{17},\frac{32}{33},\dots,\frac{2^k}{2^k+1},\dots$$

دنباله‌های کران‌دار و بی‌کران

اگر $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ یک دنباله از اعداد حقیقی باشد، در این صورت، مجموعه‌ی $\{a_n : n\in\mathbb{N}\}$ را بُرد دنباله می‌گویند. دنباله‌ی $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ را از بالا یا پایین یا به طور کلی، کران‌دار خوانیم، هرگاه مجموعه‌ی بُرد دنباله از بالا یا پایین و یا به طور کلی کران‌دار باشد.

همچنین دنباله‌ی $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ را بی‌کران خوانیم، هرگاه بُرد آن حداقل از یک طرف بی‌کران باشد. کران‌داری یک دنباله را به صورت‌های زیر نیز می‌توان تعریف کرد.

تعریف دنباله‌ی از بالا کران‌دار

گوییم دنباله‌ی $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ از بالا کران‌دار است، اگر عدد حقیقی M موجود باشد؛ به طوری که برای هر $n\in\mathbb{N}$، $a_n\leq M$، در این صورت، عدد حقیقی M را یک کران بالای دنباله (کران بالای بُرد دنباله) می‌گویند.

مثال ۱: دنباله‌های $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$ و $\{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$ و

$\left\{\frac{2n}{n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$ از بالا کران‌دار هستند، زیرا:

$$\forall n \in \mathbb{N}:\ n < n+1 \Rightarrow \frac{n}{n+1} < 1$$

$$\forall n \in \mathbb{N};\ -1 \le (-1)^n \le 1$$

$$\forall n \in \mathbb{N}:\ 2 > 0 \Rightarrow 2n+2 > 2n \Rightarrow \frac{2n}{n+1} < 2$$

مثال ۲: دنباله‌های $\left\{\frac{n^2+1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ و $\{2n+1\}_{n=1}^{\infty}$ و $\{2^n-1\}_{n=1}^{\infty}$ از بالا بی‌کران هستند، زیرا بُرد هر کدام، از بالا بی‌کران است:

$$\left\{\frac{n^2+1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty} : \text{بُرد دنباله} = \left\{\frac{n^2+1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\} = \left\{2, \frac{5}{2}, \frac{10}{3}, \frac{17}{4}, \frac{26}{5}, \dots\right\}$$

$$\{2n+1\}_{n=1}^{\infty} : \text{بُرد دنباله} = \{2n+1 : n \in \mathbb{N}\} = \{3, 5, 7, 9, 11, \dots\}$$

$$\{2^n-1\}_{n=1}^{\infty} : \text{بُرد دنباله} = \{2^n-1 : n \in \mathbb{N}\} = \{0, 3, 7, 15, 31, \dots\}$$

تعریف دنباله‌ی از پایین کران‌دار

دنباله‌ی $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ را یک دنباله‌ی از پایین کران‌دار خوانیم، اگر عدد حقیقی N موجود باشد؛ به طوری که برای هر $n \in \mathbb{N}$، $N \le a_n$. در این صورت، عدد حقیقی N را یک کران پایین دنباله (کران پایین بُرد دنباله) می‌گویند.

مثال ۱: دنباله‌های $\{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$ و $\{n^2+1\}_{n=1}^{\infty}$ و $\left\{\frac{n+2}{n+3}\right\}_{n=1}^{\infty}$ از پایین کران‌دار هستند، زیرا:

$$\forall n \in \mathbb{N}:\ -1 \le (-1)^n \le 1$$

$$\forall n \in \mathbb{N}:\ n \ge 1 \Rightarrow n^2+1 \ge 2$$

$$\forall n \in \mathbb{N}:\ \frac{3}{4} \le \frac{n+2}{n+3} < 1$$

مثال ۲: دنباله‌های $\{-n^2\}_{n=1}^{\infty}$ و $\{1-3^n\}_{n=1}^{\infty}$ و $\left\{\frac{-n^2}{n+1}\right\}$ از پایین بی‌کران است، زیرا بُرد این دنباله‌ها از پایین بی‌کران است:

$$\{-n^2\}_{n=1}^{\infty} : \text{بُرد دنباله} = \{-n^2 : n \in \mathbb{N}\} = \{\dots, -9, -4, -1\}$$

$$\{1-3^n\}_{n=1}^{\infty} : \text{بُرد دنباله} = \{1-3^n : n \in \mathbb{N}\} = \{\dots, -26, -8, -2\}$$

$$\left\{\frac{-n^2}{n+1}\right\}_{n=1}^{\infty} : \text{بُرد دنباله} = \left\{\frac{-n^2}{n+1} : n \in \mathbb{N}\right\} = \left\{\dots, -\frac{9}{4}, -\frac{4}{3}, -\frac{1}{2}\right\}$$

تعریف دنباله‌ی کران‌دار

گوییم دنباله‌ی $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ کران‌دار است، اگر این دنباله از بالا و پایین کران‌دار باشد. به عبارت دیگر، دنباله‌ی فوق را کران‌دار گوییم، اگر عدد حقیقی $M > 0$ موجود باشد؛ به طوری که برای هر $n \in \mathbb{N}$، $-M \le a_n \le M$ یا $|a_n| \le M$.

مثال ۱: دنباله‌های $\left\{\frac{n+1}{2n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$ و $\left\{\frac{n^2+n}{n^2+n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$ و $\left\{\frac{1}{n^2+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$ کران‌دار هستند، زیرا:

$$\forall n \in \mathbb{N}:\ \frac{1}{2} < \frac{n+1}{2n+1} \le \frac{2}{3} \Rightarrow -\frac{2}{3} \le \frac{n+1}{2n+1} \le \frac{2}{3}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}:\ \frac{2}{3} \le \frac{n^2+n}{n^2+n+1} < 1 \Rightarrow -1 < \frac{n^2+n}{n^2+n+1} < 1$$

$$\forall n \in \mathbb{N}:\ 0 < \frac{1}{n^2+1} < \frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{1}{2} < \frac{1}{n^2+1} < \frac{1}{2}$$

مثال ۲: دنباله‌های $\{(-1)^n n\}_{n=1}^{\infty}$ و $\{2^n+n\}_{n=1}^{\infty}$ و $\left\{\frac{(-1)^n n^2}{n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$ بی‌کران هستند، زیرا بُرد این دنباله‌ها حداقل از یک طرف بی‌کران است:

$$\{(-1)^n n\}_{n=1}^{\infty} : \text{بُرد دنباله} = \{\dots, -3, -1, 2, 4, \dots\}$$

$$\{2^n+n\}_{n=1}^{\infty} : \text{بُرد دنباله} = \{3, 6, 11, 20, \dots\}$$

$$\left\{\frac{(-1)^n n^2}{n+1}\right\}_{n=1}^{\infty} : \text{بُرد دنباله} = \left\{\dots, \frac{-25}{6}, \frac{-9}{4}, \frac{-1}{2}, \frac{4}{3}, \frac{16}{5}, \dots\right\}$$

تعاریف کران‌داری یک دنباله را می‌توان با علائم ریاضی به شکل زیر بیان کرد:

a_n از بالا کران‌دار است $\Leftrightarrow \exists M \in \mathbb{R}\ \forall n \in \mathbb{N}:\ a_n \le M$

a_n از بالا بی‌کران است $\Leftrightarrow \forall M \in \mathbb{R}\ \exists n \in \mathbb{N}:\ a_n > M$

a_n از پایین کران‌دار است $\Leftrightarrow \exists N \in \mathbb{R}\ \forall n \in \mathbb{N}:\ N \le a_n$

a_n از پایین بی‌کران است $\Leftrightarrow \forall N \in \mathbb{R}\ \exists n \in \mathbb{N}:\ a_n < N$

a_n کران‌دار است $\Leftrightarrow \exists M > 0\ \forall n \in \mathbb{N}:\ |a_n| \le M$

a_n بی‌کران است $\Leftrightarrow \forall M > 0\ \exists n \in \mathbb{N}:\ |a_n| > M$

برای دانش‌آموزان سال دوم

تابع جزء صحیح
(قسمت ۱)

●میرشهرام صدر
mir_sadr@yahoo.com



ورود به مطلب

زنگ دوم دوشنبه‌ی هفته‌ی آخر آذر، قرار بود تابع جزء صحیح را به دانش‌آموزان سال دوم تدریس کنم. با خود گفتم، قبل از تعریف جزء صحیح، بهتر است با مثالی ساده درس را شروع کنم؛ شاید دانش‌آموزان مفهوم جزء صحیح را با مثال روزمره بهتر درک کنند و بی‌درنگ این مثال را طرح کردم.

مثال: بچه‌ها فکر می‌کنید بین ۱ تا ۵۰۰، چند عدد وجود داشته باشد که بر ۱۳ بخش‌پذیر باشند؟

بعد از بحث میان بچه‌ها، اغلب آن‌ها بر این باور بودند که بهتر است، تعداد مضارب طبیعی ۱۳ را بین ۱ تا ۵۰۰ محاسبه کنیم و چنین عمل کردند:

۱×۱۳ و ۲×۱۳ و ۳×۱۳ و ۴×۱۳ و...

آن‌ها دنباله‌ای ساخته بودند که مضارب طبیعی ۱۳ را نشان می‌داد و آخرین جمله‌ی این دنباله، کوچک‌تر از ۵۰۰ بود؛ ولی مقدار آن را نمی‌دانستند. به آن‌ها گفتم، با توجه به تعریف تقسیم می‌توان، جملهٔ آخر این دنباله را محاسبه کرد:

```
500 | 13
39  | 38
---
110
104
---
  6
```

روشن است که آخرین عدد طبیعی کوچک‌تر از ۵۰۰ که بر ۱۳ بخش‌پذیر است، برابر با ۳۸×۱۳ است.

بنابراین، دنباله‌ی اعداد دانش‌آموزان را کامل کردم:

۱×۱۳ و ۲×۱۳ و ۳×۱۳ و... و ۳۸×۱۳

در نتیجه، از ۱ تا ۵۰۰ سی‌وهشت عدد وجود دارند که بر ۱۳ بخش‌پذیرند و مسأله حل شد.

اما به‌طور ساده‌تر و بدون تشکیل دنباله، و فقط با استفاده از الگوریتم تقسیم هم می‌توان به این موضوع پی برد.

$$500 = 38 \times 13 + 6$$

$$\Rightarrow \frac{500}{13} = 38 + \frac{6}{13} \qquad (1)$$

رابطه‌ی ۱ به این معناست که در تقسیم ۵۰۰ بر ۱۳ سی‌وهشت عدد وجود دارند که مضرب ۱۳ هستند. اکنون به رابطه‌ی ۱ بیشتر توجه می‌کنیم. در این رابطه، ۳۸ را جزء صحیح یا بخش درست عدد $\frac{500}{13}$ و $\frac{6}{13}$ را جزء اعشاری یا بخش کسری $\frac{500}{13}$ می‌نامیم. جزء صحیح $\frac{500}{13}$ را با نماد $\left[\frac{500}{13}\right]$ نمایش می‌دهیم. بنابراین: $\left[\frac{500}{13}\right] = 38$

نتیجه: هرگاه n و k عددهایی طبیعی باشند، تعداد عددهای طبیعی از ۱ تا n که بر k بخش‌پذیرند، برابر با $\left[\frac{n}{k}\right]$ است.

□

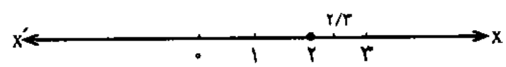
جزء صحیح

برای هر عدد حقیقی مانند x، عدد صحیحی مانند n وجود دارد، به‌طوری که: $n \le x < n+1$. در این صورت، جزء صحیح x را برابر با n تعریف می‌کنیم. جزء صحیح x را با نماد $[x]$ نمایش می‌دهیم. بنابراین داریم:

$n \le x < n+۱ \Leftrightarrow [x] = n$

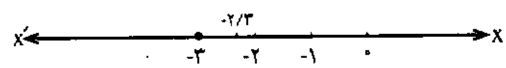
برای مثال، وقتی عدد $x = ۲/۳$ را در نظر می‌گیریم، ملاحظه می‌کنیم که عدد صحیح $n = ۲$ موجود است، به‌طوری‌که:

$$۲ \le ۲/۳ < ۲+۱ \Rightarrow [۲/۳] = ۲$$



به‌همین‌صورت، وقتی عدد $x = -۲/۳$ را در نظر می‌گیریم، ملاحظه می‌کنیم که عدد صحیح $n = -۳$ موجود است، به‌طوری‌که:

$$-۳ \le -۲/۳ < -۳+۱ \Rightarrow [-۲/۳] = -۳$$



به عبارت دیگر، می‌توان جزء صحیح x را به این صورت تعریف کرد: «بزرگ‌ترین عدد صحیح کوچک‌تر یا مساوی x را، جزء صحیح x می‌گوییم.»

مثال:

الف) $[-۱/۷] = -۲$؛ زیرا: $-۲ \le -۱/۷ < -۱$.

ب) $[۵] = ۵$؛ زیرا: $۵ \le ۵ < ۶$.

ج) هرگاه داشته باشیم: $۴ \le x < ۵$، در این صورت $[x] = ۴$.

د) هرگاه داشته باشیم: $[x] = ۷$، در این صورت $۷ \le x < ۸$.

هـ) $[\sqrt{۲}] = ۱$؛ زیرا: $۱ \le \sqrt{۲} \simeq ۱/۴ < ۲$.

و) $[-\pi] = -۴$؛ زیرا: $-۴ \le -\pi \simeq -۳/۱۴ < -۳$.

ز) $\left[\frac{۱۷}{۳}\right] = ۵$؛ زیرا: $۵ \le \frac{۱۷}{۳} = ۵/\overline{۶} < ۶$.

ح) $\left[\frac{۳}{\pi}\right] = ۰$؛ زیرا: $۰ \le \frac{۳}{\pi} \simeq ۰/۹۵ < ۱$، با توجه به این که $\pi \simeq ۳/۱۴$.

مثال: معادله‌ی $۲ + ۲[x] = ۸$ را حل کنید.

$$۲ + ۲[x] = ۸ \Rightarrow ۲[x] = ۶ \Rightarrow [x] = ۳ \Rightarrow ۳ \le x < ۴ \Rightarrow x \in [۳,۴)$$

جزء اعشاری

هرگاه x یک عدد حقیقی باشد، به‌طوری‌که $[x] = k$، می‌توان نوشت:

$$x = k + \alpha \;;\; (۰ \le \alpha < ۱)$$

اکنون اگر در این رابطه قرار دهیم $k = [x]$، خواهیم داشت:

$$x = [x] + \alpha \;;\; (۰ \le \alpha < ۱)$$

$$\Rightarrow x - [x] = \alpha \;;\; (۰ \le \alpha < ۱) \qquad (۲)$$

بنابه‌تعریف، مقدار $x - [x]$ را که همان مقدار α است؛ جزء اعشاری یا بخش کسری x تعریف می‌کنیم. با توجه به رابطه‌ی ۲ ملاحظه می‌کنیم، جزء اعشاری هر عدد حقیقی همواره نامنفی و کوچک‌تر از ۱ است.

مثال: جزء اعشاری عددهای $۳\sqrt{۲}$ و $-۲\sqrt{۳}$ را به‌دست آورید.

حل: فرض کنیم: $x = ۳\sqrt{۲}$ و $y = -۲\sqrt{۳}$. بنابراین داریم:

$$x = ۳\sqrt{۲} \simeq ۴/۲ \Rightarrow [x] = [۴/۲] = ۴$$

$$۳\sqrt{۲} \text{ جزء اعشاری } = x - [x] \simeq ۴/۲ - ۴ = ۰/۲$$

$$y = -۲\sqrt{۳} \simeq -۳/۴ \Rightarrow [x] = [-۳/۴] = -۴$$

$$-۲\sqrt{۳} \text{ جزء اعشاری } = x - [x] \simeq -۳/۴ - (-۴) = ۰/۶$$

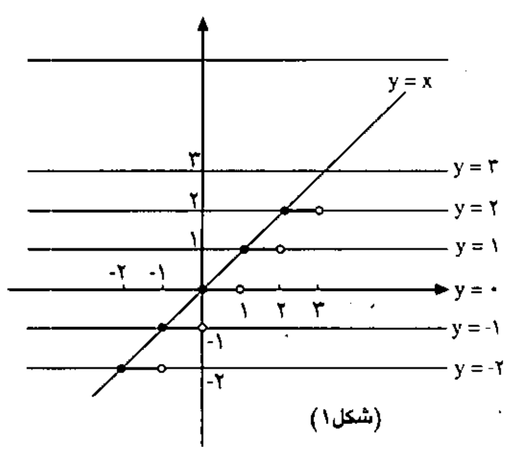
□

تابع جزء صحیح

تابع با ضابطه‌ی $f(x) = [x]$ که دامنه‌ی آن مجموعه‌ی اعداد حقیقی $\mathbb{R}$ و برد آن مجموعه‌ی اعداد صحیح Z است، تابع جزءصحیح گفته می‌شود. بنابراین تابع جزء صحیح به این صورت است:

$$\begin{cases} f: \mathbb{R} \longrightarrow Z \\ f(x) = [x] \end{cases}$$

می‌دانیم که نمودار تابع جزء صحیح چنین است:



(شکل۱)

در این‌جا می‌خواهیم به بررسی خواص و رفتار تابع جزءصحیح بپردازیم. بنابراین موارد زیر را تحقیق می‌کنیم.

❑ یک به‌یک بودن تابع؛

- فرد یا زوج بودن تابع؛
- متناوب بودن تابع؛
- معکوس‌پذیری تابع؛
- صعودی یا نزولی بودن تابع

بررسی یک‌به‌یک بودن تابع

تابع با ضابطه‌ی $f(x)=[x]$ یک‌به‌یک نیست، زیرا برای هر $x_1,x_2\in D_f$ داریم:

$$f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow [x_1]=[x_2]\not\Rightarrow x_1=x_2$$

از طرف دیگر، با توجه به شکل ۱ ملاحظه می‌کنیم، (برای مثال) خط به معادله‌ی $y=1$ نمودار تابع را در بی‌شمار نقطه قطع می‌کند.

فرض کنید: $x_1=1/7$ و $x_2=1/3$ $(x_1\neq x_2)$. ملاحظه می‌کنیم:

$$\begin{cases}f(x_1)=[1/7]=1\\ f(x_2)=[1/3]=1\end{cases}\Rightarrow f(x_1)=f(x_2)$$

بنابراین در تابع، جزء صحیح $f(x_1)$ می‌تواند برابر با $f(x_2)$ باشد، در حالی که $x_1\neq x_2$.

بررسی فرد یا زوج بودن تابع

تابع با ضابطه‌ی $f(x)=[x]$ فرد یا زوج نیست، زیرا برای هر $x\in D_f$ داریم:

$$\begin{cases}-x\in D_f=\mathbb{R}\\ f(-x)\neq \pm f(x)\end{cases}$$

از یک طرف، با توجه به شکل ملاحظه می‌کنیم، نمودار این تابع نسبت به محور yها متقارن نیست، پس این تابع نمی‌تواند زوج باشد. از طرف دیگر، مبدأ مختصات مرکز تقارن این تابع نیست، پس این تابع نمی‌تواند فرد باشد.

برای مثال فرض کنیم: $x=2/3$. بنابراین داریم:

$$x=2/3\Rightarrow\begin{cases}f(-x)=[-2/3]=-3\\ \pm f(x)=\pm[2/3]=\pm 2\end{cases}\Rightarrow f(-x)\neq\pm f(x)$$

بررسی متناوب بودن تابع

تابع با ضابطه‌ی $f(x)=[x]$ متناوب نیست، زیرا برای هر $T\neq 0, x\in D_f$ داریم:

$$\begin{cases}(x\pm T)\in D_f=\mathbb{R}\\ f(x+T)=[x+T]\neq[x]\Rightarrow f(x+T)\neq f(x)\end{cases}$$

نکته: تابع به معادله‌ی $f(x)=ax-[ax]$ متناوب و دوره‌ی تناوب اصلی آن $T=\frac{1}{a}$ است $(a\neq 0)$. زیرا برای هر $x\in D_f=\mathbb{R}$ داریم: $(x\pm T)\in D_f$ و هم‌چنین:

$$f(x+T)=f(x+\frac{1}{a})=a(x+\frac{1}{a})-\left[a(x+\frac{1}{a})\right]$$
$$=ax+1-[ax+1]$$
$$=ax+1-([ax]+1)=ax-[ax]=f(x)$$
$$\Rightarrow f(x+T)=f(x)$$

بررسی معکوس‌پذیری تابع

چنان‌که ملاحظه کردید، تابع با ضابطه‌ی $f(x)=[x]$ یک‌به‌یک نیست. در نتیجه، این تابع معکوس‌پذیر نمی‌باشد.

بررسی صعودی یا نزولی بودن تابع

تابع با ضابطه‌ی $f(x)=[x]$ در بازه‌های $[n,n+1)$ ؛ $n\in z$ صعودی و نزولی است، زیرا برای هر $x_1,x_2\in[n,n+1)$ که $x_1<x_2$ خواهیم داشت:

$$n\leq x_1<x_2<n+1\Rightarrow [x_1]=[x_2]$$

بنابراین، رابطه‌ی $x_1<x_2\Rightarrow f(x_1)\leq f(x_2)$ برقرار است. پس تابع f صعودی است.

هم‌چنین، رابطه‌ی $x_1<x_2\Rightarrow f(x_1)\geq f(x_2)$ برقرار است. پس تابع f نزولی است.

خاصیت‌های تابع جزء صحیح

خاصیت ۱. $[x]\leq x<[x]+1$

زیرا با فرض این‌که $[x]=n\in z$، داریم:

$$n\leq x<n+1$$

و این رابطه برقراری است.

مثال: مقدار x را از این معادله به‌دست آورید:

$$\left[\frac{6x+5}{8}\right]=\frac{15x-7}{5}$$

حل: چون $\left[\frac{6x+5}{8}\right]$ عددی صحیح است، بنابراین:

$$\frac{15x-7}{5}=k\in Z\ (1)\Rightarrow 15x-7=5k$$

$$\Rightarrow x=\frac{5k+7}{15}\ (2)$$

با جایگزینی رابطه‌های ۱ و ۲ در معادله داریم:

$$\left[\frac{\frac{6(5k+7)}{15}+5}{8}\right]=k\Rightarrow\left[\frac{10k+39}{40}\right]=k\in Z$$

$$\Rightarrow k\leq\frac{10k+39}{40}<k+1$$

اکنون باید دستگاه نامعادله‌های زیر را حل کنیم:

$$\begin{cases}\dfrac{10k+39}{40}\ge k\\[2mm] \dfrac{10k+39}{40}<k+1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}k\le\dfrac{13}{10}\\[2mm] k>-\dfrac{1}{30}\end{cases}$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{30}<k\le\frac{13}{10}\quad(3)$$

چون k عددی درست است و در رابطه‌ی ۳ صدق می‌کند، پس $k=0$ یا $k=1$ که با قرار دادن این مقدارها به جای k در رابطه‌ی ۲، مقدارهای x به‌دست می‌آیند.

$$k=0\Rightarrow x=\frac{7}{15}$$

$$k=1\Rightarrow x=\frac{4}{5}$$

در نتیجه، معادله‌ی مفروض دارای دو ریشه‌ی $\frac{7}{15}$ و $\frac{4}{5}$ است.

خاصیت۲. هرگاه $n\in Z$ و $x\in R$ داریم.

$$[x+n]=[x]+n$$

زیرا اگر $m\le x<m+1$، آن‌گاه $[x]=m$ و هم‌چنین:

$$m\le x<m+1\Rightarrow m+n\le x+n<(m+n)+1$$
$$\Rightarrow[x+n]=m+n=[x]+n$$

مثال:

$$[-5/3+2]=[-5/3]+2=-6+2=-4$$
$$[x+7]=[x]+7$$
$$[3x-4]=[3x]-4$$
$$[x+[x]+1]=[x]+[x]+1=2[x]+1$$

مثال: معادله‌ی $\left[\frac{x}{2}+1\right]-2\left[\frac{x}{2}-3\right]=4$ را حل کنید.

حل:

$$\left[\frac{x}{2}+1\right]-2\left[\frac{x}{2}-3\right]=4\Rightarrow\left[\frac{x}{2}\right]+1-2\left(\left[\frac{x}{2}\right]-3\right)=4$$

$$\Rightarrow\left[\frac{x}{2}\right]+1-2\left[\frac{x}{2}\right]+6=4\Rightarrow-\left[\frac{x}{2}\right]=-3$$

$$\Rightarrow\left[\frac{x}{2}\right]=3\Rightarrow3\le\frac{x}{2}<4\Rightarrow6\le x<8$$

در نتیجه مجموعه جواب این معادله به صورت $[6,8)$ است.

خاصیت ۳. برای هر عدد حقیقی x داریم:

$$0\le x-[x]<1$$

اگر فرض کنیم: $[x]=n$، بنابراین:

$$\begin{cases}n\le x<n+1\\ [x]=n\end{cases}\Rightarrow[x]\le x<[x]+1$$

$$\Rightarrow[x]-[x]\le x-[x]\le[x]+1-[x]\Rightarrow0\le x-[x]<1$$

مثال: اگر $x-k=2\left[\frac{x}{2}+1\right]$، در این صورت مجموعه مقادیر k را به‌دست آورید.

حل:

$$x-k=2\left(\left[\frac{x}{2}\right]+1\right)\Rightarrow x-k=2\left[\frac{x}{2}\right]+2$$

$$\Rightarrow\frac{x}{2}-\frac{k}{2}=\left[\frac{x}{2}\right]+1\Rightarrow\frac{x}{2}-\left[\frac{x}{2}\right]=\frac{k}{2}+1$$

چون $0\le\frac{x}{2}-\left[\frac{x}{2}\right]<1$، بنابراین داریم:

$$0\le\frac{k}{2}+1<1\Rightarrow-1\le\frac{k}{2}<0\Rightarrow-2\le k<0$$

در نتیجه، مجموعه مقادیر k به صورت $[-2,0)$ است.

خاصیت ۴. برای هر عدد حقیقی مانند x داریم:

$$[-x]=\begin{cases}-[x] & x\in Z \quad \text{حالت اول}\\ -[x]-1 & x\notin Z\end{cases}$$

برهان:

حالت اول: اگر $x=n\in Z$، در این صورت $[x]=n$ و داریم:

$$x=n\Rightarrow-x=-n\Rightarrow[-x]=[-n]=-n\Rightarrow[-x]=-n$$

از طرف دیگر، $[x]=n$. بنابراین داریم:

$$[-x]=-[x]$$

حالت دوم: اگر $x\notin Z$، بنابراین $n\in Z$ موجود است، به‌طوری‌که $n<x<n+1$. در نتیجه $[x]=n$ و داریم:

$$n<x<n+1\xrightarrow[\text{ضرب می‌کنیم}\ -1]{\text{طرفین را در}}-(n+1)<-x<-n$$

$$\Rightarrow-n-1<-x<-n$$

از طرف دیگر $[x]=n$ یا $-[x]=-n$. در نتیجه داریم:

$$-[x]-1<-x<-[x]\Rightarrow[-x]=-[x]-1$$

مثال: معادله‌ی $3-2[-x]=1$ را حل کنید.

$$3-2[-x]=1\Rightarrow-2[-x]=-2\Rightarrow[-x]=1$$

حالت اول: اگر $x\in Z$، در این صورت $[-x]=-[x]$. پس داریم:

$$[-x]=1 \text{ و } x\in Z\Rightarrow-[x]=1\Rightarrow[x]=-1$$

$$\Rightarrow-1\le x<0\Rightarrow x\in[-1,0)$$

$$x\in[-1,0) \text{ و } x\in Z\Rightarrow x=-1$$

حالت دوم: اگر $x \notin Z$ ، در این صورت $[-x] = -[x]-1$. پس داریم:

$[-x]=1$ و $x \notin Z \Rightarrow -[x]-1=1 \Rightarrow [x]=-2$

$\Rightarrow -2 \le x < -1 \Rightarrow x \in [-2,1)$

$x \in [-2,1)$ و $x \notin Z \Rightarrow x \in (-2,-1)$

مجموعه جواب معادله $= (-2,-1) \cup \{-1\} = (-2,-1]$

خاصیت۵. برای هر عدد حقیقی مانند x داریم:

$$[x]+[-x]=\begin{cases} 0 & x \in Z \quad \text{حالت اول} \\ -1 & x \notin Z \quad \text{حالت دوم} \end{cases}$$

برهان:

حالت اول: اگر $x \in Z$ ، با توجه به خاصیت ۴ داریم:

$[-x]=-[x] \Rightarrow [x]+[-x]=[x]-[x]=0$

حالت دوم: اگر $x \notin Z$ با توجه به خاصیت ۴ داریم:

$[-x]=-[x]-1 \Rightarrow [x]+[-x]=[x]-[x]-1=-1$

مثال: مجموعه جواب معادله‌ی $3[x]+2[-x]=6$ را به‌دست آورید.

حل:

حالت اول: اگر $x \in Z$ ، در این صورت $[x]+[-x]=0$.

بنابراین داریم:

$3[x]+2[-x]=6 \Rightarrow [x]+2([x]+[-x])=6$

$\Rightarrow [x]=6 \Rightarrow 6 \le x < 7$

$6 \le x < 7$ و $x \in Z \Rightarrow x=6$

حالت دوم: اگر $x \notin Z$ ، آن‌گاه $[x]+[-x]=-1$.

بنابراین داریم:

$3[x]+2[-x]=6 \Rightarrow [x]+2([x]+[-x])=6$

$\Rightarrow [x]-2=6 \Rightarrow [x]=8 \Rightarrow 8 \le x < 9$

$8 \le x < 9$ و $x \notin Z \Rightarrow x \in (8,9)$

مجموعه جواب معادله $= (8,9) \cup \{6\}$

مثال: معادله‌ی $\left[\frac{5}{3x-7}\right]+\left[\frac{-5}{3x-7}\right]=0$ چند جواب دارد؟

حل: فرض کنیم $k=\frac{5}{3x-7}$ ، بنابراین داریم:

$[k]+[-k]=0$

رابطه‌ی اخیر برای هر $k \in Z$ برقرار است. بنابراین معادله بی‌شمار ریشه به‌صورت زیر دارد:

$$k=\frac{5}{3x-7} \Rightarrow x=\frac{7k+5}{3k}$$

برای هر $k \in z \neq 0$ ریشه‌ای از معادله به‌دست می‌آید.

خاصیت۶. اگر x و y دو عدد حقیقی باشند، ثابت کنید:

$[x+y]=[x]+[y]+1$ یا $[x+y]=[x]+[y]$

برهان: برای هر $y \in R$ و x داریم:

$x=[x]+\alpha ; 0 \le \alpha < 1$

$y=[y]+\beta ; 0 \le \beta < 1$

اکنون فرض کنیم $[x]=n$ و $[y]=m$ که $m \in Z$ و n؛

پس:

$x+y=[x]+[y]+\alpha+\beta$

$\Rightarrow x+y=n+m+\alpha+\beta$

$\Rightarrow [x+y]=[n+m+\alpha+\beta]$

$\Rightarrow [x+y]=n+m+[\alpha+\beta]$

$\Rightarrow [x+y]=[x]+[y]+[\alpha+\beta] \quad (1)$

از طرف دیگر داریم:

$$\begin{cases} 0 \le \alpha < 1 \\ 0 \le \beta < 1 \end{cases} \Rightarrow 0 \le \alpha+\beta < 2$$

بنابراین دو حالت را در نظر می‌گیریم.

حالت اول: اگر $0 \le \alpha+\beta < 1$ ، بنابراین $[\alpha+\beta]=0$. در نتیجه با توجه به رابطه‌ی ۱ داریم:

$[x+y]=[x]+[y]$

حالت دوم: اگر $1 \le \alpha+\beta < 2$ ، پس $[\alpha+\beta]=1$. در نتیجه با توجه به رابطه‌ی ۱ داریم:

$[x+y]=[x]+[y]+1$

نتیجه: با توجه به خاصیت۶ برای عددهای حقیقی x و y می‌توان نوشت:

$[x+y] \le [x]+[y]$

منابع

۱. امیری، حمیدرضا و صدر، میرشهرام و حسینی، سیدعلی. خودآموز ریاضیات۲. مؤسسه‌ی آموزش از راه دور. چاپ دوم. ۱۳۸۵.

۲. قندهاری، احمد و امیری، حمیدرضا. تابع. انتشارات مدرسه‌ی برهان. چاپ اول. ۱۳۷۶.

۳. فرهنگ ریاضیات. گروه ریاضی انتشارات مدرسه. انتشارات مدرسه‌ی برهان. چاپ سوم. ۱۳۸۵.

۴. شهریاری، پرویز. ریاضیات محاسبه‌ای۳. انتشارات مجید. چاپ دوم. ۱۳۷۵.

معرفی سایت‌های ریاضی جهان

۱. AAAmath.com

آدرس اینترنتی: http://www.aaamath.com

فهرست اصلی:

۱. مُحتویات (Contents)
۲. عنوان‌های ریاضی (Math Topics)
۳. سطوح دسته‌بندی‌های سنی مدرسه‌ای (Grade School Levels)

فهرست مطالب با عنوان‌های ریاضی:

۱. جبر (Algebra)
۲. اعشاری‌ها (Decimals)
۳. تقسیم (Division)
۴. معادلات (Equations)
۵. برآورد (Estimation)
۶. کسرها (Fractions)
۷. هندسه (Geometry)
۸. نمودارها (Graphs)
۹. ریاضیات ذهنی (Mental Math)
۱۰. آمار (Statistics)

۲. Maths Is Fun

آدرس اینترنتی: http://www.mathsisfun.com

فهرست اصلی:

۱. فهرست ریاضی (Math Menu)
۲. معماها (Puzzles)
۳. محاسبات (Calculators)
۴. مطالب دیگر (Other Bits)

عنوان‌های فهرست ریاضی:

۱. عدد و جبر (Number & Algebra)
۲. شکل، فضا و اندازه (Shape, Space & Measure)
۳. هندسه (Geometry)
۴. جابه‌جایی اطلاعات (Handling Data)
۵. گوناگون (Miscellaneous)

۳. Karl's Calculus Tutor

آدرس اینترنتی: http://www.karlscalculus.org

فهرست موضوعی:

۱. نظریه‌ی اعداد (Number Theory)
۲. حدود (Limits)
۳. پیوستگی (Continuity)
۴. مشتق‌ها (Derivatives)
۵. کاربردهای مشتق (Applications of Derivatives)
۶. نماها و لگاریتم‌ها (Exponentials and Logarithms)
۷. توابع مثلثاتی (Trigonometric Functions)
۸. ترفندهای بیشتر به وسیله‌ی مشتق‌ها (More Tricks With Derivatives)
۹. تمرین میان ترم (Practice Middle-Term)
۱۰. انتگرال‌ها (Integrals)
۱۱. روش‌های انتگرال گیری (Methods of Integrations)
۱۲. کاربردهای انتگرال‌ها (Application of Integrals)

۴. Math-net

آدرس اینترنتی: http://www.math-net.org

موضوع سایت: ارائه‌ی اطلاعات و آگاهی‌های بین‌المللی پیرامون ریاضیات در چارچوب یک دستگاه ارتباطی منظم و با برنامه

فهرست اصلی:

۱. رویدادها (Events)
۲. پیشنهادها (Recommendations)
۳. عضویت (Membership)
۴. اتحادیه‌ی بین‌المللی ریاضیات (International Mathematical Union)
۵. اخبار (News)

۵. Mathbook.com

آدرس اینترنتی: http://www.mathbook.com

ویژگی اصلی سایت: مطالب آن در قالب بسته‌هایی حاوی مطالبی پیرامون ریاضی ارائه شده است.

فهرست موضوعی

۱. بسته‌ی هندسه‌ی تحلیلی (Analytic Geometry Store)
۲. بسته‌ی ریاضیات باستان (Ancient Mathematics Store)
۳. بسته‌ی جبر بول (Boolean Algebra Store)
۴. بسته‌ی حساب دیفرانسیل و انتگرال (Calculus Store)
۵. بسته‌ی هندسه‌ی اقلیدسی (Euclidean Geometry Store)
۶. بسته‌ی عدد فیبوناچی (Fibonacci Number store)
۷. بسته‌ی حساب دبیرستانی (High School Arithmetic Store)
۸. بسته‌ی تاریخ ریاضیات (History Mathematics Store)
۹. بسته‌ی انتگرال‌ها (Integrals Store)
۱۰. بسته‌ی جبر خطی (Linear Algebra Store)
۱۱. بسته‌ی لگاریتم‌ها (Logarithms Store)
۱۲. بسته‌ی بازی‌های ریاضی (Math Games Store)
۱۳. بسته‌ی معماهای ریاضی (Math Puzzles store)
۱۴. بسته‌ی جبر ماتریسی (Matrix Algebra store)
۱۵. بسته‌ی نظریه‌ی اعداد (Number Theory Store)
۱۶. بسته‌ی نظریه احتمال (Probability Theory Store)
۱۷. بسته‌ی آمار (Statistics Store)
۱۸. بسته‌ی نظریه‌ی نسبیت (Theory of Relativity Store)
۱۹. بسته‌ی توپولوژی (Topology Store)
۲۰. بسته‌ی مثلثات (Trigonometry Store)

مربع لاتین $n \times n$ و کاربردهای آن

$1, 2, 3, \ldots, n$

● سیمین اکبری‌زاده
دبیر ریاضی ناحیه یک اراک

مربع لاتین

مربع لاتین عبارت است از ماتریسی $n \times n$ با درایه‌های $n, \ldots, ۳, ۲, ۱$، به طوری که در هیچ سطر و ستونی، درایه‌ها تکراری نباشند؛ مثل:

۱	۲	۳
۲	۳	۱
۳	۱	۲

آزمون۱. در یک جدول ۴×۴، عددهای ۱ تا ۴ به‌صورتی نوشته شده‌اند که در هیچ سطر و ستونی عدد تکراری وجود ندارد. عددهای نوشته شده در چهار تا از خانه‌های این جدول را، مطابق شکل زیر می‌دانیم. عدد موجود در خانه‌ای که با * مشخص شده است، چه می‌تواند باشد؟

۱			
	۲		۳
		*	
			۲

الف) ۱ ب) ۴ ج) ۳ د) ۲ هـ) نامعلوم.

پاسخ: درایه مورد نیاز در مرحله‌ی iام را با a_i نام‌گذاری می‌کنیم.

۱	a_3	a_4	a_1
	۲		۳
	a_5	*	a_2
			۲

a_1: عددی به‌جز ۱، ۳ و ۲ باید باشد، لذا ۴ است.
a_2: عددی به جز ۴، ۳ و ۲ باید باشد، لذا ۱ است.
a_3: عددی به‌جز ۱، ۴ و ۲ باید باشد، لذا ۳ است.
a_4: عددی به‌جز ۱، ۳ و ۴ باید باشد، لذا ۲ است.
a_5: عددی به‌جز ۳، ۲ و ۱ باید باشد، لذا ۴ است.

و نهایتاً، * عددی به‌جز ۲، ۱ و ۴ باید باشد، لذا ۳ است. پس باید گزینه‌ی ج علامت زده شود.

آزمون۲. در خانه‌های خالی مربع زیر به چند طریق می‌توان اعداد ۱ تا ۳ را قرار داد، به طوری که در هیچ سطر و ستونی عدد تکراری نباشد؟

	۳	

الف) ۲ ب) ۴ ج) ۶ د) ۸ هـ) ۱۲

پاسخ: برای a_1 دو حالت وجود دارد: ۱ یا ۲. در هر حالت، ستون دوم پر می‌شود. و حالا برای a_2 هم دو حالت وجود دارد: ۱ یا ۲. با قرار دادن عدد در خانه‌ی a_2، ستون‌های اول و سوم به‌طور یکتا پر می‌شوند. پس تعداد حالات ۴=۲×۲، و گزینه‌ی درست «ب» است.

	a_1	
a_2	۳	

جواب‌ها عبارت‌اند از:

۱)

۳	۲	۱
۱	۳	۲
۲	۱	۳

۲)

۱	۲	۳
۲	۳	۱
۳	۱	۲

۳)

۳	۱	۲
۲	۳	۱
۱	۲	۳

۴)

۲	۱	۳
۱	۳	۲
۳	۲	۱

آزمون۳. به چند طریق می‌توان جدول نیمه‌پر زیر را با اعداد ۱ تا ۴ طوری پر کرد که در هیچ سطر و ستونی عدد تکراری نداشته باشیم؟

۱	۲		
	۱	۲	
		۱	

الف) ۰ ب) ۱ ج) ۲ د) ۳ هـ) !۴

پاسخ: دو خانه‌ی خالی سطر اول را به صورت «۴-۳» یا «۳-۴» می‌توان پر کرد. اگر این دو درایه را از چپ به راست به‌ترتیب با سه و چهار پر کنیم، به ترتیب درایه‌های چهارمِ سطر دوم، اولِ سطر دوم، چهارمِ سطر سوم، اولِ سطر سوم، دوم سطرِ سوم، و درنهایت درایه‌های سطر چهارم به صورت یکتا تعیین می‌شوند. بنابراین، برای هریک از دو روش پر کردن سطر اول، یک حالت برای پر کردن بقیه‌ی جدول وجود دارد. پس جواب ۲=۱×۲، و گزینه‌ی درست ج است. جواب‌ها عبارت‌اند از:

۱)

۱	۲	۴	۳
۳	۱	۲	۴
۴	۳	۱	۲
۲	۴	۳	۱

۲)

۱	۲	۳	۴
۴	۱	۲	۳
۳	۴	۱	۲
۲	۳	۴	۱

دو مربع لاتین متعامد

دو مربع لاتین $n \times n$، $L_1 = [a_{ij}]$ و $L_2 = [b_{ij}]$ را متعامد گوییم، هرگاه درایه‌های ماتریس $[(a_{ij}, b_{ij})]$ که از زوج‌های مرتب تشکیل شده‌اند، تکراری نباشند. مثلاً دو مربع لاتین ۳×۳ زیر متعامد هستند.

$L_1 =$

۱	۲	۳
۲	۳	۱
۳	۱	۲

$L_2 =$

۱	۲	۳
۳	۱	۲
۲	۳	۱

$\Rightarrow$

(۱,۱)	(۲,۲)	(۳,۳)
(۲,۳)	(۳,۱)	(۱,۲)
(۳,۲)	(۱,۳)	(۲,۱)

مربع‌های لاتین متعامد، علاوه بر جذابیت ریاضی، کاربردهای فراوانی در طرح‌های آزمایشی، کشاورزی، داروسازی، رمزنگاری و نظریه‌ی کدگذاری دارند که در ادامه، دو نوع از این کاربردها را ارائه خواهیم کرد.

کاربرد مربع لاتین

کاربرد ۱. مربع‌های لاتین در طرح آزمایش‌ها کاربرد دارند. مثلاً، آزمایشی از کارایی ماشین‌های گوناگون نخ‌ریسی در یک کارخانه را می‌توان با استفاده از دو مربع لاتین متعامد به صورت زیر انجام داد. فرض کنید، پنج ماشین نخ‌ریسی با شماره‌های ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ توسط پنج کارگر به نام‌های اکبر، بابک، جواد، داود و هرمز در پنج روز اول هفته به کار گرفته می‌شوند و می‌خواهیم کارآیی این ماشین‌ها را روی پنج نوع متفاوت از الیاف A، B، C، D و E آزمایش کنیم.

	شنبه	یکشنبه	دوشنبه	سه‌شنبه	چهارشنبه
اکبر	۱A	۲B	۳C	۴D	۵E
بابک	۲D	۴C	۵A	۳E	۱B
جواد	۳B	۵D	۲E	۱C	۴A
داود	۴E	۳A	۱D	۵B	۲C
هرمز	۵C	۱E	۴B	۲A	۳D

هر کارگر، هر روز با یکی از پنج ماشین کار می‌کند و یکی از پنج نوع از الیاف را می‌آزماید. هدف این است که بعد از روز پنجم، هر کارگر با هر پنج ماشین و با هر پنج نوع از الیاف کار کرده باشد. این جدول که از دو مربع لاتین متعامد 5×5 گرفته شده است، این مسأله را حل می‌کند. با توجه به جدول فوق، مثلاً بابک روز سه‌شنبه با ماشین شماره‌ی ۳ الیاف نوع E را به کار می‌گیرد. بدین ترتیب می‌توانیم کارایی هر نوع ماشین را با هر نوع از الیاف آزمایش کنیم و نظر کارگران را هم دخالت دهیم.

کاربرد ۲. به ازای هر n داده شده می‌توان یک مربع لاتین از مرتبه‌ی n ساخت. از مربع‌هایی که در زیر به ازای $n = 4$ و $n = 5$ ساخته شده‌اند، می‌توان به راحتی برای حالت کلی نیز ایده گرفت.

۱	۲			
۲				
				۳
			۳	۴

۱	۲		
۲			
			۳

دقت کنید که در هر دو مربع فوق، بعضی از درایه‌های گوشه‌ای نوشته شده‌اند. در مربع اول چهار تا و در دیگری شش تا از درایه‌ها نوشته شده‌اند. جالب این است که اگر در هریک از این دو مربع، فقط این درایه‌ها را به ما بدهند، می‌توانیم بقیه‌ی درایه‌ها را به طور یکتا به دست آوریم. مثلاً دو مربع زیر کامل شده‌ی مربع های بالا هستند.

۱	۲	۳	۴	۵
۲	۳	۴	۵	۱
۳	۴	۵	۱	۲
۴	۵	۱	۲	۳
۵	۱	۲	۳	۴

۱	۲	۳	۴
۲	۳	۴	۱
۳	۴	۱	۲
۴	۱	۲	۳

تعداد درایه‌های داده شده در حالت کلی $\left[\frac{n^2}{4}\right]$ است (منظور از نماد [ ] جزء صحیح است). حال فرض کنید، درایه‌های یک مربع لاتین اطلاعاتی است که شما می‌خواهید به شخص مورد اعتماد خود بدهید. یک مربع $n\times n$ از n^2 اطلاعات تشکیل می‌شود. طبق الگوی فوق، فقط کافی است که حدود $\frac{1}{4}$ از اطلاعات را منتقل کنید. شخص مورد اعتماد می‌تواند بقیه را به طور یکتا پیدا کند.

سودوکو

«سودوکو»[1] واژه‌ای ژاپنی به معنای عددهای بی‌تکرار است و به جدول اعدادی گفته می‌شود که امروزه یکی از سرگرمی‌های رایج در کشورهای گوناگون جهان به شمار می‌آید.

نخستین جدول سودوکو را یک ریاضی‌دان اروپایی در قرن هجدهم طراحی کرد. سودوکو انواع گوناگون ساده، متوسط، دشوار و خیلی دشوار دارد. سودوکوهای بسیاری هم برای کودکان طراحی می‌شوند. کتاب‌های گوناگون و متنوعی نیز برای آموزش طراحی و حل این نوع جدول منتشر شده‌اند. این جدول هم‌اکنون در بسیاری از روزنامه‌های معتبر دنیا هر روزه به چاپ می‌رسد و کتاب‌های مجموعه‌ی این جدول‌ها نیز توسط بخش انتشارات هر روزنامه منتشر می‌شود. این بازی که در «نمایشگاه بین‌المللی بازی و سرگرمی آلمان» به عنوان محبوب‌ترین و پرطرفدارترین بازی شناخته شده است، قانون بسیار ساده و روشنی دارد.

نوع متداول سودوکو در واقع نوعی جدول است که ۹ ستون عمودی و ۹ ستون افقی دارد، و البته کل جدول هم به ۹ ستون کوچک‌تر تقسیم می‌شود. شما باید اعداد ۱ تا ۹ را در هریک از جدول‌های کوچک‌تر بدون تکرار بنویسید؛ به صورتی که در هر ستون بزرگ‌تر افقی یا عمودی هیچ عددی تکرار نشود. در واقع، هم باید از تمام اعداد ۱ تا ۹ در همه‌ی ستون‌های عمودی و افقی استفاده کنید و هم باید هیچ عددی تکرار نشود و در همه‌ی مربع‌های ۳ ستونی کوچک‌تر نیز به همین ترتیب همه‌ی اعداد ۱ تا ۹ بیایند و تکرار هم نشوند. همیشه به عنوان راهنمایی چند عدد در جدول از قبل مشخص می‌شوند تا بقیه‌ی اعداد را شما پیدا کنید.

سودوکو واژه‌ای ژاپنی است، اما ریشه ی این بازی را باید در آمریکای شمالی جست‌وجو کرد. نخستین نمونه‌های شناخته شده ی این بازی در سال ۱۹۷۹ در مجله ی «بازی‌های حروف و معماهای با مداد دل»[۲] به چاپ رسید. طراح این جدول‌ها ناشناس است، اما ویل شورتز، دبیر جدول روزنامه ی «نیویورک تایمز» توانسته است، در روندی منطقی که بی‌شباهت به حل سودوکو نیست، حدس بزند این ناشناس که بوده است. شورتز فهرست همکاران شماره‌های گوناگون مجله ی دل را بررسی کرد و توانست تنها یک نام مشترک را در شماره‌های حاوی سودوکو پیدا کند، نامی که در شماره‌های دیگر تکرار نشده بود: هاوارد گارنز، معمار، اهل ایندیانا پلیس، متوفی به سال ۱۹۸۹. مسئولان فعلی در مجله ی معماهای دل گفته‌اند، در آرشیو مطالب مجله سندی وجود ندارد که گارنز را طراح این جدول‌ها معرفی کند، اما آن‌ها نتیجه‌گیری روزنامه‌نگار نیویورک تایمز را رد نکرده‌اند.

ادامه ی داستان آسان‌تر است. مجله ی دل به چاپ این معماها ادامه داد و در سال ۱۹۸۴، مجله ی ژاپنی «نیکولی» جدول‌هایی با همان ساختار را به چاپ رساند. نیکولی این جدول را «سوجی و ادکوشین نی کاگیرو» نام نهاد که چیزی جز برگردان ژاپنی «اعداد باید یکتا باشند» نیست. خیلی زود مردم این اسم طولانی را خلاصه کردند و آن را سودوکو نام نهادند؛ یعنی اعداد یکتا. نشریه ی نیکولی این نام را به ثبت رساند و جدول هم به این نام مشهور شد. جالب این جاست که هنوز بسیاری از ژاپنی‌ها این جدول را با نام انگلیسی آن می‌شناسند: «نامبر پلیس» یا «جاگذاری اعداد». در حالی که انگلیسی‌ها واژه ی ژاپنی سودوکو را ترجیح می‌دهند.

اتفاق مهم بعدی در نیمکره ی جنوبی زمین روی داد. واین گولد، شهروند نیوزیلندی که پیش از تغییر حاکمیت هنگ‌کنگ در این منطقه به قضاوت مشغول بود، در سفری به ژاپن با سودوکو آشنا شد و برنامه‌ای رایانه‌ای برای طراحی این جدول‌ها نوشت. او مسئولان روزنامه ی تایمز لندن را به چاپ این جدول‌ها تشویق کرد و درنهایت، توانست اولین جدولش را در نوامبر ۲۰۰۴ به چاپ برساند. تأثیر این جدول در انگلستان بسیار سریع و شدید بود! دیگر روزنامه‌های لندن به صف چاپ‌کنندگان سودوکو پیوستند و خیلی زود رقابتی شدید آغاز شد؛ به‌طوری که روزنامه ی «دیلی تلگراف»، سودوکو را در صفحه ی اول به چاپ رساند. همه تلاش می‌کردند، بهترین سودوکو را طراحی کنند.

برنامه‌های رایانه‌ای بسیاری برای طراحی سودوکو نوشته شدند و کار به جایی رسید که در جولای ۲۰۰۵، تورنومنت سودوکو برگزار شد و رسانه‌های تصویری انگلستان آن را به شکل گسترده‌ای تحت پوشش قرار دادند. در پایان تورنومنت، سودوکوی بزرگی به ضلع ۹۲ متر در تپه‌ای سبز در نزدیکی شهر بریستول حجاری شد. ولی خیلی زود مشخص شد، لقب بزرگ‌ترین سودوکوی جهان به اندازه ی خود جدول تأثیرگذار نیست.

در بهار سال ۲۰۰۵، سودوکو به آمریکا رفت و مردم هم از این معمای جدید استقبال کردند. شدت استقبال به قدری زیاد بود که تولید محصولات خانگی کاهش یافت. مردم به جای کار به حل سودوکو روی آورده بودند! با این حال، هم‌زبانان بریتانیایی آن‌ها اشتیاق بیشتری نشان دادند.

قوانین راهنما: اگر شما هم مداد به‌دست بگیرید و چند جدول سودوکو را حل کنید، به سرعت می‌توانید قوانین و روش‌های مفیدی را کشف کنید. ابتدایی‌ترین راهبرد حل این معماها این است که هر خانه را بررسی کنید و تمام اعدادی را که می‌توانند در آن قرار بگیرند، فهرست کنید. برای این کار هم کافی است بررسی کنید، کدامین عدد است که با سطر و ستون متناظر خود مغایرتی ندارد. اگر خانه‌ای را پیدا کردید که فقط می‌توانست یک عدد داشته باشد، می‌توانید عدد مذکور را در آن خانه بنویسید.

روش کامل‌تر این است که تمام خانه‌های یک ردیف، ستون یا واحد (مربع‌های کوچک ۳×۳) را بررسی کنید. معمولاً در هر ردیف یا ستون چند خانه از قبل پر شده‌اند. تمام عددهایی را که می‌توانند در هر خانه قرار بگیرند، فهرست کنید و خانه‌ای را که تنها یک گزینه ی ممکن دارد، پر کنید. با پر کردن هر خانه، عدد متناظر از دیگر فهرست‌ها حذف می‌شود و حل به همین ترتیب ادامه می‌یابد. بسیاری از سودوکوها را می‌توان با تکرار همین دو روش ساده حل کرد.

کیپرا، ریاضی‌دان اهل مینسوتا توضیح می‌دهد، قوانین سودوکو رده‌بندی‌های متفاوتی دارند که روز به روز هم پیچیده‌تر می‌شوند. قوانین سطح اول آن‌هایی هستند که یک خانه را به یک عدد یا یک عدد را به یک خانه محدود می‌کنند. در سطح دوم قوانینی هستند که به دو خانه‌ی درون یک سطر، ستون یا واحد اعمال می‌شوند؛ بدین شکل که این دو خانه نمی‌توانند با بیش از دو حالت پر شوند. درنتیجه این دو حالت از دیگر خانه‌های سطر، ستون یا واحد متناظر حذف می‌شوند. قوانین سطح سوم بر سه خانه اعمال می‌شوند و عددهای متناظر را در سایر خانه‌ها حذف می‌کنند. به همین شکل می‌توان قوانین را تا سطح نهم که در مورد ۹ خانه‌ی تشکیل دهنده‌ی یک سطر، ستون یا واحد اظهارنظر می‌کنند، تعمیم داد.

تمرین. اعداد ۱ تا ۹ را در هریک از سطرها، ستون‌ها و مربع‌های کوچک ۳ در ۳ طوری قرار دهید که فقط یک بار تکرار شوند.

۶	۷		۴					
	۳				۲		۵	
			۳		۵			۴
۴		۷		۶		۵	۹	۳
		۸	۹		۴	۱	۷	
۹					۱			
			۵				۱	۷
				۴	۶			۲
	۴				۷	۸		

جدول ۱

		۳	۹				۱	
		۲		۶	۴	۳		۵
					۲			۷
	۴	۵			۸			
	۷				۶			۲
			۱			۴		
۴	۵				۷			۶
	۳			۴				
			۶	۳				۱

جدول ۲

۴	۱			۵	۹	۳		
					۱	۲		
۸	۲					۹		
		۸		۲	۴		۹	
		۱			۵			۳
۶	۹			۱	۷			۲
۵						۴	۷	
			۹	۴		۵	۲	
								۶

جدول ۳

پاسخ تمرین را در ص ۳۰ مجله ملاحظه نمایید.

تفریح اندیشه

● حسین نامی ساعی

ابعاد مستطیل

مسئله: اضلاع یک مستطیل اعدادی صحیح هستند. اگر بدانیم عددی که نماینده‌ی محیط مستطیل است، با عدد نماینده‌ی مساحت آن برابر است. ابعاد مستطیل را پیدا کنید.

حل: اگر ابعاد مستطیل را x و y فرض کنیم، این معادله را خواهیم داشت:

$$۲x + ۲y = x.y$$

و از آن‌جا:

$$x = \frac{۲y}{y - ۲}$$

برای این‌که x و y اعدادی مثبت باشند، باید عدد $y-۲$ هم مثبت، یعنی y بزرگ‌تر از ۲ باشد.

حالا معادله را چنین می‌نویسیم:

$$x = \frac{۲y}{y-۲} = \frac{۲(y-۲)+۴}{y-۲} = ۲ + \frac{۴}{y-۲}$$

برای این‌که x عددی صحیح مثبت باشد، باید $\frac{۴}{y-۲}$ هم عددی صحیح مثبت باشد و به ازای $y > ۲$ وقتی این شرط برقرار است که y یکی از اعداد ۳، ۴ یا ۶ باشد و در این صورت مقادیر متناظر x مساوی ۶، ۴ و ۳ می‌شود. به این ترتیب شکل مجهول، مستطیلی خواهد بود به ابعاد ۳ و ۶ و یا مربعی به ضلع ۴.



تجزیه‌ی چندجمله‌ای‌های دلخواه

۱۲

• پرویز شهریاری

فرض کنید قاعده‌ای برای مقایسه‌ی چندجمله‌ای f با چندجمله‌ای دیگر f^* داده باشند. این قاعده را هم‌ریختی ضرب می‌نامیم، به شرطی که $f \to f^*$ یک به یک باشد (یعنی از $f^* = g^*$، نتیجه شود $f = g$)، و اگر هر بار که این برابری برقرار باشد: $f = gh$، این برابری هم درست باشد: $f^* = g^*h^*$.

در ضمن، اگر برای هر چندجمله‌ی f و چندجمله‌ای‌های g' و h' که دارای همان ویژگی باشند: $f^* = g'h'$، چندجمله‌ای‌های g و h وجود داشته باشند؛ به نحوی که: $f = gh$، و $h^* = h'$ و $g^* = g'$.

روشن است، هرگاه به ما یک هم‌ریختی ضرب داده باشند،

مسئله‌ی مربوط به تجزیه‌ی چندجمله‌ای f به صورت عامل‌های خود، به طور کامل هم‌ارز تجزیه‌ی چندجمله‌ای f به صورت ضرب عامل‌ها خواهد بود.

مثال: برای هر چندجمله‌ای $f(x)$ از درجه‌ی n، فرض می‌کنیم:

$$f^*(x) = (-1)^n f(-x) \qquad (1)$$

روشن است که تناظر $f \to f^*$، یک هم‌ریختی ضرب است. اگر چندجمله‌ای f دارای علامت‌های متناوب باشد، آن‌وقت چندجمله‌ای f^* یک چندجمله‌ای مثبت می‌شود. بنابراین، با استفاده از رابطه‌ی (۱) می‌توان به مسئله‌ای رسید که تجزیه‌ی چندجمله‌ای را به مسئله‌ی «یاکوکین» که در شماره‌ی قبل آن را حل کردیم، یعنی مسئله‌ی چندجمله‌ای مثبت برساند.

گاهی بهتر است، از هم‌ریختی ضرب نه در تمامی چندجمله‌ای، بلکه تنها در زیرمجموعه‌ی M آن استفاده کنیم. در این مورد لازم است، به جای مجموعه‌ی f، مجموعه‌ی M را به کار گیریم که شامل همه‌ی بخشیاب‌های این چندجمله‌ای است.

مثال: فرض کنید M_n، مجموعه‌ی همه‌ی چندجمله‌ای‌هایی باشد که درجه‌ی آن‌ها از n تجاوز نمی‌کند و مقدار ثابت آن‌ها مخالف صفر است. به هر چندجمله‌ای زیر:

$$f = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

از این مجموعه، چندجمله‌ای f^* را نسبت می‌دهیم که همان ضریب‌ها را داشته باشد، ولی در جهت عکس. یعنی چندجمله‌ای که با این دستور معین شده باشد:

$$f^* = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$$

به سادگی دیده می‌شود: $f^*(x) = x^n f(\frac{1}{x})$ که به روشنی $f \to f^*$ را نتیجه می‌دهد، عبارت است از یک هم‌ریختی ضرب. برای نمونه، این چندجمله‌ای را درنظر می‌گیریم:

$$f(x) = 7x^6 + x^5 + 4x^4 + 7x + 6$$

به‌کارگیری مستقیم روش «یاکوکین» درباره‌ی این چندجمله‌ای، به محاسبه‌ای کم و بیش طولانی نیاز دارد. ولی اگر به چندجمله‌ای f^* بپردازیم، به همان مثال ۱ می‌رسیم که در شماره‌ی قبل دیدیم؛ البته باید جدول عددهای اول را در اختیار داشته باشیم.

❒

از این به بعد، نقش اساسی را هم‌ریختی ضرب برای $f \to f_c$ به عهده دارد که درباره‌ی چندجمله‌ای‌های با دستور $f(x) = f(x+c)$ درست است که در آن، c عدد درست ثابتی است.

چندجمله‌ای مثبت (با ضریب‌های درست) را «مثبت کامل» گوییم، وقتی هریک از بخشیاب‌های آن هم مثبت باشد. روشن است که برای هر چندجمله‌ای مثبت کامل، مسئله‌ی یاکوکین هم‌ارز است با مسئله‌ی کلی تجزیه‌ی چندجمله‌ای به عامل‌ها.

قضیه‌ی ۱. برای هر چندجمله‌ای f (با توان‌های مثبت و ضریب‌های درست و ضریب بزرگ‌ترین درجه‌ی مثبت)، عدد نامنفی c وجود دارد، به نحوی که چندجمله‌ای f_c مثبت کامل باشد.

برای اثبات این قضیه، راحت‌تر است که چندجمله‌ای با ضریب‌های حقیقی (و نه درست) را درنظر بگیریم. در آغاز فرض می‌کنیم، همه‌ی توان‌های چندجمله‌ای و نیز ضریب بزرگ‌ترین توان، مثبت باشند. بخشیاب چندجمله‌ای f را، اکنون چندجمله‌ای دلخواه g با ضریب‌های حقیقی می‌گیریم (توان‌های g را مثبت و کوچک‌تر از n چندجمله‌ی f، و ضریب بزرگ‌ترین درجه را هم مثبت فرض می‌کنیم).

مثل حالت چندجمله‌ای با ضریب‌های درست و با ضریب‌های مثبت، به شرطی که همه‌ی ضریب‌های این چندجمله‌ای نامنفی باشند، آن را مثبت و اگر همه‌ی ضریب‌های بخشیاب‌های آن مثبت باشند، آن را مثبت کامل می‌نامیم. یادآوری می‌کنیم، چندجمله‌ای با ضریب‌های درست در این مفهوم، با مفهومی که در این‌جا برای چندجمله‌ای‌های مثبت کامل آوردیم، تطبیق نمی‌کند (درباره‌ی چندجمله‌ای‌های با ضریب‌های درست، آن را «مثبت کامل با عددهای درست» می‌نامیم). در واقع، همه‌ی بخشیاب‌های با ضریب‌های مثبت چندجمله‌ای‌های دارای ضریب‌های درست می‌توانند مثبت باشند، در حالی که این چندجمله‌ای‌ها ممکن است بخشیاب‌هایی داشته باشند که نامنفی و دارای ضریب‌های حقیقی (گنگ) باشند. روشن است که هر مثبت کامل (به مفهوم تازه) چندجمله‌ای با ضریب‌های درست، باید مثبت کامل با عددهای درست باشد. بنابراین قضیه‌ی ۱ به طور مستقیم از قضیه‌ی ۲، به این شرح، نتیجه می‌شود:

قضیه‌ی ۲. برای هر چندجمله‌ای f_0 با ضریب‌های حقیقی (و ضریب بزرگ‌ترین درجه‌ی مثبت)، عدد نامنفی و درست c وجود دارد که برای آن $f_0(x) = f_0(x+c)$ مثبت کامل باشد.

برای اثبات قضیه‌ی ۲، باید با دقت ساختار چندجمله‌ای‌های مثبت کامل با ضریب‌های حقیقی را تجزیه و تحلیل کنیم. چندجمله‌ای با ضریب‌های حقیقی را «نیم‌پایدار» می‌نامیم، وقتی که بخش‌های حقیقی همه‌ی ریشه‌های آن نامثبت باشند. روشن است که نتیجه‌ی چندجمله‌ای نیم‌پایدار، یک چندجمله‌ای نیم‌پایدار است و برعکس، هر بخشیابی از چندجمله‌ای نیم‌پایدار، یک چندجمله‌ای نیم‌پایدار است.

پیش‌قضیه‌ی ۱. چندجمله‌ای با ضریب‌های حقیقی، تنها وقتی مثبت کامل است که نیم‌پایدار باشد.

اثبات: روشن است که حاصل ضرب چندجمله‌ای‌های مثبت کامل، مثبت کامل است و برعکس، هر بخشیاب چندجمله‌ای مثبت کامل، مثبت کامل است. در ضمن می‌دانیم، هر چندجمله‌ای با ضریب‌های حقیقی، به صورت حاصل ضرب چندجمله‌ای‌های خطی و درجه‌ی دوم قابل تجزیه است. بنابراین کافی است، پیش‌قضیه را تنها برای چندجمله‌ای‌های اخیر ثابت کنیم. ولی در این حالت، اثبات پیش‌قضیه، خیلی زود به طور مستقیم و یا محاسبه‌ی ریشه‌ها به دست می‌آید.

برای اثبات قضیه‌ی ۲ تنها توجه می‌کنیم که برای هر ریشه‌ی α از چندجمله‌ای f، $\alpha - c$ ریشه‌ای از چندجمله‌ای f_c است، و برعکس، برای هر ریشه‌ی β از چندجمله‌ای f_c، عدد $\beta + c$ ریشه‌ای از چندجمله‌ای f است. به این ترتیب، همه‌ی شرط‌های قضیه‌ی ۲ برقرار هستند.

با اثبات قضیه‌ی ۲، قضیه‌ی ۱ هم به طور کامل ثابت می‌شود. اگر به چندجمله‌ای‌های با ضریب‌های درست برگردیم، این قاعده را برای تجزیه‌ی هر چندجمله‌ای از این گونه، به‌دست می‌آوریم.

قاعده. برای این که چندجمله‌ای f با ضریب‌های درست را تجزیه کنیم، باید:

۱. عدد درست و نامنفی c را طوری پیدا کنیم که چندجمله‌ای $g = f_c$ مثبت کامل باشد؛

۲. چندجمله‌ای g را به ضریب عامل‌ها تجزیه کنیم:

$$g = g_1 \dots g_r$$

۳. چندجمله‌ای‌های f_1، ... و f_r را برای چندجمله‌ای f با این دستورها پیدا کنیم: $f_1 = (g_1) - c, \dots, f_r = (g_r) - c$

تحقق قاعده‌ی ۳ خود به خود حاصل می‌شود و برای قاعده‌ی ۲ باید آن‌چه را در بند مربوط به «چندجمله‌ای مثبت» گفتیم، انجام داد. و اما آن‌چه به قاعده‌ی ۱ مربوط می‌شود. برای پیدا کردن عدد c معنایش می‌کنیم، ریشه‌های چندجمله‌ای f را به تقریب محاسبه کنیم (تا یک رقم بعد از ممیز) و به عنوان عدد c، کم‌ترین عدد درست را انتخاب کنیم که بزرگ‌تر از بخش‌های حقیقی همه‌ی ریشه‌های آن باشد.

روش دیگر محاسبه‌ی عدد c بر این اساس است که قدرمطلق مقدار بخش حقیقی هر عدد مختلط، بزرگ‌تر از مدول آن نباشد. به این ترتیب، هر عدد c بزرگ‌تر از مدول همه‌ی ریشه‌های چندجمله‌ای f، که این ویژگی را دارد، مثبت کامل (نیم‌پایدار) است. از طرف دیگر، به سادگی می‌توان آزمایش کرد، مدول همه‌ی ریشه‌های چندجمله‌ای f از عدد $\frac{A}{a_n} + 1$ تجاوز نمی‌کند که در آن، $a_n > 0$ ضریب بزرگ‌ترین درجه‌ی چندجمله‌ای f، و A بزرگ‌ترین قدرمطلق مقدار سایر ضریب‌هاست. بنابراین هر عدد درست c، بزرگ‌تر از عدد ۱۱، و برای هدف ما مفید است.

راه سوم محاسبه‌ی عدد c این است که ما می‌توانیم پیش‌بینی کنیم، چندجمله‌ای مفروض نیم‌پایدار است یا نه. در این حالت، چندجمله‌ای f_c را پشت سر هم برای مقدارهای c، از ۰ به بالا آزمایش و نیم‌پایدار بودن آن را تحقیق می‌کنیم که به هر حال به مقدار لازم c می‌رسیم.

برای این که نیم‌پایدار بودن را معین کنیم، معیارهای متفاوتی وجود دارند. از بین این معیارها، ساده‌ترین آن‌ها را که متعلق به رائوس است، انتخاب می‌کنیم. فرض کنید:

$$f = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots a_1 x + a_0$$

چندجمله‌ای دلخواهی با ضریب‌های حقیقی باشد. این جدول را تشکیل می‌دهیم:

a_n	a_{n-2}	a_{n-4}	$\dots$	a_{n-2k}
a_{n-1}	a_{n-3}	a_{n-5}	$\dots$	a_{n-2k-1}
$a_n a_{n-3} - a_{n-1} a_{n-2}$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$a_n a_{n-2k-1} - a_{n-1} a_{n-2k}$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$

قانون تشکیل دو سطر اول این جدول روشن است. اکنون به سطرهای $p \geq 2$ می‌پردازیم.[1] در qامین جا از $(p+1)$امین سطر، حاصل ضرب نخستین جمله‌ی $(p-1)$امین سطر در $(q+1)$امین جمله‌ی pامین سطر منهای حاصل ضرب نخستین جمله‌ی pامین سطر در $(q-1)$امین جمله‌ی $(p-1)$امین را قرار می‌دهیم. به سادگی دیده می‌شود، چنان عددی مثل $s \geq 1$ پیدا می‌شود که اولین جمله‌ی sامین سطر مخالف صفر است؛ در این صورت نخستین جمله‌های همه‌ی سطرهای بعدی برابر صفر می‌شوند.

معیار رائوس: چندجمله‌ای f تنها وقتی مثبت نیم‌پایدار است که نخستین جمله‌های نخستین سطرهای s جدول، مثبت باشند. اثبات این معیار بسیار دشوار است و ما آن را در این جا نمی‌آوریم.

یادداشت: هر سه روش به عدد c منجر می‌شود که برای آن، چندجمله‌ای f_c مثبت کامل، و مثل چندجمله‌ای با ضریب‌های حقیقی نیم‌پایدار است. از آن‌جا که ما چندجمله‌ای f_c را لازم داریم که ویژگی مثبت کامل در عددهای درست را داشته باشد، می‌توان این مبحث را حذف کرد. در حالت کلی هیچ معیاری برای مثبت کامل با عددهای درست وجود ندارد.

مسائلی برای حل

ریاضیات ۱

○ مجتبی رفیعی

۱. اگر $A=\{1,2,3,\dots,10\}$ ، $B=\{1,2,3,\dots,20\}$ و $A\subset X\subseteq B$. به جای X چند مجموعه می‌توان قرار داد؟

۲. مقادیر a و b را چنان تعیین کنید که دو عدد $M=18^4\times125^{a-5}$ و $N=9^{b-2}\times25^2$ نسبت به هم اول باشند.

۳. مقادیر m و n را چنان تعیین کنید که عبارت x^4+mx+n بر عبارت x^2-2x-3 بخش‌پذیر باشد.

۴. اگر $x^2+x+1=0$ ، حاصل عبارت $x^3+\frac{1}{x^3}$ را حساب کنید.

۵. این عبارت‌ها را تجزیه کنید:

الف) $2x^2+5x-3$

ب) $y^3(a-x)-x^3(a-y)+a^3(x-y)$

۶. نشان دهید معادله‌ی خطی که از دو نقطه‌ی $A(p,0)$ و $B(0,q)$ می‌گذرد، به صورت $\frac{x}{p}+\frac{y}{q}=1$ است.

۷. اگر $x=\sqrt[3]{1+\sqrt{2}}-\sqrt[3]{1-\sqrt{2}}$ باشد، حاصل x^3-3x را بیابید.

۸. طول قطر مستطیلی ۸ سانتی‌متر و زاویه‌ی بین دو قطر آن $60°$ است. مساحت مستطیل چند سانتی‌متر است؟

۹. معادله‌ی $2x^4-13x^3+24x^2-13x+2=0$ را حل کنید.

۱۰. انتهای کمان مقابل به زاویه‌ی θ در کدام ناحیه باشد تا تساوی زیر به ازای هر $(k\in Z);\theta\neq\frac{k\pi}{2}$ برقرار باشد؟

$$\sqrt{\frac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}}=\frac{1}{\cos\theta}-\tan\theta$$

۱۱. عددی را بر اعداد ۵ و ۷ و ۸ تقسیم کرده‌ایم. باقی‌مانده‌ها به ترتیب ۲ و ۵ و ۷ و مجموع خارج قسمت‌ها برابر ۲۰ شده است. این عدد کدام است.

۱۲. اگر رأس سهمی $y=ax^2+2ax-3$ روی نیمساز ناحیه‌های اول و سوم قرار داشته باشد، مقدار a را تعیین کنید.

۱۳. مقادیر طبیعی n را چنان بیابید که داشته باشیم:

$$16^{2n-1}>8^{n+7}$$

---

۱. عبارت زیر را تعیین علامت کنید.

$$\frac{x^2-4}{(3-2x)(4x^2-4x+1)}$$

۲. حدود m را طوری تعیین کنید که نامساوی زیر به ازای جمیع مقادیر x برقرار باشد.

$$(-3m)x^2+2mx+1>0$$

۳. نامعادله‌ی زیر را حل کنید.

$$|2x+1|\leq|x-2|$$

۴. معادله‌ی روبه‌رو را حل کنید.

$$\frac{x-1}{2x}-\frac{1}{2x+1}=\frac{7-3x}{4x^2+2x}$$

۵. اگر $f(x)=ax+b$ باشد، حاصل $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ را حساب کنید.

۶. معکوس تابع زیر را به دست آورید.

$$\begin{cases}f(x)=\dfrac{3x+7}{x+2}\\ R-\{2\}\to R-\{3\}\end{cases}$$

۷. اگر ماتریس $A=\begin{bmatrix}-2&3\\1&0\end{bmatrix}$ و $Ax=\begin{bmatrix}7&8\\1&2\end{bmatrix}$ باشد، مطلوب است تعیین ماتریس x.

۸. به ازای چه مقدار m این دستگاه جواب دارد.

$$\begin{cases}2mx-4y=6\\-4x+2my=2\end{cases}$$

۹. عبارات زیر را حساب کنید.

الف) $\log_{25}^{\sqrt{125}}$ ب) $\log_{7}^{49'}$

۱۰. معادله‌ی روبه‌رو را حل کنید. $2\log_7^x=\log_7^{81}$

۱۱. اگر جمله‌ی عمومی یک تصاعد حسابی $t_n=2n+1$ باشد، مجموع ۳ جمله‌ی اول این تصاعد را حساب کنید.

۱۲. چهار واسطه‌ی هندسی بین $\frac{3}{8}$ و $\frac{128}{81}$ درج کنید.

۱۳. اگر $\sin\alpha=\frac{2}{3}$ و $\cos\beta=\frac{1}{5}$ (α و β حاده هستند)، عبارات $\cos(\alpha+\beta)$ را محاسبه کنید.

۱۴. هرگاه $\vec{v}_1=\begin{bmatrix}3\\\sqrt{3}\end{bmatrix}$ و $\vec{v}_2=\begin{bmatrix}2\sqrt{3}\\-2\end{bmatrix}$ باشد، زاویه‌ی بین دو بردار را محاسبه کنید.

۱۵. ارقام ۲، ۳، ۵، ۶ و ۷ را داریم. تعیین کنید:

الف) با آن‌ها چند عدد سه رقمی می‌توان نوشت.

ب) چه تعداد از این اعداد فرد هستند.

ج) چه تعداد از آن‌ها کوچک‌تر از ۴۰۰ هستند.

ریاضیات ۲

○ شهرام صفدر

هندسه ی ۱

مرشک شرقی

۱. به کمک استدلال استنتاجی ثابت کنید، دو زاویه‌ی متقابل به رأس با هم برابرند.

۲. از دو زاویه‌ی متمم، اندازه‌ی یکی چهار برابر دیگری است. اندازه های دو زاویه را به‌دست آورید.

۳. ثابت کنید در هر مثلث متساوی‌الساقین، نیمساز زاویه‌ی خارجی رأس، موازی قاعده است.

۴. از نقطه‌ی M وسط ضلع AB از مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABC ($\hat{A} = 90^\circ$)، عمود MD را بر وتر BC وارد می‌کنیم. ثابت کنید: $DC^2 - DB^2 = AC^2$

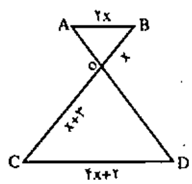
۵. از نقاط P و Q عمودهای PA و QB را بر خط d رسم می‌کنیم (P و Q یک طرف d قرار دارند). خطوط QA و PB یکدیگر را در نقطه‌ی R قطع می‌کنند و از R عمود RC را بر d رسم می‌کنیم.

ثابت کنید: $\frac{1}{RC} = \frac{1}{PA} + \frac{1}{QB}$

۶. مساحت ذوزنقه‌ی متساوی‌الساقینی را که طول دو قاعده‌ی آن ۸ و ۱۴ سانتی‌متر و طول هر یک از دو ساق آن ۵سانتی‌متر است، به‌دست آورید.

۷. در مثلث ABC ($\hat{C} > \hat{A}$)، نقطه‌ی D را روی ضلع AB طوری در نظر می‌گیریم که $\angle BCD = \angle A$ باشد. اگر BC=۲ و AB=۵، طول AD را به‌دست آورید.

۸. در شکل زیر، AB||CD و اندازه‌ی پاره‌خط‌ها بر حسب x روی شکل مشخص شده است. نسبت مساحت مثلث OAB به مساحت مثلث OCD را به‌دست آورید.



۹. ظرفی به‌شکل منشور قائم داریم که قاعده‌ی آن مثلث متساوی‌الاضلاعی به ضلع ۲۰ سانتی‌متر و ارتفاع آن $10\sqrt{3}$ سانتی‌متر است. این ظرف را پر از آب می‌کنیم و سپس محتویات آن را در ظرف دیگری به شکل استوانه و به شعاع قاعده‌ی ۵ سانتی‌متر خالی می‌کنیم. سطح آب تا چه ارتفاعی در این ظرف بالا می‌آید؟

۱۰. حجم و مساحت کل هرمی را به‌دست آورید که قاعده‌ی آن مربعی به ضلع ۲سانتی‌متر و ارتفاع آن $\sqrt{7}$ سانتی‌متر باشد و وجه‌های جانبی آن، مثلث‌هایی متساوی‌الساقین و هم‌نهشت باشند.

حسابان

احمد قندهاری

۱. تابع با ضابطه‌ی $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 4$ مفروض است:

الف) ثابت کنید این تابع در $\mathbb{R}$ یک به یک است.

ب) ضابطه‌ی تابع معکوس را بیابید.

۲. تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ مفروض است، تابع را چنان مشخص کنید، تا نمودار آن محور yها را در نقطه‌ای به عرض ۱− قطع کند و خط‌های ۲− = x و ۱ = y معادله‌های مجانب‌های آن باشند.

۳. مطلوب است محاسبه‌ی $\lim_{x \to +\infty} (\sqrt[3]{x^3 + 6x^2} - x)$

۴. تابع با ضابطه‌ی

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2\sqrt{2}\sin x}{\sqrt{1-\cos 2x}} & , x < 0 \\ \left[x - \frac{5}{2}\right] + a & , x = 0 \\ \frac{|x|}{x} + b & , x > 0 \end{cases}$$

مفروض است. a و b را چنان بیابید تا این تابع در ۰ = x پیوسته باشد.

۵. تابع با ضابطه‌ی $f(x) = x^2 - 4x + 3$ مفروض است. در نقطه‌ی به طول ۳ واقع بر منحنی، قائمی بر منحنی رسم می‌کنیم. این خط قائم نمودار تابع f را در نقطه‌ی دیگری به نام B قطع می‌کند. اندازه‌ی OB را بیابید.

۶. این معادله‌های مثلثاتی را حل کنید و جواب‌های کلی آن‌ها را بنویسید.

الف) $2\sin 2x - 2\sqrt{2}\cos x - 2\sin x + \sqrt{2} = 0$

ب) $\cos 2x + 5\sin x - 4 = 0$

۷. در تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \tan^2 4x + \cot^2 2x$، $f'(\frac{\pi}{12})$ را بیابید.

۸. در تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx & , x \geq 2 \\ x^2 - 4x & , x < 2 \end{cases}$، a و b را چنان بیابید که تابع در ۲ = x مشتق‌پذیر باشد.

۹. نمودار تابع با ضابطه‌ی $y = \cos^2 x + \cos x - 2$ را وقتی $0 \leq x \leq 2\pi$ رسم کنید.

۱۰. در کره‌ای به شعاع ۶ = R، مخروط دواری به حجم ماکزیمم محاط کرده‌ایم. ارتفاع مخروط را بیابید.

جبر و احتمال

هوشنگ شرقی

۱ . با استفاده از قضیه ی استقرای ریاضی ثابت کنید :

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^n}=1-\frac{1}{2^n}\quad (n\in N)$$

۲ . اگر x و y دو عدد حقیقی باشند، ثابت کنید :

$$x^2+y^2\geq 2(x+y-1)$$

۳ . می دانیم $\sqrt{3}$ عدد گنگ است . ثابت کنید عدد $1+\sqrt{3}$ نیز گنگ است .

۴ . از ۸۰۰ نفر دانش آموزان یک مدرسه ، حداقل چند دانش آموز در یک روز سال متولد شده اند؟ چرا؟ (سال را ۳۶۵روز در نظر بگیرید .)

۵ . با استفاده از استدلال استنتاجی نشان دهید، اگر هفت برابر یک عدد زوج را با یک عدد فرد جمع کنیم، حاصل همواره عددی فرد است .

۶ . با استفاده از جبر مجموعه ها ثابت کنید :

$$(A\cup B)-(B\cup C)=(A-B)-C$$

۷ . اگر $A=\{4^x|x\in Z\ ,\ -1\leq x\leq 1\}$ و $B=\{x|x\in Z\ ,\ x^2\leq 3\}$ عضوهای مجموعه ی $(A\times B)-A^2$ را مشخص و نمودار آن را رسم کنید .

۸ . رابطه ی R روی IR^2 به این صورت تعریف شده است :

$$(x,y)R(z,t)\Leftrightarrow x^3-t^2=z^3-y^2$$

الف) ثابت کنید R همواره یک رابطه ی هم ارزی است .

ب) کلاس هم ارزی [(۳و۲-)] را مشخص کنید .

۹ . نمودار رابطه ی $R=\{(x,y)\in IR^2|\,|x|\leq 1\ ,\ |y|\leq 1\}$ را در دستگاه مختصات رسم کنید .

۱۰ . سکه ای را پرتاب می کنیم . اگر رو بیاید، آن گاه تاس را می ریزیم و اگر پشت بیاید، سکه را دوبار دیگر پرتاب می کنیم . مطلوب است تعیین :

الف) فضای نمونه ای این پیشامد .

ب) پیشامد A که در آن دقیقاً یک بار سکه رو بیاید .

ج) پیشامد B که حداقل دوبار سکه پشت بیاید .

د) $A\cap B'$

۱۱ . سه لامپ را از میان ۱۵ لامپ که پنج عدد آن ها بدون هیچ اثر خارجی معیوب هستند، انتخاب می کنیم . تعیین کنید احتمال این که :

الف) هیچ کدام معیوب نباشند .

ب) فقط یکی از لامپ ها معیوب باشد .

۱۲ . تاسی به گونه ای ساخته شده است که احتمال آمدن عددهای فرد آن، پنج برابر احتمال آمدن عددهای زوج است . احتمال آمدن هر کدام از اعداد را حساب کنید .

۱۳ . نقطه ی (x,y) را درون دایره ی $S=\{(x,y)\in IR^2|x^2+y^2\leq 4\}$ به تصادف انتخاب می کنیم . احتمال این که نقطه ی مورد نظر در $A=\{(x,y)\in IR^2|x^2+y^2\leq 1\}$ باشد را تعیین کنید .

۱۴ . سکه ی سالمی را ۱۰ بار پرتاب می کنیم . مطلوب است احتمال آن که هفت بار رو بیاید .

۱۵ . برای دو پیشامد A و B از فضای نمونه ی S ثابت کنید :

$$P(A\cap B')=P(A)-P(A\cap B)$$

۱۶ . اگر $P(A\cup B)=\frac{3}{4}$ ، $P(A\cap B)=\frac{1}{3}$ و $P(A')=\frac{3}{8}$ باشند، مطلوب است :

الف) P(B) ب) P(B-A)

هندسه ی ۲

حسین کرمی

۱ . از نقطه ی o محل تلاقی قطرهای لوزی ABCD، چهار عمود 'OA و 'OB و 'OC و 'OD را بر ضلع های لوزی فرود می آوریم . ثابت کنید چهارضلعی 'A'B'C'D مستطیل است .

۲ . در چهارضلعی محدب، کدام نقطه است که مجموع فاصله های آن تا رأس ها می نیمم است؟

۳ . از مثلثی، دو میانه و یک ضلع نظیر یکی از میانه ها معلوم است . مثلث را رسم کنید .

۴ . از نقطه ی تماس دو دایره ی مماس خارجی، دو خط چنان رسم می کنیم تا دو دایره را در چهار نقطه ی دیگر قطع کنند . ثابت کنید این چهار نقطه، چهار رأس یک ذوزنقه اند .

۵ . کمانی از یک دایره معلوم است . مرکز آن را پیدا کنید .

۶ . از نقطه ی مفروض A وتری به طول a در دایره ی C(O,R) رسم کنید . (a < 2R)

۷ . نگاشتی بنویسید که تصویر هر نقطه ای عبارت باشد از تصویر قائم آن نقطه بر نیمساز ناحیه های اول و سوم .

۸ . نقاط A(۳,۸) و B(۶,۷) مفروض اند، معادله ی محور تقارن آن ها را بنویسید .

۹ . ثابت کنید نقطه ی A(۲,۱) مرکز تقارن نمودار به معادله ی $y=\frac{x+1}{x-2}$ است .

۱۰ . چند خط می توان رسم کرد که دو خط موازی و خطی را که با هر دو خط متنافر است، قطع کند؟

۱۱ . دو نقطه ی O و 'O و دو خط راست D و 'D در فضا مفروض اند . دو خط متوازی معین کنید که یکی از آن ها از نقطه ی O بگذرد و خط D را قطع کند، و دیگری از نقطه ی 'O بگذرد و خط 'D را قطع کند .

۱۲ . ثابت کنید مکان هندسی نقاطی از فضا که از دو نقطه ی معلوم A و B به یک فاصله هستند، صفحه ای است که از وسط قطعه خط AB می گذرد و بر AB عمود است .

ریاضیات ۱

۱. مجموعه‌ی X مجموعه‌ای است که همه‌ی اعضای مجموعه‌ی A را داراست و عضوهای ۱۱،۱۲،۱۳،...،۲۰ را نیز می‌تواند اختیار کند. بنابراین، تعداد مجموعه‌هایی که جای X می‌توانند قرار گیرند، برابر است با تعداد زیرمجموعه‌های مجموعه‌ی $\{11,12,13,\dots,20\}$ یعنی: $2^{10}=1024$

۲.

$$M = 18^4 \times 125^{a-5} = 2^4 \times 3^8 \times 5^{3a-15}$$
$$N = 9^{b-2} \times 25^2 = 3^{2b-4} \times 5^4$$

برای این‌که M و N نسبت به هم اول باشند، باید در M عامل ۵ و در N عامل ۳ را حذف کنیم. در این صورت باید داشته باشیم: $3a-15=0 \Rightarrow a=5$ و $2b-4=0 \Rightarrow b=2$

۳. مقسوم را بر مقسوم‌علیه تقسیم می‌کنیم و آن را متحد با صفر قرار می‌دهیم.

$$\begin{array}{l|l} x^4 + 0x^3 + 0x^2 + mx + n & x^2 - 2x - 3 \\ \hline +x^4 - 2x^3 - 3x^2 & x^2 + 2x + 7 \\ \underline{-\quad + \quad +} & \\ 2x^3 + 3x^2 + mx + n & \\ +2x^3 - 4x^2 - 6x & \\ \underline{-\quad + \quad +} & \\ 7x^2 + (m+6)x + n & \\ +7x^2 - 14x - 21 & \\ \underline{-\quad + \quad +} & \\ (m+20)x + n + 21 & \end{array}$$

$$(m+20)x + n + 21 = 0 \Rightarrow \begin{cases} m+20=0 \Rightarrow m=-20 \\ n+21=0 \Rightarrow n=-21 \end{cases}$$

۴.

$$x^2 + x + 1 = 0 \Rightarrow x + 1 + \frac{1}{x} = 0 \Rightarrow x + \frac{1}{x} = -1$$

$$x^3 + \frac{1}{x^3} = (x + \frac{1}{x})^3 - 3 \times (x + \frac{1}{x}) = (-1)^3 - 3(-1) = 2$$

۵.

الف) $2x^2 + 5x - 3 = 2x^2 - x + 6x - 3$
$= x(2x-1) + 3(2x-1)$
$= (2x-1)(x+3)$

ب) $y^3(a-x) - x^3(a-y) + a^3(x-y)$
$= y^3a - y^3x - x^3a + x^3y + a^3(x-y)$
$= -a(x^3 - y^3) + xy(x^2 - y^2) + a^3(x-y)$
$= (x-y)\left[-a(x^2+xy+y^2) + xy(x+y) + a^2\right]$
$= (x-y)\left[-ax^2 - axy - ay^2 + x^2y + xy^2 + a^2\right]$
$= (x-y)\left[x^2(y-a) + xy(y-a) - a(y^2-a^2)\right]$
$= (x-y)(y-a)\left[x^2 + xy - ay - a^2\right]$
$= (x-y)(y-a)\left[(x-a)(x+a) + y(x-a)\right]$
$= (x-y)(y-a)(x-a)(x+a+y)$

۶. $m_{AB} = \frac{0-q}{p-0} = -\frac{q}{p}$

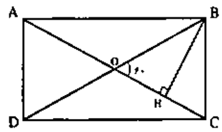
$$y - 0 = -\frac{q}{p}(x-p) \Rightarrow y = -\frac{q}{p}x + q$$

$$\Rightarrow y + \frac{q}{p}x = q \Rightarrow \frac{y}{q} + \frac{x}{p} = 1$$

۷. می‌دانیم $(a-b)^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a-b)$. با توجه به این اتحاد داریم:

$$x^3 = (\sqrt[3]{1+\sqrt{2}} - \sqrt[3]{1-\sqrt{2}})^3$$
$$= (1+\sqrt{2}) - (1-\sqrt{2}) - 3\sqrt[3]{(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})} \times (\sqrt[3]{1+\sqrt{2}} - \sqrt[3]{1-\sqrt{2}})$$
$$= 2\sqrt{2} + 3x \Rightarrow x^3 - 3x = 2\sqrt{2}$$

۸. مستطیل ABCD را رسم می‌کنیم. فرض کنیم O محل برخورد دو قطر باشد. از B عمود BH را بر قطر AC فرود می‌آوریم. در مثلث قائم‌الزاویه‌ی OBH، داریم:



$$\sin 60^\circ = \frac{BH}{OB} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{BH}{4} \Rightarrow BH = 2\sqrt{3}$$

مساحت مستطیل ABCD دو برابر مساحت $A\hat{B}C$ است.

$$S_{ABCD} = 2 \times S_{A\hat{B}C} = 2 \times \frac{AC \times BH}{2} = 8 \times 2\sqrt{3} = 16\sqrt{3}$$

۹. دو طرف معادله را بر x^2 که مخالف صفر است تقسیم می‌کنیم:

$$2x^2 - 13x + 24 - \frac{13}{x} + \frac{2}{x^2} = 0$$

$$\Rightarrow 2(x^2 + \frac{1}{x^2}) - 13(x + \frac{1}{x}) + 24 = 0$$

$$2\left[(x+\frac{1}{x})^2 - 2\right] - 13(x+\frac{1}{x}) + 24 = 0$$

$$\xrightarrow{x+\frac{1}{x}=y} 2(y^2-2) - 13y + 24 = 0$$

$$y = \frac{13 \pm \sqrt{9}}{4} = \frac{13 \pm 3}{4} \Rightarrow y_1 = \frac{13+3}{4} = 4 \ ,\ y_2 = \frac{13-3}{4} = \frac{5}{2}$$

$$y = 4 \Rightarrow x + \frac{1}{x} = 4 \Rightarrow x^2 - 4x + 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 2+\sqrt{3} \\ x = 2-\sqrt{3} \end{cases}$$

$$y = \frac{5}{2} \Rightarrow x + \frac{1}{x} = \frac{5}{2} \Rightarrow 2x^2 - 5x + 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

۱۰. داریم:

$$\text{سمت راست تساوی} = \frac{1}{\cos\theta} - \tan\theta = \frac{1}{\cos\theta} - \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{1-\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$\text{سمت چپ تساوی} = \sqrt{\frac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}} = \sqrt{\frac{(1-\sin\theta)(1-\sin\theta)}{(1+\sin\theta)(1-\sin\theta)}}$$

$$= \sqrt{\frac{(1-\sin\theta)^2}{1-\sin^2\theta}} = \sqrt{\frac{(1-\sin\theta)^2}{\cos^2\theta}} = \frac{|1-\sin\theta|}{|\cos\theta|}$$

چون همواره $-1 \le \sin\theta \le 1$، بنابراین $1-\sin\theta \ge 0$ و $|1-\sin\theta| = 1-\sin\theta$.

با توجه به طرف دوم تساوی، باید شرایطی را فراهم کنیم که داشته باشیم: $|\cos\theta| = \cos\theta$

یعنی ناحیه‌ای را تعیین کنیم که $\cos\theta \ge 0$. پس این تساوی به شرط آن‌که انتهای کمان مقابل θ در ناحیه‌ی اول یا چهارم باشد، برقرار می‌شود.

۱۱.

$$\frac{x-2}{5} + \frac{x-5}{7} + \frac{x-7}{8} = 20 \Rightarrow$$

$$280 \times \frac{x-2}{5} + 280 \times \frac{x-5}{7} + 280 \times \frac{x-7}{8} = 280 \times 20$$

$$۵۶(x-۲)+۴۰(x-۵)+۳۵(x-۷)=۵۶۰۰$$
$$\Rightarrow ۵۶x-۱۱۲+۴۰x-۲۰۰+۳۵x-۲۴۵=۵۶۰۰$$
$$\Rightarrow ۱۳۱x-۵۵۷=۵۶۰۰ \Rightarrow x=۴۷$$

.۱۲

$$y=ax^۲+۲ax-۳ \Rightarrow y=a(x^۲+۲x-\frac{۳}{a})$$
$$\Rightarrow y=a\left[(x+۱)^۲-۱-\frac{۳}{a}\right] \Rightarrow y=a(x+۱)^۲-(a+۳)$$

رأس سهمی $A(-۱,-a-۳)$

$$-۱=-a-۳ \Rightarrow a=-۲$$

.۱۳

$$۱۶^{۲n-۱}>۸^{n+۷} \Rightarrow ۲^{۸n-۴}>۲^{۳n+۲۱}$$
$$\Rightarrow ۸n-۴>۳n+۲۱ \Rightarrow ۵n>۲۵ \Rightarrow n>۵$$

ریاضیات ۲

۱. ریشه‌ی هریک از عبارات را محاسبه کنید.

$$A=\frac{x^۲-۴}{(۳-۲x)(۴x^۲-۴x+۱)}$$

$$x^۲-۴=۰ \Rightarrow x^۲=۴ \Rightarrow x=\pm۲$$

$$۳-۲x=۰ \Rightarrow -۲x=-۳ \Rightarrow x=\frac{۳}{۲}$$

$$۴x^۲-۴x+۱=۰ \Rightarrow \Delta=b^۲-۴ac=۱۶-۴(۴)\times۱=۱۶-۱۶=۰$$

$$\Rightarrow x=\frac{-b}{۲a}=\frac{+۴}{۴\times۲}=\frac{۱}{۲}$$ ریشه مضاعف

ریشه‌ها را از کوچک به بزرگ مرتب می‌کنیم و در جدول قرار می‌دهیم.

x		-۲		$\frac{۱}{۲}$		$\frac{۳}{۲}$		۲	
$x^۲-۴$	+	۰	−		−		−	۰	+
$۳-۲x$	+		+		+	۰	−		−
$۴x^۲-۴x+۱$	+		+	۰	+		+		+
A	+	۰	−	∞	−	∞	+	۰	−

۲. در معادله‌ی فوق، اگر $\Delta<۰$ و $-۳m>۰$ $(a>۰)$، عبارت به ازای جمیع مقادیر x مثبت است.

$$\Delta=b^۲-۴ac=(۲m)^۲-۴(-۳m)(۱)=۴m^۲+۱۲m<۰$$

$$۴m(m+۳)<۰;\begin{cases}۴m=۰ \Rightarrow m=۰\\ m+۳=۰ \Rightarrow m=-۳\end{cases}$$

$$-۳m>۰ \Rightarrow m<۰$$

m		-۳		۰	
$۴m^۲+۱۲m$	+	۰	−	۰	+
$۴m^۲+۱۲m<۰$			جواب		

اشتراک $m<۰$ و $-۳<m<۰$ برابر است با $-۳<m<۰$

$-۳<m<۰$: جواب

.۳

$$|۲x+۱|\le|x-۲|$$

طرفین معادله را به توان ۲ می‌رسانیم.

$$(۲x+۱)^۲\le(x-۲)^۲ \Rightarrow ۴x^۲+۴x+۱\le x^۲-۴x+۴$$
$$\Rightarrow ۴x^۲+۴x+۱+۴x-x^۲-۴\le۰ \Rightarrow ۳x^۲+۸x-۳\le۰$$

$$\begin{cases}\Delta=b^۲-۴ac=۶۴-۴(۳)(-۳)=۶۴+۳۶=۱۰۰\\ a=۳\\ b=۸\\ c=-۳\end{cases}$$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{۲a} \Rightarrow x=\frac{-۸\pm\sqrt{۱۰۰}}{۲\times۳} \Rightarrow \begin{cases}x=\frac{-۸+۱۰}{۶}=\frac{۲}{۶}=\frac{۱}{۳}\\ x=\frac{-۸-۱۰}{۶}=-۳\end{cases}$$

x		-۳		$\frac{۱}{۳}$	
$۳x^۲+۸x-۳$	+	۰	−	۰	+

جواب: $-۳\le x\le\frac{۱}{۳}$

۴. ابتدا دامنه‌ی عبارت را تعیین می‌کنیم. به این منظور باید مخرج تک تک کسرها را مساوی صفر قرار دهیم.

$$۲x=۰ \Rightarrow x=۰$$

$$۲x+۱=۰ \Rightarrow ۲x=-۱ \Rightarrow x=-\frac{۱}{۲}$$

$$۴x^۲+۲x=۰ \Rightarrow ۲x(۲x+۱)=۰ \Rightarrow \begin{cases}x=۰\\ x=-\frac{۱}{۲}\end{cases}$$

دامنه $D=\mathbb{R}-\left\{۰,-\frac{۱}{۲}\right\}$

مخرج مشترک $۴x^۲+۲x=۲x(۲x+۱)$ است.

$$\frac{x-۱}{۲x}-\frac{۱}{۲x+۱}=\frac{۷-۳x}{۴x^۲+۲x}$$

$$\frac{(۲x+۱)(x-۱)-۲x}{۲x(۲x+۱)}=\frac{۷-۳x}{۴x^۲+۲x}$$

درنتیجه داریم:

$$(۲x+۱)(x-۱)-۲x=۷-۳x$$

$$۲x^۲+x-۲x-۱-۲x=۷-۳x \Rightarrow ۲x^۲=۸ \Rightarrow x^۲=۴ \rightarrow x=\pm۲$$

هر دو ریشه قابل قبول‌اند، چون متعلق به دامنه هستند.

۵. برای تعیین $f(x+\Delta x)$ در $f(x)$ به جای x، باید $x+\Delta x$ را جایگزین کنیم.

$$f(x)=ax+b \Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

$$=\frac{a(x+\Delta x)+b-ax-b}{\Delta x}=\frac{ax+a\Delta x-ax}{\Delta x}=\frac{a\Delta x}{\Delta x}=a$$

۶. برای این‌که تابع معکوس‌پذیر باشد، شرط زیر باید برقرار باشد (شرط یک به یک بودن).

$$f(x_۱)=f(x_۲) \Rightarrow x_۱=x_۲$$

$$\frac{۳x_۱+۷}{x_۱+۲}=\frac{۳x_۲+۷}{x_۲+۲} \Rightarrow (۳x_۱+۷)(x_۲+۲)=(۳x_۲+۷)(x_۱+۲)$$

$$\Rightarrow ۳x_۱x_۲+۶x_۱+۷x_۲+۱۴=۳x_۱x_۲+۶x_۲+۷x_۱+۱۴$$

$$\Rightarrow ۷x_۲-۶x_۲=۷x_۱-۶x_۱ \Rightarrow x_۲=x_۱$$

در نتیجه تابع یک به یک است. برای به‌دست آوردن معکوس

باید x را بر حسب y محاسبه کنیم.

$$f(x)=y=\frac{3x+7}{x+2}\Rightarrow xy+2y=3x+7\Rightarrow$$

$$xy-3x=7-2y\Rightarrow x(y-3)=7-2y\Rightarrow x=\frac{7-2y}{y-3}$$

در رابطه‌ی بالا به جای yها x قرار می‌دهیم.

$$\Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{7-2x}{x-3}$$

۷. ماتریس $X=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$ را درنظر می‌گیریم:

$$AX=\begin{bmatrix}7&8\\1&2\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}-2&3\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7&8\\1&2\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}-2a+3c&-2b+3d\\a(1)+0(c)&1(b)+0(d)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7&8\\1&2\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{bmatrix}-2a+3c&3d-2b\\a&b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7&8\\1&2\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}a=1\\b=2\\-2a+3c=7\xrightarrow{a=1}-2\times1+3c=7\Rightarrow3c=7+2=9\Rightarrow c=\frac{9}{3}=3\\3d-2b=8\xrightarrow{b=2}3d-2\times2=8\Rightarrow3d=8+4\Rightarrow3d=12\Rightarrow d=4\end{cases}$$

۸. برای این‌که دستگاه فوق جواب داشته باشد، باید دترمینان ماتریس ضرایب صفر نباشد.

$$\begin{cases}2mx-4y=4\\-4x+2my=2\end{cases}\quad A=\begin{bmatrix}2m&-4\\-4&2m\end{bmatrix}\Rightarrow|A|\neq0$$

$$\Rightarrow4m^2-(-4)(-4)\neq0\Rightarrow4m^2-16\neq0\Rightarrow m^2-4\neq0$$

$$m^2\neq4\Rightarrow m\neq\pm2$$

۹.

الف) $\log_{25}^{\sqrt{125}}=\log_{5^2}^{\sqrt{5^3}}=\log_{5^2}^{5^{\frac{3}{2}}}=\frac{\frac{3}{2}}{2}\log_5^5$

$$\Rightarrow\frac{\frac{3}{2}}{\frac{2}{1}}\times1\Rightarrow\frac{3}{4}$$

ب) $\log_7^{49^2}=\log_7^{(7^2)^2}=\log_7^{7^4}=4\log_7^7=4\times1=4$

۱۰.

$$2\log_3^x=\log_3^{81}\Rightarrow\log_3^{x^2}=\log_3^{81}\Rightarrow x^2=81\Rightarrow x=\pm9$$

۱۱. باید t_3، t_2 و t_1 را محاسبه و مجموع آن‌ها را به‌دست آوریم.

$t_n=2n+1$

$n=1\Rightarrow t_1=2\times1+1=3$

$n=2\Rightarrow t_2=2\times2+1=4+1=5$

$n=3\Rightarrow t_3=2\times3+1=6+1=7$

$t_1+t_2+t_3=3+5+7=15$

۱۲. چون باید چهار جمله بین $\frac{3}{8}$ و $\frac{128}{81}$ درج کنیم، پس $a=t_1=\frac{3}{8}$ و $t_6=\frac{128}{81}$ است.

$$\underset{a}{\frac{3}{8}},\ \underset{t_2}{\square},\ \underset{t_3}{\square},\ \underset{t_4}{\square},\ \underset{t_5}{\square},\ \underset{t_6}{\frac{128}{81}}$$

$$a_n=aq^{n-1}\Rightarrow a_6=aq^5\Rightarrow\frac{128}{81}=\frac{3}{8}\times q^5\Rightarrow$$

$$q^5=\frac{128}{81}\div\frac{3}{8}=\frac{128}{81}\times\frac{8}{3}\Rightarrow q^5=\frac{1024}{243}$$

$$q^5=\frac{2^{10}}{3^5}\Rightarrow q^5\Rightarrow(\frac{2^2}{3})^5\Rightarrow q^5=(\frac{4}{3})^5\Rightarrow q=\frac{4}{3}$$

$$t_2=aq=\frac{3}{8}\times\frac{4}{3}\Rightarrow t_2=\frac{1}{2}$$

$$t_3=aq^2=\frac{3}{8}\times(\frac{4}{3})^2=\frac{2}{3}$$

$$t_4=aq^3=qt_3=\frac{4}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{8}{9}$$

$$t_5=aq^4=qt_4=\frac{4}{3}\times\frac{8}{9}=\frac{32}{27}$$

۱۳.

$$\sin\alpha=\frac{2}{3}\Rightarrow\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha=1-(\frac{2}{3})^2=1-\frac{4}{9}=\frac{5}{9}$$

$$\cos\alpha=\sqrt{\frac{5}{9}}=\frac{\pm\sqrt5}{3};\ \text{حاده}\ \alpha\Rightarrow\cos\alpha=\frac{\sqrt5}{3}$$

$$\cos\beta=\frac{1}{5}\Rightarrow\sin^2\beta=1-\cos^2\beta\Rightarrow\sin^2\beta=1-(\frac{1}{5})^2$$

$$=1-\frac{1}{25}=\frac{24}{25}\Rightarrow\sin\beta=\sqrt{\frac{24}{25}}=\pm\frac{\sqrt{24}}{5};$$

$$\text{حاده}\ \beta\Rightarrow\sin\beta=\frac{\sqrt{24}}{5}$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

$$=\frac{\sqrt5}{3}\times\frac{1}{5}-\frac{2}{3}\frac{\sqrt{24}}{5}$$

$$=\frac{\sqrt5-4\sqrt6}{15}$$

۱۴.

$$\vec{v_1}.\vec{v_2}=x_1x_2+y_1y_2=(2\sqrt3\times3)+(-2\times\sqrt3)$$

$$=6\sqrt3-2\sqrt3=4\sqrt3$$

$$\vec{v_1}.\vec{v_2}=|\vec{v_1}||\vec{v_2}|\cos\theta\Rightarrow4\sqrt3=\sqrt{x_1^2+y_1^2}\times\sqrt{x_2^2+y_2^2}\cos\theta$$

$$\Rightarrow4\sqrt3=\sqrt{3^2+\sqrt3^2}\times\sqrt{(2\sqrt3)^2+(-2)^2}\cos\theta$$

$$\Rightarrow4\sqrt3=(2\sqrt3)(4)\cos\theta\Rightarrow\cos\theta=\frac{4\sqrt3}{8\sqrt3}=\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow\cos60^\circ=\cos\theta\Rightarrow\theta=60^\circ$$

۱۵. باید تبدیل (جایگشت) ۳ شیء از ۵ شیء را به‌دست آوریم.

الف) $p(5,3)=\frac{5!}{2!}=\frac{5\times4\times3\times2!}{2!}=60$

ب) برای این‌که اعداد فرد باشند، باید رقم یکان آن‌ها فرد باشد. پس برای رقم یکان سه انتخاب ۳و۵و۷ را داریم. لذا یکی از این اعداد انتخاب می‌شوند و چهار عدد برای انتخاب دهگان و سپس سه عدد برای جایگزینی در صدگان وجود دارند.

یکان دهگان صدگان

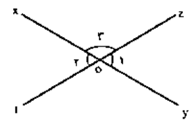
$$\boxed{3}\ \boxed{4}\ \boxed{3}\Rightarrow3\times4\times3=36$$

ج) چون اعداد باید از ۴۰۰ کوچک‌تر باشند، لذا در صدگان آن‌ها فقط دو عدد ۲ و ۳ می‌توانند قرار گیرند. پس برای صدگان دو انتخاب داریم. پس از انتخاب یکی از اعداد فوق، چهار انتخاب برای دهگان و سپس سه انتخاب برای یکان وجود دارد.

یکان دهگان صدگان

$$\boxed{2}\ \boxed{4}\ \boxed{3}\Rightarrow2\times4\times3=24$$

۱.



$$\left.\begin{aligned}\hat{o}_1+\hat{o}_3=180^\circ\\ \hat{o}_2+\hat{o}_3=180^\circ\end{aligned}\right\}\Rightarrow$$

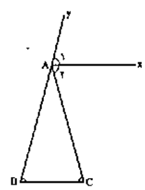
$$\hat{o}_1+\hat{o}_3=\hat{o}_2+\hat{o}_3\Rightarrow\hat{o}_1+\hat{o}_2$$

۲.

$$\begin{cases}\hat{\alpha}+\hat{\beta}=90^\circ\Rightarrow 4\hat{\beta}+\hat{\beta}=90^\circ\Rightarrow 5\hat{\beta}=90^\circ\\ \hat{\alpha}=4\hat{\beta}\quad\Rightarrow\hat{\beta}=18^\circ,\alpha=72^\circ\end{cases}$$

۳.

فرض	$AB=AC,\hat{A}_1=\hat{A}_2$
حکم	$AX\parallel BC$



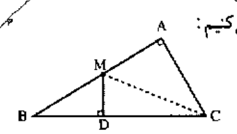
اثبات:

$AB=AC\Rightarrow\hat{B}=\hat{C}$

$\angle YAC=\angle B+\angle C=2\hat{A}_2=2\hat{B}\Rightarrow$

$\hat{B}=\hat{A}_2\Rightarrow\hat{C}=\hat{A}_2,\ \underset{\text{مورب}}{AC}\Rightarrow AX\parallel BC$

۴. از M به C وصل می‌کنیم:



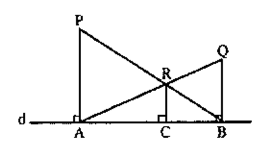
$DC^2+MD^2=MC^2=AC^2+AM^2=AC^2+MB^2$

$\Rightarrow DC^2+MD^2-MB^2=AC^2$

$\Rightarrow AC^2=DC^2-(\underbrace{MB^2-MD^2}_{BD^2})$

$\Rightarrow AC^2=DC^2-DB^2$

۵.



$\Delta PBA: RC\parallel PA\Rightarrow$

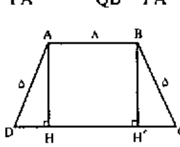
$$\frac{RC}{PA}=\frac{BC}{BA}\qquad(1)$$

$$\Delta QBA: RC\parallel QB\Rightarrow\frac{RC}{QB}=\frac{AC}{BA}\qquad(2)$$

$$(1)\text{ و }(2)\Rightarrow\frac{RC}{QB}+\frac{RC}{PA}=\frac{BC}{BA}+\frac{AC}{BA}=\frac{BC+AC}{BA}=\frac{BA}{BA}=1$$

$$\Rightarrow RC(\frac{1}{QB}+\frac{1}{PA})=1\Rightarrow\frac{1}{QB}+\frac{1}{PA}=\frac{1}{RC}$$

۶.



$CD=14cm,\ AB=8cm\Rightarrow$

$HH'=AB=8cm\Rightarrow CH'+DH=6cm$

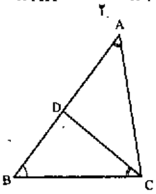
$\Rightarrow CH'=DH=3cm$

$\Delta DAH: AD^2=AH^2+DH^2\Rightarrow AH^2=5^2-3^2=16$

$\Rightarrow AH=4cm$

$$\Rightarrow S_{ABCD}=\frac{AB+CD}{2}\times AH=\frac{14+8}{2}\times4=44cm^2$$

۷.



$$\left.\begin{aligned}\angle BCD=\angle A\\ \angle B=\angle B\end{aligned}\right\}\Rightarrow\Delta BCD\sim\Delta ABC$$

$$\Rightarrow\frac{CD}{AC}=\frac{BD}{BC}=\frac{BC}{AB}\Rightarrow$$

$$BC^2=AB.BD\Rightarrow4=5BD\Rightarrow BD=\frac{4}{5}=0/8$$

$$\Rightarrow AD=AB-BD=5-0/8=4/2$$

۸.

$AB\parallel CD\Rightarrow\Delta OAB\sim\Delta OCD\Rightarrow$

$$\frac{AB}{CD}=\frac{OB}{OC}\Rightarrow\frac{2x}{4x+2}=\frac{x}{x+3}\Rightarrow\frac{2}{4x+2}=\frac{1}{x+3}\Rightarrow$$

$$4x+2=2x+6\Rightarrow2x=4\Rightarrow x=2\Rightarrow\frac{AB}{CD}=\frac{2}{5}\Rightarrow$$

$$\frac{S_{OAB}}{S_{OCD}}=K^2=\frac{4}{25}$$

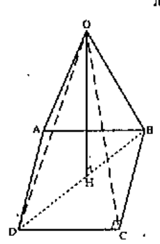
۹.

$$S=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2=\frac{\sqrt{3}}{4}\times400=100\sqrt{3}\Rightarrow$$

$V=sh=(100\sqrt{3})(10\sqrt{3})=3000cm^3$ (منشور)

$V=\pi r^2h'=25\pi h=3000\Rightarrow h=\frac{120}{\pi}=38cm$ (استوانه)

۱۰.



$S_{ABCD}=4cm^2\Rightarrow$

$$V=\frac{1}{3}Sh=\frac{1}{3}\times4\times\sqrt{7}=\frac{4\sqrt{7}}{3}cm^3$$

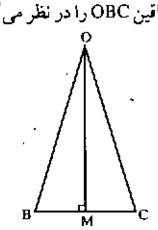
$BD^2=BC^2+CD^2=4+4=8\Rightarrow BD=2\sqrt{2}$

$\Rightarrow BH=\sqrt{2}$

$\Delta OHB: OH^2+BH^2=OB^2\Rightarrow OB^2=7+2=9$

$\Rightarrow OB=3cm\Rightarrow OB=OC=OD=OA=3cm$

اکنون مثلث متساوی‌الساقین OBC را در نظر می‌گیریم:



$OB^2=OM^2+BM^2\Rightarrow9=OM^2+1\Rightarrow OM=2\sqrt{2}\Rightarrow$

$$S_{OBC}=\frac{1}{2}OM.BC=\frac{1}{2}\times2\sqrt{2}\times2=2\sqrt{2}\Rightarrow$$

$S=4(2\sqrt{2})+4=4+8\sqrt{2}$ (هرم)

الف) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 4$

$f'(x) = 3x^2 - 6x + 3 = 3(x^2 - 2x + 1) = 3(x-1)^2 \geq 0$

چون $f'(x) \geq 0$ و معادله‌ی $f'(x) = 0$ یک ریشه دارد، بنابراین تابع f اکیداً صعودی است. پس یک‌به‌یک است.

ب) $y = x^3 - 3x^2 + 3x - 1 + 5 = (x-1)^3 + 5$

$\Rightarrow (x-1)^3 = y - 5 \Rightarrow x - 1 = \sqrt[3]{y-5} \Rightarrow x = 1 + \sqrt[3]{y-5}$

نقش x و y را عوض می‌کنیم، پس:

$f^{-1}(x) = y = 1 + \sqrt[3]{x+5}$

۲. $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$

$(0,-1) \in f \Rightarrow -1 = \dfrac{0+b}{0+d} \Rightarrow \boxed{b = -d}$

مجانب قائم: $cx + d = 0\ ,\ x = -2 \Rightarrow -2c + d = 0 \Rightarrow \boxed{d = 2c}$

$\Rightarrow \boxed{b = -2c}$

مجانب افقی: $y = \dfrac{a}{c}\ ,\ y = 1 \Rightarrow \dfrac{a}{c} = 1 \Rightarrow \boxed{a = c}$

$y = \dfrac{ax+b}{cx+d} \Rightarrow y = \dfrac{cx-2c}{cx+2c} \Rightarrow y = \dfrac{c(x-2)}{c(x+2)}, c \neq 0$

$\Rightarrow y = \dfrac{x-2}{x+2}$

۳. $\lim_{x\to+\infty}(\sqrt[3]{x^3+6x^2} - x) = +\infty - \infty$

$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt[3]{x^3+6x^2} - x) \times \dfrac{\sqrt[3]{(x^3+6x^2)^2} + x\sqrt[3]{x^3+6x^2} + x^2}{\sqrt[3]{(x^3+6x^2)^2} + x\sqrt[3]{x^3+6x^2} + x^2}$

$= \lim_{x\to+\infty} \dfrac{x^3+6x^2-x^3}{x^2+x^2+x^2} = \lim_{x\to+\infty} \dfrac{6x^2}{3x^2} = \dfrac{6}{3} = 2$

۴. باید حد راست و حد چپ و مقدار تابع مساوی باشند.

$\lim_{x\to0^-} f(x) = \lim_{x\to0^-} \dfrac{2\sqrt{2}\sin x}{\sqrt{1-\cos 2x}}$

$= \lim_{x\to0^-} \dfrac{2\sqrt{2}\sin x}{\sqrt{2\sin^2 x}}$

حدچپ: $= \lim_{x\to0^-} \dfrac{2\sqrt{2}\sin x}{-\sqrt{2}\sin x} = -2$

حد راست: $\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+}(\dfrac{|x|}{x} + b) = \lim_{x\to0^+}(\dfrac{x}{x} + b) = \boxed{1+b}$

مقدار تابع: $f(0) = \left[0 - \dfrac{5}{2}\right] + a = \boxed{-3+a}$

$1 + b = -2 \Rightarrow \boxed{b = -3}\ ,\ -3 + a = -2 \Rightarrow a = 1$

۵. $y = x^2 - 4x + 3 \quad x_N = 3$

پای قائم $y_N = 9 - 12 + 3 = 0 \Rightarrow N(3,0)$

$y'_x = 2x - 4\ ,\ x = 3 \Rightarrow m_{\text{مماس}} = 6 - 4 = 2 \Rightarrow$

$m_{\text{قائم}} = -\dfrac{1}{2} \quad y - y_N = m_{\text{قائم}}(x - x_N) \Rightarrow$

معادله‌ی خط قائم $y - 0 = -\dfrac{1}{2}(x-3) \Rightarrow y = -\dfrac{1}{2}(x-3)$

$\begin{cases} y = x^2 - 4x + 3 \\ y = -\dfrac{1}{2}(x-3) \end{cases} \Rightarrow x^2 - 3x + 4 = -\dfrac{1}{2}(x-3)$

$\Rightarrow (x-1)(x-3) + \dfrac{1}{2}(x-3) = 0$

$(x-3)(x - 1 + \dfrac{1}{2}) = 0 \Rightarrow (x-3)(x - \dfrac{1}{2}) = 0$

$\Rightarrow \begin{cases} x = 3 = x_N \\ \boxed{x = \dfrac{1}{2} = x_B} \end{cases}$

$y_B = (\dfrac{1}{2})^2 - 4(\dfrac{1}{2}) + 3 \Rightarrow y_B = \dfrac{1}{4} - 2 + 3 \Rightarrow \boxed{y_B = \dfrac{5}{4}}$

$OB = \sqrt{x_B^2 + y_B^2} = \sqrt{\dfrac{1}{4} + \dfrac{25}{16}} = \sqrt{\dfrac{29}{16}} = \dfrac{\sqrt{29}}{4} \Rightarrow OB = \dfrac{\sqrt{29}}{4}$

۶. الف) $\underbrace{4\sin x.\cos x - 2\sqrt{2}\cos x} - \underbrace{2\sin x + \sqrt{2}} = 0$

$2\cos x(2\sin x - \sqrt{2}) - (2\sin x - \sqrt{2}) = 0$

$(2\sin x - \sqrt{2})(2\cos x - 1) = 0$

۱) $2\sin x - \sqrt{2} = 0 \Rightarrow \sin x = \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \sin\dfrac{\pi}{4} \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \dfrac{\pi}{4} \\ x = 2k\pi + \dfrac{3\pi}{4} \end{cases}$

۲) $2\cos x - 1 = 0 \Rightarrow \cos x = \dfrac{1}{2} = \cos\dfrac{\pi}{3} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \dfrac{\pi}{3}$

ب) $\cos 2x + 5\sin x - 4 = 0$

$1 - 2\sin^2 x + 5\sin x - 4 = 0 \Rightarrow 2\sin^2 x - 5\sin x + 3 = 0$

مجموع ضرایب صفر است $\Rightarrow \begin{cases} \sin x = 1 \Rightarrow x = 2k\pi + \dfrac{\pi}{2} \\ \sin x = \dfrac{c}{a} = \dfrac{3}{2} \end{cases}$ غیرممکن

۷. $f(x) = \tan^4 4x + \cot^2 2x$

$f'(x) = 4(4)(1 + \tan^2 4x).\tan^3 4x - 2(2)(1 + \cot^2 2x).\cot g 2x$

$f'(\dfrac{\pi}{12}) = 16(1 + \tan^2\dfrac{\pi}{3})\tan^3\dfrac{\pi}{3} - 4(1 - \cot^2\dfrac{\pi}{6})\cot\dfrac{\pi}{6}$

$f'(\dfrac{\pi}{12}) = 16(1+3)(3\sqrt{3}) - 4(1+3)\sqrt{3}$

$f'(\dfrac{\pi}{12}) = 64(3\sqrt{3}) - 16\sqrt{3} = 176\sqrt{3}$

۸.

$f(x) = \begin{cases} ax^3 + bx & , x \geq 2 \\ x^2 - 4x & , x < 2 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} 3ax^2 + b & , x \geq 2 \\ 2x - 4 & , x < 2 \end{cases}$

این تابع باید در x=2 پیوسته باشد و $f'_+(2) = f'_-(2)$

پیوستگی: $8a + 2b = 4 - 8 \Rightarrow 8a + 2b = -4 \Rightarrow 4a + b = -2$

مشتق: $f'_+(2) = f'_-(2) \Rightarrow 12a + b = 4 - 4 \Rightarrow 12a + b = 0$

$\begin{cases} 4a + b = -2 \\ -12a - b = 0 \end{cases} \Rightarrow -8a = -2 \Rightarrow \boxed{a = \dfrac{1}{4}}$

$12a + b = 0\ ,\ a = \dfrac{1}{4} \Rightarrow 3 + b = 0 \Rightarrow \boxed{b = -3}$

۹.

$y = \cos^2 x + \cos x - 2 \qquad 0 \le x \le 2\pi$

$y'_x = -2\sin x \cos x - \sin x = 0 \Rightarrow -\sin x(2\cos x + 1) = 0$

$1)\ \sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi \Rightarrow x = 0, \pi, 2\pi$

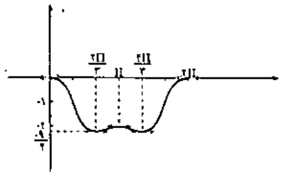
$2\cos x + 1 = 0 \Rightarrow \cos x = -\frac{1}{2} = \cos\frac{2\pi}{3}$

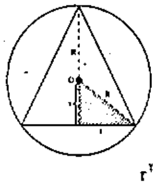
$$\begin{cases} x = 2k\pi + \frac{2\pi}{3} \Rightarrow x = \frac{2\pi}{3} \\ x = 2k\pi - \frac{2\pi}{3} \Rightarrow x = \frac{4\pi}{3} \end{cases}$$

$x = 0$ یا $2\pi \Rightarrow y = 0$ و $y = 0 \Rightarrow \cos^2 x + \cos x - 2 = 0$

$\Rightarrow$ مجموع ضرایب صفر است $\begin{cases} \cos x = 1 \Rightarrow x = 2k\pi \Rightarrow x = 0\ ,\ 2\pi \\ \cos x = -2 \quad \text{غیرممکن} \end{cases}$

x	0		$\frac{2\pi}{3}$		π		$\frac{4\pi}{3}$		2π
y'_x	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0
y	0		$-\frac{9}{4}$		-2		$-\frac{9}{4}$		0





شعاع قاعده‌ی مخروط: r و R=۶

$0 < x$ و ارتفاع مخروط h=R+x

در مثلث قائم‌الزاویه شکل داریم: $r^2 = R^2 - x^2$

$V = \pi r^2 . \frac{h}{3} = \frac{\pi}{3} h r^2 = \frac{\pi}{3}(R + x)(R^2 - x^2)$ و $R=6$

$V = \frac{\pi}{3}(6 + x)(36 - x^2) \Rightarrow$

$V'_x = \frac{\pi}{3}[(36 - x^2) - 2x(6 + x)] = 0$

$(6 - x)(6 + x) - 2x(6 + x) = 0 \Rightarrow (6 + x)(6 - x - 2x) = 0$

$\Rightarrow \underbrace{(6 + x)}_{+}(6 - 3x) = 0 \Rightarrow 6 - 3x = 0 \Rightarrow x = 2$

$\Rightarrow h = R + x \Rightarrow h = 6 + 2 \Rightarrow h = 8$

جبر و احتمال

۱. $n = 1 : \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

فرض استقرا: $n = k : \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^k} = 1 - \frac{1}{2^k}$

حکم استقرا:

$n = k + 1 : \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^{k+1}} = 1 - \frac{1}{2^{k+1}}$

برای اثبات حکم، به جای مجموع k جمله‌ی نخست در سمت چپ برابری حکم، از فرض استقرا جایگزین می‌کنیم:

$1 - \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^{k+1}} = 1 - (\frac{1}{2^k} - \frac{1}{2^{k+1}}) = 1 - \frac{2 - 1}{2^{k+1}} = 1 - \frac{1}{2^{k+1}}$

۲. از استدلال بازگشتی استفاده می‌کنیم:

$x^2 + y^2 \ge 2x + 2y - 2 \Rightarrow$

$(x^2 - 2x + 1) + (y^2 - 2y + 1) \ge 0 \Rightarrow (x - 1)^2 + (y - 1)^2 \ge 0$

که با توجه به نامنفی بودن $(x - 1)^2$ و $(y - 1)^2$، درستی نامساوی اخیر واضح است. اکنون استدلال اصلی را هم می‌نویسیم:

$(x - 1)^2 + (y - 1)^2 \ge 0 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 - 2y + 1 \ge 0$

$\Rightarrow x^2 + y^2 \ge 2x + 2y - 2 \Rightarrow x^2 + y^2 \ge 2(x + y - 1)$

۳. از برهان خلف کمک می‌گیریم. فرض می‌کنیم $1 + \sqrt{3}$ عددی گویا باشد:

$1 + \sqrt{3} = \frac{m}{n}, m, n \in Z, n \ne 0 \Rightarrow \sqrt{3} = \frac{m}{n} - 1 = \frac{m - n}{n}$

$m - n = p\ ,\ m, n \in Z \Rightarrow p \in Z \Rightarrow \sqrt{3} = \frac{p}{n} \in Q$

و این با فرض مسأله (گنگ بودن $\sqrt{3}$) تناقض دارد.

۴. چون ۸۰۰=۷۰+۳۶۵×۲، اگر دانش‌آموزان در روزهای متفاوت سال هم به دنیا آمده باشند، ۷۳۰ نفر نخست می‌توانند در ۳۶۵ روز سال، از نظر روز تولد، توزیع شوند؛ به طوری که هر دو نفر در یک روز به دنیا آمده باشند. در نتیجه، نفر هفتصدوسی‌ویکم، روزی به دنیا آمده است که دو نفر دیگر همان روز به دنیا آمده‌اند. بنابراین لااقل سه‌نفر در یک روز سال به دنیا آمده‌اند.

۵. $a = 2k \Rightarrow 7a + 1 = 14k + 1 = 2(7k) + 1 = 2k' + 1$

۶. $(A \cup B) - (B \cup C) = (A \cup B) \cap (B \cup C)'$

$= (A \cup B) \cap (B' \cap C') = C' \cap [B' \cap (A \cup B)]$

$= C' \cap [(B' \cap A) \cup \underbrace{(B' \cap B)}_{\varnothing}] = C' \cap (B' \cap A)$

$= (A \cap B') \cap C' = (A - B) - C$

۷. $A = \left\{\frac{1}{4}, 1, 4\right\}\ ,\ B = \{-1, 0, 1\} \Rightarrow$

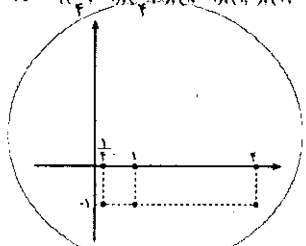
$A \times B = \{(\frac{1}{4}, -1), (\frac{1}{4}, 0), (\frac{1}{4}, 1), (1, -1), (1, 0),$

$(1, 1), (4, -1), (4, 0), (4, 1)\},$

$A^2 = \{(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}), (\frac{1}{4}, 1), (\frac{1}{4}, 4), (1, \frac{1}{4}), (1, 1), (1, 4),$

$(4, \frac{1}{4}), (4, 1), (4, 4)\} \Rightarrow$

$A \times B - A^2 = \{(\frac{1}{4}, -1), (\frac{1}{4}, 0), (1, -1), (1, 0), (4, -1), (4, 0)\}$



۸. خاصیت بازتابی: $(x, y)R(x, y) \Rightarrow x^3 - y^2 = x^3 - y^2$

$(x, y)R(z, t) \Leftrightarrow (z, t)R(x, y)$

خاصیت تقارنی: $x^3 - t^2 = z^3 - y^2 \Leftrightarrow z^3 - y^2 = x^3 - t^2$

$(x, y)R(z, t)\ ,\ (z, t)R(r, s)$

$$\begin{cases} x^3 - t^2 = z^3 - y^2 \\ z^3 - s^2 = r^3 - t^2 \end{cases}$$

خاصیت تراگذری: $x^3 - s^2 = r^3 - y^2 \Rightarrow (x, y)R(r, s)$

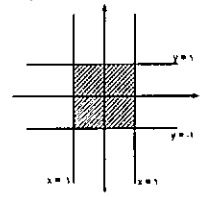
بنابراین R سه خاصیت بازتابی، تقارنی و تراگذری را دارد و یک رابطه‌ی هم‌ارزی است.

$[(-2, 3)] = ? \quad (-2, 3)R(x, y) \Rightarrow$

$(-2)^3 - y^2 = x^3 - 3^2 \Rightarrow x^3 + y^2 = 1 \Rightarrow$

۹. $[(-۲,۳)] = \{(x,y) | x,y \in R, x^۳ + y^۲ = ۱\}$

$|x| \le ۱ \Rightarrow -۱ \le x \le ۱ \;,\; |y| \le ۱ \Rightarrow -۱ \le y \le ۱$



۱۰. الف)

S={(۱و ر)،(۲و ر)،(۳و ر)،(۴و ر)،(۵و ر)،(۶و ر)، (روروپ)،(پ و پ و پ)،(پ و روپ)، و (روپ و پ)}

ب)

A={(۱و ر)،(۲و ر)،(۳و ر)،(۴و ر)،(۵و ر)،(۶و ر)، (پ وروپ)،(روپ و پ)}

ج) B={(پ و پ و پ)،(پ ورو پ)،(روپ و پ)}

د) $A \cap B' = A - B =$ {(۱و ر)،(۲و ر)،(۳و ر)،(۴و ر)،(۵و ر)،(۶و ر)}

۱۱. الف)

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{\binom{۱۰}{۳}}{\binom{۱۵}{۳}} = \frac{\frac{۱۰!}{۳!۷!}}{\frac{۱۵!}{۳!۱۲!}} = \frac{\frac{۱۰\times۹\times۸}{۶}}{\frac{۱۵\times۱۴\times۱۳}{۶}}$$

$$= \frac{۱۰\times۹\times۸}{۱۵\times۱۴\times۱۳} = \frac{۲۴}{۹۱}$$

ب)

$$P(B) = \frac{\binom{۵}{۱}\binom{۱۰}{۲}}{\binom{۱۵}{۳}} = \frac{۵\times۴۵}{\frac{۱۵\times۱۴\times۱۳}{۶}} = \frac{۵\times۴۵\times۶}{۱۵\times۱۴\times۱۳} = \frac{۴۵}{۹۱}$$

۱۲.

$$\begin{cases} P(۱) = P(۳) = P(۵) = ۵P(۲) = ۵P(۴) = ۵P(۶) \\ P(۱) + P(۲) + P(۳) + P(۴) + P(۵) + P(۶) = ۱ \end{cases}$$

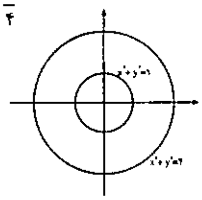
$\Rightarrow ۵P(۲) + P(۲) + ۵P(۲) + P(۲) + ۵P(۲) + P(۲) = ۱ \Rightarrow$

$۱۸P(۲) = ۱ \Rightarrow \quad P(۲) = P(۴) = P(۶) = \frac{۱}{۱۸},$

$$P(۱) = P(۳) = P(۵) = \frac{۵}{۱۸}$$

۱۳.

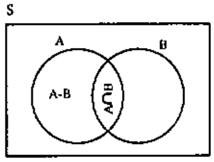
$$P(A) = \frac{S_۱}{S} = \frac{\pi(۱)^۲}{\pi(۲)^۲} = \frac{۱}{۴}$$



۱۴.

$$P(A)\frac{n(A)}{n(S)} = \frac{\binom{۱۰}{۷}}{۲^{۱۰}} = \frac{\frac{۱۰!}{۷!۳!}}{۲^{۱۰}} = \frac{۱۰\times۹\times۸}{۶\times۲^{۱۰}} = \frac{۱۵}{۱۲۸}$$

۱۵. با توجه به شکل و تساوی $A - B = A \cap B'$ ، واضح است که $A \cap B'$ و $A \cap B$ دو پیشامد ناسازگار هستند. بنابراین داریم:



$(A \cap B) \cap (A \cap B') = \varnothing \Rightarrow$

$P[\underbrace{(A \cap B) \cup (A \cap B')}_{A}] = P(A \cap B) + P(A \cap B') \Rightarrow$

$P(A) - P(A \cap B) = P(A \cap B')$

۱۶. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B),$

$P(A') = ۱ - P(A) = \frac{۳}{۸} \Rightarrow P(A) = \frac{۵}{۸},$

$\frac{۳}{۴} = \frac{۵}{۸} + P(B) - \frac{۱}{۳}$

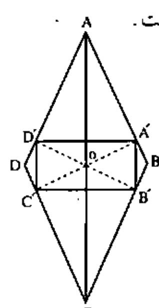
$\Rightarrow P(B) = \frac{۳}{۴} + \frac{۱}{۳} - \frac{۵}{۸} = \frac{۱۱}{۲۴}$

ب) $P(B - A) = P(B) - P(B \cap A) = \frac{۱۱}{۲۴} - \frac{۱}{۳} = \frac{۱}{۸}$

هندسه‌ی ۲

۱. A' و O و C' روی یک خط واقع‌اند. $\Leftarrow$ $\left. \begin{array}{l} OA' \perp AB \\ OC' \perp CD \\ AB \parallel CD \end{array} \right\}$

به همین ترتیب، نقاط B' و O و D' نیز روی یک خط قرار دارند. چون نقطه‌ی O محل تلاقی نیمسازهای لوزی است، پس فاصله‌ی آن از ضلع‌ها یکسان است؛ یعنی: $OA' = OB' = OC' = OD'$. پس در چهارضلعی $A'B'C'D'$ قطرها همدیگر را نصف می‌کنند و با هم برابرند. درنتیجه، چهارضلعی مستطیل است.



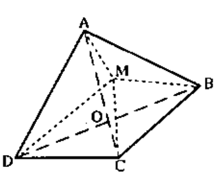
۲. ثابت می‌کنیم در چهارضلعی محدب ABCD ، مجموع فاصله‌های محل تلاقی قطرها تا رأس‌ها می‌نیمم است. نقطه‌ی دلخواه M را درنظر می‌گیریم و ثابت می‌کنیم:

$OA + OB + OC + OD < MA + MB + MC + MD$

$\Delta MAC: MA + MC > AC \Rightarrow OA + OC < MA + MC$

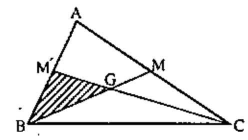
$\Delta MBD: MB + MD > BD \Rightarrow OB + OD < MB + MD$

با جمع کردن طرفین نامساوی‌های فوق، حکم به‌دست می‌آید.



۳. فرض کنیم از مثلث ABC اطلاعات زیر معلوم باشند: b و m_b و m_c.

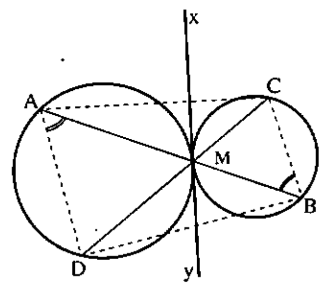
مثلث $BM'G$ را با داشتن طول سه ضلع آن ($BM' = \frac{C}{۲}$ و $GM' = \frac{m_c}{۳}$ و $BG = \frac{۲}{۳}m_b$) رسم می‌کنیم. BG را به اندازه‌ی نصف خود تا نقطه‌ی M و BM' را به اندازه‌ی خود تا نقطه‌ی A امتداد می‌دهیم. محل تلاقی خطوط AM و $M'G$ نقطه‌ی C خواهد بود.



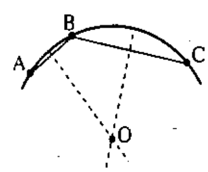
۴ . از نقطه‌ی M خط xy مماس مشترک دو دایره را رسم می‌کنیم . با توجه به شکل داریم :

$$BC \| AD \Leftarrow A\hat{B}C = B\hat{A}D \Leftarrow \begin{cases} \frac{MC}{۲} = A\hat{B}C = x\hat{M}C \\ y\hat{M}D = x\hat{M}C \\ \frac{MD}{۲} = B\hat{A}D = y\hat{M}D \end{cases}$$

بنابراین چهارضلعی ACBD ذوزنقه است .



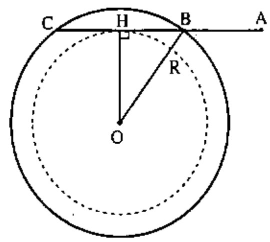
۵ . روی کمان معلوم، سه نقطه‌ی A و B و C را اختیار می‌کنیم . محل تلاقی عمودمنصف‌های دو وتر AB و BC مرکز دایره است .



۶ . فرض کنیم قاطع ABC جواب مسأله باشد، یعنی BC = a .

$$\Delta OHB: OH^۲ = R^۲ - HB^۲ = R^۲ - (\frac{a}{۲})^۲ \Rightarrow OH = \frac{۱}{۲}\sqrt{۴R^۲ - a^۲}$$

پس برای رسم وتر موردنظر مسأله، ابتدا دایره‌ای به مرکز O و به شعاع $\frac{۱}{۲}\sqrt{۴R^۲ - a^۲}$ رسم می‌کنیم . سپس از نقطه‌ی A مماسی بر دایره‌ی جدید رسم می‌کنیم . وتر ایجاد شده روی دایره‌ی اول، جواب مسأله است .



۷ . نقطه‌ی A(a,b) را درنظر می‌گیریم . قرینه‌ی آن نسبت به نیمساز ربع‌های اول و سوم عبارت است از A'(b,a) . بنابراین مختصات تصویر قائم آن روی نیمساز ربع‌های اول و سوم عبارت است از $(\frac{a+b}{۲}$ و $\frac{b+a}{۲})$، بنابراین داریم :

$$T(x,y) = (\frac{x+y}{۲}, \frac{x+y}{۲})$$

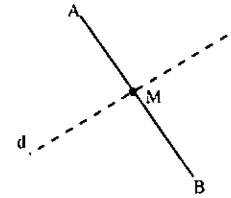
۸ . $A(۳,۸), B(۶,۷) \Rightarrow m_{AB} = \frac{۷-۸}{۶-۳} = \frac{-۱}{۳} \Rightarrow m_d = ۳$

M وسط $AB \Rightarrow M(\frac{۹}{۲}, \frac{۱۵}{۲})$

$$d: y-\frac{۱۵}{۲}=۳(x-\frac{۹}{۲})$$

$$\Rightarrow d: y=۳x-۶$$

زیرا عمودمنصف پاره‌خط AB، محور تقارن محسوب می‌شود و A و B قرینه‌ی یکدیگرند نسبت به خط d.



۹. ضابطه‌ی بازتاب نسبت به نقطه‌ی A(۲,۱) عبارت است از:

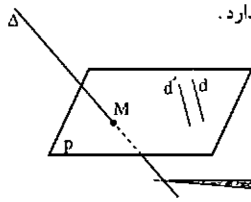
$$T(x,y)=(۲\alpha-x, ۲\beta-y)=(۴-x, ۲-y)$$

بنابراین، اگر x را به ۴ - x و y را به ۲ - y تبدیل کنیم، نباید معادله‌ی منحنی تغییر کند.

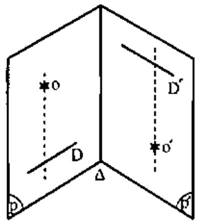
$$۲-y=\frac{۴-x+۱}{۴-x-۲}\Rightarrow ۲-y=\frac{۵-x}{۲-x}\Rightarrow -y=\frac{۵-x-۴+۲x}{۲-x}$$

$$\Rightarrow -y=\frac{x+۱}{۲-x}\Rightarrow y=\frac{x+۱}{x-۲}$$

۱۰. بی‌شمار یا هیچ. فرض کنید خطوط d و d′ موازی باشند و خط Δ با هر دو متناظر باشد. تمام خطوطی که d و d′ را قطع می‌کنند، درون صفحه‌ی p قرار دارند (صفحه‌ی p شامل دو خط d و d′ است). اگر خط Δ صفحه‌ی p را قطع کند، تمام خطوطی که از M بگذرند، d و d′ را قطع کنند، جواب مسأله‌اند و اگر Δ با صفحه‌ی p موازی باشد، مسأله جواب ندارد.

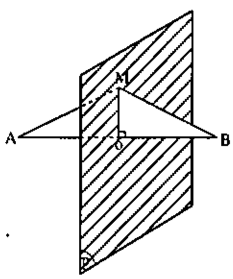


۱۱. صفحه‌ی p را بر نقطه‌ی O و خط D و صفحه‌ی p′ گذرا از O′ و شامل D′ را در نظر می‌گیریم و فصل مشترک دو صفحه را خط Δ می‌نامیم. از O و O′ دو خط به موازات Δ رسم می‌کنیم. این دو خط در صفحات p و p′ واقع‌اند. بنابراین، اولی خط D و دومی D′ را قطع می‌کند. پس این دو خط مزبور جواب مسأله‌اند.



۱۲. وسط پاره‌خط AB را نقطه‌ی O می‌نامیم و از نقطه‌ی O صفحه‌ی p را بر خط AB عمود می‌کنیم.

اولاً: اگر M از نقطه‌های A و B به یک فاصله باشد، مثلث MAB متساوی‌الساقین و MO عمودمنصف AB است و نقطه‌ی M در صفحه‌ی p قرار دارد.



ثانیاً: اگر M نقطه‌ای از صفحه‌ی p باشد، خط MO و AB عمود است و چون O وسط AB قرار دارد، MO عمودمنصف پاره‌خط AB خواهد بود. درنتیجه: MA=MB.

زبان حال ریاضی دانان



با وجود اهمیتی که کاربرد ریاضیات دارد، این کاربرد نباید ملاک ارزش آن باشد.

دیوید هیلبرت



به نظر می‌رسد که ریاضیات حس جدیدی غیر از احساس عادی به ریاضی دان می‌بخشد.

چارلز داروین

اگر تار و پود ریاضیات جدید که توسط هزاران کارگر بافته شده به صورت وسیع و پیچیده است، در عوض افکار اصلی محیط بر آن بسیار ساده‌اند و اگر هدف این افکار عمیق و نامحدود است در عوض هر کس که هوش و استعدادی داشته باشد می‌تواند آن‌ها را درک کند.

ای.تی.بل

بر گرفته از کتاب زبان حال ریاضی دان
به روایت دکتر علی اکبر عالم زاده

رشد

برهان

فصلنامه ی آموزشی، تحلیلی، اطلاع رسانی

مجله ریاضی

دوره ی متوسطه

۵۴

• دوره‌ی شانزدهم • شماره‌ی ۴

• تابستان ۱۳۸۶ • بها ۳۰۰۰ ریال



- تاریخ علم و تمدن در ایران
- مثلث های مزدوج
- رسم نمودار تابع بدون مشتق
- ترکیبیات

وزارت آموزش و پرورش

سازمان پژوهش وبرنامه ریزی آموزشی

دفتر انتشارات کمک آموزشی

مشاهیر ریاضی مسلمان

بیرونی



بیرونی. ابوریحان محمدبن احمد بیرونی، ریاضیدان، منجّم و دانشمند ایرانی که در سوم ذیحجه‌ی سال ۳۶۲ در بیرون خوارزم، پا به عرصه‌ی وجود گذاشت و به سال ۴۴۲ درگذشت.

وی یکی از نوابغ روزگار و یکی از بزرگ‌ترین مفاخر دنیای علم و تحقیق است.

بیرونی ریاضیدانی زبردست و مبتکر بود که علاوه بر آن، جهانگردی زیرک و نکته‌سنج شد و کتاب معروف **تحقیق ماللهند** را در لهجه‌های محلّی و معارف و فلسفه‌ی هندیان نگاشت.

بیرونی، آخرین اثر خود به نام **الصیدنه فی الطّب** را که درباره‌ی داروهای طبی است، در سنی متجاوز از هشتاد سالگی نوشته است.

بعضی از آثار ریاضی موجود بیرونی عبارت است از:

۱ـ کتاب **التفهیم لاوائل صناعة التنجیم**، بیرونی **آن را به دو** زبان فارسی و عربی نوشته است.

۲ـ کتاب **مقالید علم الهیئة** که **یکی از مهم**‌ترین آثار ریاضی بیرونی و نخستین کتاب مستقل **«مثلثات کروی»** است، که نام کامل آن **مقالید علم الهیئة ما یحدث فی سطح الکره** است.

۳ـ مقاله‌ی سوم، کتاب **قانون مسعودی**، که یکی از مهم‌ترین و مفصل‌ترین آثار او است.

کوهی

کوهی. ابوسهل ویجن بن رستم کوهی، ریاضیدان و منجم معروف ایرانی، متوفی در حدود ۴۰۵. از مردم طبرستان است و در بغداد می‌زیسته و هم در این شهر، به سال ۳۷۸ رصدخانه‌ای بنا کرده است. علاوه بر زبردستی در نجوم، در ریاضیات، به‌خصوص هندسه، مقامی شامخ داشته و بنا به قول سارتن، تحقیقاتش در مسائل ارشمیدس و آپولونیوس، از بهترین آثار هندسی دوره‌ی اسلامی است.

بیرونی نیز در کتاب **«قانون مسعودی»** وی را از مبرزان زمان خود در هندسه نامیده است.

بعضی از آثار ریاضی موجود وی عبارت است از:

۱ـ رسالة فی البرکارالتام و العمل به، که رساله‌ای است درباره‌ی ساختن و به کار بردن پرگار تام در ترسیم قطوع مخروطی، و مقصود از پرگار تام، پرگاری است که بتوان با آن، خط راست، دایره، بیضی و هذلولی را با حرکت اتصالی رسم کرد.

۲ـ رسالة فی استخراج ضلع المسبع المتساوی الاضلاع، که موضوع آن روش محاط کردن هفت ضلعی منتظم در دایره است، این رساله به زبان آلمانی ترجمه شده است.

۳ـ رسالة فی عمل مخمس متساوی الاضلاع فی مربع معلوم، که موضوع آن، محاط کردن پنج ضلعی منتظم در مربع است.

منبع: فرهنگ ریاضیات/گروه ریاضیات انتشارات مدرسه/ناشر: انتشارات مدرسه

بسم الله الرحمن الرحیم

رشد برهان ۵۴

مجله ی ریاضی

دوره ی متوسطه

فصلنامه آموزشی، تحلیلی، اطلاع رسانی

دوره‌ی شانزدهم /شماره‌ی ۴/ تابستان ۱۳۸۶/شمارگان: ۵۰۰۰ نسخه

● مدیر مسؤول: علیرضا حاجیان زاده
● سردبیر: حمیدرضا امیری
● مدیر داخلی: میرشهرام صدر
● طراح گرافیک: آزیتا کوثری
● ویراستار ادبی: کبری محمودی
● اعضای هیأت تحریریه: حمیدرضا امیری
محمد هاشم رستمی، احمد قندهاری،
میرشهرام صدر، هوشنگ شرقی،
سید محمدرضا هاشمی موسوی،
غلامرضا یاسی پور
و با تشکر از همکاری ارزنده‌ی
استاد پرویز شهریاری
● چاپ و صحافی: شرکت افست (سهامی عام)
● نشانی دفتر مجله: تهران، صندوق پستی ۱۵۸۷۵/۶۵۸۵
تلفن دفتر مجله: ۹ـ ۸۸۸۳۱۱۶۰ داخلی ۳۹۷
تلفن امور مشترکین: ۷۷۳۳۶۶۵۶ ـ ۷۷۳۳۵۱۱۰
www.roshdmag.ir
ISSN 1735 - 4951

وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه ریزی آموزشی
دفتر انتشارات کمک آموزشی

رشد برهان متوسطه، تمامی دبیران محترم و دانش‌آموزان عزیز را در زمینه های زیر به همکاری دعوت می کند:

- نگارش مقاله‌های کمک درسی (شرح و بسط و رفع مشکلات مبحث درسی کتاب‌های ریاضی دوره‌ی متوسطه و پیش‌دانشگاهی)
- طرح مسائل کلیدی به همراه حل آن‌ها (برای دانش‌آموزان)
- طرح مسائل مسابقه‌ای به همراه حل آن‌ها (برای دانش‌آموزان)
- طرح معماهای ریاضی
- نگارش یا ترجمه‌ی مقاله‌های عمومی ریاضی (مانند تاریخ ریاضیات، زندگینامه‌ی علمی و اجتماعی ریاضیدانان، نکته‌های تازه و لطیف ریاضیات، آموزش ریاضیات، آموزش کامپیوتر و ...)

رشد برهان متوسطه هر سه ماه، یکبار منتشر می شود.

مجلّه در حکّ، اصلاح، حذف و اضافه ی مقاله ها آزاد است.

مقاله های وارده ،باید خوانا و حتی‌الامکان کوتاه باشد.

مقاله های رسیده مسترد نمی شود.

استفاده از مطالب مجلّه در کتاب ها یا مجله های دیگر با ذکر دقیق مأخذ بلامانع است.

یادداشت سردبیر

وقتی این شماره از مجله به دست شما می‌رسد، احتمالاً یا در تعطیلات تابستانی هستید و یا به آن نزدیک شده‌اید! به همین دلیل هم سعی کرده‌ایم که مطالب این شماره از مجله عمومی‌تر و متنوع‌تر باشد.

راستی برای تابستان چه برنامه‌ای دارید؟ اصلاً به فکر درس خواندن هستید؟ مطالعه‌ی کتاب‌های غیردرسی چه طور؟ با کلاس‌هایی مانند کلاسِ رایانه، و زبان و... چه رابطه‌ای دارید؟

باور می‌کنید، زمان ما وقتی کلاس‌های اول یا دوم دبیرستان را می‌گذراندیم، واقعاً سه ماه تا حتی سه ماه‌ونیم تعطیل بودیم، از کلاس‌های تقویتی، زبان، رایانه و غیره خبری نبود؟ راستش را بخواهید، سه ماه از عمر ما به معنی واقعی تلف می‌شد. تازه مطالب درسی که در طول نُه ماه فرا گرفته بودیم، با سه ماه دوری از کتاب و مدرسه تا حد زیادی به فراموشی سپرده می‌شد و اول مهر بعضی از مطالب کتاب‌های درسی که دنباله‌ی مطالب کتاب‌های سال قبل بود، به‌نظرمان کاملاً غریب می‌آمد!

امیدواریم شما دانش‌آموز عزیز با برنامه‌ریزی صحیح و حساب‌شده، علاوه بر استراحت نسبی، با مطالعه‌ی مطالب درسی سال قبل (سالی که گذشت) و تأمل روی مباحثی که احتمالاً در طول سال تحصیلی در آن‌ها ضعف داشته‌اید، نقطه‌ضعف‌های خود را بپوشانید و حتی با مطالب سال آینده نیز آشنا شوید.

به هر صورت، تعطیلی تابستان فرصت بسیار خوبی است برای آمادگی هرچه بیشتر به‌منظور شروع یک سال تحصیلی موفق و پرنشاط. ان‌شاءالله این شماره از مجله نیز بتواند، گوشه‌ای از اوقات فراغت شما را به نحو احسن پر کُند.

والسلام



تاریخ علم و تمدن در ایران

یادهای آموزشی (۷)

● پرویز شهریاری

۱

نامه‌ای کم وبیش طولانی از استان خوزستان به دستم رسیده است که در آن از آشفتگی هایی که در روایت‌های تاریخی مربوط به گذشته‌ی ایران و ناسازگاری‌هایی که در این روایت‌ها وجود دارند، صحبت شده است. نویسنده در جایی از نامه‌ی خود نوشته‌اند: «آیا در زمینه‌ی پیشرفت دانش، می‌توان سهمی برای ایران درنظر گرفت؟ آیا ایران هم در طول تاریخ چند هزار ساله‌ی خود توانسته است، در پیدایش و تکامل دانش، سهم خود را ادا کند؟ به‌ویژه در دوران‌های کهن‌تر تاریخ این سرزمین، مردم ایران چه نقشی در دانش داشته‌اند؟ نام دانشمندان ما کجا ثبت شده است؟ بر سر نوشته‌های آن‌ها چه آمده است؟»

پیش از آن که به این پرسش‌ها، که چندان هم ساده نیستند، پاسخ بدهیم، باید پنداری نادرست را که بیشتر زاییده‌ی روحیه‌ی نژادپرستانه و سودجویانه‌ی دوران سلطه‌ی نظام سرمایه‌داری جهانی است، از ذهن خود دور کنیم.

تاریخ‌نویسانی که در خدمت جهان سرمایه‌داری هستند، برای توجیه غارتگری‌های خود، برای سرپوش گذاشتن بر تجاوزها، جنگ‌ها، و ویرانگری‌ها، و برای استوار کردن سلطه‌ی خود برجهان، تلاش کرده‌اند بپذیرانند که ملت‌ها را باید به دو گروه «متمدن» و «وحشی» تقسیم کرد. ملت‌های برگزیده‌ای هستند که فرهنگ و تمدن بشر را مدیون آن‌ها هستیم و بنابراین حق دارند، بر ملت‌های دیگر که گویا سهمی در ساختن بنای عظیم دانش و تمدن کنونی نداشته‌اند، سروری و حکومت کنند. و... اگر اندکی دقیق‌تر به این شعارها بیندیشیم، به این نتیجه می‌رسیم که «ملت‌های برگزیده»، نه خود ملت‌ها، بلکه چماق‌به‌دستانی هستند که وظیفه‌ی حفظ و تسلط غارتگران جهانی را برعهده گرفته‌اند و نه تنها به ملت‌های دیگر، بلکه به ملت خود نیز ستم می‌کنند و تا آن‌جا پیش رفته‌اند که محیط زیست طبیعی را در سراسر جهان به تباهی و نابودی کشانده‌اند.

اگر در جایی خواندید یا از کسی شنیدید که فلان ملت یا قوم، در طول تاریخ خود نتوانسته است سهمی در پیشبرد فرهنگ انسانی داشته باشد، مطمئن باشید که پنداری نادرست و ساخته و پرداخته‌ی مبلغان نژادپرست یا ناآگاه جهان سرمایه‌داری است. همه‌ی قوم‌ها و همه‌ی ملت‌ها، بدون هیچ استثنایی، صاحب فرهنگ‌اند و در پدید آوردن فرهنگ و دانش امروزی بشر سهم دارند. شاید این سهم در دوران‌های متفاوت به یک اندازه نباشد، شاید در این یا آن‌جا توقف‌هایی، یا بهتر بگوییم، کُندی‌هایی در حرکت یک ملت یا قوم دیده شود، ولی این را نمی‌توان به حساب فروتر بودن این قوم نسبت به قوم‌های دیگر گذاشت.

در این باره، روشی نادرست را در بررسی تاریخ به ما تحمیل کرده‌اند. فساد، ظلم، بی‌خردی، توطئه و سرانجام فروپاشی یک حکومت را به حساب بی‌فرهنگی مردم گذاشته‌اند. در حالی که حکومت‌ها غالباً ویرانگر فرهنگ بوده‌اند و مردم، سازنده‌ی آن. لشکرکشی‌ها، جنگ‌ها و تجاوزها، زورمدارانی را به جای زورمداران پیشین می‌نشاندند، ولی در این میان، ضربه‌ی اساسی را حرکت فرهنگی مردم تحمل می‌کند. حمله‌ی اسکندر مقدونی به ایران، بیش از هر چیز به رشد و تکامل فرهنگی مردم لطمه زد و رنج و عذاب بیشتری را برای مردم فراهم آورد. البته مردم خیلی زود خود را بازیافتند و به حرکت فرهنگی خویش، گرچه با کُندی بیشتر، ادامه دادند. داستان دل‌نشین «سمک عیار» که بازمانده‌ی روایت‌هایی از دوران پارت‌ها (اشکانیان) است، گواه این مطلب است. شاهان ساسانی، همه‌ی همت خود را صرف ویرانی و نابودی اثرهای فرهنگی دوره‌ی زمامداری پارت‌ها کردند، ولی مردم دوباره راه خود را یافتند و از راه پیشرفت بازنماندند.

۲

در تمامی دوران تاریخ ایران، چه به وسیله‌ی مهاجمان بیگانه و چه به دست زورمداران و حکام بی‌فرهنگ داخلی، باقی‌مانده‌ی اثرهای دوران‌های گذشته، و از آن جمله کتاب‌ها و کتاب‌خانه‌ها به آتش کشیده شده‌اند. از آن میان، تنها به سه نمونه از سه دوره‌ی تاریخی اشاره می‌کنیم:

ابوریحان بیرونی (محمد فرزند احمد، ۳۶۲-۴۴۰ هجری قمری) در کتاب مشهور خود، «آثارالباقیه» درباره‌ی خوارزم می‌نویسد: «قتیبه [سردار عرب] همه‌ی کسانی را که به زبان خوارزمی می‌نوشتند و یا با ادب و افسانه‌های ملی آشنا بودند و [دانش‌ها را] به دیگران می‌آموختند، از بین برد. چنان وضعی برای خوارزم به وجود آورد و چنان زیان‌هایی به مردم آن‌جا زد و [روایت‌های ملی] را چنان نابود کرد که از تاریخ بعد از اسلام خوارزم هم، نمی‌توان به اندک آگاهی دست یافت...»

در «تذکره‌ی دولتشاه سمرقندی» که در سال ۸۹۲ هـ. ق نوشته شده است و به آن «تذکرة‌الشعرا» هم می‌گویند، می‌خوانیم: وقتی عبدالله طاهر (۱۸۲-۲۳۰ هـ. ق) در خراسان به حکومت رسید و حکومت کرمان را به پسرعمویش داد، پسرعموی او «... فرمود، در قلمرو او، هر جا از تصانیف عجم و مغان کتابی باشد، جمله را بسوزانند...»

حکیم عمر خیام نیشابوری (سده‌های چهارم و پنجم هـ. ق) در پیشگفتار کتاب «جبر و مقابله»ی خود، حکایت روزگارش را این گونه تصویر می‌کند: «... ما شاهد نابودی دانشمندان زیادی بودیم. دانشمندانی که از مرگ نجات یافته‌اند، بسیار اندک‌اند و آن‌ها هم به رنج‌های بسیاری دچار شده‌اند... حکیم نمایان روزگار ما همگی دست اندرکارند تا راست را با دروغ بیامیزند، و جز ریا و فریب، کاری ندارند. اگر دانش و معرفتی هم دارند، صرف هدف‌های پست جسمانی می‌کنند و اگر با انسانی روبه‌رو شوند که در جست‌وجوی حقیقت و راستی است و روی از نادرستی و زور می‌گرداند و گرد ریا و مردم‌فریبی نمی‌گردد، او را مسخره

می‌کنند و کوچک می‌شمارند...».

به یاد داشته باشید که خیام، خیلی پیش از تجاوز و قتل و غارت‌های مغولان می‌زیسته است.

با همه‌ی این‌ها مردم، گرچه با رنج و دشواری، همیشه پاسدار فرهنگ و دانش ملی خود بودند. از همان سرزمین خوارزم بود که دانشمندان و ادب‌شناسان بزرگی چون: رودکی (در زمان سامانیان، فوت در ۳۲۹ هـ. ق)، محمد خوارزمی (در سده‌ی سوم هجری)، ابوریحان بیرونی، پورسینا و ابونصر عراق (استادِ ابوریحان که به دست محمود غزنوی کشته شد) برخاستند.

و یا وقتی می‌بینیم از روستاهایی مثل «ماهان» و «تربت جام»، ریاضی‌دانان بزرگی چون ماهانی (ابوعبدالله محمد، سده‌ی سوم هجری) و ابوالوفای بوزجانی (بوزجان نزدیک تربت جام است) برخاسته‌اند که تحصیل نخستین خود را در خانواده به دست آورده‌اند و وقتی شهرتی یافته‌اند، به جمع دانشمندان ساکن در بغداد پیوسته‌اند، باید بپذیریم که مردم ایران، در نگه‌داری فرهنگ و دانش خود، با همه‌ی دشواری‌ها، پیروز بوده‌اند.

البته نشر دانش و فاش کردن راستی‌ها، کار ساده‌ای نبود و خطر می‌آفرید. پورسینا در حکمت «المشرقین» می‌گوید: «... بسیاری از اغلاط را با پرده‌ی تغافل پوشاندم. علت این پرده‌پوشی این بود که نخواستم با چیزهایی که از فرط شهرت برای جاهلان بدیهی شده و به مقامی رسیده که در درستی آن‌ها شکی ندارند، مخالفت کرده باشم. ولی همان طور که وضع اسرار به نزدیک جاهل خطاست، منع معانی از عاقل ناستوده است...»

۳

در این جا به دو نکته‌ی دیگر اشاره می‌کنیم. بیشتر در زمان انوشیروان دادگر (دادگر یعنی قانون‌گذار. دادار از واژه‌ی دات پهلوی به معنای قانون است)، ایرانیان برگردان کتاب‌های فلسفی و علمی را از زبان یونانی آغاز کردند و درنتیجه، بسیاری از کتاب‌های یونانی به زبان پهلوی و سُریانی، و در دو سه سده‌ی اول هجری به زبان عربی برگردانده شدند. بعدها و به‌ویژه در اسپانیا، کسانی پیدا شدند که کتاب‌ها را به طور مستقیم از زبان یونانی به عربی برگرداندند. نخستین کسی که در ایران به برگردان کتاب‌های پهلوی به عربی دست زد، روزبه پارسی معروف به «ابن‌مقفع» بود که از جمله «کلیله و دمنه» را به زبان عربی برگرداند و «باب برزویه‌ی طبیب» را خود به آن افزود.

نکته‌ی دوم این که معمولِ ایرانیان بود که در بیشتر موارد، کتاب‌های فلسفی، علمی و اخلاقی را دسته‌جمعی می‌نوشتند و این است که نویسنده‌ی کتاب چندان معلوم نیست.

۴

بعد از این پیشگفتار که اندکی هم به درازا کشید، به برخی اشاره‌ها می‌پردازیم که در این جا و آن جا درباره‌ی کارهای علمی ایرانیان کهن باقی مانده است. وقتی همه‌ی نشان‌ها را در خود ایران نابود کرده‌اند، ناچاریم راهی غیرمستقیم را انتخاب کنیم و به جست‌وجوی نشان‌ها در گوشه و کنار جهان برویم.

پولینوس، تاریخ‌نویس سده‌ی اول میلادی، نوشته است: هرمی‌توس، برای شرح اندیشه‌های زرتشت، ۲۰ جلد کتاب شعر او را تهیه کرده است. همین پولینوس می‌گوید: «در زمان هخامنشیان موفق به اندازه‌گیری انحنای زمین در ایران شدند. فیثاغوریان به خورشیدمرکزی، و گردش زمین به دور خورشید معتقد بودند؛ دیدگاهی که مورد توجه دیگران قرار نگرفت و می‌دانیم که فیثاغورس «دانش مغان را آموخته بود.» در «فروردین یشت» و «آبان یشت»، به روشنی از کروی بودن زمین سخن رفته است و این در حالی است که در «ایلیاد» هومر، زمین مسطح و آتن در مرکز آن پنداشته شده است.

گاه‌شماری خورشیدی که از هزاران سال پیش معمول بوده، گواه دیگری بر وجود دانش ریاضی و اخترشناسی ایرانیان است. این در حالی است که قوم‌های دیگر تا هزاران سال بعد، هنوز از ماه و سال قمری استفاده می‌کردند که نمی‌توانست فصل‌ها را تشخیص دهد و برای کشاورزان که باید زمان کشت و برداشت را بدانند، دشواری ایجاد می‌کرد. «زیج شهریار» که در زمان ساسانیان تنظیم شده و شامل جدول‌های اخترشناسی بوده، مشهور است، ولی جز نام و چند جمله‌ای از آن (در کتاب‌های تاریخ‌نویسان بعد از آن)، بقیه به فراموشی سپرده شده است و می‌دانیم تنظیم جدول‌های اخترشناسی، به دانش بالایی از ریاضیات نیاز دارد.

خیام که با سفارش نظام‌الملک راهی اصفهان شد تا دوباره گاه‌شماری خورشیدی را سامان دهد، چنان گاه‌شماری به‌وجود آورد که نسبت به گاه‌شمار گریگوری که بیش از ۵۰۰ سال بعد از خیام تنظیم شده، به مراتب دقیق‌تر است.

یکی دیگر از کشف‌های ایرانیان، قنات بود و آب را در جایی که نسبت به اطراف خود بلند بود، از روی گیاهانی که در آن‌جا می‌رویید پیدا می‌کردند و از زیر زمین با کشیدن کانال‌هایی که گاهی تا دو هزار کیلومتر می‌شد، آن را به سطح زمین می‌رساندند و در آن‌جا صرف آبیاری

می کردند. به‌ویژه در جنوب ایران و در نقطه‌هایی مثل کرمان و یزد، حفر قنات خیلی معمول بود.

۵

تمیستوکلس، سردار یونانی سده‌ی هفتم پیش از میلاد که خود در دانشگاه هکمتانه (همدان) بوده است، می‌نویسد: «این دانشگاه ۱۰۰ دانشجو دارد که به آن‌ها فلسفه، اخترشناسی، جغرافی و پزشکی می‌آموزند. ریاست این مرکز علمی را سئینه بر عهده دارد که پزشکی بزرگ است و شهرت جهانی دارد.»

این پزشک، یعنی سئینه، چنان مشهور بوده است که پس از مرگ به صورت استوره درمی‌آید و در طول زمان، انسانی افسانه‌ای شمرده می‌شود. بسیاری را عقیده بر این است که افسانه ی «سیمرغ» یا «سیرنگ» از نام او گرفته شده است. چرا که سیمرغ و سیرنگ هم در استوره‌های ایرانی، از جمله در شاه‌نامه‌ی فردوسی، در نقش پزشکی کارامد ظاهر می‌شود و دشواری‌های پزشکی را حل می‌کند.

شاید نام «پورسینا» دانشمند و پزشک معروف ایرانی هم از نام او گرفته شده است. چرا که پدر یا پدربزرگ یا پدر پدربزرگ او سینا نبودند. به نظر می‌رسد که او پزشک‌زاده، یعنی از خانواده‌ای پزشک، زاده شده، مشهور شده و پزشکی عالی‌قدر شناخته شده است؛ هم‌چون کسی که بخش بزرگی از زندگی خود را روی دریا گذرانده باشد و به او «فرزند دریا» نام دهند.

از این مرکزها و دانشگاه‌های علمی، در همه جای ایران بوده‌اند و منحصر به هکمتانه نبود. پلوتارک، تاریخ‌نویس یونانی می‌گوید، خود یکی از مرکزهای علمی ایرانی را دیده است که مثل مرکز علمی هگمتانه، ۱۰۰ دانشجو داشته است و به یادگیری فلسفه، اخترشناسی و پزشکی مشغول بودند.

روی مجسمه‌ای که از یک پزشک مصری باقی مانده است، کتیبه‌ای وجود دارد که در بخش سالم آن آمده است: «من به فرمان داریوش، شاه ایران به مصر آمدم تا مردم را از بیماری‌ها برهانم. در این‌جا به کتاب‌خانه‌ها، کتاب دادم، جوانان را به مردان آزموده سپردم تا تعلیم ببینند، و...»

در زمان خشایارشا، فیلسوف و دانشمندی ایرانی که در ری زاده شده بود، به مصر رفت و در آن‌جا به شاگردان خود که از سراسر جهان به آن‌جا آمده بودند، درس می‌داد (مصر در زمان داریوش و خشایارشا، ایالتی از ایران بود). بسیاری از دانشمندان یونانی شاگرد این استاد بودند. از جمله، دکموریت که واضع نظریه‌ی اتمی است، سال‌ها شاگرد این استاد بوده و به احتمال قوی، نظریه‌ی اتمی را از او گرفته است. این شخص اُستانس نام داشت و به «منع بزرگ» معروف بود. برخی از کتاب‌های اُستانس، حتی در سده‌های اول بعد از شکست ساسانیان به عربی ترجمه شده است.

سخن را کوتاه می‌کنیم و با نقل قسمتی از نوشته‌ی تحلیل‌گر بزرگ تاریخ، عبدالرحمان ابن‌خلدون (متولد در تونس، ۸۰۸-۷۳۲ هجری قمری) که در پیشگفتار کتابش آمده است، به پایان می‌بریم. این پیشگفتار که بیشتر فلسفه‌ی تاریخ است، در سال‌های ۱۳۳۶ و ۱۳۳۷ خورشیدی به فارسی برگردانده شده است:

«... از امور غریب یکی این است که حاملان علم در اسلام، اغلب از عجم بودند؛ خواه در علوم شرعی و خواه در علوم عقلی. و اگر در میان علما مردی در نسب عربی بود، در زبان و جای تربیت و پرورش، از عجم شمرده می‌شد... پس علوم، خاص نواحی متمدن شد و عرب از آن دور ماند و متمدنان این عهد، همه از عجم یا از کسانی بودند که در معنا از آن دسته شمرده می‌شدند؛ یعنی موالی و اهل شهرهایی که در تمدن، صنایع و حرف، پیرو عجمان [ایرانیان] بودند. زیرا اینان بر اثر رسوخ تمدن در میانشان، از هنگام دولت فُرس، برای این کار بهتر و صالح‌تر بودند... هیچ قومی به حفظ و تدوین علم قیام نکرد، مگر عجمان...»

۶

نام ابوریحان بیرونی را همه شنیده‌ایم؛ دانشمند فرهیخته‌ای که نه‌تنها در بیش از هزار سال پیش، سرامد همگان در سراسر سیاره‌ی زمین بود که امروز و در آغاز سده‌ی بیست‌ویکم هم می‌توان، چه از نظر شیوه‌ی کار علمی و چه از نظر روحیه‌ی انسانی، از او یاد گرفت. از گفته‌های اوست: «علت این که اعتقاد عوام و خواص متفاوت است، این است که عوام تنها در حد محسوسات می‌اندیشند و به فرع اکتفا می‌کنند. در حالی که طبع خواص، همیشه با معقولات سروکار دارد و به بررسی در اصول و کُنه قضایا می‌پردازند.»

همین ابوریحان که هیچ جمله‌ای را بدون پژوهش نمی‌نوشت و درباره‌ی هر واژه‌ای می‌اندیشید و به بررسی آزمایشی می‌پرداخت (که از جمله، از بحث‌هایی که ضمن مکاتبه‌هایی با پورسینا داشته، روشن است)، با فروتنی در پیشگفتار شاه‌کار خود، «قانون مسعودی» می‌نویسد: «من چنین کردم تا آیندگان بتوانند در کارهای من اظهارنظر کنند. آن‌چه درست است، تأیید کنند و آن‌چه نادرست است؛ در اندیشه‌ی تصحیح آن برآیند.»

ترکیبیات

(آنالیز ترکیبی با ابزارهای شمارشی پیشرفته‌تر)

(قسمت اول)

● حمیدرضا امیری

اشاره

در آنالیز ترکیبی یا علم شمارش در سطوح مقدماتی، فقط از اصول جمع و ضرب برای شمارش استفاده می‌شود، حال آن که شمارش می‌تواند توسط ابزارهای دیگر یا اصول دیگری نیز انجام شود. یکی از این ابزارها گراف‌های جهت‌دار و ماتریس‌های مجاورت وابسته به این گراف‌ها، توأم با اصل ضرب است. هم‌چنین، از اصولی چون اصل لانه کبوتری و اصل شمول و عدم شمول نیز می‌توان برای شمارش و حل مسائل شمارشی در آنالیز ترکیبی استفاده کرد. در این مقاله سعی می‌کنیم، پس از تعریف گراف‌های جهت‌دار و بیان ارتباط آن‌ها با رابطه‌ها و نیز تعریف و بررسی خواص رابطه‌ها، به شمارش رابطه‌های باخواص معین بپردازیم.

لازم به تذکر است، وقتی می‌توانیم تعداد رابطه‌های تعریف شده روی یک مجموعه‌ی n عضوی با خاصیت یا خواص معین را بشمریم که خواص رابطه‌ها را خوب درک کرده‌باشیم. بنابراین، ابتدا به مثال‌ها و مسائل حل شده‌ی مربوط به خواص رابطه‌ها دقت بفرمایید.

الف) گراف جهت‌دار

تعریف: اگر V مجموعه‌ای متناهی فرض شود و $V \times V$ را تشکیل دهیم، هر زیر مجموعه‌ی $V \times V$ مانند E، به همراه V یک گراف جهت‌دار را تعریف می‌کند. در این گراف جهت‌دار، برای هر زوج مرتب (a_i, a_j) یالی با جهت از طرف a_i به طرف a_j رسم می‌کنیم.

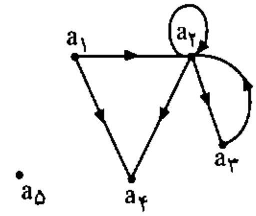
$$V = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$$

$$E \subseteq V \times V = \{(a_i, a_j) | a_i, a_j \in V\}$$

مثال ۱. در شکل ۱، گراف جهت‌دار متناظر با مجموعه‌های V و E رسم شده است.

$$V = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$$

$E = \{(a_1,a_2),(a_2,a_3),(a_2,a_4),(a_3,a_2),(a_2,a_2),(a_1,a_4)\}$



(شکل ۱)

نکته: تعداد کل گراف‌های جهت‌دار که با p رأس می‌توان تعریف کرد، برابر است با: « 2^{p^2} ».

تفاوت‌های ماتریس مجاورت گراف‌های جهت دار با گراف‌های ساده

۱. در گراف‌های جهت‌دار، درایه‌های روی قطر اصلی می‌توانند یک باشند.

۲. ماتریس مجاورت گراف‌های جهت‌دار می‌تواند متقارن نباشد.

۳. تعداد یک‌ها در ماتریس مجاورت گراف‌های جهت‌دار، با تعداد اعضای E برابر است.

۴. وجود یک سطر صفر یا یک ستون صفر در ماتریس مجاورت گراف‌های جهت‌دار، دلیل بر ایزوله(تنها) بودن یک رأس نیست.

تعریف

اگر A مجموعه‌ای ناتهی و دلخواه باشد، هر زیر مجموعه‌ی $A \times A$ را یک رابطه رویA می‌نامیم.

اگر $|A| = m$، در این صورت $|A \times A| = m^2$ و طبق تعریف، 2^{m^2} رابطه روی A می‌توان تعریف کرد.

قرارداد: اگر رابطه‌یR روی A تعریف شده باشد، در این صورت:

$(a,b) \in R \Leftrightarrow aRb$

$(a,b) \notin R \Leftrightarrow a\not{R}b$

ب) خواص رابطه‌ها

۱. خاصیت انعکاسی: $\forall a \in A$ ، $a R a$ در این صورت رابطه‌ی R روی A خاصیت انعکاسی دارد.

مثال۲. اگر $A = \{2,4,6,8\}$ در این صورت رابطه‌ی زیر انعکاسی است:

$R = \{(2,2),(4,4),(6,6),(8,8),(2,6)\}$

□ اگر A مجموعه‌ای m عضوی باشد و رابطه‌ی R روی A خاصیت انعکاسی داشته باشد، در این صورت R حداقل mعضوی است.

□ رابطه‌ی تهی رویA خاصیت انعکاسی ندارد.

با توجه به تعریف گراف جهت‌دار، هر رابطه را می‌توان به عنوان مجموعه یال‌های یک گراف جهت‌دار تصور کرد و مجموعه‌ی A که رابطه‌ی R روی آن تعریف شده است، مجموعه‌ی رأس‌های آن گراف است که در این صورت می‌توان گفت:

«رابطه‌ی R انعکاسی است اگر و فقط اگر روی هر رأس گراف متناظر با این رابطه، طوقه وجود داشته باشد و روی قطر اصلی ماتریس مجاورت این گراف، همه‌ی درایه‌ها یک باشند.»

۲. خاصیت تقارنی: $\forall a,b \in A$ ، $aRb \Leftrightarrow bRa$ در این صورت رابطه‌ی R روی A خاصیت تقارنی دارد.

مثال۳. اگر رابطه‌ی R_1 روی $A = \{2,4,6,8\}$ به صورت $R_1 = \{(2,2),(2,4),(4,2),(6,6),(8,6)\}$ تعریف شود، خاصیت تقارنی ندارد، زیرا $8R6$ و $6\not{R}8$ و رابطه‌ی $R_2 = \{(2,2),(4,2),(2,4)\}$ خاصیت تقارنی دارد.

تذکر۱

رابطه‌ی R روی A خاصیت تقارنی دارد اگر و فقط اگر در گراف متناظر با این رابطه، بین هر دو رأس یالی وجود نداشته باشد یا دو یال موجود باشد. و ماتریس متناظر با این گراف، ماتریس متقارن خواهد بود.

۳. خاصیت پادتقارنی: $\forall a \neq b \in A$ ، $aRb \Rightarrow b\not{R}a$ در این صورت رابطه‌یR روی A خاصیت پادتقارنی دارد.

مثال۴. رابطه‌ی R_1 روی $A = \{2,4,6,8\}$ به این صورت تعریف شده است:

$R_1 = \{(2,2),(2,4),(6,6),(6,8),(4,8)\}$

رابطه‌ی R_1 خاصیت پادتقارنی دارد و رابطه‌ی $R_2 = \{(2,2),(2,4),(4,2)\}$ خاصیت پادتقارنی ندارد.

تذکر ۲

- ❑ هر رابطه‌ی یک عضوی حتماً خاصیت پادتقارنی دارد.
- ❑ رابطه‌ی R روی A خاصیت پادتقارنی دارد اگر و فقط اگر در گراف متناظر با این رابطه، بین هر دو رأس متمایز، حداکثر یک یال وجود داشته باشد (وجود یا نبود طوقه روی رأس‌ها، در خاصیت پادتقارنی بی‌تأثیر است.)
- ❑ در ماتریس مجاورت رابطه‌های پادتقارنی، اگر درایه‌ای یک باشد، قرینه‌ی آن درایه نسبت به قطر، حتماً صفر است.

۴. خاصیت تعدّی (تراگذری یا ترایایی):

$\forall a,b,c \in A$ ، $(aRb, bRc) \Rightarrow (aRc)$ در این صورت رابطه‌ی R روی A خاصیت تعدی دارد.

مثال۵. اگر $A = \{2,4,6,8\}$ ، در این صورت:

$R_1 = \{(2,4)(6,8)\}$ (خاصیت تعدی دارد.)

$R_2 = \{(2,2),(2,4),(4,8),(6,6),(6,8)\}$

(خاصیت تعدی ندارد.)

زیرا: $4R8$ ، $2R4$ ولی $2 \not R 8$.

$R_3 = \{(2,4),(4,2)(2,2)\}$ (خاصیت تعدّی ندارد.)

زیرا: $2R4$ ، $4R2$ ولی $4 \not R 4$.

تذکر ۳

- ❑ هر رابطه‌ی تک عضوی حتماً خاصیت تعدی دارد.
- ❑ رابطه‌ی تهی روی A سه خاصیت تقارنی، پادتقارنی و تعدی را به انتفای مقدم داراست.

تعریف: اگر رابطه‌ی R روی A سه خاصیت انعکاسی، تقارنی (پادتقارنی) و تعدی را دارا باشد، آن را یک رابطه‌ی هم‌ارزی (ترتیب) می‌نامیم.

تعداد رابطه‌ها با خواص معین

۱. تعداد رابطه‌هایی که می‌توان روی یک مجموعه‌ی nعضوی تعریف کرد و خاصیت انعکاسی داشته باشد، برابر است با: $2^{(n^2-n)}$

مثال۶. چند رابطه روی یک مجموعه‌ی ۴عضوی می‌توان تعریف کرد که انعکاسی، شامل (a,b) و فاقد (c,d) باشند.

۱) 2^{12} ۲) 2^{10} ۳) 2^{8} ۴) 2^{16}

پاسخ: گزینه‌ی ۲ درست است زیرا: $2^{(n^2-n)-2} = 2^{10}$. (چرا؟)

رابطه همانی

رابطه‌ی همانی روی مجموعه‌ی A را با I نمایش می‌دهیم و به این صورت تعریف می‌کنیم: $I = \{(a,a) \in A^2 | a \in A\}$

بنابه تعریف بالا، اگر A مجموعه‌ای k عضوی باشد، رابطه‌ی همانی روی A یعنی I نیز k عضوی است.

برای مثال، اگر $A = \{2,4,6\}$ آن‌گاه

$I = \{(2,2),(4,4),(6,6)\}$

❑ رابطه‌ی همانی روی A، هم رابطه‌ی ترتیب است و هم رابطه‌ی هم‌ارزی و این تنها رابطه‌ای است که هم‌ارزی و ترتیب است.

۲. تعداد رابطه‌هایی که روی یک مجموعه‌ی nعضوی می‌توان تعریف کرد که هم تقارنی باشند و هم پادتقارنی، برابر است با: 2^n (هر زیر مجموعه‌ی رابطه‌ی همانی)

برای مثال، رابطه‌ی $R = \{(2,2),(4,4)\}$ هم تقارنی است و هم پادتقارنی.

۳. تعداد رابطه‌های تقارنی که می‌توان روی یک مجموعه‌ی nعضوی تعریف کرد، برابر است با: $2^{\frac{n(n+1)}{2}}$

(درایه‌های روی قطر برابر با n و نصف درایه‌های غیرواقع بر قطر می‌تواند صفر یا یک باشد که مجموع تعداد این درایه‌ها برابر است با:

$$(n + \frac{n^2-n}{2} = \frac{n^2+n}{2} = \frac{n(n+1)}{2})$$

۴. تعداد رابطه‌هایی که روی مجموعه‌ی nعضوی A می‌توان تعریف کرد و خاصیت پادتقارنی دارند، برابر است با:

$$2^n \times 3^{\frac{n^2-n}{2}}$$

درایه‌های غیرواقع بر قطر اصلی $\frac{n^2-n}{2} \Rightarrow 3^{\frac{n^2-n}{2}}$

درایه‌ی روی قطر $n \Rightarrow 2^n$

□ روی نصف درایه‌های غیرواقع بر قطر اصلی اختیار داریم و این اختیار سه حالتی است؛ به این صورت:

| ۰ | ۱ | و | ۰ | ۰ | و | ۱ | ۰ |

$$\begin{bmatrix} \square & & & \\ & \square & & \\ & & \ddots \square & \\ & & & \square \end{bmatrix}_{n\times n}$$

۵. تعداد رابطه‌هایی که روی یک مجموعه‌ی n عضوی می‌توان تعریف کرد، به طوری که دو خاصیت انعکاسی و تقارنی داشته باشند، برابر است با: $2^{\frac{n^2-n}{2}}$

۶. تعداد رابطه‌هایی که روی یک مجموعه‌ی nعضوی می‌توان تعریف کرد که دو خاصیت انعکاسی و پادتقارنی داشته باشند، برابر است با: $3^{\frac{n^2-n}{2}}$

تذکر ۴

هر افراز مجموعه‌ی Aبا یک رابطه‌ی هم‌ارزی روی A متناظر است. در واقع اگر هر یک از مجموعه‌های افراز کننده را در خودش ضرب دکارتی و اجتماع همه‌ی آن‌ها را حساب کنیم، مجموعه‌ی حاصل یک رابطه‌ی هم‌ارزی روی A خواهد بود. بنابراین می‌توان گفت: «تعداد افرازهای ممکن برای مجموعه‌ی A برابر است با تعداد رابطه‌های هم‌ارزی که می‌توان روی A تعریف کرد.»

مثال۷. اگر مجموعه‌ی $B=\{\overset{A_1}{\{2,4\}},\ \overset{A_2}{\{6,7\}},\ \overset{A_3}{\{8\}}\}$ یک افراز سه‌عضوی برای مجموعه‌ی $A=\{2,4,6,7,8\}$ باشد، رابطه‌ای روی Aتعریف کنید که کلاس‌های هم‌ارزی آن رابطه، اعضای B باشند.

پاسخ: $R=(A_1\times A_1)\cup(A_2\times A_2)\cup(A_3\times A_3)$

$\Rightarrow R=\{(2,2),(4,4),(2,4),(4,2),(6,6),(7,7),(6,7),(7,6),(8,8)\}$

تمرین: تعداد افرازهای مجموعه‌های سه‌عضوی، چهار عضوی و پنج عضوی را بیابید.

مثال۸. چند رابطه روی مجموعه‌ی ۴عضوی A می‌توان تعریف کرد، به شرط آن که پادتقارنی، شامل (a,a) و فاقد (a,b) باشند؟

۱) $2^4\times3^4$ ۲) $2^3\times3^5$ ۳) $2^3\times3^4$ ۴) $2^4\times3^5$

پاسخ: چون طبق فرض، رابطه شامل (a,a) است، پس یکی از ۴ درایه‌ی روی قطر اجباراً یک است. از طرف دیگر، چون رابطه فاقد (a,b) است، درایه‌ی مربوط به (a,b) صفر، اما برای درایه‌ی مربوط به (b,a) دو حالت امکان‌پذیر است (صفر یا یک) که در این صورت به انتخاب‌های دو وضعیتی ما یکی اضافه و از انتخاب‌های سه‌وضعیتی ما یکی کم می‌شود و چون قبلاً از دو وضعیتی‌ها یکی کم شده بود، در واقع تغییری در دو وضعیتی‌ها رخ نمی‌دهد. یعنی این تعداد رابطه برابر است با:

$$2^{4-1+1}\times3^{6-1}$$

پس گزینه‌ی ۴ درست است.

مثال۹. چند رابطه‌ی ۴عضوی روی مجموعه‌ی A می‌توان تعریف کرد، به شرط آن که پادتقارنی، شامل (a,a) و شامل (a,b) باشند؟

۱) $2^4\times3^4$ ۲) $2^3\times3^5$ ۳) $2^3\times3^4$ ۴) $2^4\times3^5$

پاسخ: گزینه‌ی ۲ درست است. چون طبق فرض، رابطه شامل (a,a) است. پس یکی از ۴ درایه‌ی روی قطر اجباراً یک است. از طرف دیگر، چون رابطه شامل (a,b) است، درایه‌ی مربوط به (a,b) یک و درایه‌ی مربوط به (b,a) صفر است. در این صورت، از انتخاب‌های دو وضعیتی یکی کم و از انتخاب‌های سه‌وضعیتی ما نیز یکی کم می‌شود. یعنی تعداد رابطه‌ها برابر است با: $2^3\times3^5$

تعریف

روی مجموعه‌ی ماتریس‌های مجاورت، عمل ضربی تعریف می‌کنیم که این عمل در این مجموعه بسته باشد. به عبارت دیگر، حاصل‌ضرب دو ماتریس مجاورت، یک ماتریس مجاورت با درایه‌های صفر یا یک باشد. برای این کار، ماتریس‌ها را به روش معمول (سطر در ستون) ضرب می‌کنیم و هنگام ضرب یک سطر در یک ستون تعریف می‌کنیم:

$$1+1=1$$

مثال۱۰.

$$\overset{A}{\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}}\overset{A}{\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}}=\overset{A^2}{\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}}$$

ترکیب رابطه‌ها (ترکیب یک رابطه با خودش)

تعریف: اگر رابطه‌ی R روی A تعریف شده باشد، ترکیب رابطه‌ی R با خودش را با نماد RoR نمایش می‌دهیم و داریم:
«a(RoR)c اگر و فقط اگر bای در A باشد، به قسمی که aRb و bRc.»

$R = \{(۲,۴),(۴,۳),(۲,۳),(۳,۲),(۴,۴)\}$

$RoR = \{(۲,۳),(۲,۴),(۴,۲),(۲,۲),(۳,۴),(۳,۳),(۴,۳),(۴,۴)\}$

$(۲R۴, ۴R۳ \Rightarrow ۲R۳)$

تعریف: رابطه‌ی $<<$ را روی مجموعه‌ی ماتریس‌های مجاورت به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$A << B \Leftrightarrow \forall i,j\ ,\ a_{ij} \le b_{ij}$

مثال۱۱. $\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix} << \begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix}$

نکته: معادله‌ی $x << A$ در مجموعه‌ی ماتریس‌های مجاورت، دارای $۲^{(\text{تعداد یک‌های A})}$ جواب و معادله‌ی $A << x$ دارای $۲^{(\text{تعداد صفرهای A})}$ جواب است.

قضیه‌ی۱: اگر رابطه‌ی R روی مجموعه‌ی nعضوی A تعریف شده باشد و Mماتریس مجاورت متناظر با رابطه‌ی R باشد و I_n رابطه‌ی همانی روی A باشد، در این صورت:

I) $I_n << M \Leftrightarrow$ رابطه‌ی R انعکاسی است.

II) $M^T = M$ یا M متقارن باشد $\Leftrightarrow$ رابطه‌ی R تقارنی است.

III) $M^۲ << M \Leftrightarrow$ رابطه‌ی R تراگذری یا تعدّی است.

IV) $M \wedge M^T << I_n \Leftrightarrow$ رابطه‌ی R پادتقارنی است.

(اثبات این قضیه در کتاب ریاضیات گسسته‌ی پیش دانشگاهی آمده است.)

ضرب مؤلفه به مؤلفه بین دو ماتریس A و B را با نماد $(A \wedge B)$ نمایش می‌دهیم.

مثال۱۲. اگر $A = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix}$، در این صورت داریم:

$$(A \wedge B) = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱\times۰ & ۰\times۱ \\ ۱\times۱ & ۱\times۰ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix}$$

مثال۱۳. رابطه‌ی R روی مجموعه‌ی $A = \{۲,۴,۶\}$ تعریف شده است. با استفاده از قضیه‌ی ۱، خواص R را بررسی کنید.

$R = \{(۲,۲),(۴,۴),(۶,۶),(۲,۴),(۴,۲),(۲,۶)\}$

پاسخ: R انعکاسی است زیرا:

$$I)\ M = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix},\ I_۳ << M$$

$II)\ M^T \ne M \Rightarrow$ R متقارن نیست.

$$III)\ M^۲ = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

$M^۲ \not<< M$، پس R تراگذری نیست.

$$IV)\ M \wedge M^T = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix} \not<< I_۳$$

R پاد متقارن نیست.

قضیه‌ی ۲: اگر رابطه‌ی R روی مجموعه‌ی nعضوی A تعریف شده باشد و ماتریس مجاورت این رابطه را M بنامیم، در این صورت:

I) $R = \phi \Leftrightarrow M = [۰]$

II) $R = A \times A \Leftrightarrow M = [۱]$

III) $M_{(RoR)} = (M_{(R)})^۲$

مثال۱۴. اگر $R = \{(۲,۴),(۲,۶),(۴,۲),(۴,۴),(۶,۴),(۶,۶)\}$ روی مجموعه‌ی $A = \{۲,۴,۶\}$ تعریف شده باشد، با استفاده از قضیه‌ی ۲، RoR را به‌دست آورید.

پاسخ:

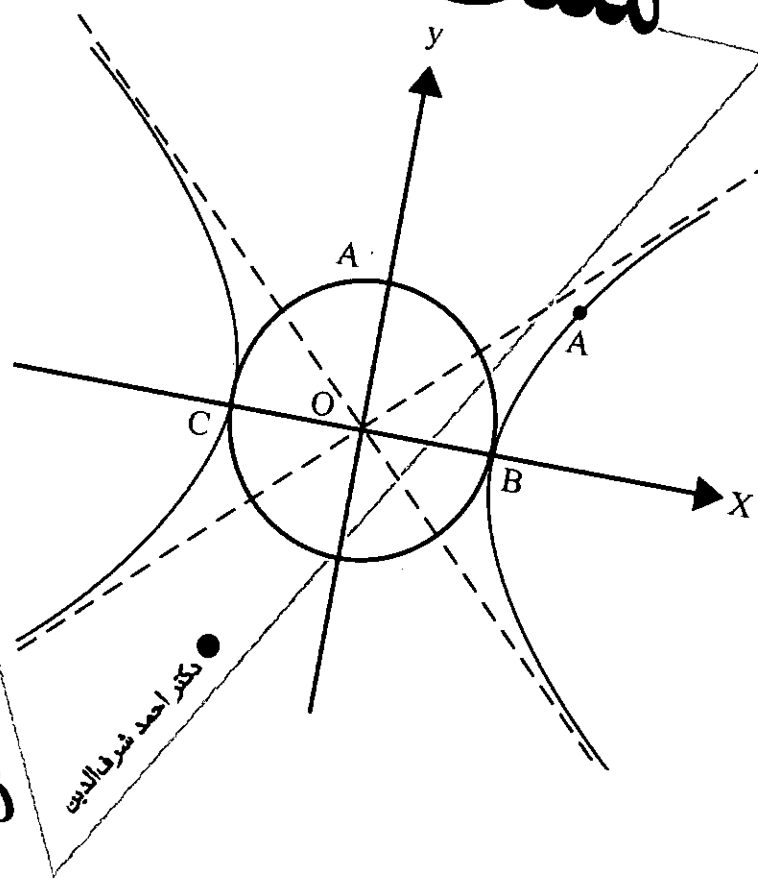
$$\begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ \end{bmatrix} = M_{RoR}$$

$\Rightarrow RoR = A \times A$

مثلث های مزدوج

یکسانی و همسانی چند قضیه در مثلث هایی که مجموع یا تفاضل دو زاویه آن ها یک قائمه است

دکتر احمد شرف الدین



چکیده

مثلث قائم الزاویه ی ABC را که در آن A زاویه ی قائمه و AH ارتفاع وارد بر وتر است، درنظر می گیریم. قرینه ی نقطه ی B را نسبت به نقطه ی H با B' نشان می دهیم. با به کارگیری علامت جبری ثابت می کنیم، دو مثلث ABC و $AB'C$ دارای برخی خواص یکسان و برخی خواص همانند هستند. برای آن که خواص موردنظر را به آسانی بیان کنیم، دو مثلث ABC و $AB'C$ را دو مثلث «مزدوج» می نامیم. به طور کلی نیز، دو مثلث که در یکی از آن ها مجموع دو زاویه، مساوی °۹۰ و در دیگری تفاضل دو زاویه، مساوی °۹۰ باشد، دارای برخی خواص یکسان و برخی خواص همانند هستند. بر چنین دو مثلثی، دو مثلث «مزدوج» نام می نهیم.

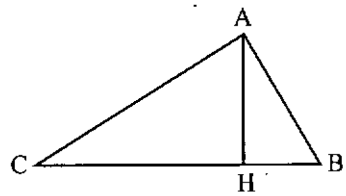
چند حکم در مثلث قائم الزاویه

در مثلث قائم الزاویه ی ABC که در آن A زاویه ی قائمه و AH ارتفاع وارد بر وتر است، رابطه های ذیل برقرارند (در بیان مطالب آینده، طول پاره خط AB را با AB و اندازه ی جبری بردار $\overrightarrow{AB}$ را

اشاره

استاد دکتر شرف‌الدین، همکار گرامی مجله‌ی برهان، سال‌هاست مقالات ارزشمندی برای مجله‌ی برهان می‌نویسند که مورد استفاده‌ی مخاطبان مجله قرار گرفته‌اند. ایشان در هندسه، جبر بول و تاریخ ریاضی تحقیقات متنوعی دارند و به طرح چند دستگاه فیزیکی نیز نائل آمده‌اند. ایشان به تازگی یک ماشین الکترونیکی با به کارگیری تحقیقی در جبر بول طراحی کرده‌اند و آن را در کنگره‌ی بین‌المللی ریاضی دانان[1] در شهریور امسال عرضه کرده‌اند.

روی محور منطبق بر آن با $\overline{AB}$ نشان می‌دهیم).



(شکل ۱)

$$AB^2 + AC^2 = BC^2 \qquad (1)$$

$$AH^2 = HB.HC \qquad (2)$$

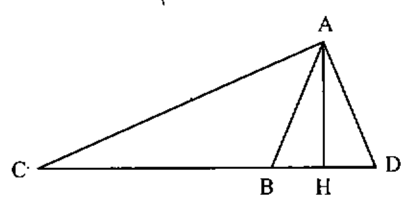
$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} \qquad (3)$$

$$AB.AC = BC.AH \qquad (4)$$

$$\frac{AB^2}{AC^2} = \frac{HB}{HC} \qquad (5)$$

مثلثی که تفاضل دو زاویه‌ی آن °۹۰ است

مثلث ABC را که تفاضل دو زاویه‌ی B و C ی آن قائمه است، درنظر می‌گیریم ($B - C = 90°$) و ارتفاع AH آن را رسم می‌کنیم. قرینه‌ی نقطه‌ی B را نسبت به نقطه‌ی H با D نشان می‌دهیم. به آسانی می‌توان ثابت کرد که مثلث ACD قائم‌الزاویه است.



(شکل ۲)

به‌کارگیری عدد جبری

در شکل‌های ۱ و ۲، با به‌کارگیری یک محور منطبق بر خط BC و به‌کارگیری عدد جبری نشان می‌دهیم، در دو مثلث مزدوج، بعضی رابطه‌های یکسان و نیز بعضی رابطه‌های همانند وجود دارند.

محور $x'x$ را منطبق بر خط BC و با جهت دلخواه (شکل‌های ۱ و ۲)، و نقطه‌ی H را به عنوان مبدأ محور اختیار می‌کنیم. چنین داریم:

$$\overline{BC} = \overline{BH} + \overline{HC} = \overline{HC} - \overline{HB}$$

$$\overline{BC} = \overline{HC} - \overline{HB} \qquad (6)$$

بررسی بعضی خواص همانند در دو مثلث مزدوج

الف) در شکل ۱، در مثلث ABC، این رابطه برقرار است:

$$AH^2 = HB.HC \qquad (7)$$

رابطه‌ی (۷)، با توجه به تشابه دو مثلث AHB و AHC ثابت می‌شود. در شکل ۲، در مثلث ABC رابطه زیر برقرار است:

$$AH^2 = HB.HC \qquad (8)$$

رابطه‌ی (۸) با توجه به تشابه دو مثلث AHB و AHC ثابت می‌شود.

اکنون با توجه به اندازه‌ی جبری دو بردار $\vec{HB}$ و $\vec{HC}$، روی محور $x'x$ چنین داریم:

$$AH^2 = -\overline{HB}.\overline{HC} \quad \text{(در شکل ۱)} \qquad (9)$$

$$AH^2 = \overline{HB}.\overline{HC} \quad \text{(در شکل ۲)} \qquad (10)$$

رابطه‌های (۹) و (۱۰) فقط در یک علامت متفاوت‌اند (نوعی همانندی خاصیت دو مثلث مزدوج).

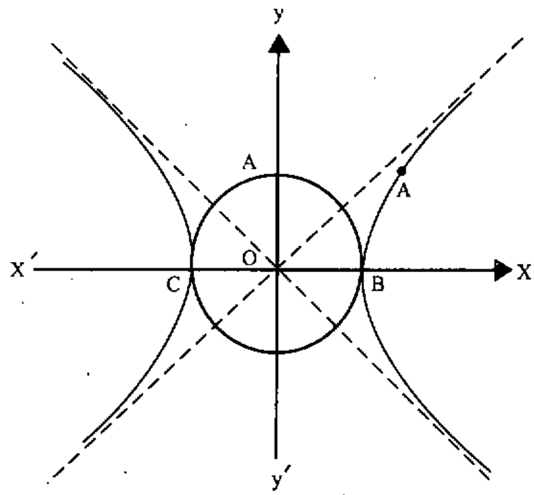
اکنون مسئله را با به‌کارگیری مکان هندسی بررسی می‌کنیم.

مسئله: در صفحه‌ی P دو نقطه‌ی ثابت B و C و نقطه‌ی متحرک A را درنظر می‌گیریم. مطلوب است مکان هندسی نقطه‌ی A، به‌طوری که اگر H پای عمود وارد از نقطه‌ی A بر خط BC باشد، این رابطه برقرار باشد: $AH^2 = HB.HC$

حل: دستگاه مختصات دکارتی xy را طوری انتخاب می‌کنیم که محور $x'x$ آن بر خط BC منطبق باشد. نقطه‌ی O وسط پاره‌خط BC را مبدأ محور $x'x$ اختیار می‌کنیم. طول OB=OC را a می‌نامیم. مختصات دو نقطه‌ی B و C چنین‌اند: $B(a,0)$ و $C(-a,0)$. مختصات نقطه‌ی متحرک A را (x,y) می‌نامیم. مکان هندسی نقطه‌ی A با رابطه‌ی (۸) تعیین می‌شود. رابطه‌ی ۸ به این صورت نوشته می‌شود:

$y^2 = \pm(a-x)(-a-x)$

معادله‌ی $y^2 = -(a-x)(-a-x)$ معادله‌ی دایره‌ی $x^2+y^2=a^2$ است؛ یعنی دایره‌ای به قطر BC. معادله‌ی $y^2 = (a-x)(-a-x)$، معادله‌ی هذلولی متساوی‌الساقین به معادله‌ی $x^2 - y^2 = a^2$ است. این هذلولی دو مجانب به معادله‌های $y = \pm x$ دارد و در نقاط B و C بر خط BC عمود است. مکان هندسی نقطه‌ی متحرک A که در معادله‌ی ۸ صدق می‌کند، اجتماع دایره و هذلولی است (شکل۳).



(شکل ۳)

تبصره: نتیجه شد که در هذلولی متساوی‌الساقین، خاصیت زیر وجود دارد:

هذلولی متساوی‌الساقین با رأس‌های B و C را در نظر می‌گیریم. اگر A نقطه‌ی دلخواهی واقع بر این هذلولی باشد، چنین داریم:

| (اندازه‌ی زاویه‌ی θ) − (اندازه‌ی زاویه‌ی C) | = ۹۰°

ب) ثابت کنید در مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABC که در آن نقطه‌ی A رأس زاویه‌ی قائمه و AH ارتفاع وارد بر وتر است، رابطه‌ی زیر محقق است:

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} \qquad (۱۱)$$

اثبات: در مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABC چنین داریم:

$AB^2 + AC^2 = BC^2$

دو طرف رابطه‌ی بالا را بر $AB^2.AC^2$ بخش می‌کنیم. حاصل می‌شود:

$$\frac{1}{AC^2} + \frac{1}{AB^2} = \frac{BC^2}{AB^2.AC^2} \qquad (۱۲)$$

با توجه به این که در مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABC این رابطه مسلم است: $AB.AC = BC.AH$، از رابطه‌ی (۱۲)، رابطه‌ی (۱۱) حاصل می‌شود.

خاصیت ۱۱ در مثلث مزدوج

از مقایسه‌ی دو شکل ۱ و ۲ معلوم است که دو مثلث ABC در هر دو شکل، ضلع‌های مساوی AB و ضلع‌های مساوی AC و ارتفاع‌های مساوی AH دارند. پس رابطه‌ی ۱۱ در این دو مثلث مزدوج برقرار است.

به‌کارگیری مکان هندسی

در صفحه‌ی P دو نقطه‌ی ثابت B و C و نقطه‌ی متحرک A را درنظر می‌گیریم و پای عمود وارد از نقطه‌ی A برخط BC را H می‌نامیم. مطلوب است مکان هندسی نقطه‌ی A به‌طوری که رابطه‌ی (۱۱) برقرار باشد.

حل: دستگاه مختصات دکارتی xy را طوری اختیار می‌کنیم که محور xها بر خط BC منطبق و مبدأ آن نقطه‌ی O وسط پاره‌خط BC باشد. رابطه‌ی (۱۱) به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\frac{1}{y^2} = \frac{1}{(x-a)^2+y^2} + \frac{1}{(x+a)^2+y^2} \qquad (۱۲)$$

معادله‌ی (۱۲) پس از عمل‌های جبری متعدد، به صورت زیر درمی‌آید:

$$(x^2+y^2-a^2)(x^2-y^2-a^2) = 0 \qquad (۱۳)$$

از رابطه‌ی (۱۳) نتیجه می‌شود:

$$x^2+y^2-a^2 = 0 \qquad (۱۴)$$

یا

$$x^2-y^2-a^2 = 0 \qquad (۱۵)$$

نمودار معادله‌ی (۱۴) دایره‌ای به قطر BC و نمودار معادله‌ی (۱۵) یک هذلولی متساوی‌الساقین با رأس‌های B و C است. پس مکان هندسی نقطه‌ی A که در رابطه‌ی (۱۲) صدق کند، عبارت است از اجتماع دایره‌ای به قطر BC و هذلولی متساوی‌الساقین با رأس‌های B و C.

تبصره: از آن‌چه در سطرهای گذشته نوشته شد، خاصیتی از هذلولی متساوی‌الساقین نتیجه می‌شود که در زیر یاد می‌کنیم:

اگر از نقطه‌ی A واقع بر هذلولی متساوی‌الساقین، به رأس‌های B و C عمود AH را بر خط BC وارد کنیم، این خاصیت را داریم: $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2}$

خاصیت مذکور، هم در دایره‌ی به قطر BC و هم در هذلولی متساوی‌الساقین با رأس‌های B و C معتبر است (یکسانی یک

خاصیت در دو مثلث مزدوج).

پ) در مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABC که BC وتر است، رابطه‌ی زیر برقرار است (قضیه‌ی فیثاغورس):

$$AB^2 + AC^2 = BC^2 \qquad (۱۶)$$

اکنون سعی می‌کنیم رابطه‌ی (۱۶) را به صورتی بنویسیم که هم در مثلث قائم‌الزاویه و هم در مثلث مزدوج آن معتبر باشد.

رابطه‌ی ۱۶ را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$AB^2 + AC^2 = (\overline{HC} - \overline{HB})^2 \qquad (۱۷)$$

رابطه‌ی (۱۷) در مور دمثلث مزدوج یعنی مثلث ABC رسم شده در شکل (۲) نیز معتبر است، زیرا در شکل ۲ چنین داریم:

$$|\overline{HC} - \overline{HB}| = CD$$

رابطه‌ی (۱۷) در مثلث قائم‌الزاویه و در مثلث مزدوج آن معتبر است (همسانی خاصیت در دو مثلث مزدوج).

ت) در مثلث قائم‌الزاویه ABC با زاویه‌ی قائمه‌ی A که نقطه‌ی H پای ارتفاع AH است، رابطه‌ی زیر مسلم است:

$$AH^2 = HB.HC \qquad (۱۸)$$

رابطه‌ی ۱۸ از تشابه دو مثلث AHB و AHC نتیجه می‌شود. در مثلث ABC در شکل ۲، رابطه‌ی (۱۸) نیز معتبر است. از تشابه دو مثلث AHB و AHC، رابطه‌ی (۱۸) به‌دست می‌آید. با به‌کارگیری محور و عدد جبری، در مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABC چنین داریم:

$$AH^2 = -\overline{HB}.\overline{HC} \qquad (۱۹)$$

و در مثلث مزدوج مثلث قائم‌الزاویه چنین داریم:

$$AH^2 = \overline{HB}.\overline{HC} \qquad (۲۰)$$

دو رابطه‌ی (۱۹) و (۲۰) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$AH^2 = \varepsilon\, \overline{HB}.\overline{HC} \;;\; \varepsilon \in \{-1,1\} \qquad (۲۱)$$

رابطه‌ی ۲۱ همسانی یک خاصیت را در دو مثلث مزدوج بیان می‌کند.

به‌کارگیری مکان هندسی

در صفحه‌ی P دو نقطه‌ی ثابت B و C و نقطه‌ی متحرک A را درنظر می‌گیریم. پای عمود وارد از نقطه‌ی A بر خط BC را H می‌نامیم. مطلوب است مکان هندسی نقطه‌ی A، به طوری که رابطه‌ی زیر برقرار باشد:

$$AH^2 = HB.HC \qquad (۲۲)$$

دستگاه محورهای مختصات مانند مسائل پیشین انتخاب می‌کنیم. رابطه‌ی (۲۲) با این رابطه بیان می‌شود:

$$AH^2 = |\overline{HB}.\overline{HC}| \qquad (۲۳)$$

رابطه‌ی ۲۳ با معادلات زیر بیان می‌شود:

$$y^2 = \pm(a-x)(a+x)$$

معادله‌ی $y^2 = (a-x)(a+x)$ معادله‌ی دایره به قطر BC است. معادله‌ی $y^2 = -(a-x)(a+x)$ معادله‌ی هذلولی متساوی‌الساقینی با رأس‌های B و C است.

مکان هندسی مورد نظر، اجتماع دایره به قطر BC و هذلولی متساوی‌الساقین با دو رأس B و C است.

ث) در مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABC که نقطه A رأس زاویه‌ی قائمه است، ارتفاع AH را رسم می‌کنیم. رابطه‌ی زیر محقق است:

$$\frac{AB^2}{AC^2} = \frac{HB}{HC} \qquad (۲۲)$$

اثبات: دو رابطه‌ی زیر در مثلث ABC محقق هستند:

$$AB^2 = BC.HB$$

$$AC^2 = BC.HC$$

از دو رابطه‌ی اخیر، رابطه‌ی (۲۲) به‌دست می‌آید.

با به‌کارگیری محور و عدد جبری (مانند آن‌چه گفتیم)، می‌توان رابطه‌های زیر را نوشت:

$$\frac{AB^2}{AC^2} = -\frac{\overline{HB}}{\overline{HC}} \qquad (۲۳)$$

$$\frac{AB^2}{AC^2} = \frac{\overline{HB}}{\overline{HC}} \qquad (۲۴)$$

(رابطه‌ی (۲۳)، در مثلث قائم‌الزاویه و رابطه‌ی (۲۴) در مثلث مزدوج مثلث قائم‌الزاویه)

دو رابطه‌ی (۲۳) و (۲۴) را می‌توان به صورت فشرده‌ی زیر نوشت:

$$\frac{AB^2}{AC^2} = \varepsilon \frac{\overline{HB}}{\overline{HC}} \quad ; \quad \varepsilon \in \{-1,+1\} \qquad (۲۵)$$

رابطه‌ی (۲۵)، همسانی یک خاصیت را در دو مثلث مزدوج بیان می‌کند.

مطالعه‌ی مسئله با به‌کارگیری مکان هندسی

در صفحه P دو نقطه‌ی ثابت B و C و نقطه‌ی متحرک A را درنظر می‌گیریم. تصویر نقطه‌ی A را روی خط BC با H نشان می‌دهیم. مطلوب است مکان هندسی نقطه A برای آن‌که رابطه‌ی زیر برقرار باشد:

$$\frac{AB^2}{AC^2} = \frac{HB}{HC} \qquad (۲۶)$$

معادله‌ی (۲۶) با به‌کارگیری دستگاه مختصات مناسب که در

صفحات پیشین ذکر شد، به این صورت نوشته می‌شود:

$$\frac{(a-x)^2+y^2}{(a+y)^2+y^2}=\left|\frac{a-x}{a+x}\right|$$

معادله‌ی اخیر، پس از عملیات جبری به صورت زیر درمی‌آید:

$$(x^2+y^2-a^2)(x^2-y^2-a^2)=0 \qquad (۲۷)$$

از معادله‌ی (۲۷) معلوم می‌شود که مکان هندسی موردنظر شکلی است که از اجتماع دایره‌ی $x^2+y^2=a^2$ و هذلولی $x^2-y^2=a^2$ تشکیل می‌شود.

عکس برخی قضیه‌های مثلث قائم‌الزاویه

در مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABC که نقطه‌ی A رأس زاویه‌ی قائمه است، روابط ۱، ۲، ۳، ۴، و ۵ مسلم‌اند.

۱. عکس قضیه‌ی فیثاغورس

رابطه‌ی ۱، بیان قضیه‌ی فیثاغورس است. اگر در مثلث ABC رابطه‌ی ۱ برقرار باشد، آن مثلث قائم‌الزاویه است (عکس قضیه‌ی فیثاغورس).

۲. آیا عکس قضیه‌هایی که با رابطه‌های ۲ تا ۵ بیان می‌شوند، صحیح اند؟

اگر در مثلث ABC رابطه‌های ۲ یا ۳ یا ۴ یا ۵ برقرار باشند، آن مثلث می‌تواند قائم‌الزاویه یا مزدوج مثلث قائم‌الزاویه باشد. به عبارت دیگر، اگر در مثلث ABC یکی از رابطه‌های ۲، ۳، ۴ و ۵ برقرار باشد، در آن مثلث مجموع دو زاویه‌ی B و C، ۹۰ درجه است. و یا تفاضل دو زاویه‌ی B و C آن، ۹۰ درجه است.

دایره‌ی C به قطر BC و نقطه‌ی متحرک A را بر محیط آن درنظر می‌گیریم و تصویر نقطه‌ی A بر خط BC را H می‌نامیم. ثابت کنید بین طول‌های AB و AC و AH رابطه‌ی زیر برقرار است:

$$\frac{1}{AH^2}=\frac{1}{AB^2}+\frac{1}{AC^2} \qquad (۲۸)$$

اکنون مطالعه کنیم که آیا عکس حکم اخیر صحیح است؟

در صفحه‌ی P دو نقطه‌ی ثابت B و C و نقطه‌ی متحرک A را درنظر می‌گیریم. مکان هندسی نقطه‌ی متحرک A را تعیین کنید، به طوری که رابطه‌ی (۲۸) بین طول‌های AB، AC و AH برقرار باشد. مکان هندسی مطلوب، تنها دایره به قطر BC نیست، بلکه مکان مطلوب اجتماع دایره به قطر BC و یک هذلولی متساوی‌الساقین است که دو نقطه‌ی B و C در رأس آن هستند.

زیرنویس

1. INTERNATIONAL CONGRESS of MATHEMATICANS August 22-30, 2006, MADRID, SPAIN

تفریح اندیشه

● حسین نامی ساعی

مدار دو طرفه

مسئله: دو دوچرخه‌سوار دور میدان دایره‌ای شکلی حرکت می‌کنند. وقتی در خلاف مسیر هم حرکت کنند، هر ۱۰ ثانیه یک‌بار یکدیگر را ملاقات می‌کنند و وقتی در یک جهت حرکت کنند، هر ۱۷۰ ثانیه یک بار به‌هم می‌رسند. اگر محیط میدان ۱۷۰ متر باشد، سرعت هر یک از دوچرخه سوارها را پیدا کنید.

حل: اگر سرعت دوچرخه‌سوار اول را x فرض کنیم، بعد از ۱۰ ثانیه، $10x$ متر از راه را می‌رود. در همین مدت، دوچرخه‌سوار دوم باید بقیه‌ی راه، یعنی $(170-10x)$ متر را بپیماید تا بتواند دوچرخه‌سوار اول را ملاقات کند. اگر سرعت دوچرخه‌سوار دوم را y فرض بگیریم، معادله‌ی زیر را خواهیم داشت:

$$170-10x=10y$$

وقتی که دو دوچرخه‌سوار به دنبال هم می‌روند، در ۱۷۰ ثانیه، اولی $170x$ متر و دومی $170y$ متر راه را طی می‌کنند. اگر فرض کنیم سرعت اولی بیشتر باشد، باید از یک برخورد تا برخورد دیگر، به اندازه‌ی یک دور کامل میدان بیشتر راه برود؛ یعنی:

$$170x-170y=170$$

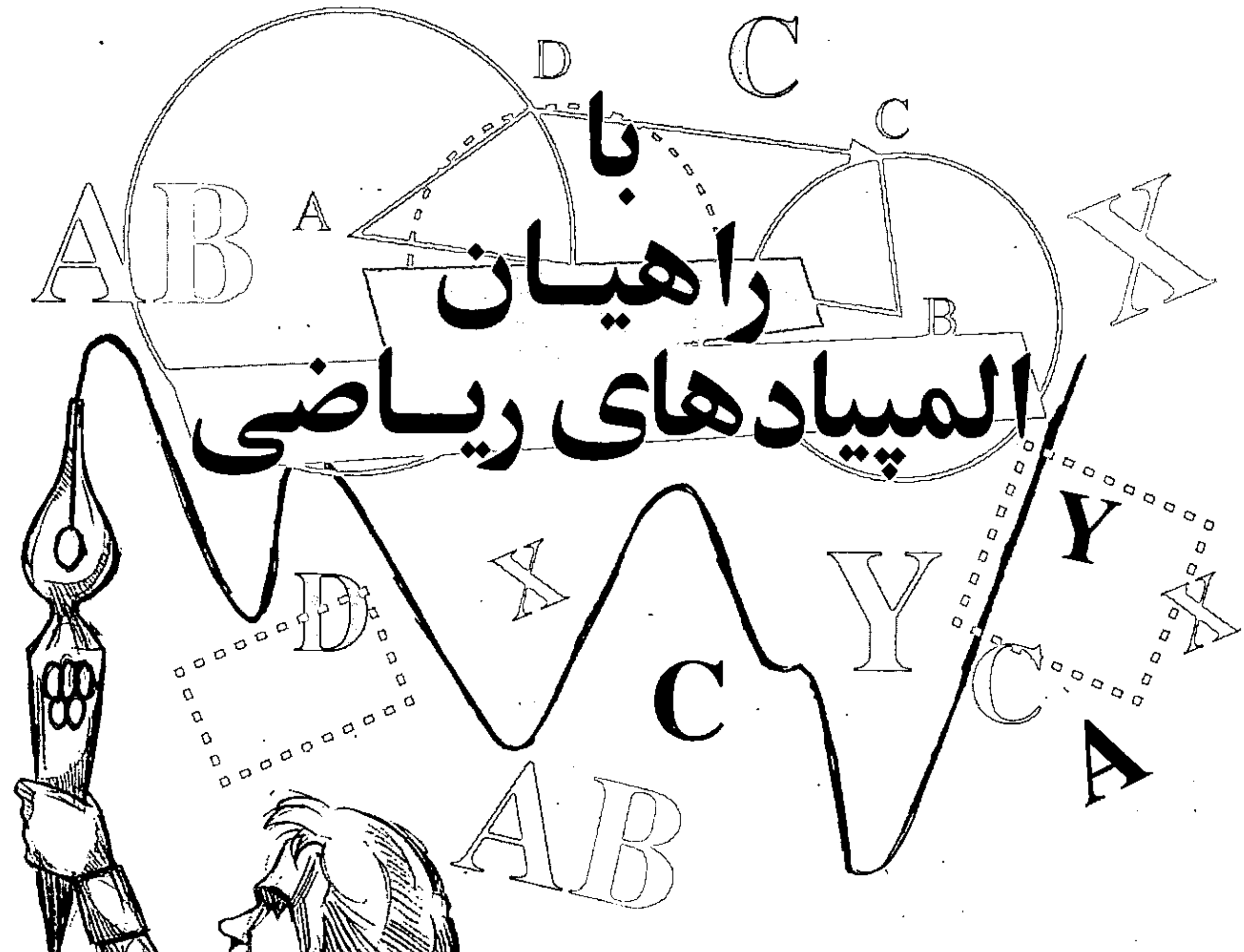
که پس از ساده کردن، دو معادله‌ی زیر را داریم:

$$\begin{cases}x+y=17\\x-y=1\end{cases}$$

و از آن‌جا:

$x=9$ (متر در ثانیه) و $y=8$ (متر در ثانیه)

با راهیان المپیادهای ریاضی





قسمت ۶

● غلامرضا یاسی‌پور

ترسیمات و تبدیلات هندسی

در این جا به بررسی ترسیماتی با خط‌کش (نامدرج) و پرگاری می‌پردازیم که به تحلیل عرضی تبدیلات هندسی خاصی منجر می‌شوند. در این مورد مثالی از ترسیمی به دست می‌دهیم که با پرگاری با دهانه‌ی ثابت انجام می‌گیرد. این مثال در «المپیاد ریاضی آلمان»[1] به سال ۱۹۷۷ آمده است.

با مفروض بودن نقاط A، B و C در صفحه، و پرگاری با دهانه‌ی ثابت و چنان که شعاع دایره‌ی محیطی مثلث ABC کوچک‌تر از دهانه‌ی پرگار باشد، نقطه‌ی چهارمی رسم کنید، به گونه‌ای که $ABCD$ یک متوازی‌الاضلاع باشد.

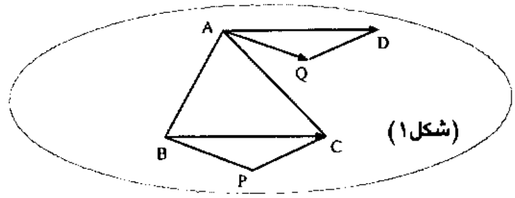
مسئله خواهان انتقال نقطه‌ی A به اندازه‌ی بردار $\overrightarrow{BC}$ است. فرض می‌کنیم، a طول دهانه‌ی پرگار باشد. ترسیم مورد نظر، در حالت خاصی که در آن AB=BC=a باشد، بسیار ساده است. در واقع، اگر دو دایره به شعاع a با مراکز A و C رسم کنیم، یکی از تقاطع‌های آن‌ها B و دیگری نقطه‌ی مطلوب D است. در این صورت، هدفمان این است که حالت عمومی را به این حالت خاص تبدیل کنیم.

مسئله را زمانی که قطعه خط و بردار مورد بحث، هر دو طولی برابر a دارند، حل کرده‌ایم. اکنون نشان می‌دهیم که چگونه زمانی که AB=a باشد، نقطه‌ی A به اندازه‌ی بردار دلخواه $\overrightarrow{BC}$، انتقال داده می‌شود. محدودیت بر اندازه‌ی

مثلث، مستلزم این است که نقطه‌ی Pای به فاصله‌ی a از B و C موجود باشد. P را به عنوان یکی از تقاطع‌های دوایر به مراکز B و C و شعاع‌های a رسم می‌کنیم. نقطه‌ی D از A، با انتقالی به اندازه‌ی بردار $\overrightarrow{BP}$ و بعد انتقالی به اندازه‌ی بردار $\overrightarrow{PC}$ (هر دو بردار دارای طول a) به‌دست می‌آید (شکل ۱).

اگر AB دارای طولی دلخواه باشد، Q را چنان رسم می‌کنیم که $QA=QB=a$. سپس Q را به R، به اندازه‌ی بردار $\overrightarrow{BC}$، و سرانجام A را به D، به اندازه‌ی بردار $\overrightarrow{QR}$ انتقال می‌دهیم.

در ادامه مسائل بیشتری از این دست آورده‌ایم.



(شکل۱)

۱. با مفروض بودن یک چند ضلعی در صفحه و نقطه‌ی Pای واقع در درون آن، دو نقطه‌ی A و B بر اضلاع این چند ضلعی چنان بیابید که P نقطه‌ی وسط قطعه‌ی AB باشد.

۲. با مفروض بودن یک چند ضلعی در صفحه، سه نقطه‌ی A، B و C را بر اضلاع این چند ضلعی چنان بیابید که مثلث ABC متساوی‌الاضلاع باشد.

۳. با خط‌کش (نامندرج) و پرگار، ذوزنقه‌ای با معلوم بودن طول‌های اضلاعش رسم کنید.

۴. ذوزنقه‌ای با مفروضات زیر رسم کنید: طول‌های اقطار، طول پاره‌خط و اصل اوساط اضلاع ناموازی، و یکی از زوایای مجاور به قاعده.

۵. فرض می‌کنیم C_1 و C_2 دو دایره‌ی هم‌مرکز باشند. خط d را چنان رسم کنید که این دوایر را به طور متوالی در A، B، C، و D طوری قطع کند که: $AB=BC=CD$.

۶. خطوط m و n از نقطه‌ی M می‌گذرند که به یک فاصله از دو خط موازی قرار گرفته است. خط d را چنان رسم کنید که چهار خط مزبور را در A، B، C و D طوری قطع کند که: $AB=BC=CD$.

۷. نقاط دلخواه A و B مفروض‌اند. با پرگاری با دهانه‌ی ثابت نقطه‌ی C را چنان تعیین کنید که مثلث ABC متساوی‌الاضلاع باشد.

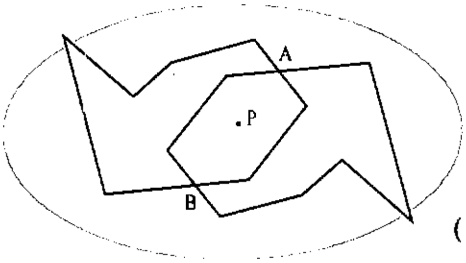
۸. دو نقطه‌ی دلخواه A و B مفروض‌اند. با پرگاری با دهانه‌ی ثابت، نقطه‌ی C را چنان تعیین کنید که ABC مثلثی قائم‌الزاویه باشد.

۹. دایره‌ای در صفحه مفروض است. تنها با استفاده از یک پرگار، مرکز آن را بیابید.

❊ ❊ ❊

پاسخ مسائل ترسیمات و تبدیلات هندسی

۱. تصویر قرینه‌ی خط چند ضلعی را نسبت به P رسم می‌کنیم (شکل ۱).

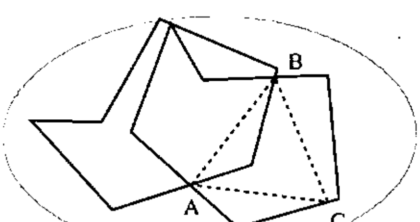


(شکل۱)

هر دو خط چند ضلعی، شامل P در درون خود هستند. از آن‌جا که به دلایل تقارن، هیچ‌یک از آن‌ها نمی‌توانند شامل دیگری در درون خود باشند، باید متقاطع شوند. فرض می‌کنیم A یک نقطه‌ی تقاطع باشد. در این صورت، قرینه‌ی A نسبت به P نیز یک نقطه‌ی تقاطع است؛ زیرا کل شکل نسبت به P قرینه است. به این ترتیب، A و B بر خط چند ضلعی اول قرار دارند و P وسط AB است، و مسئله حل می‌شود.

(W. L. Putnam Mathematical Competition)

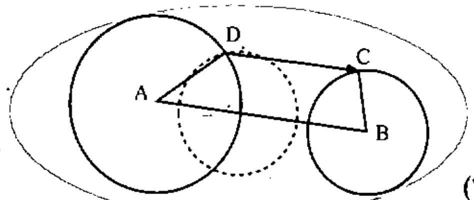
۲. این مسئله مشابه مسئله پیشین است، و بر دوران ۶۰° استوار است. نقطه‌ی A را بر خط چند ضلعی مورد بحث، اما نه بر رأس آن، انتخاب می‌کنیم. خط چند ضلعی را، به اندازه‌ی ۶۰°، حول A دوران می‌دهیم. تصویر حاصل از دوران، خط اول را یک‌بار در A قطع می‌کند، بنابراین دو خط چند ضلعی باید دست‌کم یک‌بار متقاطع باشند (در این مورد از این واقعیت استفاده می‌کنیم که A رأس نیست). B را نقطه‌ی تقاطعی متفاوت از A اختیار می‌کنیم. توجه داشته باشید که B بر هر دو خط چند ضلعی واقع است، و پیش تصویر Cاش، از طریق دوران، بر خط چند ضلعی اولیه واقع است (شکل ۲ را ملاحظه کنید). در این صورت، مثلث ABC متساوی‌الاضلاع و کار تمام است.



(شکل۲)

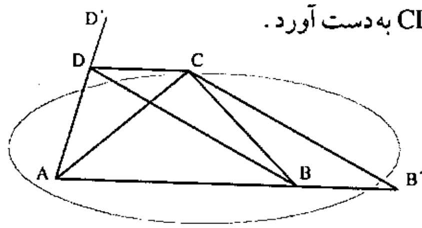
(Pimsner, M., Popa, S., Probleme de geometrie elementară (Problems in elementary geometry), Ed. Didactică si Pedagogică, Bucharest, 1979)

۳. فرض می‌کنیم ABCD ذوزنقه‌ی مورد نظر با قاعده‌های AB و CD باشد. ابتدا، ضلع AB، و سپس دوایر C_1، به مرکز A و شعاع AD، و C_2، به مرکز B و شعاع BC، را رسم می‌کنیم (شکل ۳ را ملاحظه کنید).



(شکل۳)

از آن‌جا که نقطه‌ی C از انتقال D به اندازه‌ی بردار $\vec{r}$ ای موازی AB و به طول DC به دست آمده است، نتیجه می‌شود که C را می‌توان از تقاطع دایره‌ی C_2 با انتقال دایره‌ی C_2 به اندازه‌ی $\vec{r}$ ترسیم کرد. سرانجام، D را می‌توان از تقاطع C_1 و دایره‌ای به مرکز C و شعاع CD به دست آورد.



(شکل۴)

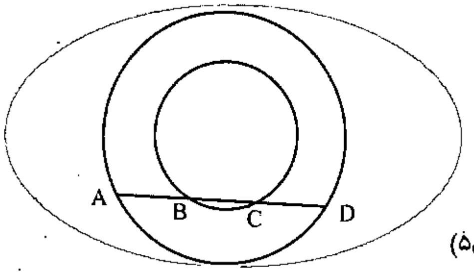
(Duican, L., Duican, I., Trasformări geometrice (Geometric Transformations), Ed. Stiintifică si Enciclopedică, Bucharest 1987)

۴. از آن‌جا که قطعه‌ی واصل اوساط ضلع‌های ناموازی ذوزنقه دارای طولی برابر نصف مجموع طول‌های دو قاعده‌ی آن است، مسئله به ترسیم ذوزنقه‌ی ABCD، با دانستن طول‌های AC، BD، و AB+CD، و اندازه‌ی زاویه‌ی DAB تبدیل می‌شود (شکل ۴ را ملاحظه کنید).

توجه داشته باشید که با انتقال قطر BD به اندازه‌ی بردار $\vec{DC}$، مثلث $AB'C$ را به دست می‌آوریم که طول‌های اضلاعش معلوم‌اند (زیرا: $AB' = AB + CD$). بنابراین، ابتدا کار را با ترسیم این مثلث آغاز می‌کنیم، و سپس زاویه‌ی $D'AB'$ را (برابر با $\angle DAB$) می‌سازیم. نقطه‌ی D از تقاطع AD' با خطی به دست می‌آید که از C موازی AB' رسم شده است. سرانجام، B از تقاطع AB' با خطی حاصل می‌شود که از D موازی $B'C$ رسم شده است.

(Duican, L., Duican, I., Trasformări geometrice (Geometric Transformations), Ed. Stiinçifică si Enciclopedică, Bucharest 1987).

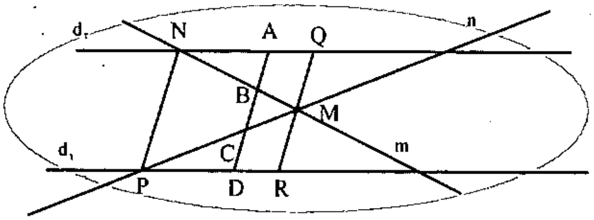
۵. توجه به این مطلب اهمیت دارد که B تصویر C از طریق اتساع[۲] P به مرکز A و نسبت $\frac{1}{2}$ است. A را بر دایره‌ی برونی C_1 اختیار، و $P(C_2)$ را رسم می‌کنیم (شکل ۵).



(شکل۵)

B، یکی از نقاط تقاطع C_2 و $P(C_2)$ را در نظر می‌گیریم. در این صورت، خط AB در شرط مطلوب صدق می‌کند، زیرا اگر نقاط تقاطع دیگر AB با C_2 و C_1 را به ترتیب با C و D نمایش دهیم، از ترسیم AB=BC، و از تقارن شکل، AB=CD حاصل می‌شود.

۶. فرض می‌کنیم d_1 و d_2 دو خط موازی، N و P به ترتیب تقاطع‌های m و d_1، n و d_2 باشند (شکل ۶).



(شکل۶)

نیز، فرض می‌کنیم Q و R تقاطع‌های خط گذرنده از M به موازت NP باشد. در این صورت، خط با ویژگی مطلوب، انتقال خط NP به اندازه‌ی بردار $2\vec{NQ}/3$ است. در واقع، بنابه تشابه مثلث‌ها، قطعه‌ی BC که توسط m و n بر این خط مشخص شده، دارای طول NP / ۳ است. نیز اگر A و D تقاطع‌های خط BC با d_1 و d_2 باشند، خواهیم داشت:

$AB = 2QM/3 = NP/3$

و نیز:

$CD = NP/3$

بنابراین، سه قطعه برابرند.

(Smaranda; D., Soare, N., Trasformări geometrice (Geometric transformations), Ed. Academiei, Bucharest, 1988).

۷. اگر N و P دو نقطه در صفحه و N' و P' نگاره‌های مربوط به آن‌ها در دورانی به مرکز M و زاویه‌ی α باشند، در این صورت P' را می‌توان با انتقال P به اندازه‌ی بردار $\vec{NN'}$ به P''،

و سپس دوران P'' به اندازه‌ی زاویه‌ی α حول N' نیز به‌دست آورد؛ زیرا قطعات NP و $N'P'$ برابرند و زاویه‌ی بین آن‌ها α است.

مسئله خواهان این است که B را حول A به اندازه‌ی 60° دوران دهیم. نقاط:

$$P_0 = A, P_1, \cdots, P_n = B$$

را چنان‌که:

$$P_1P_2 = P_2P_3 = \cdots = P_{n-1}P_n = 1$$

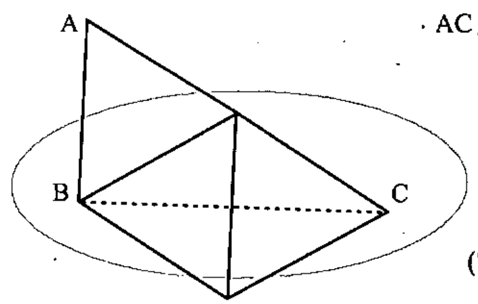
با این فرض انتخاب می‌کنیم که دهانه‌ی پرگار نیز برابر با ۱ باشد.

به سادگی می‌توان مثلث متساوی‌الاضلاع $P_0P_1Q_1$ را رسم کرد که در این حالت، Q_1 دوران P_1 حول A به اندازه‌ی 60° است.

آن‌گاه به‌طور استقرایی، توسط بردار $\overrightarrow{P_{k-1}Q_{k-1}}$، P_k را به R_k انتقال می‌دهیم (آن‌گونه که در قسمت اول این مجموعه مقالات توضیح داده‌ایم). سپس R_k را حول R_{k-1} به اندازه‌ی 60° دوران می‌دهیم تا Q_k به دست آید. در این صورت، از استقرا نتیجه می‌شود که Q_k حاصل دوران P_k حول A به اندازه‌ی 60° است. در حالت خاص، این مطلب در مورد $C=Q_n$ صدق می‌کند که حاصل دوران B است، و مسئله حل می‌شود.

(R. Gelca)

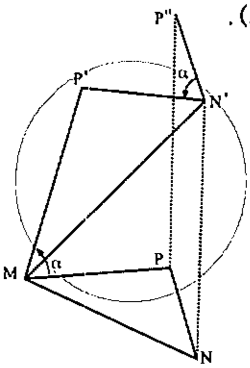
۸. این مسئله مشابه مسئله‌ی پیشین است، اما در این‌جا، دوران را با اتساع ترکیب می‌کنیم. مانند مسئله‌ی قبل فرض می‌کنیم، دهانه‌ی پرگار برابر ۱ باشد. اگر $AB = 1$ باشد، مسئله را می‌توان با استفاده از سه مثلث متساوی‌الاضلاع، چنان‌چه در شکل ۷ ملاحظه می‌شود، حل کرد. در این حالت: $AC / BC = \sqrt{3}$.



(شکل۷)

می‌خواهیم در حالت عمومی، ترکیب دوران 90° را با اتساع نسبت $\sqrt{3}$ انجام دهیم. برای این کار، از ویژگی زیر استفاده می‌کنیم.

اگر N' و P' نگاره‌های N و P در دوران به مرکز M و زاویه‌ی α و پس از آن اتساع به مرکز M و نسبت r باشد، آن‌گاه P' را می‌توان از انتقال P به P'' با بردار $\overrightarrow{NN'}$، و سپس دوران P'' حول N' به اندازه‌ی زاویه‌ی α و اتساع به نسبت r و مرکز N' به دست آورد (شکل ۸ را ملاحظه کنید).



(شکل۸)

در واقع، قطعه‌ی $P''N'$ موازی قطعه‌ی PN است، و هریک از قطعات $P'N'$ و PN نگاره‌ی دیگری در دوران‌ـ‌اتساع به مرکز M هستند. از این رو، طول‌هایشان به نسبت r اند، و زاویه‌ی بین‌شان α است. از این مرحله به بعد، استدلال از مراحل راه‌حل مسئله‌ی ۷ پیروی می‌کند.

$$P_0 = A, P_2, \cdots, P_n = B$$

را چنان اختیار می‌کنیم که:

$$P_0P_1 = P_1P_2 = \cdots = P_{n-1}P_n = 1$$

دوران‌ـ‌اتساع P_1 حول $P_0 = A$ به زاویه‌ی 90° و نسبت $\sqrt{3}$ را انجام می‌دهیم. سپس به طور متوالی فرض می‌کنیم، R_k انتقال P_k ی بردار $\overrightarrow{P_{k-1}Q_{k-1}}$ و Q_k دوران‌ـ‌اتساع R_k حول Q_{k-1} با زاویه‌ی 90° و نسبت $\sqrt{3}$ باشد. به طور استقرایی، درمی‌یابیم که Q_k نگاره‌ی P_k در دوران‌ـ‌اتساع به مرکز A است.

به این ترتیب، اگر $C = Q_n$ را انتخاب کنیم، آن‌گاه $\angle CAB = 90^\circ$ و مسئله حل می‌شود.

(R. Gelca)

۹. برای یافتن مرکز دایره‌ای با پرگار، سه مطلب مهم لازم داریم:

الف) وقتی فقط از یک پرگار استفاده می‌کنیم، انعکاس یک نقطه می‌تواند نسبت به دایره‌ای با مرکز معلوم به‌دست آید.

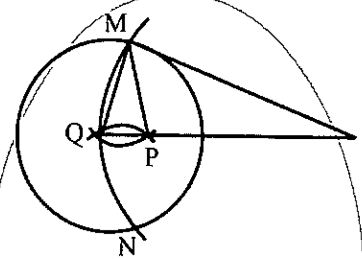
ب) در استفاده از یک پرگار، تقارن یک نقطه می‌تواند نسبت به یک خط، زمانی که تنها دو نقطه از آن معلوم باشد، به دست آید.

ج) با مفروض بودن دایره‌ای به مرکز O گذرنده از مرکز انعکاس Q و خط نگاره‌ی آن، یعنی AB، نگاره‌ی O در انعکاس، قرینه‌ی Q نسبت به AB است.

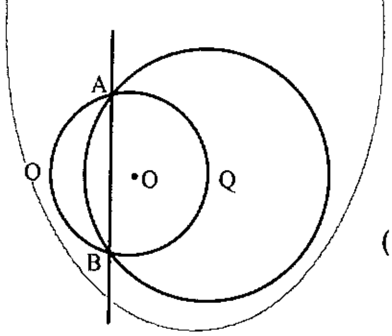
در مورد الف، توجه داشته باشید که انعکاس نقطه‌ی P نسبت به دایره‌ای به مرکز Q را می‌توان به این طریق رسم کرد: ابتدا

دایره‌ی مفروض را با دایره‌ای به مرکز P تقاطع می‌دهیم و فرض می‌کنیم، M و N دو نقطه‌ی تقاطع آن‌ها باشند (شکل ۹). دوایر به مراکز M و N و شعاع‌های برابر QM در نقطه‌ی دوم، یعنی P' تقاطع می‌کنند. از تشابه مثلث‌های PMQ و $MP'Q$ نتیجه می‌گیریم که:

$$PQ.P'Q = MQ^2$$



(شکل۹)



(شکل۱۰)

درنتیجه، P' منعکس P است.

ادعای دوم از این مطلب حاصل می‌شود که قرینه‌ی P نسبت به خط AB می‌تواند به عنوان دومین تقاطع دایره به مرکز A و شعاع AP با دایره‌ای به مرکز B و شعاع BP رسم شود. سرانجام، برای اثبات ادعای سوم توجه می‌کنیم که اگر M و M' تقاطع‌های خط OQ با دایره باشند، و اگر O' نگاره‌ی O در انعکاس باشد، آن‌گاه:

$$QM.QM' = QO.QO'$$

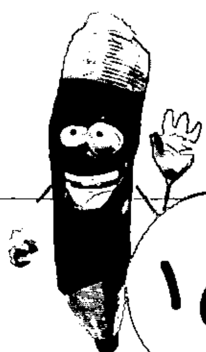
درحالی‌که $QM = 2QO$. به این ترتیب، $QO' = 2QM$ که نشان می‌دهد، O' قرینه‌ی O نسبت به این خط است.

برای حل مسئله، ابتدا نگاره‌ای را در انعکاسی به مرکز O که سعی در یافتنش داریم، رسم می‌کنیم. به این منظور، نقطه‌ی دلخواه Q را بر دایره انتخاب می‌کنیم، و دایره‌ای بزرگ‌تر از دایره‌ی مفروض، به مرکز Q می‌کشیم (شکل ۱۰). تقاطع‌های دو دایره را با A و B نمایش می‌دهیم. قرینه‌ی Q نسبت به AB را O' می‌نامیم. بنابر ویژگی ج (مذکور در فوق)، O' نگاره‌ی O در انعکاس نسبت به دایره‌ای به مرکز Q است. منعکس O' نسبت به دایره‌ای به مرکز Q، O را به دست می‌دهد.

زیرنویس

1. Bundeswettbewerb Mathematik

2. dilation



معمای فکری و منطقی ۱

B، C، J و S، چهار عضو باشگاه گلف V هستند. سن آن‌ها و نیز مهارتشان در بازی گلف، متفاوت است. با این همه، گروه چهار نفری جداناپذیری تشکیل داده‌اند. یک روز هنگامی که توپ را جلوی اولین سوراخ زمین قرار دادند، عضو جدیدی از باشگاه که چند بار بازی آن‌ها را با همدیگر دیده بود، رو به هم صحبتش در تراس کرد و پرسید، آن‌ها کیستند و بازی‌هایشان در چه مرتبه‌ای است.

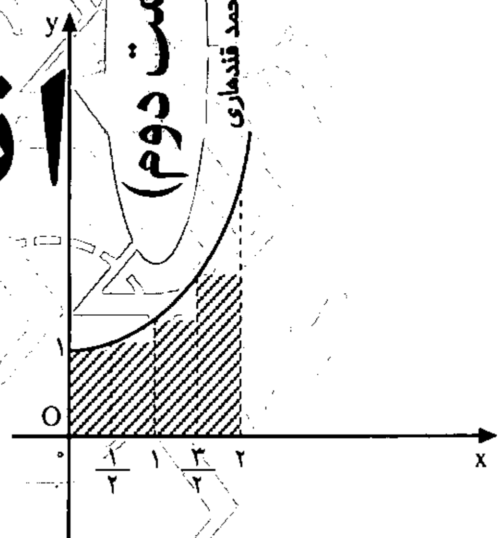
هم صحبتش پاسخ داد: دقیقاً نمی‌دانم، اما حدس می‌زنم اگرچه J از هریک از این چهار نفر که مسن‌تر از C است بهتر بازی می‌کند، وگرچه هریک از این چهار نفر که بتواند S را شکست دهد، دست کم هم‌سن B است، بهترین گلف‌باز، در حالی که کوچک‌تر از هر کسی است که S می‌تواند شکست دهد، جوان‌ترین نیست، و در حالی که دست‌کم هم‌سن هر کسی است که B می‌تواند شکست بدهد، مسن‌ترین نیست.

عضو تازه‌وارد مؤدبانه گفت: متوجه شدم؛ در حالی که متقاعد شده بود که با این اطلاعات، تنها راه مشخص کردن مرتبه‌ی بازی آن چهار نفر این است که خودش با آن‌ها بازی کند.

اما از حقایق داده شده می‌توان بدون ابهام مشخص کرد که، بهترین گلف‌باز کدام است و چه کسی در مرتبه‌ی دوم و غیره قرار دارد. **شما می‌توانید؟**

انتگرال معیّن (قسمت دوم)

● احمد قندهاری



اشاره

در شماره‌ی قبل اندازه‌ی تقریبی نقصانی و اضافی سطح زیر منحنی را بیان کردیم و شرح دادیم که اندازه‌ی تقریب نقصانی سطح زیر منحنی را «پایین ریمان»، و اندازه‌ی تقریبی اضافی سطح زیر منحنی را «بالا ریمان» گویند. مجموع ریمان‌ها در حالت کلی نیز بیان شد. در این شماره، به تعریف انتگرال معین، و قضایا و ویژگی‌های آن می‌پردازیم.

تابع f را بر بازه‌ی $[a,b]$، انتگرال‌پذیر گویند که اگر این بازه را به n زیربازه‌ی مساوی افراز کنیم، داشته باشیم:

$$\lim_{n\to\infty}\Delta x\sum_{i=1}^{n} f(u_i)=\lim_{n\to\infty}\Delta x\sum_{i=1}^{n} f(l_i)=\lim_{n\to\infty}\Delta x\sum_{i=1}^{n} f(c_i)$$

$$=\int_a^b f(x)dx$$

مثال ۱. در تابع با ضابطه‌ی $f(x)=x^2+2$، به کمک حد مجموع بالا ریمان یا حد مجموع پایین‌ریمان، حاصل $\int_0^2 f(x)dx$ را بیابید.

حل: تابع f در بازه‌ی $[0,2]$ صعودی اکید است و $\Delta x=\frac{2}{n}$. چون تابع f صعودی است، راحت‌تر است، مسئله را از راه حد مجموع بالا ریمان حل کنیم.

$$\int_0^2 f(x)dx=\lim_{n\to\infty}\Delta x\sum_{i=1}^{n} f(u_i)=\lim_{n\to\infty}\Delta x\sum_{i=1}^{n} f(x_i)$$

طول x_i برابر $i\Delta x$ یا $\frac{2i}{n}$ است، پس:

$$\int_0^2 f(x)dx=\lim_{n\to\infty}\Delta x\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{2i}{n}\right)$$

ابتدا $\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{2i}{n}\right)$ را محاسبه می‌کنیم، درضمن: $f(x)=x^2+2$.

$$\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{2i}{n}\right)=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{4i^2}{n^2}+2\right)=\sum_{i=1}^{n}\frac{4i^2}{n^2}+\sum_{i=1}^{n}2$$

$$= \frac{4}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2 + \sum_{i=1}^{n} 2 = \frac{4}{n^3} \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 2n$$

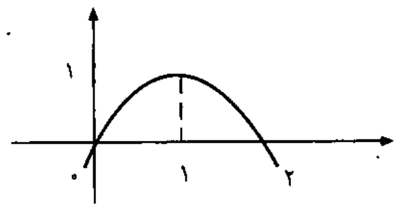
$$= \frac{2(n+1)(2n+1)}{3n} + 2n = \frac{10n^2+6n+2}{3n}$$

$$\int_0^2 f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \Delta x \sum_{i=1}^{n} f(\frac{2i}{n}) = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n} \times \frac{10n^2+6n+2}{3n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{20n^2+12n+4}{3n^2} = \frac{20}{3}$$ واحد مربع

مثال ۲. در تابع با ضابطه‌ی $f(x) = 2x - x^2$ ، به کمک حد مجموع بالا ریمان یا پایین ریمان، حاصل $\int_0^2 f(x)dx$ را بیابید.

حل: تابع f در بازه‌ی $[0,1]$ ، صعودی اکید، در بازه‌ی $[1,2]$ نزولی اکید، و $x = 1$ معادله‌ی محور تقارن آن است.



می‌توان مسئله را در بازه‌ی $[0,1]$ حل کرد و سپس آن را در ۲ ضرب نمود. یا بدون توجه به مطالب بالا، مسئله را مستقیماً حل کرد.

روش اول: محاسبه‌ی $2\int_0^1 f(x)dx$ $\quad \Delta x = \frac{1}{n}$

$$2\int_0^1 f(x)dx = \lim_{n\to\infty} 2\Delta x \sum_{i=1}^{n} f(u_i) = \lim_{n\to\infty} 2 \times \frac{1}{n} \sum f(\frac{i}{n})$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n} \sum (\frac{2i}{n} - \frac{4i^2}{n^2}) = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n}(\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n} i - \frac{4}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i^2)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n}(\frac{2}{n} \times \frac{n(n+1)}{2} - \frac{4}{n^2} \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6})$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n}(n+1 - \frac{2(n+1)(2n+1)}{3n})$$

$$= \lim_{n\to\infty} (2 + \frac{2}{n} - \frac{4(n+1)(2n+1)}{3n^2})$$

$$= \lim_{n\to\infty} (2 + \frac{2}{n} - \frac{8n^2+12n+4}{3n^2}) = 2 - \frac{8}{3} = \frac{4}{3}$$

روش دوم: محاسبه‌ی $\int_0^2 f(x)dx$ $\quad \Delta x = \frac{2}{n}$

$$\int_0^2 f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \Delta x \sum_{i=1}^{n} f(u_i) = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n} \sum f(\frac{i}{n})$$

به خط اول حل روش اول توجه فرمایید. به همان رابطه رسیدیم، پس جواب همان $\frac{4}{3}$ است.

قضیه‌ی بنیادی اول حساب دیفرانسیل و انتگرال

اگر تابع f در بازه‌ی I شامل a پیوسته باشد و F با دامنه‌ی I با ضابطه‌ی $F(x) = \int_a^b f(x)dx$ ، آن‌گاه F روی I مشتق‌پذیر است و برای هر $x \in I$ داریم: $F'(x) = f(x)$.

قضیه‌ی بنیادی دوم حساب دیفرانسیل و انتگرال

اگر f در بازه‌ی $[a,b]$ پیوسته باشد و تابع g به گونه‌ای باشد که برای هر x در بازه‌ی $[a,b]$ داشته باشیم: $g'(x) = f(x)$ ، آن‌گاه $\int_a^b f(x)dx = g(b) - g(a)$.

نکته‌ی ۱. اگر f تابعی پیوسته و فرد باشد، داریم:

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$$

نکته‌ی ۲. اگر f تابعی پیوسته و زوج باشد، داریم:

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$$

مثال: مطلوب است محاسبه‌ی مقدار A؟

$$A = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{|x|\sin + 1}{1+x^2}dx$$

حل:

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{|x|\sin x + 1}{1+x^2}dx = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{|x|.\sin x}{1+x^2}dx + \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+x^2}dx$$

تابع با ضابطه‌ی $g(x) = \frac{|x|\sin x}{1+x^2}$ ، تابعی فرد است؛ پس:

$$A = 0 + \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+x^2}dx = (\mathrm{Arc}\tan x)_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= \operatorname{Arctan}\frac{\pi}{4} - \operatorname{Arctan}(-\frac{\pi}{4}) = \frac{\pi}{4} - (-\frac{\pi}{4}) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

ویژگی‌های انتگرال مُعین

$$1)\ \int_a^a f(x)dx = 0$$

$$2)\ \int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

$$3)\ \int_a^b k dx = k(b-a) \qquad k \neq 0$$

$$4)\ \int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx \qquad k \neq 0$$

$$5)\ \int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

لزومی ندارد c بین a و b باشد.

مثال: اگر تابع f انتگرال‌پذیر باشد و داشته باشیم: $\int_7^1 f(x)dx = -12$ و $\int_1^5 f(x)dx = 9$، آن گاه $\int_5^7 f(x)dx$ را بیابید.

حل:

$$\int_1^7 f(x)dx = \int_1^5 f(x)dx + \int_5^7 f(x)dx$$

$$12 = 9 + \int_5^7 f(x)dx \Rightarrow \int_5^7 f(x)dx = 3$$

قضیه‌ی ۱.

$$6)\ \int_a^b (f(x)+g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

قضیه‌ی ۲. اگر دو تابع f و g در بازه‌ی $[a,b]$ انتگرال‌پذیر باشند و داشته باشیم: $f(x) \leq g(x)$، آن گاه $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$.

تمرین: به کمک قضیه‌ی ۲ ثابت کنید:

برای هر x متعلق به بازه‌ی $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ داریم: $x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x$.

حل: داریم:

$$f(x) \leq g(x) \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$$

با شرط این که f و g انتگرال‌پذیر باشند:

$$-1 \leq -\cos x \Rightarrow \int_0^x (-1)dx \leq \int_0^x -(\cos x)dx$$

$$\Rightarrow -x \leq -\sin x \Rightarrow \int_0^x -x dx \leq \int_0^x -\sin x dx$$

$$\Rightarrow \left.(-\frac{x^2}{2})\right|_0^x \leq \left.(\cos x)\right|_0^x \Rightarrow -\frac{x^2}{2} \leq \cos x - 1$$

$$\Rightarrow 1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos x \Rightarrow \int_0^x (1-\frac{x^2}{2}) \leq \int_0^x \cos x dx$$

$$\Rightarrow \left.(x - \frac{x^3}{6})\right|_0^x \leq \left.(\sin x)\right|_0^x \Rightarrow x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x$$

توجه: توابع با ضابطه‌های

$f_1(x) = -1$ ، $g_1(x) = \cos x$ ، $f_2(x) = -x$ ، $g_2(x) = -\sin x$ ، $f_3(x) = -\frac{x^2}{2}$ ، $g_3(x) = \cos x$ ، $f_4(x) = 1 - \frac{x^2}{2}$ و $g_4(x) = \cos x$ ، همگی انتگرال‌پذیرند.

قضیه‌ی ۳: اگر تابعی در یک بازه‌ی بسته، تعداد متناهی نقطه ناپیوستگی داشته باشد و تابع در آن نقاط دارای حدّ چپ و حدّ راست باشد، باز هم تابع در آن بازه انتگرال‌پذیر است.

مثال:

$$\int_0^4 \lfloor x \rfloor dx = \int_0^1 \lfloor x \rfloor dx + \int_1^2 \lfloor x \rfloor dx + \int_2^3 \lfloor x \rfloor dx + \int_3^4 \lfloor x \rfloor dx$$

و

$$\int_0^2 \lfloor 2x \rfloor dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \lfloor 2x \rfloor dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 \lfloor 2x \rfloor dx + \int_1^{\frac{3}{2}} \lfloor 2x \rfloor dx + \int_{\frac{3}{2}}^2 \lfloor 2x \rfloor dx$$

و

$$\int_0^6 \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor dx = \int_0^2 \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor dx + \int_2^4 \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor dx + \int_4^6 \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor dx$$

قضیه‌ی ۴. اگر تابع‌های f و g تابع‌هایی کران‌دار و در بازه‌ی $[a,b]$ انتگرال‌پذیر باشند، چنانچه جز در تعداد متناهی نقطه از بازه‌ی $[a,b]$ داشته باشیم $f(x) = g(x)$، آن گاه $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx$.

مثال: می‌دانیم:

$$\lfloor x\rfloor+\lfloor -x\rfloor=\begin{cases}0 & x\in z\\ -1 & x\notin z\end{cases}$$

پس دو تابع با ضابطه‌های $f(x)=\lfloor x\rfloor+\lfloor -x\rfloor$ و $g(x)=-1$ در هر بازه‌ی بسته‌ای انتگرال‌پذیرند و داریم:

$$\int_0^{100}(\lfloor x\rfloor+\lfloor -x\rfloor)dx=\int_2^{100}(-1)dx$$

قضیه‌ی ۵. اگر m و M به‌ترتیب کران پایین و کران بالای تابع پیوسته f در بازه‌ی $[a,b]$ باشد، داریم:

$$m\le f(x)\le M\Rightarrow\int_a^b m\,dx\le\int_a^b f(x)dx\le\int_a^b M\,dx$$

$$\Rightarrow \boxed{m(b-a)\le\int_a^b f(x)dx\le M(b-a)}$$

$m(b-a)$ را کران پایین انتگرال، $M(b-a)$ را کران بالای انتگرال، و

$$\boxed{m\le\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\le M}$$

مقدار $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ را مقدار متوسط یا مقدار میانگین تابع f در بازه‌ی $[a,b]$ گویند.

مثال ۱. ثابت کنید:

$$\frac{1}{9}\le\int_2^5\frac{1}{x^2+2}dx\le\frac{1}{2}$$

حل:

$$f(x)=\frac{1}{x^2+2}\Rightarrow f'(x)=\frac{-2x}{(x^2+2)^2}=0\Rightarrow x=0\notin[2,5]$$

$$f(2)=\frac{1}{6}=M\qquad f(5)=\frac{1}{27}=m$$

$$m(b-a)\le\int_a^b f(x)dx\le M(b-a)$$

$$\frac{1}{27}(5-2)\le\int_2^5 f(x)dx\le\frac{1}{6}(5-2)\Rightarrow\frac{1}{9}\le\int_2^5\frac{1}{x^2+2}dx\le\frac{1}{2}$$

مثال ۲. اگر مقدار متوسط تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\frac{2}{x^2}$ در بازه‌ی $[1,c]$ عدد (۱) باشد، c را بیابید.

حل:

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx=1$$

$$\Rightarrow\frac{1}{c-1}\int_1^c\frac{2}{x^2}dx=\frac{1}{c-1}\left(-\frac{2}{x}\right)\Big|_1^c=\frac{-1}{c-1}\left(\frac{2}{c}-2\right)\ ;\ c\neq1$$

$$=\frac{-1}{c-1}\left(\frac{2-2c}{c}\right)=\frac{2(c-1)}{c(c-1)}=\frac{2}{c}=1\Rightarrow c=2$$

قضیه‌ی ۶. (قضیه‌ی مقدار میانگین برای انتگرال‌ها)

اگر f در بازه‌ی $[a,b]$ پیوسته باشد، آن‌گاه عدد حقیقی c، $a<c<b$ وجود دارد که:

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx=f(c)(b-a)}$$

مثال: عدد c قضیه‌ی مقدار میانگین برای انتگرال‌ها را، برای تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\cos^2 x$ در بازه‌ی $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ بیابید.

حل:

$$f(c)(b-a)=\int_a^b f(x)dx$$

$$\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos^2 c=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos2x}{2}dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos2x)dx=\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{2}\sin2x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow\frac{\pi}{2}\cos^2 x=\frac{\pi}{4}\Rightarrow\cos^2 x=\frac{1}{2}\Rightarrow\cos x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$0\le x\le\frac{\pi}{2}\Rightarrow\cos x>0\Rightarrow\cos x=\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow x=\frac{\pi}{4}$$

چند رابطه مهم

همواره داریم:

الف) $F(x)=\int_a^x f(x)dx\Rightarrow F'(x)=f(x)$

ب) $F(x)=\int_a^{g(x)} f(t)dt\Rightarrow F'(x)=g'(x).f(g(x))$

ج)

$$F(x)=\int_{h(x)}^{g(x)} f(t)dt\Rightarrow F'(x)=g'(x).f(g(x))-h'(x).f(h(x))$$

مثال: مطلوب است محاسبه‌ی:

$$\lim_{x\to0}\frac{\int_0^{x^3}\sin\sqrt[3]{t}\,dt}{3x^4}$$

حل:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^2}\sin\sqrt[3]{t}\,dt}{3x^4}=\frac{0}{0}$$

(ب) هوپیتال تابع با توجه به: $=\lim_{x\to 0}\frac{3x^2\sin x}{12x^3}\sim\lim_{x\to 0}\frac{3x^3}{12x^3}=\frac{3}{12}=\frac{1}{4}$

محاسبه‌ی بعضی از حدها به کمک انتگرال

فرض می‌کنیم f در بازه‌ی $[0,1]$ تابعی پیوسته باشد. اگر این بازه را به n قسمت مساوی افراز کنیم، طول هر بازه $\Delta x=\frac{1}{n}$ خواهد شد.

$$\int_0^1 f(x)dx=\lim_{x\to\infty}\Delta x\sum_{i=1}^{n}f(c_i)=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f(\frac{i}{n})\Rightarrow$$

$$\boxed{\int_0^1 f(x)dx=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{n}(f(\frac{1}{n})+f(\frac{2}{n})+f(\frac{3}{n})+\cdots+f(\frac{n}{n})}$$

مثال ۱: مطلوب است محاسبه‌ی:

$$A=\lim_{x\to\infty}\frac{\pi}{n}(\cos\frac{\pi}{2n}+\cos\frac{2\pi}{2n}+\cos\frac{3\pi}{2n}+\cdots+\cos\frac{n\pi}{2n})$$

حل:

$$A=\lim_{x\to\infty}\frac{\pi}{n}(\cos\frac{\pi}{2}(\frac{1}{n})+\cos\frac{\pi}{2}(\frac{2}{n})+\cos\frac{\pi}{2}(\frac{3}{n})+\cdots+\cos\frac{\pi}{2}(\frac{n}{n}))$$

$$=\pi\int_0^1\cos\frac{\pi}{2}x\,dx=2(\sin\frac{\pi}{2}x)\Big|_0^1=2(1-0)=2$$

مثال ۲. مطلوب است محاسبه‌ی حد:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{n}(\frac{1}{\sqrt{1+n^2}}+\frac{2}{\sqrt{4+n^2}}+\frac{3}{\sqrt{9+n^2}}+\cdots+\frac{n}{n^2+n^2})$$

حل:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{n}(\frac{1}{\sqrt{n^2(1+\frac{1}{n^2})}}+\frac{2}{\sqrt{n^2(1+\frac{4}{n^2})}}+\frac{3}{\sqrt{n^2(1+\frac{9}{n^2})}}+\cdots)$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{n}(\frac{1}{n\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}+\frac{2}{n\sqrt{1+\frac{4}{n^2}}}+\frac{3}{n\sqrt{1+\frac{9}{n^2}}}+\cdots)$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{n}(\frac{\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}+\frac{\frac{2}{n}}{\sqrt{1+\frac{4}{n^2}}}+\frac{\frac{3}{n}}{\sqrt{1+\frac{9}{n^2}}}+\cdots)$$

$$=\int_0^1\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx=(\sqrt{1+x^2})\Big|_0^1=\sqrt{2}-1$$

تفریح اندیشه

● حسین نامی ساعی

میمون‌های بازی‌گوش

میمون‌ها در دو دسته با هم بازی می‌کردند. مربع یک هشتم آن‌ها با شادی در بیشه جست‌وخیز می‌کردند و دوازده میمون دیگر هم با خوشحالی به آرامی هوا را برهم می‌زدند. شما بگویید چند میمون در آن بیشه بودند؟

حل: اگر تعداد کل میمون‌ها x فرض شود، در این صورت:

$$(\frac{x}{8})^2+12=x$$

و از این‌جا:

$$\frac{x^2}{64}+12=x$$

$$\frac{x^2+768}{64}=x$$

$$x^2-64x+768=0$$

$$(x-16)(x-48)=0$$

بنابراین: $x_2=48\ ,\ x_1=16$

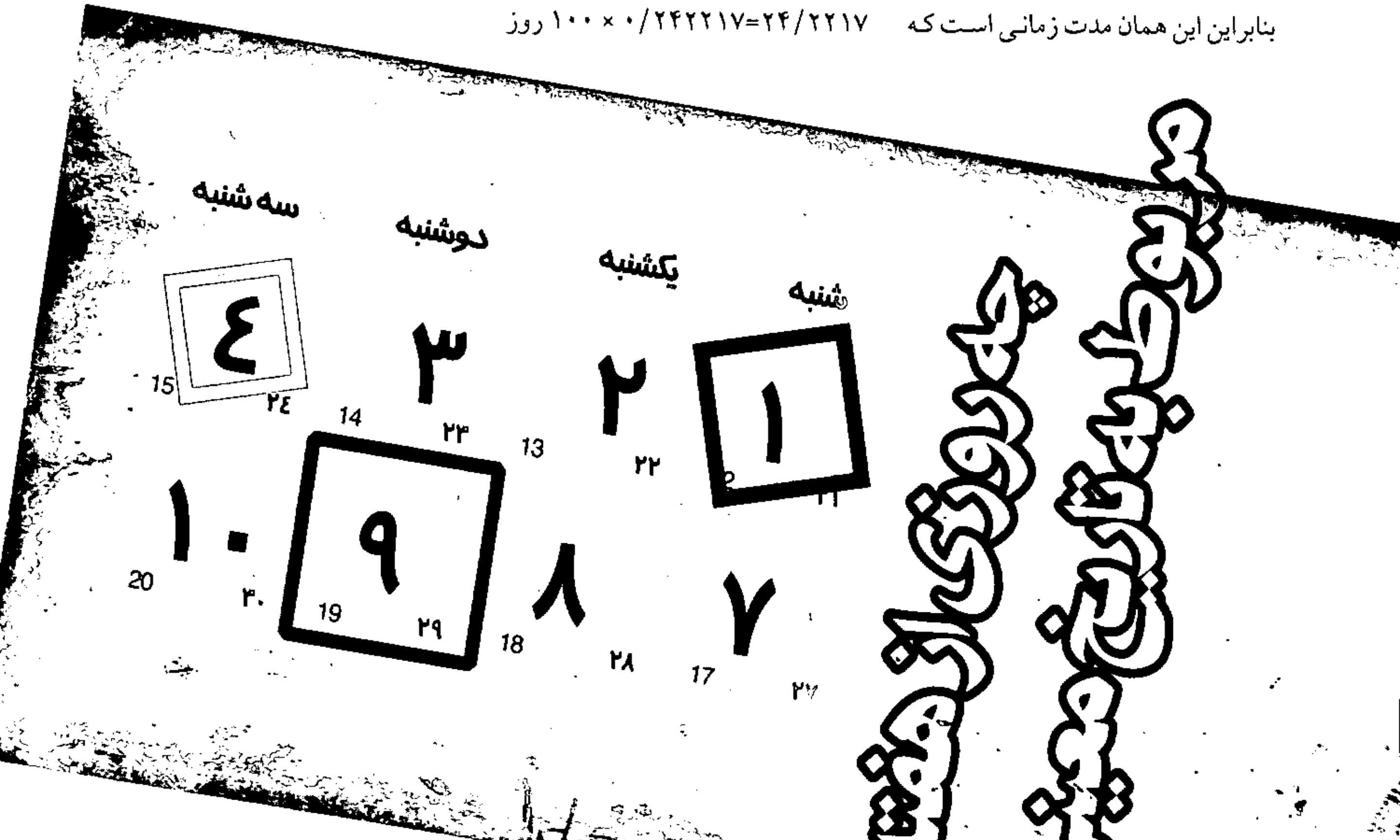
مسئله دارای دو جواب مثبت است: در هر دو دسته می‌تواند ۴۸ یا ۱۶ میمون باشد. هر دو جواب، معادله را کاملاً برقرار می‌کند.

جواب معمای فکری و منطقی

جواب۱: J بهترین گلف باز است و بقیه به ترتیب عبارت‌اند از C، B، و S.

جواب۲: C و H در مقابل A و M بازی می‌کردند. C بزرگ‌ترین است. و بقیه به ترتیب سن عبارت‌اند از H، M، و A.

چه روزی از هفته مربوط به تاریخ معینی است



پیشگفتار

مقاله‌ای را که هم اکنون مطالعه می‌کنید، حاوی مطلبی است درباره‌ی تقویم میلادی که می‌توان از آن مانند یک تقویم روزشمار تا سال ۲۹۰۰ یا سال ۲۱۰۰ میلادی استفاده کرد.

درباره‌ی تدوین این تقویم و چگونگی تغییر و تحول تدریجی و شکل‌گیری آن به صورت فعلی، در کتاب «سرگرمی های علم حساب»[1] بررسی و تحقیقی صورت گرفته که صرف نظر از کمی تاریخی بودن آن، غالباً با محاسبه توأم است و تمرین های جالبی دارد. در پایان بحث و بررسی ها، نیز جدولی تنظیم شده است که از آن می‌توان برای «تعیین نام روزهای هفته‌ی مربوط به تاریخ معینی از سال میلادی» استفاده کرد. آنچه در ادامه خواهد آمد، ترجمه و تلخیص این بررسی ها و طریقه‌ی ترسیم جدول و طرز استفاده از آن است؛ باشد که مورد توجه قرار گیرد.

محمدعلی شیخان

تقویم منسوب به ژول[2]

بنای کار را بر بیان خلاصه‌ای از تاریخچه‌ی تغییراتی می‌گذاریم که به دنبال هم در تقویم به وجود آمدند.

۱. می‌دانید، سال شمسی ۳۶۵ روز و ۲۴۲۲۱۷ میلیونیم روز است (یا ۳۶۵/۲۴۲۲۱۷ روز) و سالی است که قانون گردش فصل‌ها بر آن متکی است. بنابراین این همان مدت زمانی است که باید پایه و اساس عمومی سال قرار گیرد و در تقویم منظور شود.

آن‌طور که در گذشته‌ی دور مصری‌ها عمل می‌کردند، به طور کلی سال را ۳۶۵ روز ثابت می‌گرفتند که البته در نهایت خطایی را در پی داشت که می‌توانست پس از چندین سال زیاد باشد. مثلاً پس از صد سال، تاریخ درست از ۲۴/۲۲۱۷=۰/۲۴۲۲۱۷ × ۱۰۰ روز بعد شروع می‌شد.

رومی‌ها سال‌های زیادی این تقسیم سال به ۳۶۵ روز را حفظ و با آن کار کردند. ولی در زمان ژول سزار[3] فصل‌هایی پیدا شدند که جای آن‌ها کاملاً جابه‌جا شده بود. بنابراین دیکتاتور نامبرده تصمیم گرفت، در هر دوره‌ی چهار ساله‌ی متوالی، سه سال اول ۳۶۵

روز و سال چهارم ۳۶۶ روز حساب شود. از این‌رو طول سال را ۳۶۵ روز و $\frac{۱}{۴}$ روز یعنی ۳۶۵/۲۵ روز تعیین می‌کرد.

این تغییر و تنظیم، در سال ۳۲۵ میلادی مورد تأئید اسقف‌های آن عصر قرار گرفت که در مجلسی در نیس فرانسه گرد آمده بودند تا به امور مذهبی رسیدگی کنند. از جمله این‌که تصمیم بگیرند تاریخ عید پاک را با استفاده از قاعده و نظم معینی تثبیت کنند. بنابراین تقویمی را که ژول دستور تنظیم آن را داده بود، تأئید کردند و سال چهارم را کبیسه[4] نامیدند، و قرار گذاشتند از سال‌های تاریخی، آن‌ها که بر ۴ قابل قسمت هستند، سال‌های کبیسه باشند (این تقویم را بعدها تقویم ژولی می‌خوانم).

تقویم منسوب به گرِگوآر[5]

۲. سال منسوب به ژول به اندازه‌ی ۳۶۵/۲۵-۳۶۵/۲۴۲۲۱۷=۰/۰۰۷۷۸۳ روز، یعنی تقریباً $\frac{۳}{۴۰۰}$ طولانی‌تر بود و درنتیجه، اعتدال ربیعی (بهار) در سال ۱۵۸۲ به ۱۱ مارس رسید (به جای ۲۱ مارس). در این سال پاپ گرگوآر سیزدهم[6] ده روز از تقویم را حذف کرد و فردای روز پنجشنبه ۴ اکتبر را، جمعه ۱۵ اکتبر اعلان کرد و برای آن‌که از بازگشت به‌حالت مشابهی اجتناب شود، سه روز در هر ۴۰۰ سال را از تقویم حذف کرد. با این تصمیم، از قرنی به قرن دیگر، فقط آن سال‌هایی از قرن‌های کبیسه‌دار باقی ماندند که بر ۴ قابل قسمت باشند. از این قرار سال ۱۶۰۰ کبیسه‌دار می‌شد، سال‌های ۱۷۰۰، ۱۸۰۰ و ۱۹۰۰ کبیسه نداشتند و سال ۲۰۰۰ کبیسه‌دار می‌شد و...

و عبارت زیر:

$$۳۶۵ + \frac{۱}{۴} - \frac{۱}{۱۰۰} + \frac{۱}{۴۰۰} = ۳۶۵/۲۴۲۵$$

معرف سال گرگوری شد که در عین حال نشان‌دهنده‌ی تغییرات تدریجی است که در تقویم به‌وجود آمده‌اند و می‌آیند.

$(+\frac{۱}{۴})$ نشان می‌دهد که در هر چهار سال یک روز به سال (یعنی ۳۶۵ روز) اضافه می‌شود، $(-\frac{۱}{۱۰۰})$ نشان می‌دهد که در هر صد سال یک روز از صدمین سال که باید کبیسه باشد، حذف می‌شود. $(+\frac{۱}{۴۰۰})$ نشان می‌دهد که در هر چهارصد سال از نو سال را کبیسه می‌گیرند.

این تقویم که خطای کمی را سبب می‌شد، دوام یافت. این خطا هم چیزی جز تقریباً یک روز در هر چهار هزار سال نیست. پس می‌توان بدون خطای مشهود و آشکار قبول کرد، طول سال گرگوری ۳۶۵/۲۴۲۵ روز است (تقویم منسوب به گرگوآر را نیز تقویم گرگوری می‌خوانیم).

***

حال برمی‌گردیم به اصل سؤال، یعنی: **تعیین نام روز هفته**. جواب به این سؤال بر تبصره‌های زیر متکی است:

۳. **تبصره‌ی ۱**: چون از تاریخ روزی (یا بر تاریخ روزی) مضرب‌هایی از ۷ کم (یا مضرب‌هایی از ۷ اضافه) کنیم، به روزی همنام با همان روز نخست می‌رسیم. بدین‌ترتیب، مثلاً اگر دوم مارس روز دوشنبه باشد، روزهای ۹=۷+۲، ۱۶=۱۴+۲، ۲۳=۲۱+۲ و ۳۰=۲۸+۲ نیز روز دوشنبه خواهند بود.

۴. **تبصره‌ی ۲**: از تبصره قبل نتیجه می‌شود، برای شناخت روز هفته‌ی مربوط به تاریخ معینی، درحالی‌که روز مربوط به تاریخ معین دیگری شناخته شده باشد، می‌توان مضرب‌های هفت اختلاف بین این دو تاریخ را نادیده گرفت و فقط به باقی‌مانده توجه داشت. برای سهولت بیان، بعدها چنین باقی‌مانده‌ای را **رزیدو**[7] می‌نامیم، و برای تشخیص روز مورد نظر در طول هفته، ردیف آن را از روز مفروض به حساب می‌آوریم و شماره‌ی روز مفروض را صفر می‌گیریم.

۵. کاربرد

الف) اول مارس سالی روز دوشنبه است، ششم اوت همان سال چه روزی است؟

اختلاف بین این دو تاریخ ۱۵۸ روز است[8]؛ رزیدوی ۱۵۸ مساوی ۴ است، پس روز مطلوب، چهارمین روز، ابتدا از سه‌شنبه، یعنی روز جمعه است.

ب) روز اول ژانویه‌ی سالی معین است، روز اول مارس همان سال چه روزی است؟

ابتدا فرض می‌کنیم که سال مورد نظر کبیسه نباشد. بین اول ژانویه و اول مارس ۵۹ روز اختلاف است که رزیدوی آن ۳ می‌شود و اگر اول ژانویه مثلاً روز پنج‌شنبه باشد، اول مارس روز یک‌شنبه خواهد بود (سه روز بعد). درحالی‌که سال کبیسه باشد، این رزیدو ۴ است.

به عکس می‌توان روز اول ژانویه‌ی سالی را شناخت، درصورتی‌که روز اول مارس همان سال معین باشد. بدین شکل

می‌توان برای این سال مشترک رزیدو را همان عدد ۳ انتخاب کرد، ولی آن‌گاه باید برای یافتن روز مطلوب، ترتیب شمارش را در جهت بازگشت (به عکس) در نظر گرفت. بدیهی است در این مثال، اگر روز یک‌شنبه اول مارس باشد، به جواب روز پنج‌شنبه می‌رسیم. ولی در این حالت سهل‌تر آن است که رزیدو را ۴=۳-۷ بگیریم. آن‌گاه امکان شمارش به طور طبیعی میسر می‌شود و نتیجه همان پنج‌شنبه است. با این قیاس، رزیدوی سال کبیسه‌دار ۳=۴-۷ خواهد شد.

۶. **تبصره‌ی ۳**: هر سال شامل ۵۲ هفته است به اضافه‌ی یک یا دو روز؛ برحسب آن‌که کبیسه نباشد یا کبیسه باشد. آن‌گاه رزیدوی مربوطه برحسب حالت یک یا دو است.

از این جا نتیجه می‌شود، اگر مثلاً اول ژانویه‌ی سالی که کبیسه نیست، روز دوشنبه باشد، اول ژانویه‌ی سال بعد روز سه‌شنبه است. چنانچه سال کبیسه باشد، اول ژانویه‌ی سال بعد روز چهارشنبه خواهد بود.

۷. **کاربرد**: می‌دانیم اول ژانویه‌ی سال ۱۸۹۹ روز یک‌شنبه است. چه روزی از هفته، اول ژانویه‌ی سال ۱۸۰۱ بوده است؟

اختلاف بین این دو تاریخ ۹۸ سال است که در آن، ۲۴ سال کبیسه‌دار وجود دارد. برای محاسبه‌ی رزیدوی این سال‌ها، باید رزیدوی ۱۲۲=۲۴+۹۸ را حساب کنیم که عدد ۳ خواهد شد. چنانچه این عدد را بدون تغییر به‌کار بریم، باید طبق آنچه قبلاً گفتیم، ردیف روزها را به سمت بازگشت در نظر بگیریم. درنتیجه معلوم می‌شود، اول ژانویه‌ی سال ۱۸۰۱ روز پنج‌شنبه بوده است.

۸. به این ترتیب، فقط به کمک این تبصره‌ها می‌توان تعیین کرد، چه روزی از هفته به تاریخ دلخواهی مربوط است. ولی تدریجاً در دنباله‌ی بحث‌ها سریع‌تر به حل مسأله خواهیم پرداخت.

۹. در آنچه که در آینده دنبال می‌کنیم، قسمت قرن‌ها از یک سال تاریخی معین را از قسمت سال‌های زیر قرن جدا در نظر می‌گیریم. به این ترتیب که مثلاً برای سال ۴۲۵، قسمت ۴ را که جزو قرن‌هاست از ۲۵ که جزو سال‌هاست، جدا می‌کنیم. و یا مثلاً برای سال ۱۸۴۱، جزء ۱۸ را که مربوط به قرن‌ها، و جزء ۴۱ را که مربوط به سال‌هاست، مجزا در نظر می‌گیریم. و بالاخره، برای سهولت عمل و برای نشان دادن جزء صحیح یک خارج قسمت (در صورتی که عبارتی یا عددی بر عدد دیگر قابل قسمت نباشد)، آن را داخل دو کروشه قرار می‌دهیم؛ به این صورت

$$\left[\frac{۱۷}{۴}\right] = ۴ .$$

خطای تقویم گرگوری

۱۰. پاپ گرگوار سیزدهم، در اجرای تغییراتش در تقویم، مخصوصاً این هدف را دنبال می‌کرد که زمان وقوع عید پاک را که به‌وسیله‌ی اسقف‌ها در مجلس خلفای الهی در نیس تثبیت شده بود، بهبود بخشند و برقرار نگه دارد. بنابراین، با فرض درست بودن تاریخ‌ها تا سال ۳۲۵، به اصلاح تقویم پرداخت و روز جمعه ۵ اکتبر را ۱۵ اکتبر سال ۱۵۸۲ اعلام کرد (بند شماره‌ی ۲). درصورتی که آن تاریخ‌ها درست نبودند، نباید سال‌های ۱۰۰، ۲۰۰ و ۳۰۰ کبیسه‌دار می‌شدند. چون مبدأ تاریخ عصر ما به‌جای سال اول، در حقیقت از سال ۳۲۵ است. بنابراین لزوماً بین سال‌های یک و ۳۲۵، تعداد روزهای بیش‌تری از آنچه که در تقویم گرگوری آمده، جریان داشته است. درواقع، ۳۲۴ سال بین سال اول تا سال ۳۲۵ شامل ۱۱۸۳۴۱=۳۶۵/۲۵×۳۲۴ روز است. اگر تقویم گرگوری از ابتدای سال اول به کار برده می‌شد، مشتمل بر ۱۱۸۳۳۸/۵۷=۳۶۵/۲۴۲۵×۳۲۴ روز می‌شد. ملاحظه می‌شود که بین این دو ۲/۴۳ روز اختلاف وجود دارد. (این درحالی است که قبول کنیم، طول مدت سال گرگوری به همان اندازه باشد که سال شمسی. وانگهی خطایی که به این ترتیب، مرتکب می‌شویم، در اغلب حالات قابل صرف‌نظر کردن است.) خلاصه‌ی کلام معلوم می‌شود، تمام تاریخ‌ها ـ در ارتباط با روزهای هفته ـ باید از نتیجه‌ای که به دست آمده است، جلوتر باشند. مثلاً روز یک‌شنبه اول ژانویه‌ی سال ۱۸۹۹ باید سوم ژانویه نامیده می‌شد.

کاربرد

۱۱ـ الف) چه روزی از هفته، اول ژانویه‌ی سال اول بوده است، درصورتی که می‌دانیم روز اول ژانویه‌ی سال ۱۸۹۸ روز شنبه بوده است؟

اگر تقویم گرگوری از آغاز تاریخ ما مورد استفاده قرار گرفته بود، روزهایی که بین این دو تاریخ در جریان بودند، مساوی ۶۹۲۸۶۵/۰۲=۳۶۵/۲۴۲۵×۱۸۹۷ روز می‌شد. ولی در این جا تاریخ قبل از سال ۳۲۵ هم مورد نظر است. طبق آنچه قبلاً دیدیم، باید به این

عدد، ۲/۴۳ روز را اضافه کنیم تا روز دقیقی را در هفته به دست آوریم. بنابراین، باید رزیدوی عدد ۶۹۲۸۶۷ را تعیین کنیم. این رزیدو هم صفر است. پس روز اول ژانویه‌ی سال اول، شنبه بوده است.

ب) فرض می‌کنیم تقویم گرگوری از ابتدای تاریخ ما مورد استفاده بوده است و دقیقاً اول ژانویه‌ی سال ۱۸۹۸ روز شنبه واقع شود. چه روزی، اول ژانویه‌ی سال اول خواهد بود؟

طبق محاسبه‌ای که در قسمت الف انجام دادیم، باید رزیدوی عدد ۶۹۲۸۶۵ را به دست آوریم که مساوی ۵ است. با شمارش در جهت روزهای قبل، ابتدا از روز شنبه که اول ژانویه‌ی سال ۱۸۹۸ بود، به روز دوشنبه می‌رسیم؛ یعنی اول ژانویه‌ی سال اول روز دوشنبه واقع خواهد شد.

ج) چه روزی در هفته، ۱۲ اکتبر سال ۱۴۹۲ است؟ (تاریخ‌اکتشاف آمریکا توسط کریستف کلمب.)

تقویم ژولی: اختلاف اول ژانویه‌ی سال اول تا اول ژانویه‌ی سال ۱۴۹۲ مساوی ۱۴۹۱ سال است. بنابراین برای محاسبه‌ی رزیدوها داریم:

رزیدوی سال‌های ۱۴۹۱

$$\left[\frac{۱۴۹۱}{۴}\right]$$ رزیدوی کبیسه‌ها ۳۷۲ =

و

رزیدوی تعداد روزهای اول ژانویه تا ۱۲ اکتبر ۱۴۹۲	= ۲۸۵

بنابراین داریم:

۱۴۹۱ + ۳۷۲ + ۲۸۵ = ۲۱۴۸

رزیدوی این عدد ۶ است. پس اگر اول ژانویه‌ی سال اول، روز شنبه باشد، ۱۲ اکتبر سال ۱۴۹۲ روز جمعه خواهد بود.

د) ۵ مه سال ۱۷۸۹ چه روزی است؟ (تاریخ تشکیل مجلس قدیم فرانسه.)

تقویم گرگوری: با فرض این‌که از آغاز تاریخ ما، تقویم گرگوری مورد استفاده قرار گرفته باشد، داریم (برای محاسبه‌ی رزیدوها):

رزیدوی سال‌ها ۱۷۸۸

$$\left[\frac{۱۷۸۹}{۴}\right]$$ رزیدوی کبیسه‌ها = ۴۴۷

رزیدوی تعداد روزهای اول ژانویه تا ۵ مه سال ۱۷۸۹	= ۱۲۴

بنابراین داریم:

۱۷۸۸ + ۴۴۷ + ۱۲۴ = ۲۳۵۹

از این عدد رزیدوی قرن‌ها یعنی ۱۳ = $\left[\frac{۱۷}{۴}\right]$ - ۱۷ را حذف می‌کنیم که می‌شود: ۲۳۴۶=۱۳-۲۳۵۹ و رزیدوی این عدد هم یک است. طبق فرض، اول ژانویه‌ی سال اول روز دوشنبه بود (قسمت ب) پس ۵ مه سال ۱۷۸۹ روز سه‌شنبه خواهد بود.

۱۲. تبصره‌های مهم

الف) از آغاز تاریخ ما، روزهای هفته بدون انقطاع به ترتیب طبیعی‌شان ادامه داشتند. فقط هنگام رفرم گرگوآر بود که چندمین‌ها تغییر کرده بودند. به این معنی که فردای روز پنج شنبه چهارم اکتبر ۱۵۸۲، به روز جمعه ۱۵ اکتبر این سال تبدیل شد.

ب) روس‌ها و یونانی‌ها تقویم ژولی را حفظ کردند. درعوض، سایر ملل اروپایی کلاً تقویم ژولی را از سال اول تا ۴ اکتبر سال ۱۵۸۲ به انضمام آن، تقویم گرگوری را از ابتدای ۱۵ اکتبر سال ۱۵۸۲ به بعد به‌کار برده‌اند.

قاعده‌های کلی

۱۳. تا این‌جا منظور این بود که به خوانندگان ثابت کنیم، می‌توانیم بدون اتکا به شناخت روز هفته‌ی مربوط به تاریخ معینی، روز مربوط به تاریخ دلخواهی را تعیین کنیم. به‌علاوه، مثال‌ها بیش‌تر به منظور فهم و درک چگونگی ساخت تقویم بوده‌اند. ولی می‌توان بسیاری از محاسبات و احتمال خطا را کم کرد. برای این کار، هم‌اکنون دو روش بسیار ساده را معرفی می‌کنیم به توجیه آن‌ها می‌پردازیم که اصل آن را مدیون ستاره‌شناسی فرانسوی و یکی از مکتشفان دستگاه متریک، یعنی دُلامبر[۹] هستیم.

۱۴. از آن‌چه هم‌اکنون دنبال می‌شود: اولاً، روز آغاز را اول مارس خواهیم گرفت، تا از هر نوع پیچیدگی حاصل از سال‌های کبیسه اجتناب کنیم. ثانیاً، این انتخاب را به قسمی انجام می‌دهیم که در تقسیم بر ۷، رزیدوی صفر پیوسته مشخص و معرف روز یک‌شنبه باشد. به ترتیب، برای روزهای دوشنبه، سه‌شنبه، ... و جمعه و شنبه، اعداد ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ و ۶ را به‌کار می‌بریم. این اعداد را، شماره و علامت روزهای مربوط می‌نامیم (به عبارت دیگر روزها را با این شماره‌ها شناسایی می‌کنیم). پس هر یک از این اعداد به‌طور مطلق معرف یک روز هفته است. روش‌هایی را که بیان خواهیم کرد، دقیقاً این شماره را به کمک یک محاسبه‌ی سریع به ما خواهد داد. ابتدا دو سؤال زیر را مطرح و حل می‌کنیم:

۱۵ . الف) شماره‌ی اولین روز ماهی را می‌شناسیم. مطلوب است تعیین شماره‌ی nامین روز دلخواهی از این ماه.

کافی است، به‌طورکلی رزیدوی اختلاف بین روز اول و nامین روز ماه را (یعنی رزیدوی ۱-n را) حساب کنیم و بر شماره‌ی اولین روز ماه بیفزاییم. مثلاً، شماره‌ی اولین روز ماهی ۳ است، شماره‌ی بیست‌و چهارمین روز این ماه چیست؟

رزیدوی اختلاف (۱-۲۴) مساوی ۲ است. پس شماره‌ی بیست‌و چهارمین روز ماه ۲+۳ می‌شود.

ب) شماره‌ی روز اول مارس سالی را می‌شناسیم. شماره‌ی تاریخ دلخواهی از همین سال را پیدا کنید. اول ماه از تاریخ معینی، نسبت به اول مارس رزیدویی دارد که در جدول ۱ آمده است. در این جدول، رزیدوی اول مارس صفر فرض شده است (برای محاسبه‌ی اعداد این جدول، به بند شماره‌ی ۴ تبصره‌ی ۲ و شماره‌ی ۵ـ الف رجوع کنید).

جدول ۱ . رزیدوی سال‌ها

کبیسه	عمومی و مشترک	ماه‌ها
رزیدوی مربوط سال		
۳	۴	ژانویه
۶	۰	فوریه
	۰	مارس
	۳	آوریل
	۵	مه
	۱	ژوئن
	۳	ژوئیه
	۶	اوت
	۲	سپتامبر
	۴	اکتبر
	۰	نوامبر
	۲	دسامبر

از این قرار، شماره‌ی روز اول هر ماه (از سال) با اضافه کردن شماره‌ی روز اول مارس همان سال، بر رزیدوی مربوط به همان ماه که در جدول ثبت است، به‌دست خواهد آمد. بالاخره طبق آنچه که در قسمت الف همین بند اشاره شد، **برای به‌دست آوردن شماره‌ی nامین روز از ماه دلخواهی، کافی است به رزیدوی آن ماه داده شده در جدول بالا، رزیدوی اختلاف nامین روز منهای یک (یعنی رزیدوی ۱-n) و نیز شماره‌ی روز اول مارس صورت مسأله را اضافه کنیم.**

مثلاً می‌خواهیم شماره‌ی ۹ دسامبر سالی را پیدا کنیم، درحالی که می‌دانیم شماره‌ی روز اول مارس همین سال ۳ است. رزیدوی واقع در جدول ۱، مربوط به اول دسامبر، ۲ است؛ رزیدوی اختلاف ۸=۱-۹ مساوی ۱ است. با توجه به شماره‌ی روز اول مارس داده شده، معلوم می‌شود شماره‌ی ۹ دسامبر، ۶=۱+۲+۳ است.

از این قرار، طبق آنچه که گذشت می‌توان دو روش در این‌باره بیان کرد.

۱۶ . **روش اول تقویم ژولی:** فرض کنید منظور تعیین شماره‌ی ۱۲ اکتبر سال ۱۴۹۲ باشد. ابتدا شماره‌ی روز اول مارس سال ۱۴۹۲ را پیدا می‌کنیم. اول ژانویه‌ی سال اول روز شنبه بود (بند شماره‌ی ۱۱، قسمت الف) که شماره‌اش ۶ است. پس شماره‌ی روز اول مارس سال اول، مساوی با رزیدوی ۹=۳+۶ یعنی ۲ است (بند شماره‌ی ۵، کاربرد قسمت ب). طبق آنچه که در بالا دیده‌ایم، لازم است که رزیدوی عبارت زیر را تعیین کنیم:

$$۲+۱۴۹۱+\left[\frac{۱۴۹۲}{۴}\right]$$

$$=۱۴۹۲+\left[\frac{۱۴۹۲}{۴}\right]+۱$$

که در آن، ۲ معرف شماره‌ی روز اول مارس سال اول، ۱۴۹۱ برای رزیدوی سال‌ها و $\left[\frac{۱۴۹۲}{۴}\right]$ رزیدوی سال‌های کبیسه است. عبارت اخیر را چنین می‌نویسیم:

$$۱۴۰۰+\frac{۱۴۰۰}{۴}+۹۲+\left[\frac{۹۲}{۴}\right]+۱$$

$$=۱۴(۱۰۰+۲۵)+۹۲+\left[\frac{۹۲}{۴}\right]+۱$$

یا چون فقط رزیدو مورد نظر است و این‌که ۱۲۵=۱۷×۷+۶، با حذف مضرب ۷ نتیجه می‌شود:

$$۱۴\times۶+۹۲+\left[\frac{۹۲}{۴}\right]+۱$$

بنابراین، شماره‌ی اول مارس سال ۱۴۹۲، مساوی رزیدوی این عبارت است. برای به‌دست آوردن شماره‌ی ۱۲ اکتبر سال ۱۴۹۲ باید علاوه بر آن، رزیدوی مربوط به اول اکتبر واقع در جدول، یعنی ۴، و رزیدوی(۱-۱۲) را نیز به عبارت اخیر اضافه کنیم. حاصل خواهد شد:

$$(۱)\quad ۱۴\times۶+۹۲+\left[\frac{۹۲}{۴}\right]+۴+۱۲$$

و شماره‌ی مطلوب، رزیدوی عبارت (۱) است که مسلماً با توجه به سلسله دلایل قبلی، مستقل از سال معینی است. به این ترتیب:

الف) قاعده‌ی اول: برای تعیین این‌که چه روزی از هفته مربوط به تاریخ دلخواهی از تقویم ژولی است، باید رزیدوی عبارت (۱) را بررسی کرد و این مجموع تشکیل شده است از: اولاً، شش برابر قسمت قرون سال تاریخی مورد نظر؛ ثانیاً، قسمت سالیانه‌ی آن؛ ثالثاً،

خارج قسمت صحیح قسمت سالیانه‌ی آن بر ۴؛ رابعاً، رزیدوی اول ماه مفروض نسبت به روز اول ماه مارس (واقع در جدول۱)؛ خامساً، چندمین روز داده شده.

رزیدویی که به این ترتیب به‌دست می‌آید، یکی از اعداد صفر و یک تا ۶ خواهد بود که روزهای مورد نظر یکشنبه، دوشنبه... و یا شنبه را مشخص می‌کند. در سؤال بالا، جواب روز جمعه است؛ زیرا رزیدوی عبارت (۱) مساوی ۵ است.

۱۷. روش دوم ـ تقویم گرگوری: مطلوب است تعیین شماره‌ی ۲۱ ژانویه‌ی سال ۱۷۹۳ (تاریخ فوت لویی شانزدهم).

فرض می‌کنیم، شروع تاریخ زمان ما بر مبنای تاریخ تقویم گرگوری باشد که اول ژانویه‌ی سال اول آن روز دوشنبه بود (موارد کاربرد بند شماره‌ی ۱۱، قسمت ب). روز هفته‌ای که شماره‌ی آن ۱ است و شماره‌ی اول مارس سال اول آن مساوی ۴=۳+۱ است (بند شماره‌ی ۵، کاربرد قسمت ب). ابتداشماره‌ی اول مارس سال ۱۷۹۳ را پیدا می‌کنیم. طبق آنچه که قبلاً دیده‌ایم، باید رزیدوی این عبارت را حساب کنیم:

$$4+1792+\left[\frac{1793}{4}\right]-\left(17-\left[\frac{17}{4}\right]\right)$$

که در آن ۴ معرف شماره‌ی روز اول مارس سال اول، ۱۷۹۲ برای تعیین رزیدوی سال‌ها، $\left[\frac{1793}{4}\right]$ برای رزیدوی سال‌های کبیسه دار و $17-\left[\frac{17}{4}\right]$ رزیدوی قرن‌هاست.

عبارت فوق را می‌توان نوشت:

$$1700+93+\frac{1700}{4}+\left[\frac{93}{4}\right]-17$$

$$+\left[\frac{17}{4}\right]+3=17(100+25-1)$$

$$+\left[\frac{17}{4}\right]+93+\left[\frac{93}{4}\right]+3$$

و بالاخره چون رزیدوی ۱−۲۵+۱۰۰ مساوی ۵ است، شماره‌ی روز اول مارس ۱۷۹۳، به‌وسیله‌ی این عبارت تعیین می‌شود:

$$17\times5+\left[\frac{17}{4}\right]+93+\left[\frac{93}{4}\right]+3$$

برای یافتن شماره‌ی ۲۱ژانویه‌ی سال ۱۷۹۳، علاوه بر آن باید به این عبارت رزیدوی اول ژانویه واقع در جدول ۱، یعنی ۴، رزیدوی (۱−۲۱) را اضافه کنیم. پس شماره‌ی مطلوب برابر مساوی است با رزیدوی:

$$17\times5+\left[\frac{17}{4}\right]+93$$

$$+\left[\frac{93}{4}\right]+4+21+2 \qquad (2)$$

بدیهی است که رشته دلایل بالا مستقل از سال معینی است. با این ترتیب:

ب) قاعده‌ی دوم: برای یافتن روزی از هفته‌ی مربوط به تاریخ دلخواهی، با استفاده از تقویم گرگوری، باید رزیدوی عبارت(۲) را به‌دست آوریم که تشکیل شده است از: اولاً، پنج برابر قسمت قرن‌های سال تاریخی مورد نظر؛ ثانیاً، خارج قسمت صحیح این قسمت از قرن‌ها تقسیم بر ۴؛ ثالثاً، قسمت سال‌های پائین‌تر از قرن‌ها؛ رابعاً، خارج قسمت صحیح این قسمت از سال‌ها تقسیم بر ۴؛ خامساً، رزیدوی اول ماه مفروض نسبت به اول مارس واقع در جدول۱؛ سادساً، چندمین روز مفروض؛ سابعاً، ۲واحد.

رزیدویا عددی که به‌دست می‌آید، یکی از اعداد صفر تا ۶ است که معرف روز مطلوب خواهد بود. در مثالی که انتخاب شد، رزیدوی نهایی مساوی یک است، پس ۲۱ ژانویه‌ی سال ۱۷۹۳ روز دوشنبه است.

تقویم دائمی و کاربرد آن

۱۸. آنچه که تا کنون دیده‌ایم، وسیله ی تشکیل یک تقویم دائمی را ساده و آسان می‌کند؛ یعنی رسم جدولی که بتوان بدون محاسبه به تعیین روز مطلوب رسید. به اختصار اشاره می‌کنم که برای این کار، با صرف نظر کردن از بسیاری از محاسبات، فقط به تعیین چهار رزیدوی قرن‌ها، سال، چندمین روز و ماه اکتفا، و آن‌ها را به شیوه‌ی خاصی در دو جدول تنظیم می‌کنند. در یکی، رزیدوهای چندمین روز و ماه (جدول۲−الف) و در دیگری، رزیدوهای قرن‌ها و سال (جدول۲−ب). حال اگر مثلاً در جست‌وجوی شماره‌ی روز مربوط به رزیدوهای ۲ و ۴ از چندمین روز و ماه، و ۵و۶ از قرن‌ها و سال هستید، از جدول ۲−الف به‌وسیله‌ی دو عدد ۲و۴ که به ترتیب در سطر و ستون اول انتخاب می‌کنید، رزیدوی ۶ را به‌دست می‌آورید و از جدول ۲−ب، به وسیله‌ی اعداد ۵ و ۶رزیدوی ۴ را. حال کافی است، قطر لازم از خانه‌ی ۶ از جدول ۲−الف را امتداد دهیم تا امتداد قطر خانه‌ی ۴ از جدول ۲−ب را قطع کند و در محل تلاقی

این دو قطر، رزیدوی ۶+۴، یعنی ۳ را بنویسیم. این شماره‌ی روزی خواهد بود که می‌خواهیم؛ یعنی روز مطلوب چهارشنبه است. توجه داشته باشید، خانه‌های در طول قطر BD جدول ۲- الف، شامل رزیدوهای مکرر است. همین طور است، خانه‌های در طول قطرهای دیگر موازی BD (جدول ۲).

۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶
۱	۲	۳	۴	۵	۶	۰
۲	۳	۴	۵	۶	۰	۱
۳	۴	۵	۶	۰	۱	۲
۴	۵	۶	۰	۱	۲	۳
۵	۶	۰	۱	۲	۳	۴
۶	۰	۱	۲	۳	۴	۵

۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶
۶	۰	۱	۲	۳	۴	۵
۵	۶	۰	۱	۲	۳	۴
۴	۵	۶	۰	۱	۲	۳
۳	۴	۵	۶	۰	۱	۲
۲	۳	۴	۵	۶	۰	۱
۱	۲	۳	۴	۵	۶	۰

از نوشتن رزیدوها در دو جدول قرینه‌ی مذکور هم صرف‌نظر کردیم و در لوزی مرکزی جدول۳، به‌جای شماره‌ها، حرف اول کلمه‌ی روزهای هفته را نوشتیم. اینک با تذکر مجدد این مطلب که جدول جدید، برای تقویم **گرگوری تا سال ۳۱۰۰ میلادی** و برای **تقویم ژولی تا سال ۲۹۰۰ میلادی** قابل استفاده است، با ذکر مشخصات و نحوه‌ی استفاده از آن، مطلب را به‌پایان می‌بریم.

اما مشخصات جدول، همان طور که پیداست، جدول شامل ستون‌های بزرگ و کوچکی است، در راست و چپ صفحه که در قسمت بالا و متن آن‌ها، سال‌های تاریخی زیرقرن، سال‌ها برحسب قرن، nامین روز ماه و اسامی ماه‌ها ثبت است. **ماه‌های ژانویه و فوریه** که با حروف بزرگ نوشته شده‌اند، مربوط به سال‌های کبیسه‌دار هستند. زیر ستون‌های بزرگ، خانه‌های سفید و نانوشته‌ای وجود دارند که در محل تلاقی امتدادهای اقطار این خانه‌ها، تقریباً در پائین و بین ستون‌ها، حرف اول روزهای هفته (به فرانسه) نوشته شده است (Sشنبه، D یکشنبه، Lدوشنبه، M سه شنبه، mچهارشنبه، زپنجشنبه و V جمعه).

تذکر: اگر جای دیگری این جدول را کپی می‌کنید، می‌توانید برای سهولت تشخیص، روزهای هفته را با شماره‌های صفر تا ۶ نامگذاری کنید (صفر برای روز یکشنبه و بقیه‌ی اعداد به‌ترتیب برای روزهای دوشنبه و... و شنبه).

حال به مثال‌هایی چند و طریقه‌ی استفاده از جدول توجه کنید.

۱. تعیین کنید، ۲۱نوامبر سال ۱۹۹۹چه روزی است؟

ابتدا ۲۱ را در ستون سمت چپ مربوط به روزهای ماه و نیز ماه نوامبر را در ستون مربوط به ماه پیدا می‌کنیم و خانه‌ی وابسته به ستون و سطر این دو را در نظر می‌گیریم که یکی از آن خانه‌های سفید خواهد بود (برای سهولت آن را خانه اول می‌نامیم). سپس از عدد مربوط به سال، قسمت قرن‌ها، یعنی ۱۹ را در ستون کوچک سمت راست تعیین می‌کنیم (بر حسب مورد، یکی از دو ستون کوچک را در نظر می‌گیریم؛ **تقویم گرگوری یا تقویم ژولی**) و قسمت سال‌های زیر قرن، یعنی ۹۹ را در ستون سمت راست مشخص می‌سازیم. آن‌گاه، خانه‌ی التقا این دو مورد را که یکی از خانه‌های سفید زیر ستون سمت راست خواهد بود، پیدا می‌کنیم (آن را هم محض سهولت خانه دوم می‌نامیم). در محل تلاقی امتدادهای قطرهای خانه‌ی اول و دوم مذکور، حرفی نوشته شده که حرف اول نام روز مربوط است. در این مثال، برای تقویم گرگوری حرف D آمده، یعنی یکشنبه. و برای تقویم ژولی حرف S، یعنی شنبه.

۲. ۱۵فوریه سال ۱۸۴۰ چه روزی بود؟ سال کبیسه است.

ابتدا از سمت چپ جدول، عدد ۱۵ و FE'V را در ستون‌های مربوط پیدا می‌کنیم و خانه‌ی التقا این دو مورد را مشخص می‌کنیم (خانه‌ی اول). سپس ۱۸ و ۴۰ را از سمت راست در ستون‌های مربوط تعیین می‌نماییم و خانه‌ی برخورد این دو مورد را هم در نظر می‌گیریم (خانه‌ی دوم). در محل تلاقی امتدادهای اقطار دو خانه‌ی اول و دوم، حرف اول روزی است که می‌خواستیم. در مورد تقویم گرگوری حرف S آمده است، یعنی شنبه و در مورد تقویم دیگر، حرف j، یعنی روز پنجشنبه.

خلاصه‌ی کلام

ابتدا خانه‌ی محل تلاقی ستون و سطر روز و ماه تاریخ معین را از سمت چپ پیدا کنید. قطر این خانه را از چپ به راست و از بالا به پائین امتداد دهید. همین عمل را در قسمت قرن‌ها و سال‌های تاریخی ریزقرن در سمت راست انجام دهید. خانه‌ی وابسته به این دو را به دست آورید. قطر این خانه را نیز از بالا و راست به پائین و چپ امتداد دهید. در محل تلاقی آن با اولی، حرف روز مربوط

نوشته شده است.

مثال‌های زیر را خود بررسی کنید:

۱. ۱۲ اکتبر ۱۴۹۲ چه روزی است؟

۲. ۱۵ مارس ۲۰۰۴ چه روزی است؟ سال کبیسه است

۳. ۱۷ فوریه سال ۲۰۰۰ چه روزی است؟ سال کبیسه است.

۴. ۲۰ ژانویه سال ۲۰۰۰ چه روزی است؟ سال کبیسه است.

۵. ۱۱ مه سال ۲۰۰۵ چه روزی است؟

۶. اول ماه مه سال ۲۰۰۶ چه روزی است؟

۷. اول ژانویه سال ۲۰۰۷ چه روزی است؟

۸. ۱۲ آوریل سال ۱۹۱۵ چه روزی است؟

زیرنویس

1. RÉCRÉATIONS ARITHMÉTIQUES
2. Calendrier Julien
3. Jules César
4. Bissextile
5. Calendrier Grégorien
6. Le Pape Grégoire XIII
7. Résidu
8. روزهای ماه‌های میلادی نامرتب و به‌قرار زیرند:

۲۸ یا ۲۹ روز = Février (February)، ۳۱ روز = Janvier (January)

۳۱ روز = Avril (April)، ۳۰ روز = Mai (May)، ۳۱ روز = Mars (March)

۳۱ روز = Juillet، ۳۱ روز = Août (August)، ۳۰ روز = Juin (June)، (July)

۳۱ روز = Septembre، ۳۰ روز = Octobre (October)، (September)

۳۱ روز = Décembre (December)، ۳۰ روز = Novembre (November)

9. Delambre

تقویم دائم میلادی

قسمت‌های تاریخی (زیرقرن)

۰	۱	۲	۳	۰	۴	۵
۶	۷	۰	۸	۹	۱۰	۱۱
۰	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵	۰	۱۶
۱۷	۱۸	۱۹	۰	۲۰	۲۱	۲۲
۲۳	۰	۲۴	۲۵	۲۶	۲۷	۰
۲۸	۲۹	۳۰	۳۱	۰	۳۲	۳۳
۳۴	۳۵	۰	۳۶	۳۷	۳۸	۳۹
۰	۴۰	۴۱	۴۲	۴۳	۰	۴۴
۴۵	۴۶	۴۷	۰	۴۸	۴۹	۵۰
۵۱	۰	۵۲	۵۳	۵۴	۵۵	۰
۵۶	۵۷	۵۸	۵۹	۰	۶۰	۶۱
۶۲	۶۳	۰	۶۴	۶۵	۶۶	۶۷
۰	۶۸	۶۹	۷۰	۷۱	۰	۷۲
۷۳	۷۴	۷۵	۰	۷۶	۷۷	۷۸
۷۹	۰	۸۰	۸۱	۸۲	۸۳	۰
۸۴	۸۵	۸۶	۸۷	۰	۸۸	۸۹
۹۰	۹۱	۰	۹۲	۹۳	۹۴	۹۵
۰	۹۶	۹۷	۹۸	۹۹	۰	۰

شنبه	Sa...
یکشنبه	Di...
دوشنبه	Lun...
سه شنبه	Mat...
چهارشنبه	mez...
پنجشنبه	Jen...
جمعه	Ven....

قسمت سال‌ها بر حسب قرن‌ها

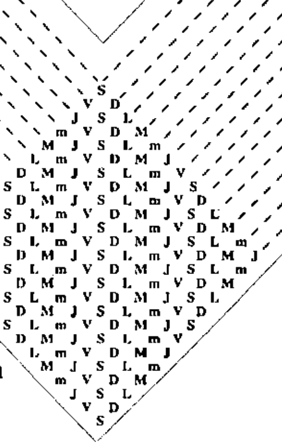
	تقویم Julien			تقویم Gzegozien			
۰۷	۱۴	۲۱	۲۸	۱۷	۲۱	۲۵	۲۹
۶	۱۳	۲۰	۲۷				
۵	۱۲	۱۹	۲۶	۱۶	۲۰	۲۴	۲۸
۴	۱۱	۱۸	۲۵	۱۵	۱۹	۲۳	۲۷
۳	۱۰	۱۷	۲۴				
۲	۹	۱۶	۲۳	۱۸	۲۲	۲۶	۳۰
۱	۸	۱۶	۲۲				

جدول ۳. ترتیب دیگر ثبت رزیدوهای لازم برای تشکیل تقویم دائمی

چندمین روز ماه

ماه							
	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶
	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳
	۱۴	۱۵	۱۶	۱۷	۱۸	۱۹	۲۰
	۲۱	۲۲	۲۳	۲۴	۲۵	۲۶	۲۷
	۲۸	۲۹	۳۰	۳۱	۰	۰	۰
Fév-Mars-Nov.							
FÉV.-Août							
Mai.							
Janv-Octob.							
JANV-Avpil.Juil							
Sept.-Déc.							
Juin.							

ماه‌های ژانویه و فوریه که با حروف بزرگ نوشته شده‌اند، مربوط به سال‌های کبیسه‌اند.



روزهای هفته.

m معرف روز چهارشنبه است.

اشاره

نمودارها می‌توانند درک شهودی ما را نسبت به مطالب ریاضی عمیق‌تر کنند. یکی از روش‌هایی که می‌تواند درک ریاضی را در دانش‌آموزان بالا ببرد، استفاده از قوه‌ی درک و شهود است و اگر قوه‌ی درک و شهود در دانش‌آموزان تحریک و تقویت شود، تفکر دانش‌آموزان رشد می‌یابد و شکوفا می‌شود. درنتیجه، انگیزه به یادگیری ریاضیات، قدرت ابتکار و خلاقیت دانش‌آموزان افزایش می‌یابد.

با کمک اطلاعاتی که از تابع و مشتق‌های اول و دوم آن به‌دست می‌آید، می‌توان نمودار تابع را با دقت نسبتاً خوبی رسم کرد. اما ممکن است تعیین مشتق در بعضی از موارد به سادگی امکان‌پذیر نباشد. اکنون می‌خواهیم روش رسم نمودار تابع را بدون استفاده از مشتق بررسی کنیم.





رسم نمودار تابع بدون مشتق

● مجتبی رفیعی
دبیر ریاضی منطقه‌ی شهر قدس

(قسمت ۱)

به طور کلی، برای رسم نمودار توابع، به این نکات نیاز داریم:

۱. در تابع $f(x) = (x-a)^n g(x)$ با شرط $g(a) \neq 0$ اگر $n = 1$ باشد، آن‌گاه $x = a$ ریشه‌ی ساده‌ی منحنی تابع f است و محل تقاطع منحنی با محور xهاست.

۲. در تابع $f(x) = (x-a)^n g(x)$ با شرط $n \geq 2$ و $g(a) \neq 0$، مقدار مشتق تابع در $x = a$ تا مرحله‌ی $(n-1)$ ام برابر صفر است. یعنی: $f'(a) = f''(a) = \cdots = f^{(n-1)}(a) = 0$؛

۳. در تابع $f(x)=(x-a)^n g(x)$ با شرط $g(a)\neq 0$، اگر n زوج و $n\geq 2$ باشد، آن‌گاه f در $x=a$ دارای اکسترمم نسبی است. در این حالت، اگر $g(a)>0$ باشد، تابع در a می‌نیمم نسبی دارد و اگر $g(a)<0$ باشد، تابع در a ماکزیمم نسبی دارد.

۴. در تابع $f(x)=(x-a)^n g(x)$ با شرط $g(a)\neq 0$، اگر n فرد و $n\geq 3$ باشد، آن‌گاه f در $x=a$ دارای نقطه‌ی عطف مماس است.

۵. خط $x=a$ را مجانب قائم نمودار تابع f گوییم، هرگاه حداقل یکی از موارد زیر برقرار باشد:

۲) $\lim_{x\to a^+} f(x)=-\infty$

۱) $\lim_{x\to a^+} f(x)=+\infty$

۴) $\lim_{x\to a^-} f(x)=-\infty$

۳) $\lim_{x\to a^-} f(x)=+\infty$

۶. خط $y=L$ را مجانب افقی نمودار تابع f گوییم، هرگاه حداقل یکی از شرایط زیر برقرار باشد:

۱) $\lim_{x\to +\infty} f(x)=L$ ۲) $\lim_{x\to -\infty} f(x)=L$

۷. اگر $f(x)=mx+h+R(x)$ و $\lim_{x\to\infty} R(x)=0$، آن‌گاه $y=mx+h$ مجانب مایل $y=f(x)$ است.

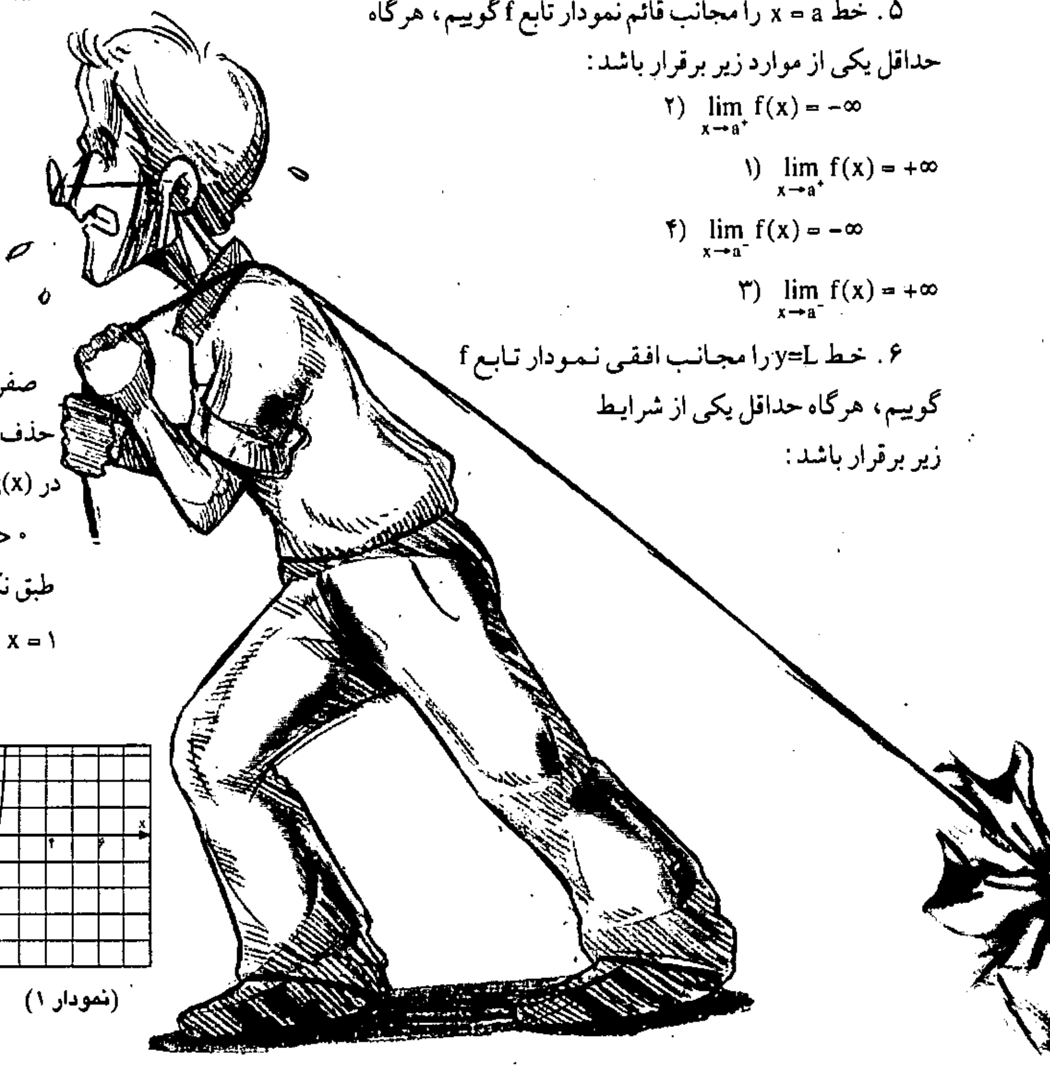
مثال: معادله‌ی $f(x)=(x-1)(x-2)^2(x+1)^3=0$ را به‌طور شهودی رسم کنید؟

این معادله سه ریشه دارد که محور xها را با شرایط زیر قطع می‌کند.

طبق نکته‌ی ۱، منحنی در نقطه‌ی $x=1$ محور xها را قطع می‌کند.

طبق نکته‌ی ۳، منحنی در نقطه‌ی $x=2$ بر محور xها مماس است و این نقطه می‌نیمم نسبی است. زیرا می‌توان نوشت:

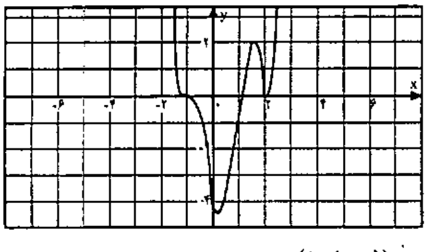
$$f(x)=(x-2)^2\underbrace{\left[(x-1)(x+1)^3\right]}_{g(x)}$$



اکنون اگر عامل صفرشونده یعنی $(x-2)^2$ را حذف کنیم و به‌جای x عدد ۲ را در $g(x)$ قرار دهیم، داریم:

$$g(2)=(2-1)(2+1)^3=27>0$$

طبق نکته‌ی ۴، منحنی در نقطه‌ی $x=1$ دارای نقطه‌ی عطف مماس است.



(نمودار ۱)

رسم نمودار توابع کثیر الجمله‌ای

نمودار توابع زیر را رسم کنید:

۱) $y=x^4-2x^3$

گام اول: چون

$$\lim_{x\to\pm\infty} x^4-2x^3=\lim_{x\to\pm\infty} x^4=+\infty$$

یعنی:

$$\begin{cases} x\to+\infty \Rightarrow y\to+\infty \\ x\to-\infty \Rightarrow y\to+\infty \end{cases}$$

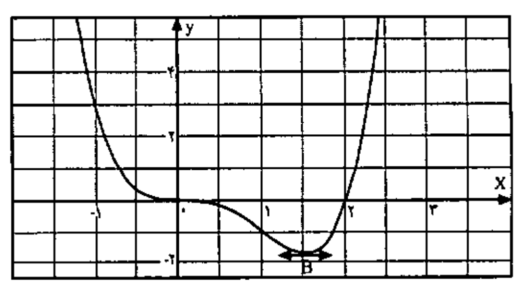
بنابراین، شروع منحنی از ناحیه‌ی دوم و پایان منحنی در ناحیه‌ی اول است.

گام دوم: معادله‌ی $y = 0$ را حل می‌کنیم تا محل تقاطع منحنی با محور xها به‌دست آید.

$$y = x^4 - 2x^3 = x^3(x-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

نقطه‌ی $x = 0$ ریشه‌ی مرتبه‌ی فرد معادله است، پس نقطه‌ی عطف مماس منحنی است و نقطه‌ی $x = 2$ ریشه‌ی ساده‌ی منحنی است و این نقطه‌ها محل تقاطع منحنی با محور xهاست.

گام سوم: منحنی از ناحیه‌ی دوم به صورت نزولی شروع می‌شود و باید در نقطه‌ی صفر عطف مماس داشته باشد و چون باید نقطه‌ی $x = 2$ را روی محور xها قطع کند، بنابراین در یک نقطه مانند B (نمودار ۲) می‌نیمم دارد که از این نقطه به بعد، نمودار منحنی صعودی است و با عبور از نقطه‌ی $x = 2$ در ناحیه‌ی اول ادامه پیدا می‌کند.



(نمودار۲)

۲) $y = -x(x-2)^2$

گام اول: چون

$$\lim_{x \to \pm\infty} -x(x-2)^2 = \lim_{x \to \pm\infty} -x^3 = \mp\infty$$

یعنی:
$$\begin{cases} x \to +\infty \Rightarrow y \to -\infty \\ x \to -\infty \Rightarrow y \to +\infty \end{cases}$$

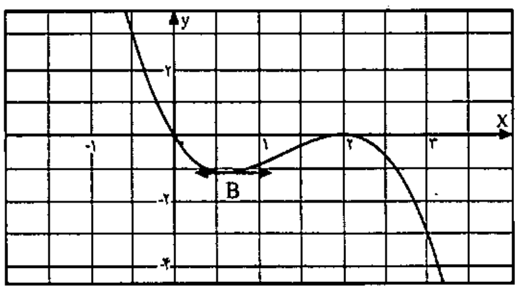
بنابراین، منحنی از ناحیه‌ی دوم شروع می‌شود و در ناحیه‌ی چهارم پایان می‌یابد.

گام دوم: معادله‌ی $y = 0$ را حل می‌کنیم تا محل تقاطع منحنی با محور xها به‌دست آید.

$$y = -x(x-2)^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 & \text{ریشه‌ی ساده} \\ x = 2 & \text{ریشه‌ی مضاعف} \end{cases}$$

که با توجه به ریشه‌های به‌دست آمده، منحنی از نقطه‌ی صفر می‌گذرد و در نقطه‌ی ۲ بر محور xها مماس می‌شود.

گام سوم: منحنی از ناحیه‌ی دوم نزول می‌کند و چون نقطه‌ی $x = 0$ ریشه‌ی ساده است، آن را قطع می‌کند و باید در نقطه‌ی $x = 2$ بر محور xها مماس شود. پس در نقطه‌ای مانند B (نمودار ۳) می‌نیمم پیدا می‌کند تا در نقطه‌ی $x = 2$ بر محور xها مماس شود.



(نمودار۳)

۳) $y = x^3(x-2)^2$

گام اول:

$$\lim_{x \to \pm\infty} x^3(x-2)^2 = \lim_{x \to \pm\infty} x^5 = \pm\infty$$

یعنی:
$$\begin{cases} x \to +\infty \Rightarrow y \to +\infty \\ x \to -\infty \Rightarrow y \to -\infty \end{cases}$$

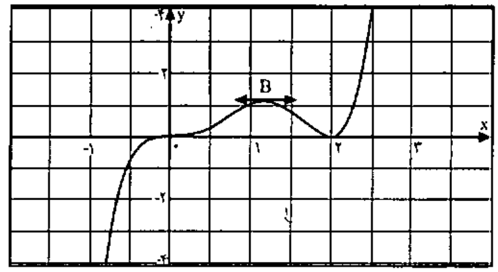
بنابراین شاخه‌ای از منحنی در ناحیه‌ی اول و شاخه‌ی دیگری از آن در ناحیه‌ی سوم قرار دارد.

گام دوم: معادله‌ی $y = 0$ را حل می‌کنیم تا محل تقاطع منحنی با محور xها به‌دست آید.

$$y = x^3(x-2)^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 & \text{نقطه‌ی عطف مماس} \\ x = 2 & \text{ریشه‌ی مضاعف} \end{cases}$$

که با توجه به ریشه‌های به دست آمده، منحنی در نقطه‌ی $x = 0$ عطف مماس دارد و در نقطه‌ی $x = 2$ بر محور xها مماس می‌شود.

گام سوم: منحنی از ناحیه‌ی چهارم صعود می‌کند و در نقطه‌ی $x = 0$ عطف مماس دارد و سپس در نقطه‌ای مانند B (نمودار ۴) ماکزیمم پیدا می‌کند و در نقطه‌ی $x = 2$ بر منحنی مماس می‌شود.



(نمودار۴)

آزمون‌ها

۱ . به ازای کدام مقادیر a ، منحنی به معادله‌ی

$$x = (\frac{1}{2}x + a)(x^2 - 4)$$

بر محور xها در یک نقطه مماس است؟ (سراسری_ ۸۴)

۱) ϕ ۲) $\{1\}$

۳) $\{-1,1\}$ ۴) $\{-2,2\}$

جواب: گزینه‌ی ۳ صحیح است . زیرا برای این‌که منحنی بر محور xها مماس باشد، باید معادله‌ی

$$y = (\frac{1}{2}x + a)(x^2 - 4) = (\frac{1}{2}x + a)(x - 2)(x + 2) = 0$$

ریشه‌ی مضاعف داشته باشد . بنابراین، ریشه‌های معادله‌ی $(x+2)(x-2) = 0$ باید در معادله‌ی $\frac{1}{2}x + a = 0$ صدق کنند تا یکی از ریشه‌ها مضاعف شوند .

$$x = 2 \Rightarrow \frac{1}{2}(2) + a = 0 \Rightarrow a = -1$$

$$x = -2 \Rightarrow \frac{1}{2}(-2) + a = 0 \Rightarrow a = 1$$

۲ . منحنی به معادله‌ی

$$y = (x - 1)(x^2 - ax + a) = 0$$

محور xها را فقط در یک نقطه قطع می‌کنند . مجموعه مقادیر a به کدام صورت است؟ (سراسری_ ۸۳)

۱) $-4 < a < 0$ ۲) $0 < a < 2$

۳) $0 < a < 4$ ۴) $a > 4$

جواب: گزینه‌ی ۳ صحیح است . با توجه به نکات ذکر شده، معادله‌ی $x^2 - ax + a = 0$ نباید ریشه داشته باشد، زیرا در غیر این‌صورت ممکن است یا ریشه‌ی مضاعف یا نقطه‌ی عطف یا نقطه‌ی تماس دیگری داشته باشد که با فرض در تناقض است .

$$x^2 - ax + a = 0 \xrightarrow{\Delta<0} a^2 - 4a < 0 \Rightarrow 0 < a < 4$$

۳ . اگر $f(x) = x^2 - 1$ ، نمودار تابع y=fof(x) با محور xها کدام وضعیت را دارد؟ (سراسری_ ۸۳)

۱) یک نقطه تلاقی _ دو نقطه‌ی تماس

۲) دو نقطه‌ی تلاقی _ یک نقطه‌ی تماس

۳) سه نقطه‌ی تلاقی _ فاقد نقطه‌ی تماس

۴) فاقد نقطه‌ی تلاقی _ دو نقطه‌ی تماس

جواب: گزینه‌ی ۲ صحیح است، زیرا:

$$f(f(x)) = (x^2 - 1)^2 - 1 = x^4 - 2x^2 + 1 - 1 = 0$$

$$x^2(x^2 - 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x^2 = 0 & \text{ریشه‌ی مضاعف} \\ x^2 = 2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2} & \text{ریشه‌ی ساده} \end{cases}$$

۴ . ریشه‌های حقیقی معادله‌ی $x^3 - 2x + 1 = 0$ چگونه‌اند؟ (سراسری_ ۸۳)

۱) ریشه‌ی مضاعف مثبت_ یک ریشه‌ی منفی

۲) ریشه‌ی مضاعف منفی_ یک ریشه‌ی مثبت

۳) یک ریشه‌ی مثبت_ دو ریشه‌ی منفی

۴) دو ریشه‌ی مثبت_ یک ریشه‌ی منفی

جواب: گزینه‌ی ۴ صحیح است، زیرا

$$x^3 - 2x + 1 = (x - 1)(x^2 + x - 1) = 0$$

در این‌صورت $x = 1$ یک ریشه‌ی ساده‌ی مثبت و معادله‌ی

$$x^2 + x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

یک ریشه‌ی ساده‌ی مثبت و یک ریشه‌ی ساده‌ی منفی دارد . در این صورت، معادله دارای دو ریشه‌ی ساده‌ی مثبت و یک ریشه‌ی ساده‌ی منفی است .

رسم نمودار توابع مثلثاتی

تذکر: توابع مثلثاتی را در دوره‌ی تناوبشان رسم می‌کنیم .

نمودار توابع زیر را رسم کنید .

۱) $y = \sin^2 x$

گام اول: چون تابع y=sinx از درجه‌ی دوم است، بنابراین ریشه‌های معادله‌ی $\sin x = 0$ نقاط مماس بر محور xها هستند . یعنی:

$$\sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi \Rightarrow x = 0, \pi, 2\pi, \cdots$$

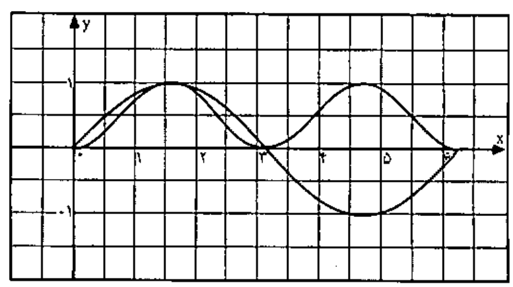
گام دوم: می‌دانیم $-1 \le \sin x \le 1$ ، بنابراین:

$$1)\ 0 \le \sin x \le 1 \Rightarrow \begin{cases} 0 \le \sin^2 x \le 1 \\ \sin^2 x \le \sin x \end{cases}$$

$$2)\ -1 \le \sin x \le 0 \Rightarrow 0 \le \sin^2 x \le 1$$

گام سوم: اگر $0 \le x \le \pi$ باشد، آن‌گاه $0 \le \sin x \le 1$ است. در این‌صورت نمودار $y = \sin^2 x$ ، غیر از سه نقطه‌ی $x = 0, \frac{\pi}{2}, \pi$ ، پایین‌تر از نمودار y=sinx قرار دارد (در آن سه نقطه با هم برابرند).

گام چهارم: چون دوره‌ی تناوب تابع $y = \sin^2 x$ برابر $T = \pi$ است، بنابراین در بازه‌ی $\pi \le x \le 2\pi$ نمودار تابع $y = \sin^2 x$ همان نمودار بازه‌ی $0 \le x \le \pi$ است (نمودار ۵).



(نمودار۵)

$$2)\ y = \sin^3 x$$

گام اول: چون توان sinx برابر ۳ است، بنابراین ریشه‌های sinx نقاط عطف مماس منحنی هستند. یعنی:

$$\sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi \Rightarrow x = 0, \pi, 2\pi, \cdots$$

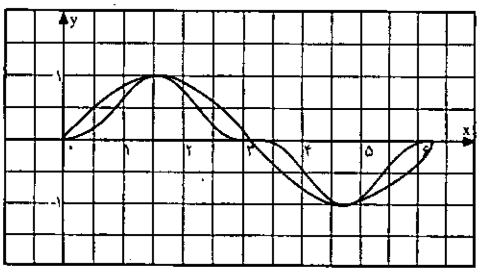
گام دوم: می‌دانیم: $-1 \le \sin x \le 1$ که:

$$1)\ -1 \le \sin x \le 0 \Rightarrow \sin^3 x \ge \sin x$$

$$2)\ 0 \le \sin x \le 1 \Rightarrow \sin^3 x \le \sin x$$

گام سوم: اگر $0 \le x \le \pi$ باشد، آن‌گاه $0 \le \sin x \le 1$ است. در این صورت نمودار $y = \sin^3 x$ ، غیر از سه نقطه‌ی $x = 0, \frac{\pi}{2}, \pi$ ، پایین‌تر از نمودار y=sinx قرار دارد (در آن سه نقطه با هم برابرند).

اگر $\pi \le x \le 2\pi$ باشد، آن‌گاه $-1 \le \sin x \le 0$ است. در این صورت نمودار $y = \sin^3 x$ ، غیر از سه نقطه‌ی $x = \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi$ ، بالاتر از نمودار y=sinx قرار دارد (در آن سه نقطه با هم برابرند) (نمودار ۶).



(نمودار۶)

$$3)\ y = \sqrt[3]{\sin x}$$

گام اول: ابتدا نمودار y=sinx را در بازه‌ی $[0, 2\pi]$ مشخص و سپس به کمک آن نمودار $y = \sqrt[3]{\sin x}$ را رسم می‌کنیم.

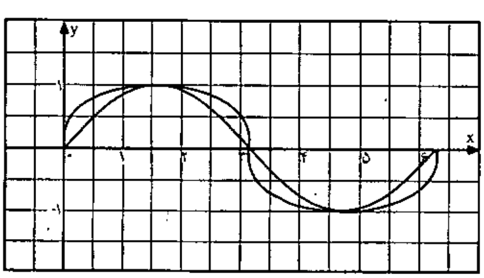
گام دوم: می‌دانیم $-1 \le \sin x \le 1$ ، بنابراین:

$$1)\ 0 \le \sin x \le 1 \Rightarrow \sqrt[3]{\sin x} \ge \sin x$$

$$2)\ -1 \le \sin x \le 0 \Rightarrow \sqrt[3]{\sin x} \le \sin x$$

گام سوم: اگر $0 \le x \le \pi$ باشد، آن‌گاه $0 \le \sin x \le 1$ است. در این صورت نمودار $y = \sin^3 x$ ، غیر از سه نقطه‌ی $x = 0, \frac{\pi}{2}, \pi$ ، پایین‌تر از نمودار y=sinx قرار دارد (در آن سه نقطه با هم برابرند).

اگر $\pi \le x \le 2\pi$ باشد، آن‌گاه $-1 \le \sin x \le 0$ است. در این صورت نمودار $y = \sin^3 x$ ، غیر از سه نقطه‌ی $x = \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi$ ، بالاتر از نمودار y=sinx قرار دارد (در آن سه نقطه با هم برابرند) (نمودار ۷).



(نمودار۷)

تمرین: نمودار توابع زیر را رسم کنید.

$1)\ y = x^3(x-2)^3$

$2)\ y = x^9 + x^7$

$3)\ y = x^4 - 2x^2$

$4)\ y = \sqrt[3]{\tan x}$

$5)\ y = \sin^2 x - \sin x$

$6)\ y = x.\sin$

برای دانش‌آموزان سال سوم و پیش‌دانشگاهی

بحث در وجود و علامت ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی سوم

قسمت ۲

● محمدهاشم رستمی

اشاره

بخشی از حل و بحث معادله‌ی درجه‌ی سوم را در شماره‌ی قبل دیدیم. اینک ادامه مطلب را در پی می‌آوریم.

مقدار $4p^3 + 27q^2$ را مبیّن معادله‌ی درجه‌ی سوم $x^3 + px + q = 0$ می‌نامند و با Δ نشان می‌دهند:

$$\Delta = 4p^3 + 27q^2$$

همان‌طوری که دیدیم:

۱. اگر $\Delta = 4p^3 + 27q^2 < 0$ باشد، معادله‌ی درجه‌ی سوم $x^3 + px + q = 0$ سه ریشه‌ی متمایز دارد.

۲. اگر $\Delta = 4p^3 + 27q^2 = 0$ باشد، معادله‌ی درجه‌ی سوم $x^3 + px + q = 0$ یک ریشه‌ی ساده و یک ریشه‌ی مضاعف دارد.

۳. اگر $\Delta = 4p^3 + 27q^2 > 0$ باشد، معادله‌ی درجه‌ی سوم $x^3 + px + q = 0$ تنها یک ریشه دارد.

بنابراین، تعداد ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی سوم $x^3 + px + q = 0$ را با استفاده از علامت مبین آن یعنی علامت $\Delta = 4p^3 + 27q^2$ می‌توان تعیین کرد.

نکته: برای تعیین علامت ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی سوم $x^3 + px + q = 0$، از علامت q استفاده می‌کنیم.

بنابراین، برای بحث در وجود و علامت ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی سوم $x^3 + px + q = 0$، باید $\Delta = 4p^3 + 27q^2$ و q را تعیین علامت کنیم.

بحث‌های انجام شده تا کنون را می‌توان به صورت زیر خلاصه کرد:

- $p > 0 \Rightarrow$ معادله تنها یک ریشه دارد $\Rightarrow$
  - $q > 0$: معادله یک ریشه‌ی منفی دارد.
  - $q < 0$: معادله یک ریشه‌ی مثبت دارد.
- $p < 0$:
  - $\Delta = 4p^3 + 27q^2 < 0 \Rightarrow$ معادله سه ریشه‌ی متمایز دارد. $\Rightarrow$
    - $q > 0$: یک ریشه منفی و دو ریشه مثبت است.
    - $q < 0$: یک ریشه مثبت و دو ریشه منفی است.
  - $\Delta = 4p^3 + 27q^2 = 0 \Rightarrow$ معادله یک ریشه‌ی ساده و یک ریشه‌ی مضاعف دارد. $\Rightarrow$
    - $q > 0$: ریشه‌ی ساده منفی و ریشه‌ی مضاعف مثبت است.
    - $q < 0$: ریشه‌ی ساده مثبت و ریشه‌ی مضاعف منفی است.
  - $\Delta = 4p^3 + 27q^2 > 0 \Rightarrow$ معادله تنها یک ریشه دارد. $\Rightarrow$
    - $q > 0$: یک ریشه‌ی منفی دارد.
    - $q < 0$: یک ریشه‌ی مثبت دارد.

نکته‌ی مهم: در حالتی که معادله سه ریشه‌ی متمایز دارد، برای تعیین ریشه‌های معادله فرض می‌کنیم $x = \rho\cos\theta$ باشد که در آن: $\rho = 2\sqrt{\frac{-p}{3}}$ و $\cos 3\theta = \frac{3q}{2p\sqrt{\frac{-p}{3}}}$ است.

باید توجه داشت که برای θ بی‌شمار جواب به دست می‌آید، اما برای $\cos\theta$ تنها سه مقدار به‌دست می‌آید. پس از محاسبه‌ی ρ و $\cos\theta$، آن‌ها را در رابطه‌ی $x = \rho\cos\theta$ قرار می‌دهیم تا x_1، x_2 و x_3 جواب‌های معادله به دست آیند. اینک به چند مثال توجه کنید:

مثال۱. بدون حل کردن معادله‌های زیر، تعداد جواب‌های هریک از آن‌ها را تعیین کنید:

الف) $x^3 + 2x + 4 = 0$

ب) $x^3 + 5x - 12 = 0$

پ) $x^3 - 3x + 5 = 0$

ت) $x^3 - 5x - 1 = 0$

ث) $x^3 - 3x + 2 = 0$

ج) $2x^3 - x^2 + 5 = 0$

چ) $3x^3 + 2x^2 - 4x + 7 = 0$

حل: داریم:

الف) در این معادله $p = 2 > 0$ است، پس این معادله تنها یک ریشه دارد.

ب) در این معادله نیز $p = 5 > 0$ است. پس این معادله نیز تنها یک ریشه دارد.

پ) در این معادله $p = -3 < 0$ است، بنابراین برای تعیین تعداد جواب‌ها باید علامت $\Delta = 4p^3 + 27q^2$ را تعیین کنیم. داریم:

$$p = -3,\ q = 5,\ \Delta = 4p^3 + 27q^2 = 4(-3)^3 + 27(5)^2$$
$$\Rightarrow \Delta = -108 + 675 = 467 > 0$$

پس این معادله تنها یک ریشه دارد.

ت) در این معادله نیز $p = -5 < 0$ است، پس باید علامت $\Delta = 4p^3 + 27q^2$ را تعیین کنیم. داریم:

$$p = -5, q = -1, \Delta = 4p^3 + 27q^2 = 4(-5)^3 + 27(-1)^2$$
$$\Rightarrow \Delta = -500 + 27 = -473 < 0$$

یعنی این معادله سه ریشه‌ی متمایز دارد.

ث) در این معادله نیز $p = -3 < 0$ است، بنابراین باید مبین آن را تعیین علامت کنیم. داریم:

$$p = -3, q = 2, \Delta = 4p^3 + 27q^2 = 4(-3)^3 + 27(-2)^2$$
$$= -108 + 108 \Rightarrow \Delta = 4p^3 + 27q^2 = 0$$

پس این معادله یک ریشه‌ی مضاعف و یک ریشه‌ی ساده دارد.

ج) معادله‌ی $2x^3 - x^2 + 5 = 0$ را نخست باید به صورت $X^3 + PX + q = 0$ درآوریم. چون ضریب x در این معادله صفر است، فرض می‌کنیم: $x = \frac{1}{X}$. خواهیم داشت:

$$2(\frac{1}{X})^3 - (\frac{1}{X})^2 + 5 = 0 \Rightarrow \frac{2}{X^3} - \frac{1}{X^2} + \frac{5}{1} = 0$$
$$\Rightarrow \frac{2 - X + 5X^3}{X^3} = 0 \Rightarrow 2 - X + 5X^3 = 0$$
$$\Rightarrow 5X^3 - X + 2 = 0 \Rightarrow X^3 - \frac{1}{5}X + \frac{2}{5} = 0$$
$$p = -\frac{1}{5}, q = \frac{2}{5}, \Delta = 4p^3 + 27q^2 = 4(-\frac{1}{5})^3 + 27(\frac{2}{5})^2$$
$$= \frac{-4}{125} + \frac{108}{25} \Rightarrow \Delta = \frac{536}{125} > 0 \Rightarrow$$

پس معادله‌ی $X^3 - \frac{1}{5}X + \frac{2}{5} = 0$ تنها یک ریشه دارد. در نتیجه، معادله‌ی داده شده، یعنی معادله‌ی $2x^3 - x^2 + 5 = 0$ نیز تنها یک ریشه دارد.

چ) معادله‌ی درجه‌ی سوم کامل $2x^3 + 6x^2 - 4x + 7 = 0$ را باید به صورت معادله‌ی درجه‌ی سوم ناقص $X^3 + Px + q = 0$ درآوریم. برای این کار فرض می‌کنیم $x = X - \frac{b}{3a}$. داریم:

$$a = 2, b = 6, x = X - \frac{b}{3a} = X - \frac{6}{3 \times 2} = X - \frac{6}{6} = X - 1$$

$$\Rightarrow x = X - 1 \xrightarrow{\text{در معادله‌ی داده شده}} 2(X-1)^3 + 6(X-1)^2 - 4(X-1) + 7 = 0$$
$$\Rightarrow 3(X^3 - 3X^2 + 3X - 1) + 6(X^2 - 2X + 1) - 4X + 4 + 7 = 0$$
$$2X^3 - 6X^2 + 6X - 2 + 6X^2 - 12X + 6 - 4X + 11 = 0$$
$$\Rightarrow 2X^3 - 10X + 9 = 0 \Rightarrow X^3 - 5X + \frac{9}{2} = 0$$

$$p=-5,\ q=+\frac{9}{2},\ \Delta=4p^3+27q^2=4(-5)^3+27\left(\frac{9}{2}\right)^2$$

$$=\Delta=-500+\frac{2187}{4}=\frac{187}{4}>0$$

پس معادله‌ی $X^3-5X+\frac{9}{2}=0$ تنها یک ریشه دارد و در نتیجه، معادله‌ی $2x^3+6x^2-4x+7=0$ نیز تنها یک ریشه دارد.

مثال۲. تعداد ریشه‌ها و علامت ریشه‌های معادله‌های زیر را بدون حل کردن معادله، تعیین کنید.

الف) $x^3+7x+2=0$

ب) $x^3+5x-3=0$

پ) $x^3-2x+4=0$

ت) $x^3-3x-1=0$

ث) $2x^3+5x^2-1=0$

ج) $-3x^3+x^2-x+2=0$

حل. برای بحث در وجود و علامت ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی سوم $x^3+px+q=0$ باید $\Delta=4p^3+27q^2$ و q را تعیین علامت کنیم. داریم:

الف) $x^3+7x+2=0\ ,\ p=7\ ,\ q=2$

$$\Delta=4p^3+27q^2=4(7)^3+27(2)^2$$

$$=4\times 343+108=1480>0$$

پس این معادله تنها یک ریشه دارد که چون $q=2>0$، این ریشه منفی است.

نکته: در این معادله چون $p=7>0$ است، این معادله یک ریشه دارد و نیازی به محاسبه‌ی $\Delta=4p^3+27q^2$ نیست. علامت ریشه هم از روی علامت q مشخص می‌شود.

ب) در معادله‌ی $x^3+5x-3=0$ نیز، چون $p=5>0$ است، این معادله یک ریشه دارد که چون $q=-3<0$، این ریشه مثبت است.

پ) در معادله‌ی $x^3-2x+4=0$، $p=-2<0$ است و برای تعیین تعداد ریشه‌ها، باید $\Delta=4p^3+27q^2$ را تعیین کنیم. داریم:

$$p=-2\ ,\ q=4$$

$$\Delta=4p^3+27q^2=4(-2)^3+27(4)^2=400>0$$

پس این معادله تنها یک ریشه دارد که چون $q=4>0$، این ریشه منفی است.

ت)

$$x^3-3x-1=0\ ,\ p=-3\ ,\ q=-1\ ,\ \Delta=4p^3+27q^2$$

$$\Rightarrow\Delta=4(-3)^3+27(-1)^2=-108+27=-81<0$$

یعنی این معادله سه ریشه‌ی متمایز دارد و چون $q=-1<0$، یک ریشه مثبت و دو ریشه منفی هستند.

ث) معادله‌ی $2x^3+5x^2-1=0$ را با تغییر متغیر $x=\frac{1}{X}$ به صورت معادله‌ی درجه‌ی سوم $x^3+px+q=0$ درمی‌آوریم. داریم:

$$2\left(\frac{1}{X}\right)^3+5\left(\frac{1}{X}\right)^2-1=0\Rightarrow\frac{2}{X^3}+\frac{5}{X^2}-1=0$$

$$\Rightarrow\frac{2+5X-X^3}{X^3}=0\Rightarrow 2+5X-X^3=0$$

$$\Rightarrow X^3-5x-2=0\ ,\ p=-5\ ,\ q=-2$$

$$\Delta=4p^3+27q^2=4(-5)^3+27(-2)^2$$

$$=-500+108=-392<0$$

یعنی این معادله سه ریشه‌ی متمایز دارد که چون $q=-2<0$، یک ریشه مثبت و دو ریشه منفی هستند. بدیهی است که علامت ریشه‌های معادله‌ی $X^3-5X-2=0$، همان علامت ریشه‌های معادله‌ی $2x^3+5x^2-1=0$ است.

ج) معادله‌ی $-3x^3+x^2-x+2=0$ را با تغییر متغیر $x=X-\frac{b}{3a}$ به معادله‌ی درجه‌ی سوم به صورت $X^3+pX+q=0$ تبدیل می‌کنیم. داریم:

$$a=-3\ ,\ b=1\ ,\ x=X-\frac{b}{3a}=X-\frac{1}{-9}=X+\frac{1}{9}$$

$$x=X+\frac{1}{9}\xrightarrow{\text{در معادله‌ی داده شده}}-3\left(X+\frac{1}{9}\right)^3+\left(X+\frac{1}{9}\right)^2-\left(X+\frac{1}{9}\right)+2=0$$

$$-3\left(X^3+\frac{1}{3}X^2+\frac{1}{27}X+\frac{1}{729}\right)+\left(X^2+\frac{2}{9}X+\frac{1}{81}\right)-X-\frac{1}{9}+2=0$$

$$\Rightarrow -3X^3-X^2-\frac{1}{9}X-\frac{1}{243}+X^2+\frac{2}{9}X+\frac{1}{81}-X-\frac{1}{9}+2=0$$

$$\Rightarrow -3X^3-\frac{8}{9}X+\frac{29}{27}=0\Rightarrow X^3+\frac{8}{27}X-\frac{29}{81}=0$$

در این معادله $p=\frac{8}{27}>0$، است. پس این معادله تنها یک ریشه منفی است.

ریشه دارد که چون $q = -\frac{۲۹}{۸۱} < ۰$، آن‌گاه این ریشهٔ مثبت است. در نتیجه، ریشه‌ی معادله داده شده نیز مثبت است؛ زیرا: $x = X + \frac{۱}{۹}$.

مثال۳. معادله‌های زیر را حل کنید:

الف) $x^۳ + ۴x - \frac{۳۷}{۲۷} = ۰$

ب) $x^۳ + ۳\sqrt[۳]{۳}x + ۲ = ۰$

پ) $x^۳ - ۱۲x + ۱۶ = ۰$

ت) $x^۳ - ۳x + \sqrt{۲} = ۰$

ث) $۲x^۳ - ۶x^۲ + x - ۲ = ۰$

ج) $-۴x^۳ + x^۲ + \frac{۱}{۴} = ۰$

حل:

الف) در معادله‌ی $x^۳ + ۴x - \frac{۳۷}{۲۷} = ۰$، $p = ۴ > ۰$ است. پس این معادله تنها یک ریشه دارد که آن را از دستور کاردان محاسبه می‌کنیم. داریم:

$$p = ۴, q = \frac{-۳۷}{۲۷},$$

$$x = \sqrt[۳]{\frac{-q}{۲} + \sqrt{\frac{q^۲}{۴} + \frac{p^۳}{۲۷}}} + \sqrt[۳]{\frac{-q}{۲} - \sqrt{\frac{q^۲}{۴} + \frac{p^۳}{۲۷}}}$$

$$\Rightarrow x = \sqrt[۳]{\frac{۳۷}{۵۴} + \sqrt{\frac{۱۳۶۹}{۲۹۱۶} + \frac{۶۴}{۲۷}}} + \sqrt[۳]{\frac{۳۷}{۵۴} - \sqrt{\frac{۱۳۶۹}{۲۹۱۶} + \frac{۶۴}{۲۷}}}$$

$$\Rightarrow x = \sqrt[۳]{\frac{۳۷}{۵۴} + \sqrt{\frac{۸۲۸۱}{۲۹۱۶}}} + \sqrt[۳]{\frac{۳۷}{۵۴} - \sqrt{\frac{۸۲۸۱}{۲۹۱۶}}}$$

$$\Rightarrow x = \sqrt[۳]{\frac{۳۷}{۵۴} + \frac{۹۱}{۵۴}} + \sqrt[۳]{\frac{۳۷}{۵۴} + \frac{۹۱}{۵۴}} = \sqrt[۳]{\frac{۱۲۸}{۵۴}} + \sqrt[۳]{\frac{-۵۴}{۵۴}}$$

$$\Rightarrow x = \sqrt[۳]{\frac{۶۴}{۲۷}} + \sqrt[۳]{-۱} = \frac{۴}{۳} - ۱ = \frac{۱}{۳} \Rightarrow x = \frac{۱}{۳}$$

یعنی تنها ریشه‌ی این معادله $x = \frac{۱}{۳}$ است.

ب) در این معادله نیز $p = ۳\sqrt[۳]{۳} > ۰$ است. پس تنها یک ریشه دارد که برای حل آن از دستور کاردان استفاده می‌کنیم. داریم:

$$x^۳ + ۳\sqrt[۳]{۳}x + ۲ = ۰ \Rightarrow p = ۳\sqrt[۳]{۳}, q = ۲$$

$$x = \sqrt[۳]{\frac{-q}{۲} + \sqrt{\frac{q^۲}{۴} + \frac{p^۳}{۲۷}}} + \sqrt[۳]{\frac{-q}{۲} - \sqrt{\frac{q^۲}{۴} + \frac{p^۳}{۲۷}}}$$

$$\Rightarrow x = \sqrt[۳]{\frac{-۲}{۲} + \sqrt{\frac{۴}{۴} + \frac{۸۱}{۲۷}}} + \sqrt[۳]{\frac{-۲}{۲} - \sqrt{\frac{۴}{۴} + \frac{۸۱}{۲۷}}}$$

$$\Rightarrow x = \sqrt[۳]{-۱ + \sqrt{۱ + ۳}} + \sqrt[۳]{-۱ - \sqrt{۱ + ۳}} = \sqrt[۳]{-۱ + ۲} + \sqrt[۳]{-۱ - ۲}$$

$$\Rightarrow x = \sqrt[۳]{۱} + \sqrt[۳]{-۳} \Rightarrow x = ۱ - \sqrt[۳]{۳}$$

پ) در این معادله $p = -۱۲ < ۰$ است. پس باید علامت $\Delta = ۴p^۳ + ۲۷q^۲$ را تعیین کنیم. داریم:

$$x^۳ - ۱۲x + ۱۶ = ۰ \Rightarrow p = -۱۲, q = ۱۶, \Delta = ۴p^۳ + ۲۷q^۲$$

$$\Rightarrow \Delta = ۴(-۱۲)^۳ + ۲۷(۱۶)^۲ = -۶۹۱۲ + ۶۹۱۲ = ۰$$

یعنی این معادله یک ریشه‌ی مضاعف و یک ریشه‌ی ساده دارد که از دستورهای زیر به‌دست می‌آیند:

$$\text{ریشه‌ی مضاعف} = x_۱ = x_۲ = \sqrt[۳]{\frac{q}{۲}} = \sqrt[۳]{\frac{۱۶}{۲}} = \sqrt[۳]{۸} = ۲$$

$$\Rightarrow x_۱ = x_۲ = ۲$$

$$\text{ریشه‌ی ساده} = x_۳ = -۲\sqrt[۳]{\frac{q}{۲}} = -۲(۲) = -۴ \Rightarrow x_۳ = -۴$$

ت) در معادله‌ی $x^۳ - ۳x + \sqrt{۲} = ۰$، $p = -۳ < ۰$ است. پس برای تعیین تعداد ریشه‌های آن باید علامت $\Delta = ۴p^۳ + ۲۷q^۲$ را تعیین کنیم. داریم:

$$p = -۳, q = \sqrt{۲}, \Delta = ۴p^۳ + ۲۷q^۲ = ۴(-۳)^۳ + ۲۷(\sqrt{۲})^۲$$

$$\Rightarrow \Delta = -۱۰۸ + ۵۴ = -۵۴ < ۰$$

نتیجه می‌گیریم که این معادله سه ریشه دارد. برای حل آن فرض می‌کنیم: $x = \rho\cos\theta$ باشد، با توجه به این‌که: $\rho = ۲\sqrt{\frac{-p}{۳}}$ و $\cos ۳\theta = \frac{۳q}{۲p\sqrt{\frac{-p}{۳}}}$ است. خواهیم داشت:

$$\rho = ۲\sqrt{\frac{-p}{۳}} = ۲\sqrt{\frac{+۳}{۳}} = ۲ \times ۱ = ۲ \Rightarrow \rho = ۲$$

$$\cos ۳\theta = \frac{۳q}{۲p\sqrt{\frac{-p}{۳}}} = \frac{۳\sqrt{۲}}{۲(-۳)\sqrt{\frac{۳}{۳}}} = \frac{۳\sqrt{۲}}{-۶} = \frac{-\sqrt{۲}}{۲} = \cos\frac{۳\pi}{۴}$$

$$\cos ۳\theta = \cos\frac{۳\pi}{۴} \Rightarrow ۳\theta = ۲k\pi \pm \frac{۳\pi}{۴} \Rightarrow \theta = \frac{۲k\pi}{۳} \pm \frac{\pi}{۴}$$

$$\Rightarrow \cos\theta = \cos(\frac{2k\pi}{3} \pm \frac{\pi}{4}), k = 0 \Rightarrow \cos\theta = \cos(\pm\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$k = 1 \Rightarrow \cos\theta = \cos(\frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{4}) = \cos\frac{11\pi}{12} = \frac{-\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

$$, \cos\theta = \cos(\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{4}) = \cos\frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

$$k = 2 \Rightarrow \cos\theta = \cos(\frac{4\pi}{3} \pm \frac{\pi}{4})$$

$$\Rightarrow \cos\theta = \cos\frac{19\pi}{12} = \cos(\frac{-5\pi}{12})$$

$$\Rightarrow \cos\theta = \cos\frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$ این جواب برای $\cos\theta$ تکراری است

$$\cos\theta = \cos(\frac{4\pi}{3} - \frac{\pi}{4}) = \cos\frac{19\pi}{12} = -\cos\frac{7\pi}{12} = \cos\frac{5\pi}{12}$$

$$= \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$ تکراری است

$$k = 3 \Rightarrow \cos\theta = \cos(2\pi \pm \frac{\pi}{4}) = \cos(\pm\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

تکراری است

اگر به k مقدارهای دیگری از مجموعه‌ی عددهای صحیح را نسبت دهیم، خواهیم دید که برای $\cos\theta$ تنها همان سه مقدار $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ، $-\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$ و $\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$ به دست می‌آید. بنابراین داریم:

$$x = \rho\cos\theta \Rightarrow x_1 = 2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

$$x_2 = 2 \times -\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} = -\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2}$$

$$x_3 = 2 \times \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}$$

ث) نخست باید معادله‌ی درجه‌ی سوم کامل $2x^3 - 6x^2 + x - 2 = 0$ را به معادله‌ی درجه‌ی سوم ناقص به صورت $X^3 + pX + q = 0$ تبدیل کنیم. برای این کار فرض می‌کنیم: $x = X - \frac{b}{3a}$. داریم:

$$a = 2 \ , \ b = -6 \Rightarrow x = X - \frac{b}{3a} = X - \frac{-6}{6} = X + 1 \Rightarrow x = X + 1$$

$$x = X + 1 \xrightarrow{\text{در معادله‌ی داده شده}} 2(X+1)^3 - 6(X+1)^2 + (X+1) - 2 = 0$$

$$\Rightarrow 2X^3 + 6X^2 + 6X + 2 - 6X^2 - 12X - 6 + X + 1 - 2 = 0$$

$$\Rightarrow 2X^3 - 5X - 6 = 0 \Rightarrow X^3 - \frac{5}{2}X - 3 = 0 \ , \ p = -\frac{5}{2} \ , \ q = -3$$

$$\Delta = 4p^3 + 27q^2 = 4(-\frac{5}{2})^3 + 27(-3)^2$$

$$= -\frac{125}{2} + 243 = +\frac{361}{2} > 0$$

یعنی این معادله تنها یک ریشه دارد که اندازه‌ی آن را از دستور کاردان محاسبه می‌کنیم. داریم:

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

$$\Rightarrow x = \sqrt[3]{\frac{3}{2} + \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{-27}{27}}} + \sqrt{\frac{3}{2} - \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{-27}{27}}} = \sqrt[3]{\frac{3}{2} + \sqrt{\frac{5}{4}}}$$

$$\Rightarrow x = \sqrt[3]{\frac{3}{2} + \sqrt{\frac{5}{4}}} + \sqrt[3]{\frac{3}{2} - \sqrt{\frac{5}{4}}} \Rightarrow x = \sqrt[3]{\frac{3 + \sqrt{5}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{3 - \sqrt{5}}{2}}$$

ج) معادله‌ی $-4x^3 + x^2 + \frac{1}{4} = 0$ را نیز باید به معادله‌ی درجه‌ی سوم به صورت $X^3 + pX + q = 0$ تبدیل کنیم. برای این کار، چون معادله‌ی داده شده شامل جمله‌ی درجه‌ی اول نسبت به x نیست، فرض می‌کنیم: $x = \frac{1}{X}$.

داریم:

$$-4(\frac{1}{X})^3 + (\frac{1}{X})^2 + \frac{1}{4} = 0 \Rightarrow \frac{-4}{X^3} + \frac{1}{X^2} + \frac{1}{4} = 0$$

$$\frac{-16 + 4X + X^3}{4X^3} = 0 \Rightarrow X^3 + 4X - 16 = 0 \Rightarrow p = 4 \ , \ q = -16$$

چون $p = 4 > 0$ ، این معادله تنها یک ریشه دارد که از دستور کاردان محاسبه می‌شود: $X = 2$. پس $x = \frac{1}{X} = \frac{1}{2}$ ؛ یعنی جواب معادله‌ی داده شده $x = \frac{1}{2}$ است.

محاسبه‌ی حد مجموع به کمک انتگرال معیّن



(قسمت ۱)

● احسان یارمحمدی

برای محاسبه‌ی «حد»[1]، روش‌های متفاوتی وجود دارند؛ مانند: هم‌ارزی‌ها که شامل هم‌ارزی‌های جبری[2]، مثلثاتی[3] و رادیکالی می‌شوند، رفع ابهام‌ها شامل رفع ابهام از حالت‌های $\frac{0}{0}$ و $\frac{\infty}{\infty}$ که بنابر قاعده‌ی هوپیتال[4] میسرند، رفع ابهام از حالت $\infty \times 0$ و رفع ابهام از حالت $\infty - \infty$ و... اما محاسبه‌ی پاره‌ای از حدها که خود را در قالب مجموع‌های خاصی مطرح می‌سازند، با استفاده از روش‌های متعارف و کلاسیکی که در محاسبه‌ی حدود وجود دارد، میسر نیست. به همین دلیل، در این مقاله محاسبه‌ی این گونه حدود را مورد بحث و بررسی قرار می‌دهیم.

فرض کنید که در یک برگه‌ی امتحانی این سؤال آمده است: حاصل $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1+2+3+\cdots+n}{n^2}$ را به دست آورید. بررسی کنید، آیا می‌توان حد بالا را به این صورت محاسبه کرد:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1+2+3+\cdots+n}{n^2} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\frac{3}{n^2}+\cdots+\frac{n}{n^2}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)+\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{n^2}\right)+\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{n^2}\right)+\cdots+\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2}\right)$$

$$= 0+0+0+\cdots+0=0$$

یا می‌توان، با استفاده از رابطه‌ی $1+2+3+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$ که به ازای هر عدد طبیعی n برقرار است (درستی این رابطه را می‌توانید با استقرا[5] روی n بررسی کنید)، و با جای‌گذاری آن به صورت زیر، حد را محاسبه کرد:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1+2+3+\cdots+n}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+n}{2n^2} = \frac{1}{2}$$

در هر مورد به دقت فکر کنید و پاسخ(های) خود را با دلایل منطقی ارائه دهید.

اکنون در این قسمت روشی را در کنار تلفیق با قضیه‌ای کلی پیرامون آن مطرح می‌کنیم که با استناد به آن می‌توانیم پی‌ببریم، کدام‌یک از راه‌حل‌های ارائه‌شده برای سؤال بالا صحیح و کدام‌یک ناصحیح است.

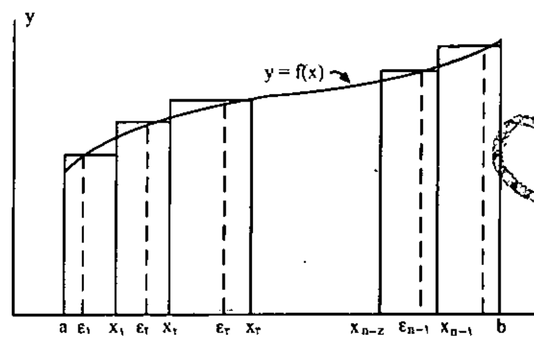
قضیه: اگر $f(x)$ در بازه $[a,b]$ پیوسته[6] باشد، همواره:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a+\frac{k(b-a)}{n}\right) = \int_a^b f(x)dx$$

برهان: چون $f(x)$ در بازه $[a,b]$ پیوسته است، حد

وجود دارد و به روش تقسیم به زیر بازه‌ها وابسته نیست.

(چون $f(x)$ در بازه $[a,b]$ پیوسته است، بنابراین $\int_a^b f(x)dx$ وجود دارد.) اکنون بازه $[a,b]$ را به n قسمت مساوی به طول $x_i - x_{i+1} = \Delta x_i = \Delta x = \frac{b-a}{n}$ تقسیم می‌کنیم (نمودار زیر).



فرض می‌کنیم که $\varepsilon_k = a + \frac{k(b-a)}{n}$ & $k = 1,2,3,\cdots,n$

در این صورت داریم:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(\varepsilon_k)\Delta x_k \lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f(a+\frac{k(b-a)}{n})$$
$$=\int_a^b f(x)dx$$

درواقع، اگر دنباله‌ی[7] $\{x_n\}$ به این شرح مفروض باشد:

$$x_n = \frac{b-a}{n}(f(a+\frac{b-a}{n}) + f(a+\frac{2(b-a)}{n})+\cdots$$
$$+f(a+\frac{n(b-a)}{n}))$$

می‌توان با به‌دست آوردن ضابطه‌ی $f(x)$ و محاسبه‌ی مقدار «انتگرال معین»[8] $\int_a^b f(x)dx$ حد دنباله‌ی $\{x_n\}$ را تعیین کرد.

البته دنباله‌ی $\{x_n\}$ تا اندازه‌ی زیادی به $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ وابسته است.

مراحل محاسبه‌ی حد مجموع به کمک انتگرال معین

۱. عبارت تحت علامت حد (lim) را تا اندازه‌ی ممکن ساده می‌کنیم تا بتوانیم، از آن a و b ایده‌آل را به‌دست آوریم و با توجه به آن‌ها $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ مطلوب را تعیین کنیم.

۲. با توجه به $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ تعیین شده، دنباله‌ی $\{x_n\}$ مورد نظر را مشخص می‌کنیم.

۳. از مقایسه‌ی دنباله‌ی $\{x_n\}$ به‌دست آمده با دنباله‌ی $\{x_n\}$ که در حالت کلی در قضیه آمده است (برای هر دو دنباله $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ یکسان است)، ضابطه‌ی $f(x)$ را تشکیل می‌دهیم.

۴. انتگرال معین $\int_a^b f(x)dx$ را محاسبه می‌کنیم، تا مقدار حد دنباله‌ی $\{x_n\}$ را که درواقع محاسبه‌ی مقدار یا حد مجموع یک مجموع جزئی[9] است، به‌دست آوریم.

اکنون به همان سؤالی که فرض شد در برگه‌ی امتحانی آمده است، برمی‌گردیم و به محاسبه‌ی آن به کمک تشکیل یک انتگرال معین می‌پردازیم.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+3+\cdots+n}{n^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}.\frac{1+2+3+\cdots+n}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}.$$
$$(\frac{1}{n}+\frac{2}{n}+\frac{3}{n}+\cdots+\frac{n}{n})$$

با فرض این‌که $b=1$ و $a=0$ اختیار شوند، $\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{1}{n}$ است. بنابراین:

$$\{x_n\} = \frac{1}{n}.(\frac{1}{n}+\frac{2}{n}+\frac{3}{n}+\cdots+\frac{n}{n}) \qquad (*)$$

از مقایسه‌ی (*) با

$$\{x_n\} = \frac{1}{n}.(f(\frac{1}{n})+f(\frac{2}{n})+f(\frac{3}{n})+\cdots+f(\frac{n}{n}))$$ داریم:

$$f(\frac{k}{n}) = \frac{k}{n} \overset{x=\frac{k}{n}}{\Rightarrow} f(x) = x$$

بنابراین:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+3+\cdots+n}{n^2} = \int_0^1 xdx = \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}$$

حال انتظار می‌رود که بتوانید دلیل روشنی را بیان کنید، برای این‌که چرا روشی که به جواب صفر برای محاسبه‌ی حد $\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+3+\cdots+n}{n^2}$ (که در ابتدای مقاله مطرح شد) می‌انجامد، نادرست است.

محاسبه‌ی این نمونه از حدود، به علت داشتن ویژگی‌های منحصر به خود، مانند نظیر کردن یک انتگرال معین متناظر با یک مجموع جزئی و محاسبه‌ی این انتگرال معین با استفاده از

روش‌های انتگرال‌گیری[۱۰]، از اهمیت خاصی برخوردار است. به همین سبب، در این قسمت به ارائه‌ی مثال‌های متنوعی در این رابطه در قالب آزمون چهار گزینه‌ای و مسئله می‌پردازیم.

آزمون ۱. حاصل حد زیر کدام یک از گزینه‌های زیر است؟

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\cdots+\frac{1}{n+n}\right)$$

۱) صفر　　　۲) $\ln(\frac{1}{2})$

۳) $+\infty$　　　۴) $\ln(2)$

جواب: گزینه‌ی (۴) صحیح است:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\cdots+\frac{1}{n+n}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n(1+\frac{1}{n})}+\frac{1}{n(1+\frac{2}{n})}+\frac{1}{n(1+\frac{3}{n})}+\cdots+\frac{1}{n(1+\frac{n}{n})}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}.\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}+\frac{1}{1+\frac{2}{n}}+\frac{1}{1+\frac{3}{n}}+\cdots+\frac{1}{1+\frac{n}{n}}\right)$$

با فرض این‌که $b=1$ و $a=0$ اختیار شوند، $\Delta x=\frac{b-a}{n}=\frac{1}{n}$ است. بنابراین:

$$x_n=\frac{1}{n}.\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}+\frac{1}{1+\frac{2}{n}}+\frac{1}{1+\frac{3}{n}}+\cdots+\frac{1}{1+\frac{n}{n}}\right)\quad(*)$$

از مقایسه‌ی (*) با

$\{x_n\}=\frac{1}{n}\left(f(\frac{1}{n})+f(\frac{2}{n})+f(\frac{3}{n})+\cdots+f(\frac{n}{n})\right)$ داریم:

$$f(\frac{k}{n})=\frac{1}{1+\frac{k}{n}}\overset{x=\frac{k}{n}}{\Rightarrow}f(x)=\frac{1}{1+x}$$

بنابراین:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\cdots+\frac{1}{n+n}\right)=\int_0^1\frac{dx}{1+x}=\ln(1+x)\Big|_0^1=\ln(2)$$

آزمون ۲. حاصل حد زیر کدام یک از گزینه‌های زیر است؟

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2+1^2}+\frac{n}{n^2+2^2}+\frac{n}{n^2+3^2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n^2}\right)$$

۱) $\frac{\pi}{3}$　　　۲) $\frac{\pi}{4}$

۳) $\frac{\pi}{6}$　　　۴) $\frac{\pi}{2}$

جواب: گزینه‌ی (۲) صحیح است.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2+1^2}+\frac{n}{n^2+2^2}+\frac{n}{n^2+3^2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n^2}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2(1+\frac{1^2}{n^2})}+\frac{n}{n^2(1+\frac{2^2}{n^2})}+\frac{n}{n^2(1+\frac{3^2}{n^2})}+\cdots+\frac{n}{n^2(1+\frac{n^2}{n^2})}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}.\left(\frac{1}{1+\frac{1^2}{n^2}}+\frac{1}{1+\frac{2^2}{n^2}}+\frac{1}{1+\frac{3^2}{n^2}}+\cdots+\frac{1}{1+\frac{n^2}{n^2}}\right)$$

با فرض این‌که $b=1$ و $a=0$ اختیار شوند، $\Delta x=\frac{b-a}{n}=\frac{1}{n}$ است. بنابراین:

$$x_n=\frac{1}{n}.\left(\frac{1}{1+\frac{1^2}{n^2}}+\frac{1}{1+\frac{2^2}{n^2}}+\frac{1}{1+\frac{3^2}{n^2}}+\cdots+\frac{1}{1+\frac{n^2}{n^2}}\right)\quad(*)$$

از مقایسه‌ی (*) با

$\{x_n\}=\frac{1}{n}\left(f(\frac{1}{n})+f(\frac{2}{n})+f(\frac{3}{n})+\cdots+f(\frac{n}{n})\right)$ داریم:

$$f(\frac{k}{n})=\frac{1}{1+\frac{k^2}{n^2}}=\frac{1}{1+(\frac{k}{n})^2}\overset{x=\frac{k}{n}}{\Rightarrow}f(x)=\frac{1}{1+x^2}$$

بنابراین:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2+1^2}+\frac{n}{n^2+2^2}+\frac{n}{n^2+3^2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n^2}\right)=\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}=\mathrm{Arc}\tan(x)\Big|_0^1=\frac{\pi}{4}$$

آزمون ۳. حاصل حد زیر کدام یک از گزینه‌ها است؟

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{\frac{1+\frac{1}{n}}{n^2}}+\sqrt{\frac{1+\frac{2}{n}}{n^2}}+\sqrt{\frac{1+\frac{3}{n}}{n^2}}+\cdots+\sqrt{\frac{1+\frac{n}{n}}{n^2}}\right)$$

۱) $\frac{2}{3}(2\sqrt{2}-1)$　　　۲) $\frac{2}{3}(2\sqrt{2}+1)$



۳) $\frac{2}{3}(2\sqrt{2}-1)$ ۴) $\frac{2}{3}(2\sqrt{2}+1)$

جواب: گزینه‌ی (۳) صحیح است.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{\frac{1+\frac{1}{n}}{n^2}}+\sqrt{\frac{1+\frac{2}{n}}{n^2}}+\sqrt{\frac{1+\frac{3}{n}}{n^2}}+\cdots+\sqrt{\frac{1+\frac{n}{n}}{n^2}}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}.\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1+\frac{2}{n}}+\sqrt{1+\frac{3}{n}}+\cdots+\sqrt{1+\frac{n}{n}}\right)$$

با فرض این‌که $b=1$ و $a=0$ اختیار شوند، $\Delta x=\frac{b-a}{n}=\frac{1}{n}$ است. بنابراین:

$$x_n=\frac{1}{n}.\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1+\frac{2}{n}}+\sqrt{1+\frac{3}{n}}+\cdots+\sqrt{1+\frac{n}{n}}\right)\quad (*)$$

از مقایسه‌ی (*) با $\{x_n\}=\frac{1}{n}\left(f(\frac{1}{n})+f(\frac{2}{n})+f(\frac{3}{n})+\cdots+f(\frac{n}{n})\right)$ داریم:

$$f(\frac{k}{n})=\sqrt{1+\frac{k}{n}}\overset{x=\frac{k}{n}}{\Rightarrow}f(x)=\sqrt{1+x}$$

بنابراین:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{\frac{1+\frac{1}{n}}{n^2}}+\sqrt{\frac{1+\frac{2}{n}}{n^2}}+\sqrt{\frac{1+\frac{3}{n}}{n^2}}+\cdots+\sqrt{\frac{1+\frac{n}{n}}{n^2}}\right)$$

$$=\int_0^1\sqrt{1+x}\,dx=\frac{2}{3}\sqrt{(1+x)^3}\Big|_0^1=\frac{2}{3}(2\sqrt{2}-1)$$

آزمون ۴. حاصل حد زیر کدام یک از گزینه‌های زیر است؟

$$\lim_{n\to\infty}\left((\frac{1}{n})\cos^2(\frac{\pi}{n})+(\frac{1}{n})\cos^2(\frac{2\pi}{n})+(\frac{1}{n})\cos^2(\frac{3\pi}{n})+\cdots+(\frac{1}{n})\cos^2(\frac{n\pi}{n})\right)$$

۱) $\frac{\pi}{2}$ ۲) $\frac{1}{2}$

۳) $\frac{\pi}{3}$ ۴) $\frac{1}{3}$

جواب: گزینه‌ی (۲) صحیح است.

$$\lim_{n\to\infty}\left((\frac{1}{n})\cos^2(\frac{\pi}{n})+(\frac{1}{n})\cos^2(\frac{2\pi}{n})+(\frac{1}{n})\cos^2(\frac{3\pi}{n})+\cdots+(\frac{1}{n})\cos^2(\frac{n\pi}{n})\right)$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}.\left(\cos^2(\frac{\pi}{n})+\cos^2(\frac{2\pi}{n})+\cos^2(\frac{3\pi}{n})+\cdots+\cos^2(\frac{n\pi}{n})\right)$$

با فرض این‌که $b=1$ و $a=0$ اختیار شوند، $\Delta x=\frac{b-a}{n}=\frac{1}{n}$ است. بنابراین:

$$x_n=\frac{1}{n}.\left(\cos^2(\frac{\pi}{n})+\cos^2(\frac{2\pi}{n})+\cos^2(\frac{3\pi}{n})+\cdots+\cos^2(\frac{n\pi}{n})\right)\quad (*)$$

از مقایسه‌ی (*) با $\{x_n\}=\frac{1}{n}\left(f(\frac{1}{n})+f(\frac{2}{n})+f(\frac{3}{n})+\cdots+f(\frac{n}{n})\right)$ داریم:

$$f(\frac{k}{n})=\cos^2(\frac{k\pi}{n})\overset{x=\frac{k}{n}}{\Rightarrow}f(x)=\cos^2(\pi x)$$

بنابراین:

$$\lim_{n\to\infty}\left((\frac{1}{n})\cos^2(\frac{\pi}{n})+(\frac{1}{n})\cos^2(\frac{2\pi}{n})+(\frac{1}{n})\cos^2(\frac{3\pi}{n})+\cdots+(\frac{1}{n})\cos^2(\frac{n\pi}{n})\right)=\int_0^1\cos^2(\pi x)dx=\frac{1}{2}\int_0^1(1+\cos(2\pi x))dx$$

$$=\frac{1}{2}(x+\frac{1}{2\pi}\sin(2\pi x))\Big|_0^1=\frac{1}{2}$$

آزمون ۵. حاصل حد زیر کدام یک از گزینه‌های زیر است؟

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{4n^2-1^2}}+\frac{1}{\sqrt{4n^2-2^2}}+\frac{1}{\sqrt{4n^2-3^2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{4n^2-n^2}}\right)$$

۱) $\frac{\pi}{6}$ ۲) $\frac{\pi}{4}$

۳) $\frac{\pi}{3}$ ۴) $\frac{\pi}{2}$

جواب: گزینه‌ی (۱) صحیح است.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{4n^2-1^2}}+\frac{1}{\sqrt{4n^2-2^2}}+\frac{1}{\sqrt{4n^2-3^2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{4n^2-n^2}}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2(4-\frac{1^2}{n^2})}}+\frac{1}{\sqrt{n^2(4-\frac{2^2}{n^2})}}+\frac{1}{\sqrt{n^2(4-\frac{3^2}{n^2})}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2(4-\frac{n^2}{n^2})}}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}.\left(\frac{1}{\sqrt{4-\frac{1^2}{n^2}}}+\frac{1}{\sqrt{4-\frac{2^2}{n^2}}}+\frac{1}{\sqrt{4-\frac{3^2}{n^2}}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{4-\frac{n^2}{n^2}}}\right)$$

با فرض این‌که $b=1$ و $a=0$ اختیار شوند، $\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{1}{n}$ است. بنابراین:

$$x_n = \frac{1}{n}.\left(\frac{1}{\sqrt{4-\frac{1^2}{n^2}}}+\frac{1}{\sqrt{4-\frac{2^2}{n^2}}}+\frac{1}{\sqrt{4-\frac{3^2}{n^2}}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{4-\frac{n^2}{n^2}}}\right) \qquad (*)$$

از مقایسه‌ی $(*)$ با $\{x_n\} = \frac{1}{n}(f(\frac{1}{n})+f(\frac{2}{n})+f(\frac{3}{n})+\cdots+f(\frac{n}{n}))$ داریم:

$$f(\frac{k}{n}) = \frac{1}{\sqrt{4-\frac{k^2}{n^2}}} = \frac{1}{\sqrt{4-(\frac{k}{n})^2}} \overset{x=\frac{k}{n}}{\Rightarrow} f(x) = \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$$

بنابراین:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{4n^2-1^2}}+\frac{1}{\sqrt{4n^2-2^2}}+\frac{1}{\sqrt{4n^2-3^2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{4n^2-n^2}}\right) = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = \operatorname{Arc}\sin(\frac{x}{2})\Big|_0^1 = \frac{\pi}{6}$$

زیرنویس

1. Limit
2. Algebric
3. Trigonometric
4. L'Hopital Rule
5. Induction
6. Continuous
7. Sequence
8. Definite Integral
9. Partial Sum
10. Integration Methods

منابع

۱. تلگینی، محمود؛ خرده‌پژوه، فروزان؛ رجالی، علی؛ و قیاسیان، احمد. حساب دیفرانسیل و انتگرال دوره‌ی پیش‌دانشگاهی رشته‌ی علوم ریاضی. شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران. ۱۳۷۶.

۲. توماس، جورج و فینی، راس. حساب دیفرانسیل و انتگرال و هندسه تحلیلی. ترجمه‌ی مهدی بهزاد، سیامک کاظمی و علی کافی. مرکز نشر دانشگاهی. ۱۳۷۰.

۳. اشپیگل، م. حساب دیفرانسیل و انتگرال پیشرفته. ترجمه‌ی خلیل پاریاب. حمید تولایی و بیژن شمس. انتشارات پاریاب. ۱۳۸۱.

4. Gillett, Philip. "Calculus and Analytic Geometry". D. C. Heath (2nd Edition). 1984.

5. Varerg, D. W. and Purcell, E. j. "Calculus". Prentic Hall (7th Edition). 1997.



معمای فکری و منطقی ۲

A، C، H، M، اخیراً طی یک بازی علمی، مشغول بحث درباره‌ی سنشان بودند. هریک از آن‌ها به خوبی از سن بقیه مطلع بود. با وجود این، در مورد این موضوع، همچنان که بزرگ‌ترها میل دارند، به طور غیرمستقیم و دور سرگرداندن مطلب، چنان بحث می‌کردند که حتی ذهن دقیق نیز به طور دائم دچار گیجی می‌شد. در اثبات این که این مطلب نه لطیفه‌ای محض، نه رجزخوانی صرف است، چهار واقعیتی را که چهار بانوی جوان طی این بخش تیره و مبهم از صحبتشان برملا کردند، می‌آوریم و در دسترس کسی می‌گذاریم که در عرض شصت ثانیه یا کم‌تر، نه تنها سن‌های نسبی این چهار شخص، بلکه چگونگی جفت شدنشان را طی این قسمت از بازی‌شان مشخص می‌کند.

M کوچک‌تر از C است.

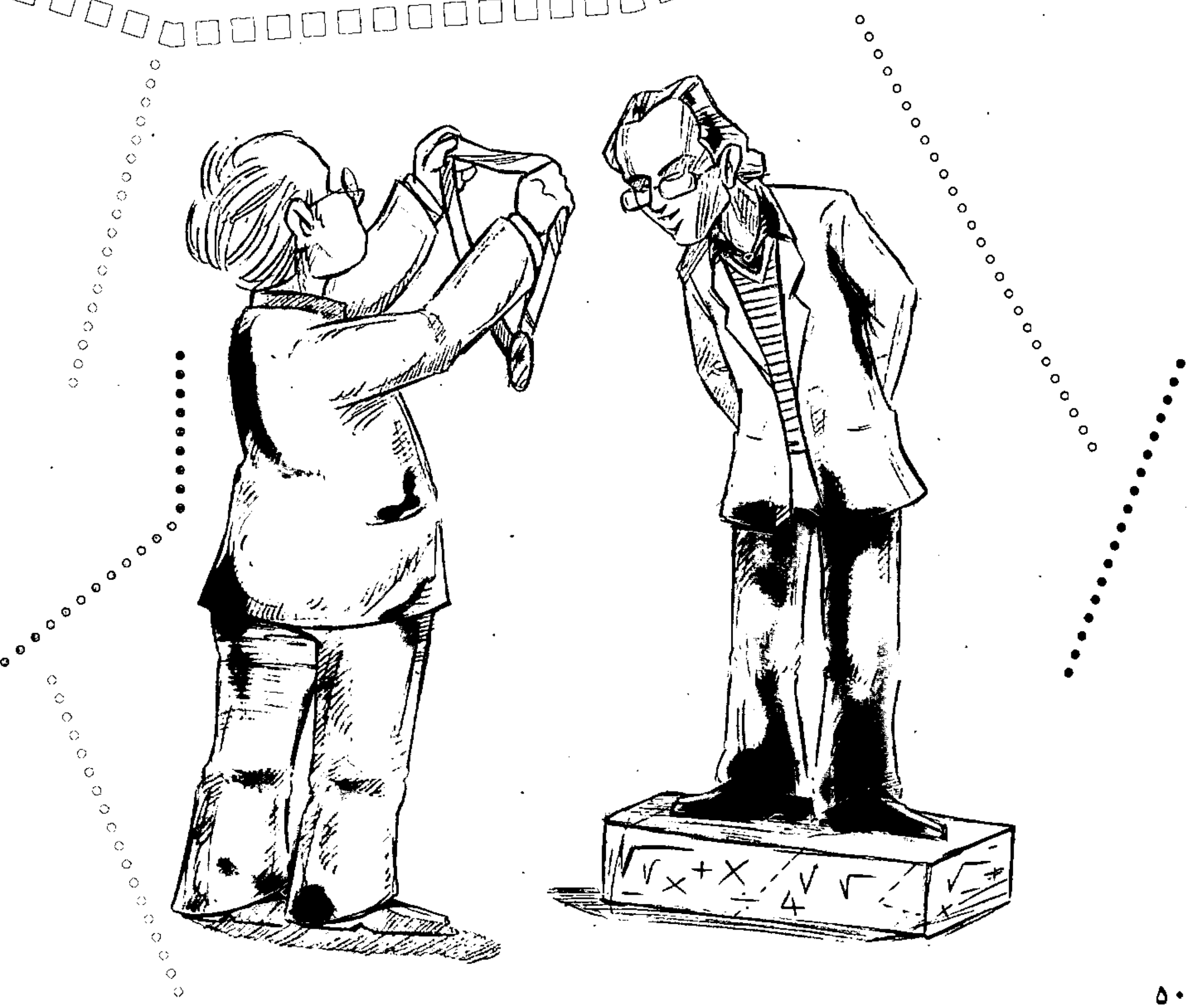
H از هریک از دو بازیکن مقابلش بزرگ‌تر است.

M از شریک بازی خود بزرگ‌تر است.

A و C با هم بزرگ‌تر از H و M هستند.

مسابقه‌های ریاضی

منتخبی از مسائل مسابقات ریاضی دبیرستان‌های امریکا



اشاره

مسابقات ریاضی دبیرستان‌های آمریکا در سه سطح متفاوت برگزار می‌شود:

● **سطح مقدماتی:** که با ۳۰ سؤال پنج گزینه‌ای نسبتاً آسان برگزار می‌شود.

● **سطح متوسط:** که با ۱۵ سؤال تشریحی متوسط برگزار می‌شود.

● **سطح عالی:** که همان المپیاد ملی ریاضی کشور آمریکاست و مشابه المپیاد بین‌المللی برگزار می‌شود.

در شماره‌ی قبل ۹ مسأله از سؤال‌های منتخب سطح متوسط (AIME) دهه‌ی ۱۹۸۰ میلادی را با حل کامل ملاحظه کردید، اینک در ادامه، بقیه مسائل را با حل تشریحی می‌آوریم.

در کشورهای گوناگون دنیا (۶)

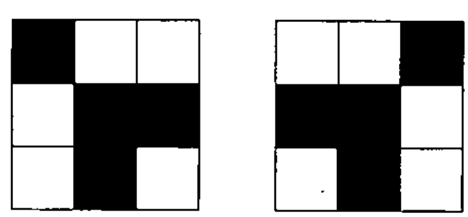
● هوشنگ شرقی

۱۰ . نقطه‌ی P درون مثلث ABC مفروض است، به طوری که: $\angle PAB = \angle PBC = \angle PCA$. اندازه‌های اضلاع مثلث نیز AB = ۱۳ ، BC = ۱۴ و CA = ۱۵ است. تانژانت زاویه‌ی PAB به صورت $\frac{m}{n}$ بیان شده است که m و n عددهای طبیعی، نسبت به هم اول هستند. مقدار m+n را به‌دست آورید.

۱۱ . عدد طبیعی n را «خوش‌شانس» فرض می‌کنیم، اگر مجموع رقم‌های آن مضرب ۷ باشد و آن را «فوق‌خوش‌شانس» می‌نامیم، اگر خوش‌شانس باشد و هیچ یک از اعداد n + ۱ ، n + ۲ ، n + ۳ و... و n + ۱۲ ، خوش‌شانس نباشند. کوچک‌ترین عدد فوق خوش‌شانس را بیابید.

۱۲ . فرض کنید S زیرمجموعه‌ای از مجموعه‌ی {۱،۲،۳،...،۱۰۰۰} باشد، به‌طوری که اگر a و b دو عضو (نه الزاماً متمایز) از S باشند، آن‌گاه حاصل‌ضرب آن‌ها (ab) عضوی از S نباشد. حداکثر تعداد اعضای S چیست؟

۱۳ . در شکل‌های زیر بعضی از مربع‌های کوچک موجود در مربع ۳×۳ اصلی سیاه رنگ شده‌اند، به طوری که در هر ردیف و هر ستون حداقل یک خانه‌ی سیاه وجود دارد.



با فرض این که رنگ‌آمیزی‌های متقارن، متمایز در نظر گرفته شوند (یعنی مثلاً دو رنگ‌آمیزی شکل‌های بالا متمایز هستند و متفاوت درنظر گرفته می‌شوند)، مجموع تعداد روش‌هایی که می‌توانیم مربع ۳×۳ را رنگ‌آمیزی کنیم، به‌دست آورید.

۱۴ . در یک تورنمنت دوره‌ای از مسابقات، گاهی اوقات یک «دور سه عضوی» رخ می‌دهد، به این صورت که در یک مجموعه‌ی {a, b, c} از تیم‌ها، a ، b را می‌برد و b ، c را، و c نیز a را. اگر ۲۳ تیم یک دوره مسابقات دوره‌ای را با هم داشته باشند و هیچ دو تیمی با هم مساوی نکرده باشند، بیشترین تعداد «دورهای سه عضوی» که می‌تواند رخ داده باشد، چندتاست؟

۱۵ . یک «سری نرمال» را به صورت $a_1 \pm a_2 \pm a_3 \pm ... \pm a_n$ تعریف می‌کنیم که در آن ± به معنی + یا −، و ترتیب عملیات، همان ترتیب عادی از چپ به راست است. اکنون یک «سری وارون» را به صورت $R: a_1 \pm a_2 \pm a_3 \pm ... \pm a_n$ تعریف می‌کنیم، به طوری که ± به معنای + یا −، ولی ترتیب عملیات از راست به چپ باشد. برای مثال:

$R: ۳ - ۴ - ۶ + ۵ = ۳ - (۴ - (۶ + ۵)) = ۳ - ۴ + ۶ + ۵ = ۱۰$

با این طرز نمایش، هر سری وارون معادل یک سری نرمال با جملات یکسان، ولی با تغییر بعضی از علائم است. به همین ترتیب، هر سری نرمال معادل یک سری وارون است. اگر سری نرمال $a_1 \pm a_2 \pm a_3 \pm ... \pm a_{1000}$ دارای ۶۰۰ علامت منفی از بین ۹۹۹ علامت خود باشد، سری وارون معادل آن حداکثر چند علامت منفی دارد؟

حل مسائل

۱۰ . اندازه‌ی سه زاویه‌ی برابر PAB و PBC و PCA را مساوی θ می‌گیریم. و طول‌های PA ، PB و PC را به ترتیب x ، y و z درنظر می‌گیریم. با توجه به قضیه‌ی کسینوس‌ها در مثلث‌های PAB ، PBC و PCA داریم:

$$\begin{cases} y^2 = x^2 + c^2 - 2xc\cos\theta \\ z^2 = y^2 + a^2 - 2ya\cos\theta \\ x^2 = z^2 + b^2 - 2zb\cos\theta \end{cases}$$

از جمع این سه معادله با هم، به معادله‌ی زیر می‌رسیم:

$$2\cos\theta(xc + ya + zb) = a^2 + b^2 + c^2$$

چون $\frac{1}{2}\sin\theta(xc + ya + zb)$، مجموع مساحت‌های مثلث‌های PAB، PBC و PCA (و یا مساحت مثلث ABC) را می‌دهد، بنابراین معادله‌ی بالا را می‌توان به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$2\cos\theta.\frac{S_{ABC}}{\frac{1}{2}\sin\theta} = a^2 + b^2 + c^2 \Rightarrow \tan\theta = \frac{4S_{ABC}}{a^2 + b^2 + c^2}$$

$$\Rightarrow \tan\theta = \frac{4\times 84}{590} = \frac{168}{295} = \frac{m}{n} \Rightarrow m + n = 168 + 295 = 463$$

لازم به ذکر است که مساحت مثلث را به کمک قضیه‌ی هرون به‌دست آورده‌ایم:

$$S_{ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \text{ و } p = \frac{a+b+c}{2}$$

۱۱. فرض کنیم u رقم یکان عدد n، و n یک عدد خوش‌شانس باشد. اگر $u > 3$ باشد، آن‌گاه $u + 7 > 10$ و درنتیجه، تفاوت $n + 7$ و n فقط در رقم آخر (رقم یکان) است. درنتیجه، $n + 7$ نیز خوش‌شانس خواهد بود و این خلاف شرط فوق خوش‌شانس بودن n است. اما اگر $u < 3$ باشد، هفت عدد زیر را درنظر می‌گیریم:

$n + (10 - u)$ و $n + (10 - u) + 1$ و ... و $n + (10 - u) + 6$

چون n به شکل $10k + u$ است، این عددها فقط در رقم یکان متفاوت هستند و این تفاوت از ۰ تا ۶ است. درنتیجه مجموع رقم‌های آن‌ها به پیمانه‌ی هفت نیز با هم تفاوت دارد و بنابراین یکی از آن‌ها خوش‌شانس است. چون تفاوت این عددها از n شروع می‌شود، و چون: $[n + (10 - u) + 6] - n < 13$ (زیرا $u > 3$)، پس n نمی‌تواند فوق خوش‌شانس باشد. از این‌جا برمی‌آید که برای همه‌ی عددهای فوق خوش‌شانس باید $u = 3$ باشد.

از آن‌جا که ۳ خودش حتی خوش‌شانس هم نیست، باید رقم دهگان را درنظر بگیریم و آن را با حرف t نمایش می‌دهیم. اگر $t < 9$ باشد، آن‌گاه اگر n خوش‌شانس باشد، مجموع رقم‌های $n + 9$ مضرب ۷ خواهد بود، زیرا با اضافه کردن ۹ به n از رقم یکان یک واحد کاسته، و رقم دهگان با ۱ جمع می‌شود. درنتیجه، نخستین منتخب ما برای عدد فوق‌خوش‌شانس ۹۳ است. اما دوباره می‌بینیم که این عدد حتی خوش‌شانس هم نیست.

به طور مشابه، اگر رقم صدگان را h درنظر بگیریم، به‌ازای $h < 9$، در عدد $n = h93$، اگر n خوش‌شانس باشد، $n + 11$ نیز خوش‌شانس خواهد بود. درنتیجه $h = 9$ و $n = 993$ کوچک‌ترین عدد فوق خوش‌شانس است. با امتحان عددهای ۹۹۴، ۹۹۵ و ... و ۱۰۰۵ ملاحظه می‌شود که هیچ یک از آن‌ها خوش‌شانس نیستند و درنتیجه، ۹۹۳ در شرایط فوق صدق می‌کند.

۱۲. برای نمایش زیرمجموعه‌ی مطلوب S توجه می‌کنیم که $32^2 > 1000$ و در نتیجه زیرمجموعه‌ی زیر:

$$S = \{32, 33, 34, \ldots, 1000\}$$

شرایط مسأله را برآورده می‌کند و ۹۶۹ عضو دارد. برای آن‌که نشان دهیم این بزرگ‌ترین مقدار عضو برای S است، فرض می‌کنیم: $a_i = 31 - i$، $b_i = 32 + i$ و $c_i = a_i b_i = 992 - i - i^2 (i = 0, 1, 2, \ldots, 29)$ آن‌گاه:

$$2 = a_{29} < a_{28} < \ldots < a_0 < b_0 < b_1 < \ldots < b_{29} < c_{29} < \ldots < c_0 = 992$$

از این ۹۰ عدد، حداکثر می‌توان ۶ عدد را انتخاب کرد، زیرا از سه عدد a_i، b_i و c_i حداکثر دو تای آن‌ها می‌توانند در S باشند. از بین ۹۰-۱۰۰۰، یعنی ۹۱۰ عدد باقی مانده نیز حداکثر می‌توان ۹۰۹ عدد را انتخاب کرد، زیرا عدد ۱ در بین آن‌هاست و با انتخاب آن، انتخاب بقیه غیرممکن می‌شود. پس حداکثر تعداد اعضای S، $969 = 909 + 60$ تاست.

۱۳. اگر گفته می‌شد که فقط در هر ستون لااقل یک خانه‌ی سیاه وجود داشته باشد، کار آسان‌تر می‌شد و جواب 7^3 بود. زیرا از هشت راهی که برای رنگ‌آمیزی یک ستون وجود دارد (هر خانه را به دو طریق می‌توان رنگ زد: سفید یا سیاه، پس یک ستون را به $2\times2\times2$ طریق می‌توان رنگ‌آمیزی کرد)، فقط یکی از آن‌ها نامطلوب است (که هر سه خانه سفید باشد). بنابراین برای رنگ‌آمیزی سه ستون طبق اصل ضرب، $7\times7\times7$ راه وجود دارد. اما به هرحال فعلاً محدودیت سطرها را هم داریم و نباید هیچ سطری سفید بماند.

اکنون تعداد حالت‌هایی را که ممکن است یک سطر سفید بماند، به‌دست می‌آوریم. اگر یک سطر سفید بماند، در این صورت دو خانه‌ی هر ستون سه حالت متفاوت دارند (فقط هر دو سفید نیستند). در این جا طبق اصل ضرب، $3\times3\times3 = 3^3$ حالت موجود است و درنتیجه برای سه سطر، 3×3^3 حالت نامطلوب وجود دارد. بنابراین $7^3 - 3\times3^3$ حالت مطلوب داریم. ولی با این شمارش سه حالت وجود دارد که طی آن‌ها هر سه سطر سفید است و این جزو 7^3 حالت فوق نبود. پس باید این سه حالت را به آن اضافه کرد و جواب نهایی عبارت است از:

$۷^۳ - ۳ \times ۳^۳ + ۳ = ۲۶۵$

تذکر: بدون بیان مستقیم، ما در این‌جا از «اصل شمول و عدم‌شمول» استفاده کرده‌ایم. به کمک همین اصل می‌توانیم قاعده‌ای کلی برای یک جدول $n \times n$ به صورت

$$\sum_{k=۰}^{n-۱} (-۱)^k \binom{n}{k} (۲^{n-k} - ۱)^n$$

به‌دست آوریم.

۱۴. فرض کنید N و N' به ترتیب معرف تعداد سه‌تایی‌های دوری و غیر دوری باشند. آن‌گاه $N + N' = \binom{۲۳}{۳}$ و مسأله به یافتن حداقل تعداد سه‌تایی‌های غیر دوری یعنی N' منجر می‌شود. برای یافتن این مقدار، ابتدا توجه می‌کنیم که در هر سه‌تایی غیر دوری باید یکی از تیم‌ها، دو تیم دیگر را برده باشد. (برای درک و اثبات این موضوع مثلثی با سه رأس رسم کنید و اضلاع آن را بردارهایی در نظر بگیرید. سوی بردار از تیم برنده به تیم بازنده است.)

برعکس برای هر جفت نامرتب از تیم‌های j و k که i هر دوی آن‌ها را برده باشد، مجموعه‌ی $\{i, j, k\}$ یک سه عضوی غیر دوری است. بنابراین، اگر برای $i = ۱, ۲, \ldots, ۲۳$، S_i معرف تعداد تیم‌های باخته به تیم i باشد، آن‌گاه در هر مسابقه با ۲۳ تیم، داریم: $N' = \sum_{i=۱}^{۲۳} \binom{S_i}{۲}$.

و این نشان می‌دهد که N' وقتی حداقل می‌شود که هر S_i معادل ۱۱ باشد. در این صورت، میانگین مقدار S_i ها به ما امکان محاسبه‌ی N' را می‌دهد و از آن‌جا N نیز به‌دست می‌آید. هم‌چنین باید نشان دهیم که چنین تورنمنتی واقعاً امکان‌پذیر است. اکنون در نظر می‌گیریم که:

$$\forall i = ۱, ۲, \ldots, ۲۳: \ ۰ \le S_i \le ۲۲ \qquad (۱$$

$$\sum_{i=۱}^{۲۳} S_i = \binom{۲۳}{۲} \qquad (۲$$

با توجه به (۲)، میانگین مقدار S_i ها برابر است با:

$$\frac{۱}{۲۳} \binom{۲۳}{۲} = ۱۱$$

و از آن‌جا به سادگی می‌توان نوشت:

$$N = \binom{۲۳}{۳} - N' = \binom{۲۳}{۳} - ۲۳ \binom{۱۱}{۲} = ۵۰۶$$

۱۵. فرایند تبدیل یک سری از وارون به نرمال، احتمالاً برای کسی که با پرانتزها زیاد کار کرده باشد، شناخته شده است: یک علامت تغییر می‌کند، اگر و فقط اگر تعداد فردی علامت منفی در سمت چپ آن موجود باشد. فرایند تبدیل از سری نرمال به وارون احتمالاً غیرعادی‌تر است.

دنباله‌ای از علامت‌های + و - را در یک سری در نظر بگیرید. (برای مثال، دنباله‌ی - + + + - - متناظر است با:

$a_۱ - a_۲ - a_۳ + a_۴ + a_۵ + a_۶ - a_۷$

توجه داشته باشید که متناظر با نخستین بلوک علائم، یعنی دو علامت منفی نخست، سه عدد وجود دارد.) برای تبدیل از حالت نرمال به حالت وارون، نخست علامت منفی از سمت چپ مربوط به بلوک اول علائم را حفظ کنید و نخستین علامت از سمت چپ را در هر بلوک تغییر دهید. یا در یک منفی ضرب کنید و همه‌ی علائم دیگر را به علامت جمع تغییر دهید. برای مثال، دنباله‌ی علائم داده شده در بالا (با ایجاد فضاهایی در بین آن‌ها برای درک بهتر) به صورت زیر است:

++++ --- +++ ----- ++ ---

و تبدیل می‌شود به:

R: ++++ -++ -++ -++++ -+ -++

هر دو روش با نگاه کردن به مثال‌های متعدد و الگوهای متفاوت کشف شده‌اند، ولی اثبات دقیق، با استقرای ریاضی روی تعداد علامت‌ها انجام می‌شود. حال دنباله‌ی نرمال $a_۱ \pm a_۲ \pm a_۳ \pm \ldots \pm a_{۱\ldots}$ را با ۶۰۰ علامت منفی و ۳۹۹ علامت مثبت در نظر بگیرید. n را حداکثر عده‌ی ممکن از بلوک‌ها تعریف می‌کنیم، اگر نخستین بلوک، یک بلوک منفی باشد و m را حداکثر عده‌ی آن‌ها در نظر می‌گیریم، اگر نخستین بلوک، یک بلوک مثبت باشد. آن‌گاه در روند تبدیل بالا، جواب مسئله‌ی ما از n و $m - ۱$ بزرگ‌تر خواهد بود.

اما $m \le n + ۱$ است، زیرا تغییر مکان یک بلوک مثبت اولیه به سمت راست، آن را به یک بلوک منفی تغییر می‌دهد و در انتها یک بلوک را از بین می‌برد. درنتیجه پاسخ در واقع مساوی n است. وقتی تعداد بلوک‌ها حداکثر می‌شود، نمی‌توانیم هم یک بلوک مثبت با حداقل دو عضو و هم یک بلوک منفی با حداقل دو عضو داشته باشیم. پس برای جابه‌جایی یکی از علامت‌های منفی بین دو علامت مثبت، ایجاد ۲ بلوک یا بیشتر، خلاف اصل حداکثر شدن آن‌هاست. چون تعداد بیشتری علامت مثبت داریم، در روند بالا ممکن است نتیجه بگیریم، آن‌ها در ۳۹۹ بلوک مثبت مجزا و منفرد قرار دارند، و درنتیجه، حداکثر ۴۰۰ بلوک منفی (با شروع از یک علامت منفی) داریم. بنابراین، سری نرمال شامل ۷۹۹ بلوک است و سری وارون شامل ۷۹۹ علامت منفی، و این جواب مسأله است.

برای دانش‌آموزان سال دوم و سوم

تابع جزء صحیح
(قسمت ۲)

●میرشهرام صدر
mir_sadr@yahoo.com

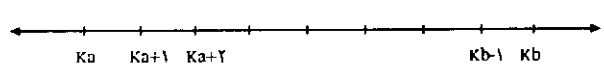
می‌خواهیم تابع با ضابطه‌ی $y=[2x]$ را در بازه‌ی $[-1,2)$ رسم کنیم. برای این منظور، ابتدا باید مقادیر عددی $y=[2x]$ را در بازه‌ی $[-1,2)$ به‌دست آورده، سپس نمودار آن را رسم می‌کنیم. به همین سبب، مطلب زیر را می‌آوریم.

مقادیر $y=[kx]$ در بازه‌ی $a,b\in Z;[a,b)$

برای محاسبه‌ی مقادیر $y=[kx]$ در بازه‌ی $[a,b)$، مراحل زیر را انجام می‌دهیم:

مرحله‌ی اول: $x\in[a,b)\Rightarrow kx\in[ka,kb)$

مرحله‌ی دوم: با فرض این‌که $ka\in Z$، بازه‌ی $[ka,kb)$ را به صورت زیر، به بازه‌های متفاوت (با طول یک واحد) تقسیم کرده و در هر بازه مقدار $y=[kx]$ را محاسبه می‌کنیم:



$$ka\le kx<ka+1\Rightarrow[kx]=ka\Rightarrow y=ka$$
$$ka+1\le kx<ka+2\Rightarrow[kx]=ka+1\Rightarrow y=ka+1$$
$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$
$$kb-1\le kx<kb\Rightarrow[kx]=kb-1\Rightarrow y=kb-1$$

مثال: مقادیر تابع با ضابطه‌ی $y=[2x]$ را در فاصله‌ی $[-1,2)$ به‌دست آورید.

حل: مرحله‌ی اول: در تابع با ضابطه‌ی $y=[2x]$ داریم $k=2$، بنابراین:

$$x\in[-1,2)\Rightarrow 2x\in[-2,4)$$

مرحله‌ی دوم: بازه‌ی $[-2,4)$ را به بازه‌هایی (با طول یک واحد) تقسیم کرده و مقدار $y=[2x]$ را در هر بازه محاسبه می‌کنیم:

$$-2\le 2x<-1\Rightarrow[2x]=-2\Rightarrow y=-2$$
$$-1\le 2x<0\Rightarrow[2x]=-1\Rightarrow y=-1$$
$$0\le 2x<1\Rightarrow[2x]=0\Rightarrow y=0$$
$$1\le 2x<2\Rightarrow[2x]=1\Rightarrow y=1$$
$$2\le 2x<3\Rightarrow[2x]=2\Rightarrow y=2$$
$$3\le 2x<4\Rightarrow[2x]=3\Rightarrow y=3$$

مثال: مقادیر تابع با ضابطه‌ی $y=\left[\frac{1}{3}x\right]$ را در فاصله‌ی $[-6,5)$ به‌دست آورید.

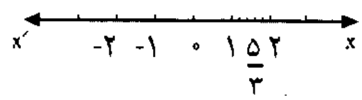
حل: مرحله‌ی اول: در تابع با ضابطه‌ی $y=\left[\frac{1}{3}x\right]$ داریم $k=\frac{1}{3}$، بنابراین:

اشاره

در شماره‌ی پیشین، تابع جزء صحیح را تعریف و رفتار آن را بررسی کردیم. سپس با خاصیت‌های این تابع آشنا شدیم و کاربردهای آن‌ها را در حل مسائل گوناگون دیدیم. اینک در ادامه‌ی مطالب گذشته، رسم توابع جزء صحیح را در پی می‌آوریم.

$$x\in[-6,5)\Rightarrow \frac{1}{3}x\in\left[-2,\frac{5}{3}\right)$$

مرحله‌ی دوم: بازه‌ی $\left[-2,\frac{5}{3}\right)$ را به بازه‌هایی تقسیم کرده و مقدار $y=\left[\frac{1}{3}x\right]$ را در هر بازه محاسبه می‌کنیم:



$$-2\le\frac{1}{3}x<-1\Rightarrow\left[\frac{1}{3}x\right]=-2\Rightarrow y=-2$$

$$-1\le\frac{1}{3}x<0\Rightarrow\left[\frac{1}{3}x\right]=-1\Rightarrow y=-1$$

$$0\le\frac{1}{3}x<1\Rightarrow\left[\frac{1}{3}x\right]=0\Rightarrow y=0$$

$$1\le\frac{1}{3}x<\frac{5}{3}\Rightarrow\left[\frac{1}{3}x\right]=1\Rightarrow y=1$$

رسم نمودار تابع با ضابطه‌ی $y=[kx]+mx$ در بازه‌ی $a,b\in Z;[a,b)$

برای رسم نمودار این تابع، ابتدا مقادیر $[kx]$ را در بازه‌ی $[a,b)$، به‌دست می‌آوریم و مقادیر به‌دست آمده در هر بازه را در ضابطه‌ی تابع $y=[kx]+mx$ قرار می‌دهیم. سپس نمودار هر کدام را در بازه‌های متناظر با آن رسم می‌کنیم. یعنی:

$$x\in[a,b)\Rightarrow kx\in[ka,kb)$$

با فرض این که $ka\in Z$، داریم:

$$a\le x<\frac{ka+1}{k}\Leftarrow ka\le kx<ka+1\Rightarrow[kx]=ka$$
$$\Rightarrow y=ka+mx$$

$$\frac{ka+1}{k}\le x<\frac{ka+2}{k}\Leftarrow ka+1\le kx<ka+2\Rightarrow[kx]=ka+1$$
$$\Rightarrow y=ka+1+mx$$

$$\vdots\qquad\vdots\qquad\vdots\qquad\vdots$$

$$\frac{kb-1}{k}\le x<b\Leftarrow kb-1\le kx<kb\Rightarrow[kx]=kb-1$$
$$\Rightarrow y=kb-1+mx$$

اکنون نمودار تابع با ضابطه‌ی $y=ka+mx$ را در فاصله‌ی $a\le x<\frac{ka+1}{k}$ رسم می‌کنیم و نمودار تابع با ضابطه‌ی $y=ka+1+mx$ را در فاصله‌ی $\frac{ka+1}{k}\le x<\frac{ka+2}{k}$ و ... و نمودار تابع با ضابطه‌ی $y=kb-1+mx$ را در فاصله‌ی $\frac{kb-1}{k}\le x<b$ رسم می‌کنیم.

برای روشن‌تر شدن مطلب، این مثال‌ها را می‌آوریم.

مثال: نمودار تابع با ضابطه‌ی $y=[2x+1]$ را در فاصله‌ی $[-1,1)$ رسم کنید.

حل:

روش اول:

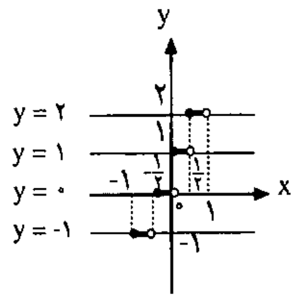
$$y=[2x+1]\Rightarrow y=[2x]+1$$
$$x\in[-1,1)\Rightarrow 2x\in[-2,2)$$

$$-1\le x<-\frac{1}{2}\Leftarrow -2\le 2x<-1\Rightarrow[2x]=-2$$
$$\Rightarrow y=-2+1\Rightarrow y=-1$$

$$-\frac{1}{2}\le x<0\Leftarrow -1\le 2x<0\Rightarrow[2x]=-1$$
$$\Rightarrow y=-1+1\Rightarrow y=0$$

$$0\le x<\frac{1}{2}\Leftarrow 0\le 2x<1\Rightarrow[2x]=0\Rightarrow y=0+1\Rightarrow y=1$$

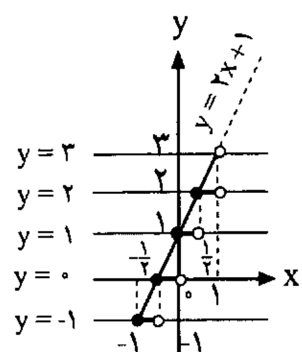
$\frac{۱}{۲} \le x < ۱ \Leftarrow ۱ \le ۲x < ۲ \Rightarrow [۲x] = ۱ \Rightarrow y = ۱ + ۱ \Rightarrow y = ۲$



روش دوم: ابتدا نمودار تابع با ضابطه‌ی $y = ۲x + ۱$ را در بازه‌ی $[-۱,۱)$ رسم می‌کنیم. سپس خطوطی به معادله‌ی $y = k (k \in z)$ را موازی محور طول‌ها می‌کشیم. اکنون در فاصله‌ی $(۱ و ۱-)$، قطعه‌هایی از خط به معادله‌ی $y = ۲x + ۱$ را که بین دو خط متوالی افقی قرار دارند، روی خط افقی پایین تصویر می‌کنیم تا این‌که نمودار تابع در فاصله‌ی $[-۱,۱)$ به‌دست آید.

$y = ۲x + ۱ ;$

x	-۱	۱
y	-۱	۳



مثال: نمودار تابع با ضابطه‌ی $y = [۲x + ۱] + x$ را در بازه‌ی $[-۱,۲)$ رسم کنید.

$y = [۲x + ۱] + x \Rightarrow y = [۲x] + x + ۱$

$x \in [-۱,۲) \Rightarrow ۲x \in [-۲,۴)$

$-۱ \le x < -\frac{۱}{۲} \Leftarrow -۲ \le ۲x < -۱ \Rightarrow [۲x] = -۲ \Rightarrow$

$y = -۲ + x + ۱ \Rightarrow y = x - ۱ ;$

x	۰	۱
y	-۱	۰

$-\frac{۱}{۲} \le x < ۰ \Leftarrow -۱ \le ۲x < ۰ \Rightarrow [۲x] = -۱ \Rightarrow$

$y = -۱ + x + ۱ \Rightarrow y = x ;$

x	۰	۱
y	۰	۱

$۰ \le x < \frac{۱}{۲} \Leftarrow ۰ \le ۲x < ۱ \Rightarrow [۲x] = ۰ \Rightarrow$

$y = ۰ + x + ۱ \Rightarrow y = x + ۱ ;$

x	۰	-۱
y	۱	۰

$\frac{۱}{۲} \le x < ۱ \Leftarrow ۱ \le ۲x < ۲ \Rightarrow [۲x] = ۱ \Rightarrow$

$y = ۱ + x + ۱ \Rightarrow y = x + ۲ ;$

x	۰	-۲
y	۲	۰

$۱ \le x < \frac{۳}{۲} \Leftarrow ۲ \le ۲x < ۳ \Rightarrow [۲x] = ۲ \Rightarrow$

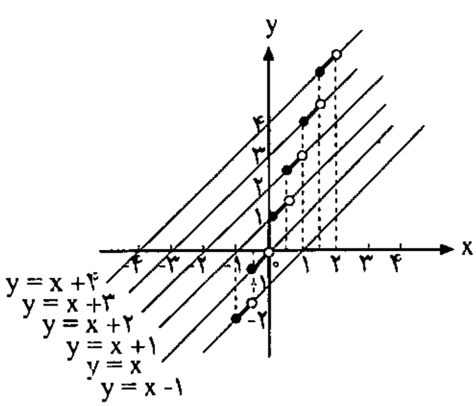
$y = ۲ + x + ۱ \Rightarrow y = x + ۳ ;$

x	۰	-۳
y	۳	۰

$\frac{۳}{۲} \le x < ۲ \Leftarrow ۳ \le ۲x < ۴ \Rightarrow [۲x] = ۳ \Rightarrow$

$y = ۳ + x + ۱ \Rightarrow y = x + ۴ ;$

x	۰	-۴
y	۴	۰



مثال: نمودار تابع با ضابطه‌ی $y = x\left[\frac{1}{2}x\right] + 3$ را در بازه‌ی $[-2,4)$ رسم کنید.

حل:

$x \in [-2,4) \Rightarrow \frac{1}{2}x \in [-1,2)$

$-2 \le x < 0 \Leftarrow -1 \le \frac{1}{2}x < 0 \Rightarrow \left[\frac{1}{2}x\right] = -1 \Rightarrow$

$y = -x + 3$;

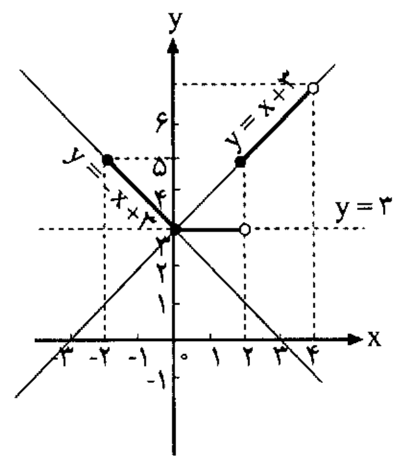
x	0	3
y	3	0

$0 \le x < 2 \Leftarrow 0 \le \frac{1}{2}x < 1 \Rightarrow \left[\frac{1}{2}x\right] = 0 \Rightarrow y = 3$

$2 \le x < 4 \Leftarrow 1 \le \frac{1}{2}x < 2 \Rightarrow \left[\frac{1}{2}x\right] = 1 \Rightarrow$

$y = x + 3$;

x	0	-3
y	3	0



مثال: نمودار تابع با ضابطه‌ی $y = x - [x]$ را در بازه‌ی $[0,5)$ رسم کنید.

حل:

$x \in [0,5)$, $y = x - [x]$

$0 \le x < 1 \Rightarrow [x] = 0 \Rightarrow y = x$;

x	0	1
y	0	1

$1 \le x < 2 \Rightarrow [x] = 1 \Rightarrow y = x - 1$;

x	1	2
y	0	1

$2 \le x < 3 \Rightarrow [x] = 2 \Rightarrow y = x - 2$;

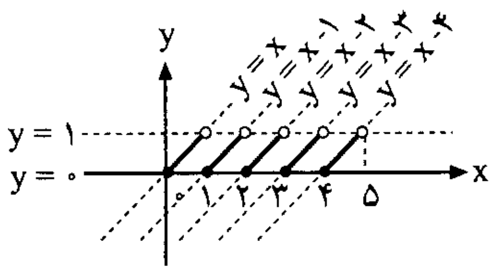
x	2	3
y	0	1

$3 \le x < 4 \Rightarrow [x] = 3 \Rightarrow y = x - 3$;

x	3	4
y	0	1

$4 \le x < 5 \Rightarrow [x] = 4 \Rightarrow y = x - 4$;

x	4	5
y	0	1



توجه: در خاصیت‌های تابع جزء صحیح گفتیم که $0 \le x - [x] < 1$ (شماره‌ی قبل ـ خاصیت۲). همان‌طور که در این نمودار ملاحظه می‌کنیم، نمودار تابع با ضابطه‌ی $y = x - [x]$ بین دو خط $y = 0$ و $y = 1$ قرار دارد.

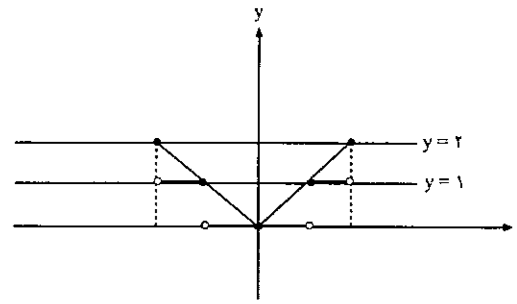
مثال: نمودار تابع با ضابطه‌ی $y = [|x|]$ را در فاصله‌ی $[-2,2]$ رسم کنید.

حل:

نمودار تابع با ضابطه‌ی $y = |x|$ را در بازه‌ی $[-2,2]$ رسم می‌کنیم. سپس خط‌های افقی y=k را رسم می‌کنیم و قطعه‌هایی از آن را که بین دو خط متوالی افقی قرار دارند، روی خط پایینی تصویر می‌کنیم.

$y=|x|$;

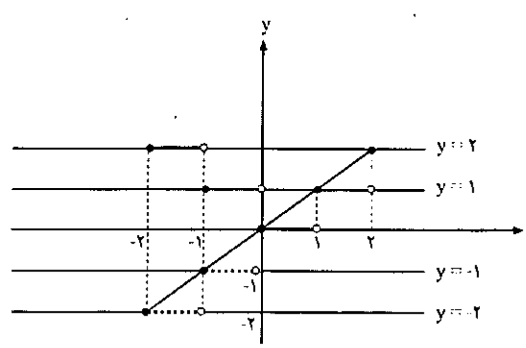
x	-۲	۰	۲
y	۲	۰	۲



مثال: نمودار تابع با ضابطه‌ی $y=⟦x⟧$ را در فاصله‌ی $[-۲,۲]$ رسم کنید.

حل:

نمودار تابع باضابطه‌ی $y=[x]$ را در فاصله‌ی $[-۲,۲]$ رسم می‌کنیم. سپس قرینه‌ی قسمتی از نمودار را که زیر محور xها قرار دارد، نسبت به محور xها رسم می‌کنیم.



مثال: نمودار تابع با ضابطه‌ی $[y]=[x]$ را در فاصله‌ی $[-۲,۲]$ رسم کنید.

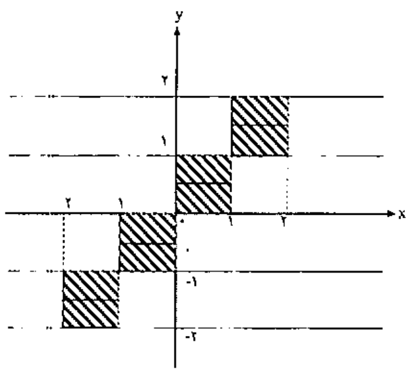
حل:

$-۲ \le x < -۱ \Rightarrow [x]=-۲ \Rightarrow [y]=-۲ \Rightarrow -۲ \le y \le -۱$

$-۱ \le x < ۰ \Rightarrow [x]=-۱ \Rightarrow [y]=-۱ \Rightarrow -۱ \le y < ۰$

$۰ \le x < ۱ \Rightarrow [x]=۰ \Rightarrow [y]=۰ \Rightarrow ۰ \le y \le ۱$

$۱ \le x < ۲ \Rightarrow [x]=۱ \Rightarrow [y]=۱ \Rightarrow ۱ \le y < ۲$



نمودار بالا نمونه‌ای از دسته‌ی توابع پله‌ای است.

مثال: نمودار تابع با ضابطه‌ی $y=x^۲[x]$ را در بازه‌ی $[-۳,۲)$ رسم کنید.

حل:

$x \in [-۳,۳)$ ، $y=x^۲[x]$

$-۳ \le x < -۲ \Rightarrow [x]=-۳ \Rightarrow y=x^۲ \times (-۳) \Rightarrow$

$y=-۳x^۲$;

x	-۳	-۲
y	-۲۷	-۱۲

$-۲ \le x < -۱ \Rightarrow [x]=-۲ \Rightarrow y=x^۲ \times (-۲) \Rightarrow$

$y=-۲x^۲$;

x	-۲	-۱
y	-۸	-۲

$-۱ \le x < ۰ \Rightarrow [x]=-۱ \Rightarrow y=x^۲ \times (-۱)$

$\Rightarrow y=-x^۲$;

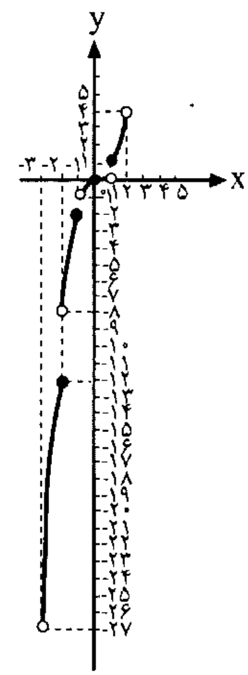
x	-۱	۰
y	-۱	۰

$۰ \le x < ۱ \Rightarrow [x]=۰ \Rightarrow y=x^۲ \times (۰) \Rightarrow y=۰$;

x	۰	۱
y	۰	۰

$۱ \le x < ۲ \Rightarrow [x]=۱ \Rightarrow y=x^۲ \times (۱) \Rightarrow y=x^۲$;

x	۱
y	

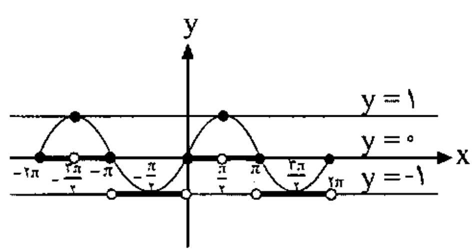


مثال: نمودار تابع با ضابطه‌ی $y = [\sin x]$ را در فاصله‌ی $[-2\pi, 2\pi]$ رسم کنید.

حل:

مرحله‌ی اولـ ابتدا منحنی تابع با ضابطه $y = \sin x$ را در فاصله‌ی $[-2\pi, 2\pi]$ رسم می‌کنیم.

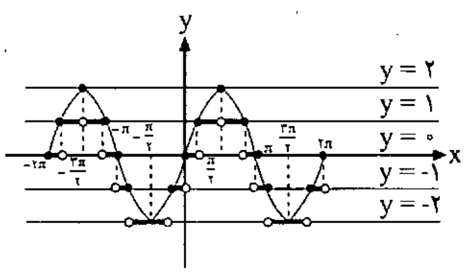
مرحله‌ی دومـ سه خط به معادله‌های $y = -1$ و $y = 0$ و $y = 1$ را می‌کشیم و نقاطی از منحنی را که روی این سه خط قرار دارند، با نقاطی توپر مشخص می‌کنیم. سپس قسمتی از منحنی را که بین دو خط $y = -1$ و $y = 0$ قرار دارد (به غیر از نقاط توپر) روی خط $y = -1$ تصویر می‌کنیم و به همین ترتیب قسمتی از منحنی را که بین دو خط $y = 0$ و $y = 1$ قرار دارد (به غیر از نقاط توپر) روی خط $y = 0$ تصویر می‌کنیم.



مثال: نمودار تابع با ضابطه‌ی $y = [2\sin x]$ را در فاصله‌ی $[-2\pi, 2\pi]$ رسم می‌کنید.

حل: **مرحله‌ی اول**ـ منحنی نمایش $y = 2\sin x$ را رسم می‌کنیم.

مرحله‌ی دومـ خطوط $y = -2$ ، $y = -1$ ، $y = 0$ ، $y = 1$ و $y = 2$ را می‌کشیم و نقاطی از منحنی را که روی این خطوط قرار دارند، پررنگ می‌کنیم. سپس قسمتی از منحنی را که بین دو خط $y = -2$ و $y = -1$ قرار دارد (به‌غیر از نقاط پررنگ) روی خط $y = -2$ تصویر می‌کنیم و قسمتی از منحنی را که بین دو خط $y = -1$ و $y = 0$ قرار دارد(به غیر از نقاط پررنگ)، روی خط $y = -1$ تصویر می‌کنیم[1] و به همین ترتیب قسمتی از منحنی را که بین دو خط $y = 0$ و $y = 1$ قرار دارد (به غیر از نقاط پررنگ) روی خط $y = 0$ تصویر می‌کنیم و در مرحله‌ی آخر، قسمتی از منحنی را که بین دو خط $y = 1$ و $y = 2$ قرار دارد (به غیر از نقاط پررنگ)، روی خط $y = 1$ تصویر می‌کنیم تا نمودار این تابع را به‌دست آوریم.

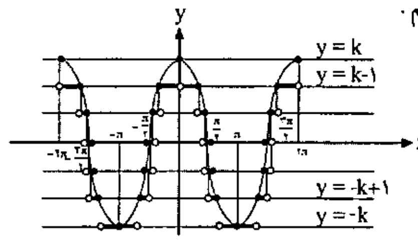


مثال: نمودار تابع با ضابطه‌ی $y = [k\cos x]$ را که در آن $(|k| \geq 1, k \in Z)$ است، در فاصله‌ی $[-2\pi, 2\pi]$ رسم کنید.

حل: **مرحله ی اول**ـ ابتدا منحنی $y = k\cos x$ را در فاصله‌ی $[-2\pi, 2\pi]$ رسم می‌کنیم.

مرحله‌ی دومـ خطوط $y = -k$ و $y = -k+1$ و $y = -k+2$ و... $y = k-1$ و $y=k$ را رسم می‌کنیم و نقاطی از منحنی را که روی این خطوط قرار دارند، پررنگ می‌کنیم. سپس

قسمتی از منحنی را که بین دو خط به معادله‌های $y = -k$ و $y = -k + ۱$ قرار دارد، روی خط به معادله‌ی $y=-k$ تصویر می‌کنیم، و... به همین ترتیب در مرحله‌ی آخر، قسمتی از منحنی را که بین دو خط به معادله‌های $y = k - ۱$ و $y=k$ قرار دارد، روی خط به معادله‌ی $y = k - ۱$ تصویر می‌کنیم، تا نمودار تابع را به دست آوریم.



مثال: نمودار تابع با ضابطه‌ی $y = [x^۲]$ را در فاصله‌ی $[-۲,۲]$ رسم کنید.

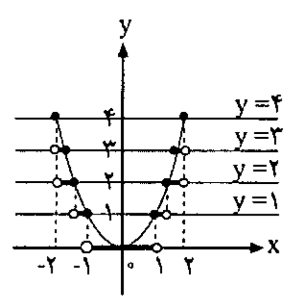
حل: مرحله‌ی اول- نمودار تابع با ضابطه‌ی $y = x^۲$ را در فاصله‌ی $[-۲,۲]$ رسم می‌کنیم.

مرحله‌ی دوم- خطوط افقی موازی محور طول‌ها به معادله‌ی $y = k\ (k \in Z)$ را رسم می‌کنیم و نقاطی از نمودار را که روی خطوط افقی قرار دارند، پررنگ می‌کنیم.

اکنون قسمتی از نمودار را که بین دو خط افقی متوالی قرار دارد، روی خط پایینی تصویر می‌کنیم.

$y = x^۲$;

x	-۲	-۱	۰	۱	۲
y	۴	۱	۰	۱	۴



خودآزمایی

نمودار توابع زیر را در فاصله‌های داده شده رسم کنید.

۱. $[۰,۶)\ ;\ y = x + [\frac{x}{۲}]$

۲. $[-۳,۴)\ ;\ y = \frac{x}{۲} - [\frac{x}{۲}]$

۳. $[-\frac{۳\pi}{۴},\frac{۹\pi}{۴})\ ;\ y = [\sin(x + \frac{\pi}{۴})]$

۴. $[۱,۵)\ ;\ y = x + [x]$

۵. $[۰,۱۰)\ ;\ y = [\sqrt{x}]$

۶. $[-\frac{۵\pi}{۲},\frac{۳\pi}{۲})\ ;\ y = [\cos(x + \frac{\pi}{۲})]$

۷. $[-۲,۱)\ ;\ y = \frac{x}{[x]}$

۸. $[-۲,۲)\ ;\ y = \frac{x+۱}{[x]}$

۹. $[-۸,۲)\ ;\ y = [\frac{x}{۴} - ۱]$

۱۰. $[-۱,۲)\ ;\ y = ۲x - [۳x]$

زیرنویس

۱. به طور کلی، قسمتی از منحنی را که بین دو خط افقی متوالی قرار دارد، روی خط افقی پایین تصویر می‌کنیم. یعنی اگر قسمتی از نمودار منحنی بین دو خط افقی متوالی به معادله‌های $y=i$ و $y=i+۱$ قرار داشته باشد، آن را روی خط به معادله‌ی $y=i$ تصویر می‌کنیم.

منابع

۱. امیری، حمیدرضا و صدر، میرشهرام و حسینی، سیدعلی. خودآموز ریاضیات ۲. مؤسسه‌ی آموزش از راه دور. چاپ دوم ۱۳۸۵.

۲. صدر، میرشهرام. رسم منحنی‌های توابع سینوسی و کسینوسی درجه‌ی اول با روش نقطه‌یابی و انتقال. مجله‌ی ریاضی برهان متوسطه ۲۲. انتشارات مدرسه. پاییز ۱۳۷۶.

(حل مسأله‌های لاینحل ۲۳۰۰ ساله)

کشف فرمول اعداد اول و نتایج آن*

قسمت ۳

● سید محمدرضا هاشمی موسوی**

hashemi – moosavi@yahoo.com

● یافتن جوابی برای تعمیم قضیه‌ی بزرگ فرما (حکم بزرگ فرما)

با استفاده از قضیه‌های مربوط به اعداد اول:

$$(n,m)=1:\ x^n+y^n=z^m \qquad (1)$$

پیش از بررسی معادله‌هایی نظیر معادله‌ی (۱)، لازم است چند قضیه‌ی اساسی مربوط به اعداد اول، مثل قضیه‌ی کوچک فرما، قضیه‌ی اویلر (تعمیمی از قضیه‌ی کوچک فرما) و قضیه‌ی ویلسن را یادآور شویم. به این منظور، ابتدا به عناوین قضایا می‌پردازیم:

۱. قضیه‌ی کوچک فرما

اگر p عدد اول باشد و $(p,a)=1$، آن‌گاه:

$$a^{p-1}\overset{p}{\equiv}1 \ \text{یا}\ a^p\overset{p}{\equiv}a$$

۲. قضیه‌ی اویلر

اگر $(a,m)=1$، آن‌گاه:

$$a^{\varphi(m)}\overset{m}{\equiv}1$$

۳. قضیه‌ی ویلسن

اگر p عدد اول باشد، آن‌گاه:

$$(p-1)!\overset{p}{\equiv}-1$$

در این جا تنها کافی است اثباتی ساده برای قضیه‌ی اویلر ارایه

دهیم؛ زیرا دو قضیه‌ی دیگر، حالت خاصی از قضیه‌ی اویلر هستند.

اثبات قضیه‌ی اویلر(۲)

اگر $(a,m)=1$ و فرض کنیم x_1 ، x_2 ، ... ، x_n که در آن $n=\varphi(m)$ ، دسته ی ساده‌ی باقی‌مانده به پیمانه‌ی m باشند، واضح است که عددهای ax_1 ، ax_2 ، ... و ax_n نیز دسته‌ی ساده‌ی باقی‌مانده‌ها به پیمانه‌ی m هستند؛ زیرا:

$$(a,m)=1\ ,\ \ n=\varphi(m)\quad :\quad \begin{aligned} ax_1 &\overset{m}{\equiv} x_1\\ ax_2 &\overset{m}{\equiv} x_2\\ &\cdots\cdots\\ ax_n &\overset{m}{\equiv} x_n\end{aligned}$$

از ضرب هم‌نهشتی‌ها:

$$a^n x_1.x_2.\cdots.x_n \overset{m}{\equiv} x_1.x_2.\cdots.x_n$$

چون $(m,x_1x_2\dots x_n)=1$ ، پس از اختصار لازم خواهیم داشت:

$$a^n \overset{m}{\equiv} 1\ ;\ a^{\varphi(m)} \overset{m}{\equiv} 1$$

توضیح: $\varphi(m)$ (تابع φ اویلر)، یعنی تعداد عددهای کوچک‌تر از m که نسبت به m اول‌اند.

اثبات قضیه‌ی فرما(۱)

بدیهی است که اگر m عدد اولی مثل p باشد، قضیه‌ی اویلر به حالت خاص، یعنی قضیه‌ی فرما تبدیل می‌شود:

$$m=p\ :\ \varphi(p)=p-1\ ;\ a^{p-1}\overset{p}{\equiv}1$$

اثبات قضیه‌ی ویلسن (۳)

در قضیه‌ی فرما می‌توان فرض کرد $a=(p-1)!$ یا $a=(p-2)!$ و p عدد اول بزرگ‌تر از ۲ فرض می‌شود و هم‌چنین $(p,(p-2)!)=1$ و $(p,(p-1)!)=1$ ، پس حالت خاص قضیه‌ی کوچک فرما چنین است:

$$(p>2)\ \text{و}\ a=(p-2)!\ :\ ((p-2)!)^{p-1}\overset{p}{\equiv}1\ ;\ (p-2)!\overset{p}{\equiv}1$$

$$(p>2)a=(p-1)!\ :\ ((p-1)!)^{p-1}\overset{p}{\equiv}1\ ;\ (p-1)!\overset{p}{\equiv}-1$$

از طریق آزمایش پی می‌بریم که جواب‌های $(p-1)!\overset{p}{\equiv}1$ و $(p-2)!\overset{p}{\equiv}-1$ خارجی است و این قضیه برای $p=2$ نیز برقرار است.

۱. تعیین جوابی برای معادله‌ی (۱):

$$(m,n)=1\ :\ x^n+y^n=z^m$$

برای تعیین یک سلسله از جواب‌های معادله‌ی (۱)، ابتدا یک سلسله از جواب‌های معادله‌ی زیر را به‌دست می‌آوریم:

$$k\in N:\ x_1^{k-1}+x_2^{k-1}=x_3^k \qquad (2)$$

برای تعیین یک سلسله از جواب‌های معادله‌ی (۲)، کافی است آن را با اتحاد زیر مقایسه کنیم:

$$a,b\in Z:\ (a^k+ab^{k-1})^{k-1}+(ba^{k-1}+b^k)^{k-1}=(a^{k-1}+b^{k-1})^k \qquad (3)$$

از مقایسه‌ی معادله‌ی (۲) و اتحاد(۳)، خواهیم داشت:

$$\left|\begin{aligned} x_1&=a^k+ab^{k-1}\\ x_2&=ba^{k-1}+b^k\\ x_3&=a^{k-1}+b^{k-1}\end{aligned}\right.$$
((یک سلسله جواب معادله‌ی (۲))

در این‌جا، با فرض $k=m^{\varphi(n)}$ ، معادله‌ی (۲) به معادله‌ی زیر تحویل می‌شود:

$$x_1^{m^{\varphi(n)}-1}+x_2^{m^{\varphi(n)}-1}=x_3^{m^{\varphi(n)}} \quad (4)$$

(φ تابع اویلر است) $\varphi(n)$: تعداد اعداد طبیعی کوچک‌تر از n که نسبت به آن اول‌اند. برای مثال: $\varphi(2)=1$ و $\varphi(12)=4$ ؛ زیرا ۱، ۵، ۷، ۱۱ نسبت به ۱۲ اول‌اند.

طبق قضیه‌ی اویلر، اگر $(m,n)=1$، آن‌گاه عبارت $m^{\varphi(n)}-1$ بر n بخش‌پذیر است.

از طرف دیگر می‌توان نوشت:

$$(m,n)=1:\ m^{\varphi(n)}-1=n\left(1+2\left[\frac{m^{\varphi(n)}-1}{2n}\right]\right)\quad (5)$$

($[\ ]$: قسمت درست عدد)

با استفاده از رابطه‌ی (۵)، معادله‌ی(۴) را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\left(x_1^{1+2\left[\frac{m^{\varphi(n)}-1}{2n}\right]}\right)^n+\left(x_2^{1+2\left[\frac{m^{\varphi(n)}-1}{2n}\right]}\right)^n=\left(x_3^{m^{\varphi(n)-1}}\right)^m\quad (6)$$

از مقایسه‌ی معادله‌ی (۱) با اتحاد(۶)، یک سلسله از جواب‌های معادله‌ی (۱) حاصل می‌شود:

$$(7)\quad \begin{cases} x=\left(a^{m^{\varphi(n)}}+ab^{m^{\varphi(n)}-1}\right)^{1+2\left[\frac{m^{\varphi(n)}-1}{2n}\right]} \\ y=\left(ba^{m^{\varphi(n)}-1}+b^{m^{\varphi(n)}}\right)^{1+2\left[\frac{m^{\varphi(n)}-1}{2n}\right]} \\ z=\left(a^{m^{\varphi(n)}-1}+b^{m^{\varphi(n)}-1}\right)^{m^{\varphi(n)-1}} \end{cases}$$

توضیح: در برابری‌های (۷)، اگر n عددی اول مثل p باشد:

$n=p:\ \varphi(n)=\varphi(p)=p-1$

و اگر m عددی مرکب به صورت $m=p^r.q^s.t^u\dots$ باشد، (p، q، t و ... عامل‌های اول‌اند)، می‌توان نوشت:

$$\varphi(n)=n(1-\frac{1}{p})(1-\frac{1}{q})(1-\frac{1}{t})\dots=\begin{vmatrix}1&0&0&\dots&1\\1&1&0&\dots&2\\1&0&1&\dots&3\\\dots&\dots&\dots&\dots&\dots\\\dots&\dots&\dots&\dots&n\end{vmatrix}$$

برای مثال:

$$n=205=5\times 41:\varphi(205)=205(1-\frac{1}{5})(1-\frac{1}{41})=160$$

$$n=864=2^5\times 3^3:\ \varphi(864)=864(1-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{3})=288$$

۲. تعیین جوابی برای معادله‌ی:

$$(p,m)=1:\ X^p+Y^p=Z^m\quad (2)$$

معادله‌ی (۲) حالت خاصی از معادله $x^n+y^n=z^m$ است.

بنابراین، برای تعیین جواب آن کافی است، در جواب معادله‌ی(۱) $n=p$ را اختیار کنیم:

$$\varphi(p)=p-1:\begin{cases} x=\left(a^{m^{p-1}}+ab^{m^{p-1}-1}\right)^{1+2\left[\frac{m^{p-1}-1}{2p}\right]} \\ y=\left(ba^{m^{p-1}-1}+b^{m^{p-1}}\right)^{1+2\left[\frac{m^{p-1}-1}{2p}\right]} \\ z=\left(a^{m^{p-1}-1}+b^{m^{p-1}-1}\right)^{m^{p-2}} \end{cases}\quad (8)$$

جواب(۸) حالت خاص جواب (۷) به ازای $\varphi(p)=p-1$ است.

البته جواب معادله‌ی(۲) به طور مستقیم نیز قابل محاسبه است. با استفاده از قضیه‌ی فرما و روشی مشابه حل معادله‌ی(۱)

می‌توان جواب(۸) را برای معادله ی (۲) به‌دست آورد.

۳. تعیین جوابی برای معادله‌ی:

$p_1, p_2 \in N$ و $p_1, p_2 < p$ (prime number)

$$X^{p_1} + Y^{p_2} = Z^p \quad (۳)$$

برای تعیین یک سلسله از جواب‌های معادله ی(۳)، ابتدا یک سلسله از جواب‌های معادله‌ی زیر را به‌دست می‌آوریم:

$$x_1^n + x_2^n = x_3^{n+1} \quad (۴)$$

به این منظور کافی است، معادله ی (۴) را با اتحاد زیر مقایسه کنیم:

$$(a^{n+1} + ab^n)^n + (a^n b + b^{n+1})^n = (a^n + b^n)^{n+1} \quad (۵)$$

اکنون از مقایسه ی معادله ی (۴) با اتحاد(۵) خواهیم داشت:

$$(۶) \quad \begin{cases} x_1 = a^{n+1} + ab^n \\ x_2 = a^n b + b^{n+1} \\ x_3 = a^n + b^n \end{cases}$$

در این جا، با فرض $n = (p-1)!$ ، معادله ی(۴) به معادله ی زیر تحویل می‌شود:

$$x_1^{(p-1)!} + x_2^{(p-1)!} = x_3^{(p-1)!+1} \quad (۷)$$

طبق قضیه ی ویلسن، اگر p عددی اول باشد، عبارت $(p-1)!+1$ بر p بخش‌پذیر است. از طرف دیگر می‌توان نوشت:

$$(p-1)!+1 = p\left(1 + 2\left\lfloor \frac{(p-1)!+1}{2p} \right\rfloor\right) \quad (۸)$$

($\lfloor\ \rfloor$: قسمت درست عدد)

در این جا، با استفاده از رابطه ی (۸) و با توجه به شرط $p_1, p_2 < p$ ، معادله ی (۷) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$(x_1^{\frac{(p-1)!}{p_1}})^{p_1} + (x_2^{\frac{(p-1)!}{p_2}})^{p_2} = (x_3^{1+2\left\lfloor \frac{(p-1)!+1}{2p} \right\rfloor})^p \quad (۹)$$

از مقایسه ی معادله ی (۳) با اتحاد (۹)، یک سلسله از جواب‌های معادله‌ی (۳) حاصل می‌شوند:

$$(۷) \quad \begin{cases} X = (a^{(p-1)!+1} + ab^{(p-1)!})^{\frac{(p-1)!}{p_1}} \\ Y = (a^{(p-1)!}b + b^{(p-1)!+1})^{\frac{(p-1)!}{p_2}} \\ Z = (a^{(p-1)!} + b^{(p-1)!})^{1+2\left\lfloor \frac{(p-1)!+1}{2p} \right\rfloor} \end{cases}$$

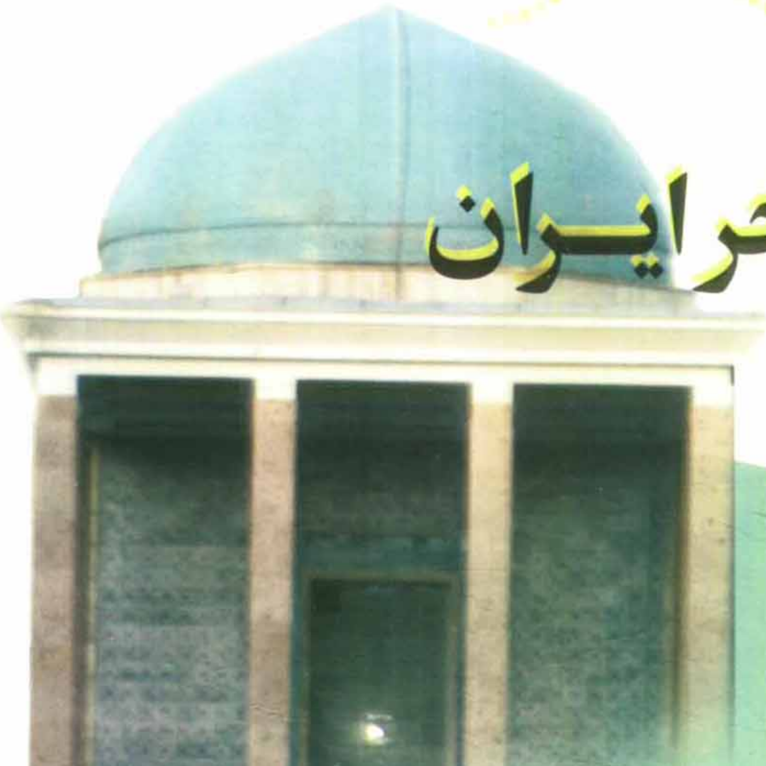
توجه: در اتحادها و برابری‌های فوق اگر p را به $p(t) = 2(\frac{2t+1}{2})^{\Delta_m}$ تبدیل کنیم، به اتحادها و جواب‌های همیشه برقرار به ازای $m \in N$ خواهیم رسید(H(m): فرمول اعداد اول).

در ادامه‌ی این مقاله یک مجموعه‌ی جواب عمومی برای معادله‌های سیال تعمیم‌یافته‌ی عمومی با درجه‌ی دلخواه (با استفاده از قضیه‌های ویلسن، فرما و اویلر و نشان دادن نقش فرمول اعداد اول در پیدایش اتحادهای جبری) ارایه خواهد شد.

مراجع:

* S.M. R. Hashemi Mossavi. The discovery of prime numbers formula and its results & other top researches. Brill/VSP (2006).

** www. primenumbersformula.com



معرفی مفاخر ایران

نظر استاد سعید نفیسی درباره‌ی شعری از سعدی

یکشنبه ۲۴ دی‌ماه ۱۳۸۵، در انجمن آثار و مفاخر ایران، مراسم یادبود و تجلیل از مقام شامخ علمی و فرهنگی ادیب ارجمند و محقق گران‌قدر، مرحوم سعید نفیسی برگزار شد. همکار گرامی ما، استاد احمد شرف‌الدین در کتاب «ریاضی دلاویز در ادب گهرریز»، طرز درست نوشتن یکی از بیت‌های سعدی را با به کارگیری مفاهیم ریاضی بیان کرده‌اند و برای تأیید درستی نظر خود از نوشته‌ی ارزشمند استاد نفیسی در همین زمینه یاد کرده‌اند. در سطرهای زیر، نوشته‌ی استاد شرف‌الدین را می‌آوریم.

شعر سعدی را درست بنویسیم

بنی آدم اعضای یکدیگرند
که در آفرینش ز یک گوهرند
چو عضوی به درد آورد روزگار
دگر عضوها را نماند قرار

***

بیت نخست شعر یاد شده، صحیح نوشته نشده است. ما به کمک مفاهیم ریاضی، طرز صحیح نوشتن و صحیح خواندن بیت نخست را نشان می‌دهیم.

شعر بالا را به صورت زیر می‌نویسیم:

بنی آدم اعضای یک Xاند
که در آفرینش ز یک گوهرند
چو عضوی به درد آورد روزگار
دگر عضوها را نماند قرار

از بیت نخست معلوم می‌شود که X یک مجموعه است؛ زیرا اعضایی دارد که از یک گوهرند. با توجه به بیت دوم X مجموعه‌ای است که اگر عضوی از آن به درد بیاید، دیگر اعضای آن مجموعه بی‌قرار می‌شوند. پس X همان «بدن» است.

اکنون باید در بیت نخست به جای X یک کلمه بگذاریم که به معنی «بدن» و با واژه‌ی «گوهر» هم‌قافیه باشد. واژه‌ی «پیکر» به معنی بدن و با واژه‌ی «گوهر» هم‌قافیه است، پس در بیت نخست به جای X، واژه‌ی «پیکر» را می‌گذاریم. بیت به این صورت درمی‌آید:

بنی آدم اعضای یک پیکرند
که در آفرینش ز یک گوهرند

اکنون این بیت دارای معنی کاملاً مناسبی است.

اکنون نظر زنده یاد استاد سعید نفیسی را در این مورد می‌آوریم (نقل از کتاب در مکتب استاد، برگرفته از برنامه‌های رادیو ایران، شامل بحثی پیرامون درست گفتن و درست نوشتن و درست خواندن، چاپ چهارم، صفحه‌ی ۳۰).

پرسش: راستی استاد محترم! اخیراً چاپ تازه‌ای از گلستان سعدی منتشر کرده‌اید. در آن‌جا دیدم که یک شعر معروف سعدی را که همه‌جور دیگری می‌خوانند و تعبیر می‌کنند، در این چاپ به شکل دیگری انتشار داده‌اید. منظورم این بیت خیلی مشهور است که به بسیاری از زبان‌ها هم ترجمه کرده‌اند:

بنی آدم اعضای یکدیگرند
که در آفرینش ز یک گوهرند

پاسخ: اما متأسفانه همه غلط می‌خوانند. این شعر در اصل این‌طور بوده است:

بنی آدم اعضای یک پیکرند
که در آفرینش ز یک گوهرند

حالا دلیلش را عرض کنم: در زمان سعدی، نوعی خط رواج داشته است که «خط عمومی» بوده و همه با این خط می‌نوشتند و به آن خط تعلیق می‌گفتند. در خط تعلیق، معمول بوده است که برای تند نوشتن، گاهی بعضی حروف را که باید جدا بنویسند، به هم می‌چسباندند؛ مثل خط شکسته‌ی امروز. از آن جمله، در کلمه‌ی «یکدیگر»، «دال» را به «یا» می‌چسباندند و «پیکر» و «دیگر» را مثل هم می‌نوشتند. تنها در «دیگر»، دال را بزرگ‌تر از «پ» پیکر می‌نوشتند و ممکن بود اگر دقت نکنند، پیکر را دیگر بخوانند. همین بلا بر سر شعر سعدی آمده است. تصور این را بفرمایید که شاعری بزرگ نمی‌گوید، بنی‌آدم اعضای یکدیگر هستند، مخصوصاً جایی که پس از آن می‌گوید:

چو عضوی به درد آورد روزگار
دگر عضوها را نماند قرار

ملاحظه می‌کنید؟ شکی نیست که عضو یعنی اجزای یک پیکر و یک بدن. وانگهی تصور بفرمایید که اگر اعضای یکدیگر بخوانیم، چه‌قدر مضحک می‌شود. نتیجه این می‌شود که من سر شما هستم و شما مثلاً دست من هستید. مرد بزرگی مثل سعدی هرگز این‌طور حرف نمی‌زند.

رشد
برهان
مجله ی ریاضی
دوره ی متوسطه
فصلنامه ی آموزشی، تحلیلی، اطلاع رسانی

۵۵

• دوره‌ی هفدهم • شماره‌ی ۱
• پاییز ۱۳۸۶ • بها ۳۵۰۰ ریال

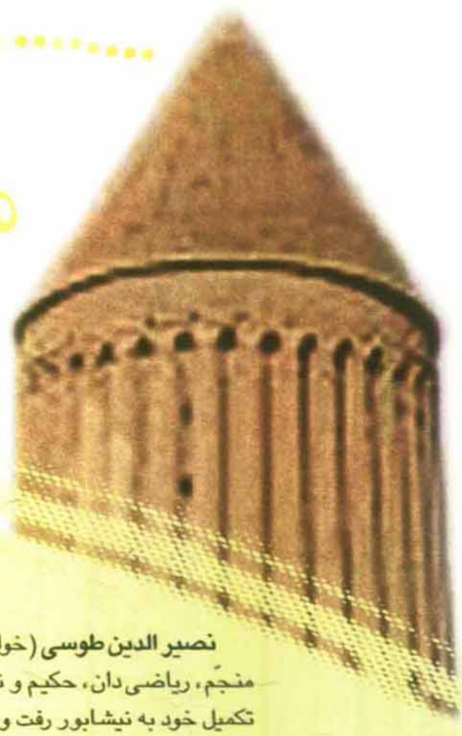


- ترکیبیات
- پاسخ گو باشید! چگونه؟
- رسم نمودار تابع بدون مشتق
- استدلال های ریاضی

وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه ریزی آموزشی
دفتر انتشارات کمک آموزشی



مشاهیر
ریاضی مسلمان



نصیرالدین طوسی

نصیرالدین طوسی (خواجه نصیر طوسی)، ابوجعفر محمدبن حسن ملقّب به نصیرالدین و مشهور به محقق طوسی، منجّم، ریاضی‌دان، حکیم و نویسنده‌ی ایرانی، متولد ۵۹۷و متوفی ۶۷۲، در طوس به دنیا آمد و در آغاز جوانی، برای تکمیل خود به نیشابور رفت و ریاضیات را نزد کمال‌الدین ابن یونس فرا گرفت و به عنوان منجم شهرت یافت.

در سال ۶۵۷، پس از فتح بغداد، ازجانب هلاکو مأموریت یافت رصدخانه‌ی مراغه را بسازد و در این کار توفیق یافت. نیز کتاب‌خانه‌ای تشکیل داد که شمار کتاب‌های آن از چهارصدهزار متجاوز بود.

بعضی از آثار وی عبارت‌اند از:

۱. کشف القناع عن اسرار شکل القطاع؛ درباره‌ی مثلثات که به زبان‌های فرانسوی، آلمانی و روسی، ترجمه شده است.

۲. جوامع الحساب بالتخت و التّراب که به روسی ترجمه شده است.

۳. الرسالة الشافیه عن الشک فی الخطوط المتوازیه که موضوع آن، بحث درباره‌ی اصل پنجم اقلیدس است.

علاوه بر این تألیفات، خواجه را تحریراتی چند است که از آن جمله‌اند: تحریر اصول اقلیدس و تحریر المجسطی.

داستانی از شیخ طوسی

می‌گویند، وقتی خواجه نصیرالدین طوسی به شهر مراغه رسید، تصمیم گرفت رصدخانه‌ای بسازد. به هلاکوخان گفت، می‌خواهم چنین کاری را بکنم و از تو کمک می‌خواهم.

هلاکو از خواجه پرسید: این کار چه فایده‌ای دارد؟

خواجه پاسخ داد: فایده‌ی رصدخانه آن است که آدمی می‌داند در آینده‌ی کیهان چه واقع می‌شود.

هلاکو گفت: آگاهی از حوادث آسمان چه فایده‌ای دارد؟

خواجه گفت: آن‌چه من می‌گویم، انجام دهید تا معلوم شود چه می‌گویم. فرمان دهید کسی بر بالای این خانه برود (البته کسی جز من و تو نداند چه می‌خواهد بشود) و آن‌گاه تشت مسی بزرگی از بالای بام به میان سرا پرتاب کند.

هلاکو قبول کرد. به فرمان او یکی از خدمت‌گزاران به بالای بام رفت و طشت مسی بزرگی را به پایین پرتاب کرد. همه‌ی مردمی که آن اطراف بودند، بسیار وحشت کردند و حتی عده‌ای به حالت غش افتادند. ولی خواجه و هلاکو چون از افتادن تشت باخبر بودند، نترسیدند و تغییری در حالشان رخ نداد.

در این هنگام خواجه گفت: منفعت رصدخانه این است که بدین وسیله، کسانی از وقوع حوادث پیش از وقت آگاه می‌شوند و بقیه‌ی مردم را نیز آگاه می‌سازند. در نتیجه، هیچ کسی دچار هول وهراس نمی‌شود. هلاکوخان نظر خواجه نصیرالدین طوسی را قبول کرد و فوراً دستور داد، وسایل بنای رصدخانه را فراهم کنند و کنار مراغه، در دامنه‌ی کوهی که امروزه به رصدداغی معروف است، رصدخانه را بسازند.

منبع: فرهنگ ریاضیات/گروه ریاضیات انتشارات مدرسه/ناشر: انتشارات مدرسه

بسم الله الرحمن الرحیم

◆ مدیر مسئول: علیرضا حاجیان زاده
◆ سردبیر: حمیدرضا امیری
◆ مدیر داخلی: میرشهرام صدر
◆ طراح گرافیک: آزیتا کوثری
◆ ویراستار ادبی: کبری محمودی
◆ اعضای هیأت تحریریه: حمیدرضا امیری
محمد هاشم رستمی، احمد قندهاری،
میرشهرام صدر، هوشنگ شرقی،
سید محمدرضا هاشمی موسوی،
غلامرضا یاسی پور
و با تشکر از همکاری ارزنده ی
استاد پرویز شهریاری
صندوق الکترونیکی:
www.H66Amiri@yahoo.com
پیام گیر نشریات رشد: ۸۸۳۰۱۴۸۲-۸۸۸۳۹۲۳۲
مدیر مسئول: ۱۰۲
دفتر مجله: ۱۱۳
امور مشترکین: ۱۱۴
◆ چاپ و صحافی: شرکت افست (سهامی عام)
◆ نشانی دفتر مجله: تهران، صندوق پستی ۱۵۸۷۵/۶۵۸۵
تلفن دفتر مجله: ۹-۸۸۸۳۱۱۶۰ داخلی ۳۹۷
تلفن امور مشترکین: ۷۷۳۳۶۶۵۶-۷۷۳۳۵۱۱۰
www.roshdmag.ir
ISSN 1735 - 4951

رشد برهان ۵۵

مجله ی ریاضی

دوره ی متوسطه

فصلنامه ی آموزشی، تحلیلی، اطلاع رسانی

دوره ی هفدهم /شماره ی ۱/ پاییز ۱۳۸۶/شمارگان: ۲۵۰۰۰ نسخه

رشد برهان متوسطه، تمامی دبیران محترم و دانش آموزان عزیز را در زمینه های زیر به همکاری دعوت می کند:

- نگارش مقاله های کمک درسی (شرح و بسط و رفع مشکلات مبحث درسی کتاب های ریاضی دوره ی متوسطه و پیش دانشگاهی)
- طرح مسائل کلیدی به همراه حل آن ها (برای دانش آموزان)
- طرح مسائل مسابقه ای به همراه حل آن ها (برای دانش آموزان)
- طرح معماهای ریاضی
- نگارش یا ترجمه ی مقاله های عمومی ریاضی (مانند تاریخ ریاضیات، زندگینامه ی علمی و اجتماعی ریاضیدانان، نکته های تازه و لطیف ریاضیات، آموزش ریاضیات، آموزش کامپیوتر و ...)

رشد برهان متوسطه هر سه ماه، یکبار منتشر می شود.
مجله در حک، اصلاح، حذف و اضافه ی مقاله ها آزاد است.
مقاله های وارده، باید خوانا و حتی الامکان کوتاه باشد.
مقاله های رسیده مسترد نمی شود.
استفاده از مطالب مجله در کتاب ها یا مجله های دیگر با ذکر دقیق مأخذ بلامانع است.

وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه ریزی آموزشی
دفتر انتشارات کمک آموزشی

یادداشت سردبیر

همیشه شروع سال تحصیلی و اول مهرماه برایم خوشایند بوده و هست. هنوز شوق دیدار دوستان و هم‌کلاسی‌ها و شوق آشنایی با هم‌کلاسی‌های جدید از یادم نرفته است. هنوز اشتیاق توأم با کنجکاوی دیدار معلمان و دبیران جدید، برایم احساسی خوب و تازه است. ای کاش دوباره مانند شما دانش‌آموزان عزیز، اول مهرماه در کلاس حضور می‌یافتم و انتظار آشنایی با معلمان جدید و کتاب‌های درسی جدید را باز هم مرور می‌کردم. البته اکنون احساس جالب دیگری دارم که تقریباً با همان احساسات برابری می‌کند. وقتی وارد کلاس می‌شوم و با دانش‌آموزان جدید آشنا می‌شوم، اسامی دانش‌آموزان را یکی‌یکی از روی لیست قرائت می‌کنم و آن‌ها یکی یکی می‌ایستند و حاضر می‌گویند، خود را به جای تک‌تک آن‌ها فرض می‌کنم و در چشم‌های پرفروغ و کنجکاوشان خودم را می‌بینم.

خلاصه، امسال هم شروع شد و روز از نو و روزگار از نو!

راستی، راجع به تغییر رویه‌ی برگزاری کنکور چیزی شنیده‌اید؟ چگونه این طرح را تجزیه و تحلیل می‌کنید؟ آیا این موضوع در سرنوشت شما تأثیر مثبت گذاشته است یا خواهد گذاشت؟ چگونه؟

فکر می‌کنید، این که سوابق تحصیلی شما در دوره‌ی سه‌ساله‌ی متوسطه و شاید دوره‌ی پیش‌دانشگاهی، در قبولی شما برای دانشگاه نقش مهمی داشته باشد، چه پیامدهایی به دنبال خواهد داشت؟

در شماره‌های بعدی مجله نیز می‌خواهیم راجع به این موضوع بیشتر و دقیق‌تر صحبت کنیم. شما هم نظرات و پیشنهادات خود را در این زمینه برای ما بنویسید و ارسال کنید. آن‌ها را نیز مطرح خواهیم کرد و فکر می‌کنم بحث جالبی داشته باشیم. ان شاءالله.

والسلام- سردبیر

یادهای آموزشی (۸)



آموزش درست جوانان

● پرویز شهریاری

۱.

آینده ی هر کشور به آگاهی و رشد جسمی و اندیشه ی جوانان آن بستگی دارد و به همین دلیل، سرمایه گذاری مادی و معنوی در این زمینه، باید در مرکز توجه فرزانگان هر جامعه باشد. نیازهای جوانان یکی و دو تا نیست و در این جا نمی توان به همه ی آن ها پرداخت؛ به ویژه که طرح هر مطلب و پیدا کردن راه درست، آگاهی و تخصص لازم در آن زمینه را می طلبد که این کار از توان من بیرون است.

جوانان ما : با مسئله های اقتصادی و اجتماعی درگیری دارند، به دنبال به کار گرفتن انرژی خود در راه‌های سالم و درست هستند، امکان‌های آموزشی، ورزشی و پزشکی می خواهند، دوگانگی و بی عدالتی را نمی پذیرند، آرزو دارند در هر زمینه‌ای که به آینده‌ی آن‌ها مربوط می شود، آزادانه اظهارنظر کنند، و بتوانند در گروه‌های اجتماعی و سیاسی، با شرکت فعال خود، در سرنوشت آینده‌ی کشورشان سهمی داشته باشند؛ کوتاه سخن، احساس کنند عضوی از این جامعه‌اند. برای بحث در این زمینه‌ها و بسیاری زمینه‌های دیگر که به آینده‌ی جوانان مربوط می‌شود، به آگاهی‌های خاص و به‌ویژه کاران نیاز است که نه کار من است و نه در این مقاله می‌گنجد.

در این جا، به برخی نکته‌ها که به آموزش جوانان مربوط می‌شود، تنها به صورت گذرا و فهرست‌وار اشاره می‌کنیم:

الف) یکی از مسئله‌های عمده‌ای که دوران نوجوانی و جوانی را تا میزان زیادی تیره کرده و موجب پریشانی دائمی آن‌ها و خانواده‌های آن‌ها شده است، مسئله‌ی کنکور تستی برای ورود به دانشگاه است؛ مسابقه‌ای دشوار و حتی سهمگین! اگر جوانی بخواهد، در زمینه‌ی مورد علاقه‌ی خود و در دانشگاهی که در محل زندگی اوست، پذیرفته شود، باید بتواند در بین یک یا دو درصد ممتازها باشد. از این می گذرم که «تست» نه تاکنون توانسته است و نه بعد از این می‌تواند معیاری برای سواد، آگاهی و استعداد باشد. بنابراین، جوانی که به فرض بین بهترین‌هاست، به این معنا نیست که بتواند با معیار «تست» از کوره‌ی این مسابقه‌ی وحشت‌آفرین، سربلند بیرون آید. این خود جای صحبتی دراز و بسیار جدی دارد که باید به موقع به آن پرداخت و زیان و سود آن را آشکار کرد.

نوجوان ما از همان لحظه‌ای که پای به «دوره‌ی آموزش راهنمایی» می گذارند، و گاه حتی از سال‌هایی که روی نیمکت ابتدایی نشسته است، در تشویش کنکور به سر می‌برد و تمامی خانواده‌ها را هم، در این نگرانی شریک می‌کند. می‌داند برای پیروزی در کنکور باید تست زدن را بیاموزد و گاه مدرسه و معلم و خانواده هم در تقویت این روحیه به او کمک می‌کنند. بازار تست هم گرم است و در انواع گوناگون خود، هم ناشران و هم تهیه‌کنندگانی هستند که از این راه و با عرضه کردن تست‌های رنگارنگ به مال و منالی رسیده‌اند.

با استعدادترین و ارزنده‌ترین جوانان ما، خود را از جامعه و حتی از خانواده‌ی خود کنار می‌کشند، ورزش و تفریح و مطالعه را فراموش می‌کنند و شب و روز در انزوای کامل، تنها به درس و مشق خود می‌رسند و روش «تست زدن» را تجربه می‌کنند. کم نیستند

آن‌هایی که بعد از این عزلت‌نشینی چند ساله، که همراه با «کابوس کنکور» گذشته است، حتی به شرط قبولی، به صورت آدم‌های نامتعادل و با جسم و روانی خسته وارد دانشگاه می‌شوند و اگر در رشته‌ی مورد علاقه‌ی خود هم پذیرفته شده باشند، آن را با تصور سال‌های گذشته‌ی خود و با آن‌چه در گمان خود ساخته بودند، همسان نمی‌بینند و عاملی تازه بر ناهمواری‌های روانی آن‌ها افزوده می‌شود.

ولی این «عزلت‌گزینی» جوانان ما، زیان‌های ویران‌کننده‌ی دیگری هم دارد که از جمله، خو نگرفتن به کتاب و مطالعه‌ی آزاد است.

اگر از گروه کوچک خانواده‌های کتاب‌خوان و کتاب‌دوست بگذریم، همیشه کتابخانه‌های کوچک خانوادگی، به وسیله‌ی جوانان دبیرستانی و دانشگاهی تشکیل شده است. دانش‌آموز دبیرستانی، چه به راهنمایی دبیران خود و چه در رقابت با هم‌سالان به کتاب‌فروشی‌ها رو می‌آورد و کتاب‌های خواندنی را به خانه می‌برد. رمان‌های مشهور، کتاب‌های شعر، سفرنامه‌ها، کتاب‌های مربوط به تاریخ عمومی و تاریخ دانش و غیر آن، خریدارانی مستمر داشت و در هر خانه‌ای کتابخانه‌ای کوچک، شامل بهترین کتاب‌های خواندنی و آگاهی دهنده تشکیل می‌شد که نه تنها خود جوانان، که افراد خانواده و نزدیکان آن‌ها هم از آن‌ها بهره‌مند می‌شدند، اما اکنون سال‌هاست که بخش عمده‌ای از این خریداران کتاب، از صحنه خارج شده‌اند. حتی در سال‌های دهه‌ی سی و چهل، هیچ کتابی کمتر از سه هزار نسخه چاپ نمی‌شد، در حالی که امروز که جمعیت باسواد دست کم سه برابر شده است، گاه تا شمارگان ۵۰۰ یا ۱۰۰۰ پایین آمده‌ایم. به همین دلیل بسیاری از هوشمندترین جوانان ما، نه تنها رمان‌های کلاسیک و نویسندگان آن‌ها را نمی‌شناسند، که از تاریخ دانش گذشته‌ی سرزمین خودشان آگاهی درستی ندارند.

از این گذشته در مرور درس‌های دبیرستانی هم، علاقه‌ی کمتری به درک ماهیت مطالب نشان می‌دهند، چرا که کمکی به موفقیت در کنکور نمی‌کند. دبیران آگاه می‌دانند، اگر بخواهند دقیقه‌هایی از کلاس را به شرح واقعی درس خود بپردازند و استدلال‌های دقیق را ارائه دهند، از گذشته‌ی آن مطلب و نقش دانشمندان ایرانی، نکته‌هایی را به میان آورند، بهترین دانش‌آموزان دچار نگرانی می‌شوند و از چهره‌ی آن‌ها خوانده می‌شود که: چرا وقت ما را با چیزهایی هدر می‌دهید که به درد کنکور نمی‌خورد... و به این ترتیب است که پایه‌های دانش متزلزل می‌شود و به سوی جامعه‌ای با آدم‌های تک‌بُعدی می‌رویم.

ب) در برابر کتاب‌های جدی و آگاهی دهنده، بازار کتاب‌های «کف بینی»، «تعبیر خواب» و «پی بردن به طالع خود» گرم است. جوانان بی‌پناه و نگران از آینده‌ی خود، ندانسته در رویاهای دروغین فرو می‌روند و سرنوشت خود را در بیان نوشته‌های سوداگران و فریب‌کاران جست‌وجو می‌کنند.

ج) در شیوه‌های آموزشی و سنجش دوره‌ی متوسطه هم دشواری‌هایی وجود دارد. گونه‌های متفاوتی از مدرسه‌ها (غیرانتفاعی، نمونه مردمی، دولتی، تیزهوشان و...) وجود دارند که هر کدام مدعی پروردن استعدادهای جوانان ما هستند، ولی بسیاری از آن‌ها در واقع کاری جز این ندارند که بهترین دانش‌آموزان را به خود جلب کنند و با تحمیل شهریه‌های سنگین، مشتی «پلی کپی» و «تست» و «مسئله» بار آن‌ها کنند.

در اساس، تقسیم دانش‌آموزان به «تیزهوش» و «کُندهوش» یا «بااستعداد» و «بی استعداد»، از نظر روان شناسی اجتماعی کاری نادرست است و برای هر دو گروه «خوب» و «بد» زیان‌آور. دانش‌آموز باید در کلاسی باشد که هم با بهتر از خود و هم با ضعیف‌تر از خود سروکار داشته باشد. از دانش‌آموز «بهتر» چیز یاد بگیرد و به دانش‌آموز «ضعیف‌تر» بیاموزد. ایجاد رقابتِ ناسالم بین دانش‌آموزان، گروهی را امیدوار و گروهی دیگر را نومید می‌کند. جوان باید یاد بگیرد، در هر کاری از جمله سودآموزی، به کار گروهی، و همیاری و همکاری با دیگران رو آورد. هیچ دانش‌آموزی در همه‌ی زمینه‌ها «بی استعداد» نیست و اگر در محیطی سالم قرار گرفته باشد و به تعاون و همکاری رو آورد، می‌تواند در خیلی زمینه‌ها به دیگران کمک کند و در برخی زمینه‌ها هم از دیگران کمک بگیرد. تقسیم دانش‌آموزان به گروه‌های مختلف، روحیه‌ی اجتماعی و تعاون را از بین می‌برد، جوانان را به انزوا می‌کشاند، فاصله‌ی طبقاتی را عریان می‌کند و از دیدگاه جامعه‌شناسی، یکی از زیانمندترین روش‌هاست.

د) جامعه‌ی سهل‌اندیش و سوداگر جهان سرمایه‌داری، از مدت‌ها پیش برای سطحی‌تر کردن آگاهی‌های مردم و به ویژه جوانان، این برنامه را اندیشید که شاه‌کارهای ادب جهان را کوتاه و کتاب ۷۰۰ یا ۸۰۰ صفحه‌ای را در ۴۰ یا ۵۰ صفحه چاپ و منتشر کند. این ترفند که در آغاز از میان آمریکایی‌ها سر برآورد، به تدریج به جاهای دیگر هم سرایت کرد. در ایران و در سال‌های دهه‌ی چهل، برخی از ناشران ایرانی هم، این روش نادرست را پیش گرفتند و از جمله «بینوایان» ویکتورهوگو یا «جنگ و صلح» تولستوی را در چند صفحه به بازار آوردند.

چگونه می‌توانید انتظار داشته باشید، جوانی که گمان می‌کند شاه‌کار ویکتورهوگو را در چند صفحه خوانده است، به این اندیشه بیفتد که یک‌بار دیگر کتاب اصلی را، که با دو ترجمه‌ی جداگانه نشر شده است، بخواند؟ چرا می‌گذاریم جوانان ما سهل‌اندیش و سطحی بار بیایند؟ جامعه‌ی ما از این راه چه سودی می‌برد؟ به نظر من این همان چیزی است که باید به عنوان «هجوم فرهنگ مخرب سرمایه‌داری» با آن مبارزه کرد. جهان سرمایه‌داری می‌خواهد، جوانان کشور خود را «تک‌بُعدی»، «بدون اندیشه» و «سطحی» بار آورد تا هرکسی در تخصص خود کار کند و چرخ سودآور سرمایه‌داری را بچرخاند، بدون آن‌که در ژرفای مسئله‌ها دقت کند. من تردید دارم که ناشران کشور ما هم با همین هدف کار کنند، ولی به هر حال نتیجه‌ی کار آن‌ها همان است که بیگانه انتظارش را دارد.

هرچه درباره‌ی آموزش درست جوانان هزینه کنیم، به هدر نمی‌رود، چند ده برابر آن به کشور برمی‌گردد. برای آموزش درست

جوانان بیشتر بیندیشیم، موانع را از جلوی راه شکوفا شدن استعدادها برداریم، و به جوانان اعتماد کنیم. آن‌ها شیفته‌ی خدمت‌اند و نیروی آن را هم دارند. تنها باید اندیشید و معقول‌تر به آن‌ها یاری رساند.

۲.

در سده‌ی سیزدهم میلادی، پس از گفت‌وگوها و کنش و واکنش‌های چندصدساله، حاکمان آشکار و پنهان اروپای غربی و جنوبی در سده‌های میانه، پذیرفتند که می‌توان از آموزش‌های **اقلیدس**، **بطلمیوس** و **ارسطو** استفاده کرد، ولی برای این کار دو شرط گذاشتند: نخست این‌که کسی حق ندارد از این استادان انتقاد کند، و دوم این‌که کسی نباید به سراغ «استدلال» برود و در «معرکه‌ی» چون و چرا با این سه استاد وارد شود. به همین دلیل، به عنوان نمونه، نخستین ترجمه‌ای که از کتاب «مقدمات» اقلیدس از یونانی به لاتین شد، تنها صورت قضیه‌ها را دربرمی‌گرفت و تمامی استدلال‌ها و بحث‌های اقلیدس را کنار گذاشته بودند. خواننده باید تنها به یاری حافظه، صورت قضیه‌ها را حفظ می‌کرد و بی‌چون‌وچرا و بدون این‌که درکی از ماهیت مطلب داشته باشد، آن را می‌پذیرفت.

وقتی پذیرش بی‌چون‌وچرا در کار باشد و خرد آدمی در سایه قرار گیرد، وقتی تنها شنیده‌ها و دستورها ملاک عمل باشد و حافظه و اطاعت بی‌چون‌وچرا پایه و مایه‌ی داوری قرار گیرد، آن‌وقت طبیعی است که به قول **مارسل کاشن**[1]، دانشمند، جامعه‌شناس و سیاست‌مدار فرانسوی (۱۹۵۸-۱۸۶۹): «بت‌پرستان شهر آتن، به **سقراط** جام شوکران نوشاندند، پروتستان‌های آمریکا، **داروین** و هواداران او را در دادگاهی محکوم کردند. ویکتورهوگو در مجمع قانون‌گذاری فرانسه در پانزدهم ژانویه‌ی سال ۱۸۵۰ در سخنرانی خود روبه متعصبان چنین گفت: جنجال شما بر سر چیست؟ اکنون می‌گویم: «جنجال شما بر سر خرد انسانی است، زیرا روشنی روز را به جای سیاهی شب می‌نشاند...»

۳.

حافظه و زبان باید وسیله‌ای باشد در اختیار و اندیشه‌ی انسان؛ زبان و به یاد سپردن هدف نیست، بلکه مستقیم‌ترین وسیله‌ی پرواز اندیشه‌ها و ابزاری برای تفکرند. توجه اصلی «زبان» باید به سمت دنیای خارج باشد و عمل آن، بستگی به رابطه‌ی فرد با دیگران، با طبیعت و یا فعالیت‌ها و کارهای اجتماعی دارد. فشار بیش از اندازه به حافظه و به‌ویژه وارد کردن مجموعه‌ای از واژه‌ها و جمله‌ها در آن، بدون آن که معنا و مفهوم آن درک شده باشد، به جای سودمند بودن، زیان‌مند است.

نسل نیرومند و آگاه، به شرطی پا می‌گیرد که به جوانان خود بیاموزیم، باید با هر مسئله‌ای که روبه‌رو می‌شوند، از اندیشه و استدلال خود یاری بگیرند و همیشه در جست‌وجوی «حقیقت» یا «راه راست» باشند. در واقع به قول ابن خلدون «بدون اندیشه، اعتقاد به موهومات، جای دانش را می‌گیرد.»

آموزش دوره‌ی متوسطه و گاه در برخی زمینه‌ها، آموزش دانشگاهی ما بیشتر بر حافظه‌ی دانش‌آموز و دانشجو تکیه دارد، نه عمل و خلاقیت اندیشه‌ی او، و برخی خانواده‌ها هم در این‌باره به کودک و نوجوان خود ستم می‌کنند. نوجوانان یا کودکانی که ناچار شده‌اند به سفارش معلم یا پدر و مادر خود، برای نمونه، غزل‌های حافظ را از بر کنند، بدون این‌که معنای آن‌ها را بدانند، یا بدون این‌که با تکیه کلام‌های شعر آشنا باشند، کم نیستند. چنین فردی عادت می‌کند، چشم خود را به دهان دیگران بدوزد و «طوطی‌وار» گفته‌های آن‌ها را تکرار کند. می‌دانید که این‌ها، تنها درباره‌ی شعر و یا غزل‌های حافظ نیست. کودک و نوجوان باید اندیشیدن را یاد بگیرد. عادت کند هرجا به مطلبی برخورد کند که از معنای آن عاجز باشد، بپرسد. باید عادت کند در برابر دیگران به بحث بنشیند، و اعتقاد و استنباط خود را آزادانه بیان کند. استعداد «نبوغ» را همه دارند، تنها باید راهی برای پرورش آن‌ها پیدا کرد. به قول **نیوتون**: نبوغ یعنی حوصله و تحمل. و به قول **ادیسون**: نبوغ یعنی یک درصد الهام و نودونه درصد تلاش. و به قول **لباچوفسکی**: شکوفاکردن نبوغ، یعنی ساختن و پربهره کردن درک و اندیشه‌ی آزاد. و این با فشار بر حافظه‌ی نوجوان و جوان به دست نمی‌آید.

شیوه‌ی امتحان‌ها، و به ویژه شیوه‌ی ورود به دانشگاه، به اندیشه و تفکر جوانان، زیان‌های بسیار رسانده است. این شیوه‌ها، به جز این‌که جوانان را خودخواه و تکرو بار می‌آورد و روحیه‌ی همکاری و تعاون اجتماعی را از آن‌ها می‌گیرد، به جز این‌که آن‌ها را تک‌بُعدی بار می‌آورد و از هر گونه تفریح سالمی باز می‌دارد، به جز این‌که جنبه‌های متفاوت هنر، یکسره از برنامه‌ی آن‌ها بیرون می‌رود، و... یک زیان جدی دارد: دانش‌آموزان برای موفقیت در امتحان و در کنکور، با روشی که انتخاب شده است، ناچارند بیشتر به حافظه‌ی خود تکیه کنند و از اندیشیدن گریزان باشند. چنین کسانی، یا در آینده به صورت آدم‌هایی پرخاش‌جو و منفی‌باف بار می‌آیند، و یا به صورت آدم‌هایی حرف‌شنو و مطیع که منتظرند «دستور» دیگران را اجرا کنند. این شیوه‌ی آموزش نمی‌تواند جوانان را به سمت خلاقیت و تفکر بکشاند تا در نتیجه نیرومند و آگاه باشند.

گمان نمی‌کنم جامعه‌ی ما منتظر چنین انسان‌هایی باشد. به قول **آلبرت اینیشتن**: «دانش را نباید چون مجموعه‌ای از قانون‌های پراکنده و سیاهه‌ای از پیشامدها و واقعیت‌های بی‌ارتباط با هم گمان کرد.»

حافظه به انسان خدمت می‌کند، ولی فشار بر حافظه، اگر همراه با تقلید و جدا از اندیشیدن باشد، زیان‌مند است و آینده را ویران می‌کند. به یاد داشته باشیم که «فراموشی» هم، در بسیاری از حالت‌ها، موهبتی از نعمات الهی است.

زیرنویس

1. Cachein

تابع

● احمد قندهاری

برای دانش‌آموزان پایه‌ی دوم و سوم

مفهوم تابع اولین بار در سال ۱۶۹۴ میلادی توسط لایب‌نیتز بیان شد و سپس دانشمند بزرگ، اویلر آن را کمی دقیق‌تر بیان کرد. در آن زمان، دامنه و برد تابع‌ها، مجموعه‌ی اعداد حقیقی در نظر گرفته می‌شد. بعدها تعریف تابع دقیق‌تر شد و دامنه و برد تابع می‌توانست زیر مجموعه‌هایی از $\mathbb{R}$ باشد.

۱. حاصل‌ضرب دکارتی دو مجموعه‌ی A و B

اگر مجموعه‌های A و B زیر مجموعه‌هایی از R باشند، حاصل‌ضرب دکارتی $A \times B$ شامل همه‌ی زوج‌های مرتبی است که مؤلفه‌ی اول آن‌ها عضو مجموعه‌ی A و مؤلفه‌ی دوم آن‌ها عضو مجموعه‌ی B باشند. برای مثال، اگر $A=\{۱,۲,۳\}$ و $B=\{k,p\}$، آن‌گاه حاصل‌ضرب دکارتی $A \times B$ به صورت زیر خواهد بود:

$$A \times B=\{(۱,k),(۱,p),(۲,k),(۲,p),(۳,k),(۳,p)\}$$

چون مجموعه‌ی $A \times B$ دارای شش عضو متمایز است و $۶۴=۲^۶$، پس مجموعه‌ی $A \times B$، ۶۴ زیرمجموعه دارد.

۲. رابطه

هر زیر مجموعه‌ای از $A \times B$ را یک رابطه از A به B گوییم. R را به عنوان علامت رابطه درنظر می‌گیریم. پس یک رابطه از A به B را به صورت: $R: A \to B$ نشان می‌دهیم.

۳. تعریف تابع

اگر مجموعه‌های A و B زیرمجموعه‌هایی از $\mathbb{R}$ باشند، آن‌گاه تابع f از مجموعه‌ی A به مجموعه‌ی B که آن را به صورت $f: A \to B$ نشان می‌دهیم، زیر مجموعه‌ای از حاصل‌ضرب دکارتی $A \times B$ است که هیچ دو زوج مرتب متمایز آن دارای مؤلفه‌ی اول مساوی نباشد. در مثال قبل داشتیم: $A=\{۱,۲,۳\}$ و $B=\{k,p\}$ و

$$A \times B=\{(۱,k),(۱,p),(۲,k),(۲,p),(۳,k),(۳,p)\}$$

حال اگر بنویسیم: $f: A \to B$ و $f=\{(۱,k),(۲,p)\}$، آن‌گاه f یک تابع از A به B است.

هم‌چنین، اگر بنویسیم: $g: A \to B$ و $g=\{(۱,k),(۲,k)\}$، آن‌گاه g هم یک تابع از A به B است.

و اگر بنویسیم: $h: A \to B$ و $h=\{(۱,k),(۲,p),(۳,k)\}$ آن‌گاه h هم یک تابع از A به B است.

اما چنان‌چه بنویسیم:

$t: A \to B$ و $t=\{(۱,p),(۲,k),(۱,k)\}$، آن‌گاه t یک تابع از A به B نیست، زیرا دو زوج متمایز $(۱,p)$ و $(۱,k)$ عضوهای مجموعه‌ی t هستند. چون مؤلفه‌های اول آن‌ها برابر است ولی مؤلفه‌ی دوم آن‌ها برابر نیست، پس t یک تابع از A به B نیست.

مثال: اگر f به صورت زیر تعریف شده باشد و f یک تابع شامل دو زوج مرتب متمایز باشد، آن‌گاه a و b را بیابید.

$$f=\{(۱,a^۲-ab),(۳,b),(b-۱,۳)\}$$

حل:

$b-۱=۱ \Rightarrow b=۲$

$a^۲-ab=۳ \Rightarrow a^۲-۲a-۳=۰ \Rightarrow a=-۱$ یا $a=۳$

توجه: اگر $b=۴ \Rightarrow b-۱=۳$، در نتیجه f تابع نخواهد شد.

۴. ضابطه‌ی تابع

فرض می‌کنیم:

$A=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}$ و $B=\{۲,۵,۱۰,۱۷,۲۰\}$.

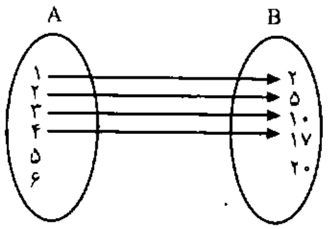
اگر $f: A \to B$ به صورت زیر باشد:

$f = \{(۱,۲),(۲,۵),(۳,۱۰),(۴,۱۷)\}$

با توجه به مطالب قبل، f یک تابع از A به B است.

مؤلفه‌های اول این تابع مجموعه‌ی $\{۱,۲,۳,۴\}$ است که زیر مجموعه‌ای از A محسوب می‌شود. اگر بخواهیم تابع را دقیق‌تر بیان کنیم، باید بگوییم: تابع $f: A \to B$، مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب است که مؤلفه‌های اول این زوج‌های مرتب، مجموعه‌ای از زیرمجموعه‌های مجموعه‌ی A است و هیچ دو زوج مرتب و متمایز آن، دارای مؤلفه‌های اول مساوی نباشند.

این تابع را می‌توان به صورت زیر نشان داد:



ضابطه‌ی این تابع یک رابطه‌ی جبری است که عدد ۱ را به ۲ و عدد ۲ را به ۵ و عدد ۳ را به ۱۰ و عدد ۴ را به ۱۷ مربوط کند. پس ضابطه‌ی این تابع چنین است:

$f(x) = x^۲ + ۱ \ , \ x \in N \ , \ x < ۵$

در حالت کلی ضابطه‌ی تابع، فرمولی است که توسط آن، مؤلفه‌های دوم زوج مرتب تابع، از روی مؤلفه‌های اول آن محاسبه می‌شود. اگر در حالت کلی زوج مرتب تابع f را $(x, f(x))$ بنامیم، آن‌گاه فرمول یا ضابطه‌ی تابع f به این صورت است: $y = f(x)$.

ریاضی علم دقیقی است و سهل‌انگاری در آن به هیچ وجه جایز نیست. در بسیاری از کتاب‌ها دیده می‌شود که می‌نویسند: «تابع $y = f(x)$»، در صورتی که باید گفته شود: «تابع با ضابطه‌ی $y = f(x)$»، زیرا $y = f(x)$ تابع نیست، بلکه ضابطه یا قانون تابع است.

توجه: اگر ضابطه‌ی تابع در دست باشد، به ازای هر x تعریف شده در آن، f(x) به راحتی محاسبه می‌شود، ولی یافتن ضابطه‌ی تابع از روی زوج مرتب تابع گاهی مشکل است.

مثال: اگر تابع f به صورت $f = \{(۱,۱),(۲,۶)(۰,۰)\}$، و ضابطه‌ی تابع به صورت $f(x) = ax^۲ + bx + c$ باشد، ضابطه‌ی تابع را مشخص کنید.

حل:

$$\begin{cases} f(۰) = ۰ \\ f(۱) = ۱ \\ f(۲) = ۶ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(۰) = ۰ + ۰ + c = ۰ \Rightarrow c = ۰ \\ f(۱) = a + b + c = ۱ \Rightarrow a + b = ۱ \\ f(۲) = ۴a + ۲b + c = ۶ \Rightarrow ۴a + ۲b = ۶ \end{cases}$$

$$\begin{cases} a + b = ۱ \\ ۲a + b = ۳ \end{cases} \Rightarrow a = ۲ \ , \ b = -۱$$

$$\Rightarrow f(x) = ۲x^۲ - x \ , \ x \in N \ , \ x \in \{۰,۱,۲\}$$

تعریف تابع با زوج مرتب، تعریف درستی است، ولی کارایی زیادی در حل مسائل ندارد. به همین علت تعریف کامل‌تری از تابع ارائه می‌شود.

۵. تعریف تابع

یک رابطه از IR به IR بین x و y مانند $y=f(x)$ را، وقتی یک تابع از x به y گوییم که: به ازای هر x، حداکثر یک مقدار برای y به دست آید.

مثال: رابطه‌ی $f: IR \to IR$ با ضابطه‌ی $y = f(x) = \sqrt{x - ۱}$ یک تابع است، زیرا اگر به x هر عددی عضو IR را نسبت دهیم، یا یک عدد برای y به دست می‌آید یا عددی برای y به دست نمی‌آید.

$x = ۰ \Rightarrow$ y وجود ندارد.	$x = ۱ \Rightarrow y = ۰$
$x = -۱ \Rightarrow$ y وجود ندارد.	$x = ۲ \Rightarrow y = ۱$
$x = -\sqrt{۲} \Rightarrow$ y وجود ندارد.	$x = ۳ \Rightarrow y = \sqrt{۲}$
$x = -۲ \Rightarrow$ y وجود ندارد.	$x = \sqrt{۳} \Rightarrow y = \sqrt{\sqrt{۳} - ۱}$
$x = -۴ \Rightarrow$ y وجود ندارد.	$x = ۴ \Rightarrow y = \sqrt{۳}$

در این تابع عددی عضو IR وجود ندارد که اگر آن را به x نسبت دهیم، دو مقدار یا سه مقدار یا... برای y به‌دست آید.

الف) مجموعه‌ی $\{x | x \in IR \ , \ x \geq ۱\}$، که به ازای هر x عضو آن، فقط و فقط یک مقدار برای y به‌دست می‌آید؛ این مجموعه را دامنه‌ی تعریف تابع یا به‌طور خلاصه دامنه‌ی تابع می‌گوییم.

ب) این تابع در مجموعه‌ی $\{x | x \in IR \ , \ x < ۱\}$ تعریف نشده است، یعنی به ازای هر x از این مجموعه، مقداری برای y به‌دست نمی‌آید.

ج) مجموعه‌ی $\{y | y \in IR \ , \ y \geq ۰\}$ را بُرد تابع گوییم.

برای آشنایی بیشتر با انواع تابع، به مثال بعدی توجه کنید.

مثال: روابط زیر از $IR \to IR$ بر حسب x و y با ضابطه‌های زیر، معادله‌ی یک تابع از x به y است.

۱) $y = ۲$	۲) $y = ۲x - ۵$
۳) $y = x^۲ - ۲x$	۴) $y = x^۳ + ۳x - ۱$
۵) $y = x^۴ - ۴x^۲$	۶) $y = \frac{۱}{x}$
۷) $y = \frac{۲x - ۱}{x - ۱}$	۸) $y = \frac{x^۲ - x}{x - ۴}$

9) $y = \frac{x^3}{x^2-1}$ 　 10) $y = \sqrt{x-2}$

11) $y = \sqrt{x^2-2x}$ 　 12) $y = \sqrt{-x^2+4x}$

13) $y = \sqrt{\frac{2x}{x+1}}$ 　 14) $y = \frac{x^2}{\sqrt{x-1}}$

15) $y = \sqrt[3]{x^3-1}$ 　 16) $y = \sqrt[3]{x^2-1}$

17) $y = |2x-1|$ 　 18) $y = |x^2-2x|$

19) $y = \lfloor x-1 \rfloor$ 　 20) $y = \sin^2 x - \sin x$

21) $y = \cos^2 x - 1$ 　 22) $y = \tan x + \cot x$

23) $y = \frac{\sin x}{\sin x - 1}$ 　 24) $y = \frac{\cos^2 x}{\cos x - 1}$

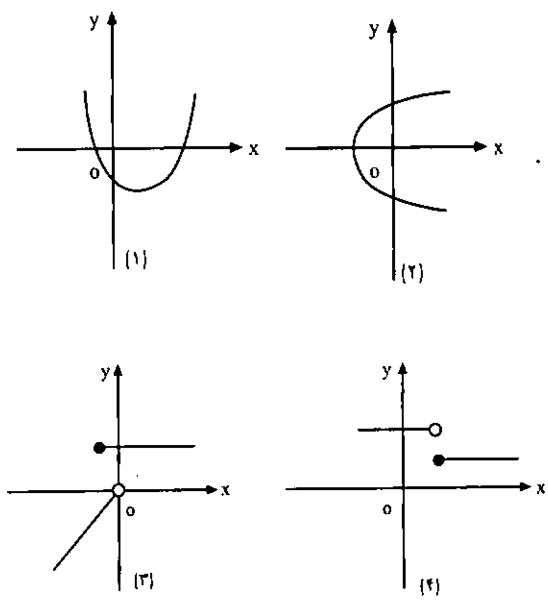
25) $y = \mathrm{Arc}\sin(2x-1)$ 　 26) $y = \mathrm{Arc}\cos(2x+3)$

27) $y = \mathrm{Arc}\tan(x-1)$ 　 28) $y = \mathrm{Arc}\cot\frac{x}{x-1}$

29) $y = \log(2x-1)$ 　 30) $y = 2^x$

سؤال: یک نمودار در صفحه‌ی محورهای مختصات xoy، چه وقت نمودار یک تابع است؟

پاسخ: وقتی که هر خط عمود بر محور xها، آن نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع کند.



شکل‌های ۱ و ۴ نمودارهای تابع‌اند، ولی شکل‌های ۲ و ۳ نمودارهای تابع نیستند.

مثال: نشان دهید، روابط ذیل $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ بین x و y یک تابع از x به y نیست.

باید نشان دهیم، حداقل برای یکی از x ها، دو مقدار یا بیشتر برای y به‌دست می‌آید.

1) $y = \pm\sqrt{2x-1}$ 　 $x = 2 \Rightarrow y = \pm\sqrt{3}$

2) $|y| = 4x-1$ 　 $x = 1 \Rightarrow |y| = 3 \Rightarrow y = \pm 3$

3) $\lfloor y \rfloor = x-1$ 　 $x = 2 \Rightarrow \lfloor y \rfloor = 1 \Rightarrow 1 \le y < 2$

4) $y^3 - 4y - x = 0$ 　 $x = 0 \Rightarrow y^3 - 4y = 0 \Rightarrow y(y^2-4) = 0$

$$\Rightarrow y = 0\ ,\ y = \pm 2$$

۶. تابع حقیقی

بنابر قرارداد، تابعی را حقیقی گوییم که برد آن زیرمجموعه‌ی اعداد حقیقی باشد. ولی ما با تابع‌هایی سروکار داریم که دامنه و برد آن‌ها زیرمجموعه‌ی اعداد حقیقی باشد.

۷. تابع چند ضابطه‌ای

هرگاه دامنه‌ی یک تابع را به چند زیرمجموعه‌ی جدا از هم افراز کنیم، به طوری که اجتماع آن‌ها برابر مجموعه‌ی دامنه تابع باشد، و روی هر یک از زیرمجموعه‌های دامنه، ضابطه‌ای مجزا تعریف کنیم، در این صورت این تابع را تابع چند ضابطه‌ای می گوییم.

مثال: تابع f، $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ به صورت زیر تعریف شده است:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x & x \ge 1 \\ 1 - x^2 & x < 1 \end{cases}$$

این تابع را یک تابع دو ضابطه‌ای و تابع y، $y:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ با ضابطه‌ی

$$y(x) = \begin{cases} 1 + x & x > 0 \\ 2 & x = 0 \\ 1 - x & x < 0 \end{cases}$$

را یک تابع سه ضابطه‌ای می گوییم.

مثال: تابع f با ضابطه‌ی $f(x) = 2|x-1| + x$ را به دو ضابطه تبدیل کنید. $D_f = \mathbb{R}$

حل:

$$x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$$

$$x \ge 1 \Rightarrow |x-1| = x - 1$$

$$\Rightarrow f(x) = 2(x-1) + x \Rightarrow f(x) = 2x - 2 + x$$

$$\Rightarrow f(x) = 3x - 2$$

$$x < 1 \Rightarrow |x-1| = 1 - x$$

$$f(x) = 2(1-x) + x \Rightarrow$$

$$f(x) = 2 - 2x + x \Rightarrow f(x) = 1 - x$$

$$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} 3x - 2 & x \ge 1 \\ 1 - x & x < 1 \end{cases}$$

چند برهان برای قضیه‌ی همرسی سه ارتفاع مثلث

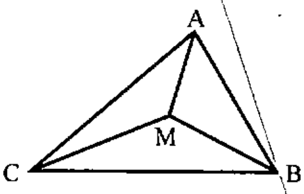
● دکتر احمد شرف‌الدین

قضیه: در هر مثلث سه ارتفاع همرسند (از یک نقطه می‌گذرند).

برهان یکم

ابتدا یک حکم برداری مطرح و آن را ثابت می‌کنیم.
مثلث ABC و نقطه‌ی M را در نظر می‌گیریم. رابطه‌ی زیر مسلم است:

$$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{AB}=0 \qquad (1)$$



برای اثبات درستی رابطه‌ی (۱)، رابطه‌های مسلم زیر را در نظر می‌گیریم:

$$(2)\quad \begin{cases}\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{MB}\\ \overrightarrow{CA}=\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MC}\\ \overrightarrow{AB}=\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MA}\end{cases}$$

عبارت سمت چپ رابطه‌ی (۱)، با رعایت تساوی‌های (۲)، به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$(3)\quad \overrightarrow{MA}.(\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{MB})+\overrightarrow{MB}.(\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MC})+\overrightarrow{MC}.(\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MA})$$

در عبارت (۳)، تمرین‌ها را انجام می‌دهیم. شش جمله به دست می‌آید. مجموع هر دو قرینه صفر است. پس عبارت (۳) برابر صفر است. پس رابطه‌ی (۱) محقق است.

اثبات همرسی سه ارتفاع مثلث

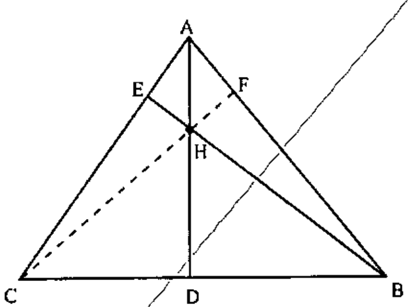
مثلث ABC را در نظر می‌گیریم. نقطه‌ی برخورد دو ارتفاع AD و BE را H می‌نامیم. با رعایت حکم یاد شده در سطرهای پیشین چنین می‌نویسیم:

$$(4)\quad \overrightarrow{HA}.\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{HB}.\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{HC}.\overrightarrow{AB}=0$$

چون خط HB بر خط AC و نیز خط HD بر خط BC عمود

است، پس دو رابطه‌ی زیر مسلم است:

$$(۵)\quad \begin{cases} \overrightarrow{HA}.\overrightarrow{BC} = 0 \\ \overrightarrow{HB}.\overrightarrow{CA} = 0 \end{cases}$$



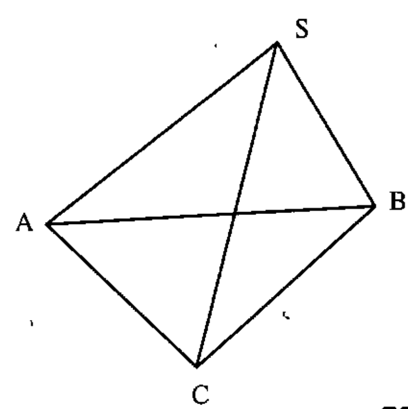
از رابطه‌ی (۴) و رابطه‌های (۵)، رابطه‌ی زیر نتیجه می‌شود:

$$(۶)\quad \overrightarrow{HC}.\overrightarrow{AB} = 0$$

از رابطه‌ی (۶) نتیجه می‌شود که خط HC بر خط AB عمود است. پس سه ارتفاع هر مثلث از یک نقطه می‌گذرند.

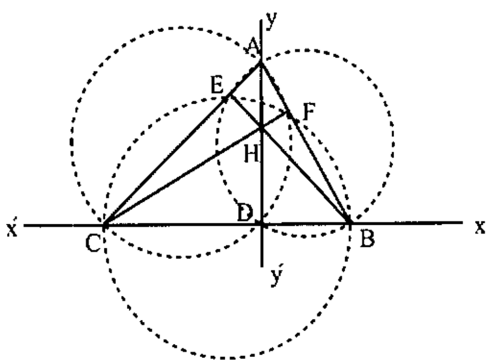
تعمیمی از قضیه‌ی همرسی سه ارتفاع مثلث

چهار وجهی SABC را در نظر می‌گیریم. اگر یال SA بر یال BC، و یال SB بر یال AC عمود باشد، آن‌گاه یال SC بر یال AB عمود است (به بیان کوتاه، اگر دو جفت یال مقابل برهم عمود باشند، دو یال دیگر بر هم عمودند).



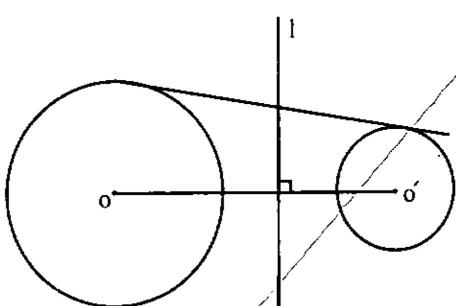
برهان دوم

مثلث ABC و سه ارتفاع AD، BE و CF را در نظر می‌گیریم. سه دایره به قطرهای BC، CA و AB را به ترتیب α، β و γ می‌نامیم. دو دایره‌ی β و γ یکدیگر را در نقطه‌ی D قطع می‌کنند. پس خط AD محور اصلی دو دایره‌ی β و γ است (تعریف محور اصلی در ادامه آمده است). با همین شیوه‌ی استدلال نتیجه می‌شود که ارتفاع BE، محور اصلی دو دایره‌ی α و γ است و ارتفاع CF محور اصلی دو دایره‌ی α و β است. بنابر یکی از قضیه‌های هندسه می‌دانیم که سه محور اصلی سه دایره همرسند، پس سه ارتفاع هر مثلث همرسند.



تعریف محور اصلی دو دایره

مکان هندسی نقاطی از یک صفحه که قوت آن‌ها نسبت به دو دایره‌ی واقع در آن صفحه برابر باشد، خطی است عمود بر خط مرکزهای آن دو دایره. در شکل زیر



دو دایره به مرکزهای o و ó رسم شده است. خط l محور اصلی دو دایره‌ی o و ó است. هنگامی که دو دایره خارج یکدیگر باشند، محور اصلی از وسط مماس‌های مشترک می‌گذرد.

برهان سوم

مثلث ABC و سه ارتفاع آن AD، BE و CF را رسم می‌کنیم. دستگاه مختصات xy را چنان اختیار می‌کنیم که محور x´x آن منطبق برخط CB و نقطه‌ی D مبدأ آن باشد. محور y´y را منطبق بر ارتفاع AD اختیار می‌کنیم. اندازه‌ی جبری برداری $\overrightarrow{DA}$ را روی محور

$y'y$، به h نمایش می‌دهیم و اندازه‌های جبری دو بردار $\overrightarrow{DB}$ و $\overrightarrow{DC}$ را روی محور $x'x$ به ترتیب m و n می‌نامیم.

معادله‌ی خط BE را در دستگاه مختصات xy می‌نویسیم.

ضریب زاویه‌ی خط AC برابر $\frac{h}{-n}$ است. پس ضریب زاویه‌ی خط BE که بر خط AC عمود است، برابر $\frac{n}{h}$ می‌شود. معادله‌ی خط BE چنین است:

$$y = \frac{n}{h}(x - m) \qquad (۷)$$

اگر H نقطه‌ی برخورد دو خط BE و DA باشد، از معادله‌ی (۷) نتیجه می‌شود:

$$\overline{DH} = -\frac{nm}{h} \qquad (۸)$$

اگر K نقطه‌ی برخورد خط CF و DA باشد، چنین داریم:

$$\overline{DK} = -\frac{mn}{h} \qquad (۹)$$

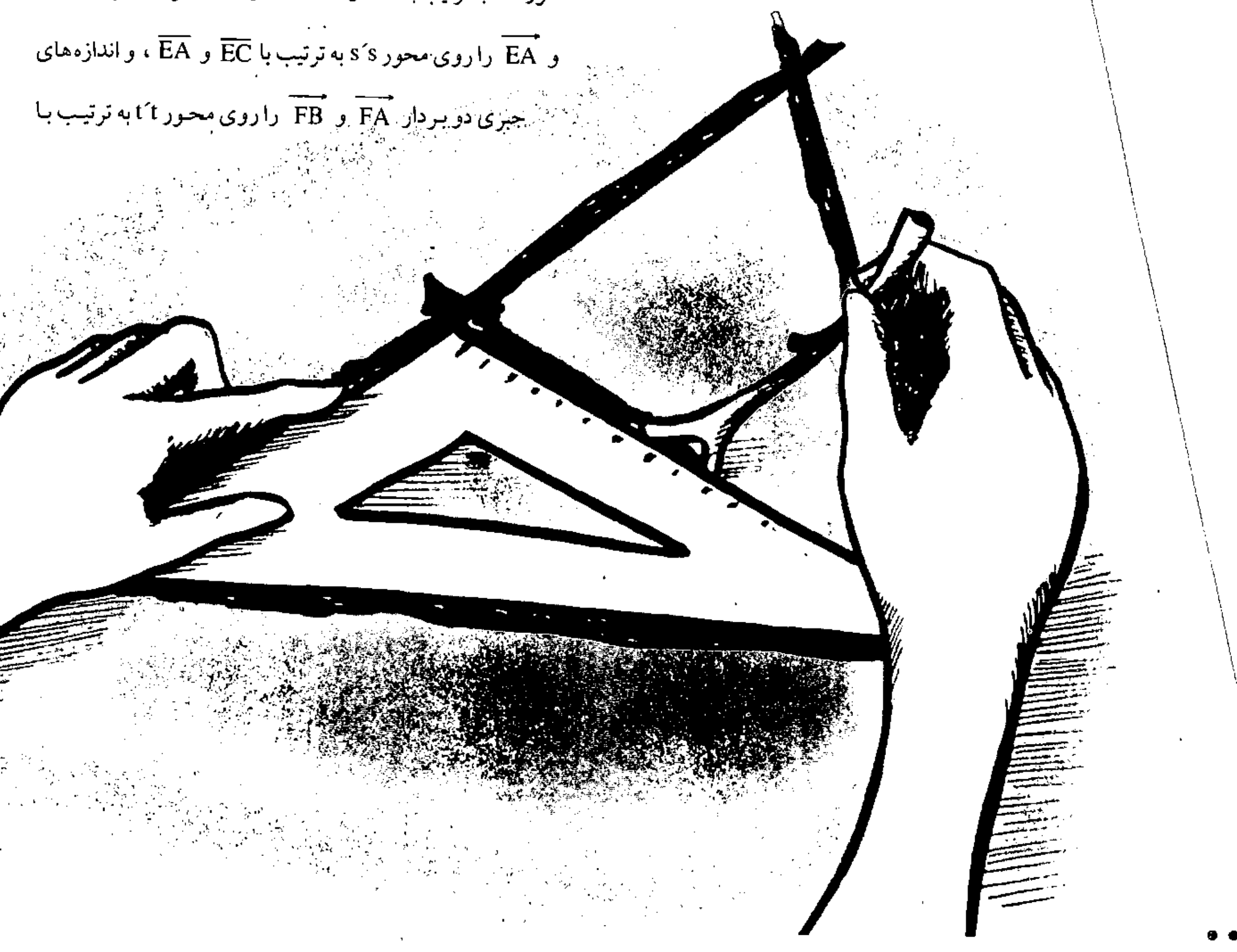
پس $\overline{DH} = \overline{DK}$، و در نتیجه سه ارتفاع مثلث همرسند.

برای محاسبه‌ی DK دو راه می‌توان پیمود: یکی آن‌که معادله‌ی خط CF را بنویسیم و عرض از مبدأ آن را حساب کنیم که همان تساوی (۹) به دست می‌آید. راه دوم، یعنی راه خیلی ساده‌تر، آن است که در عبارت طرف راست تساوی (۹)، جای m و n را عوض کنیم. آن‌گاه تساوی (۹) حاصل می‌شود، زیرا اگر در معادله‌ی (۷) جای m و n را عوض کنیم، معادله‌ی خط CF حاصل می‌آید.

برهان چهارم

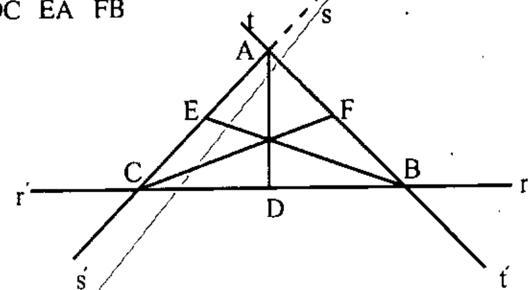
قضیه‌ی سوا را به کار می‌گیریم:

قضیه‌ی سوا: مثلث ABC و سه نقطه‌ی D، E و F را به ترتیب بر خط‌های BC، CA و AB در نظر می‌گیریم. محورهای $r'r$، $s's$ و $t't$ را به ترتیب بر خط‌های BC، CA و AB اختیار می‌کنیم (با جهت دلخواه). اندازه‌های جبری دو بردار $\overrightarrow{DB}$ و $\overrightarrow{DC}$ را روی محور $r'r$ به ترتیب با $\overline{DB}$ و $\overline{DC}$، اندازه‌های جبری دو بردار $\overrightarrow{EC}$ و $\overrightarrow{EA}$ را روی محور $s's$ به ترتیب با $\overline{EC}$ و $\overline{EA}$، و اندازه‌های جبری دو بردار $\overrightarrow{FA}$ و $\overrightarrow{FB}$ را روی محور $t't$ به ترتیب با



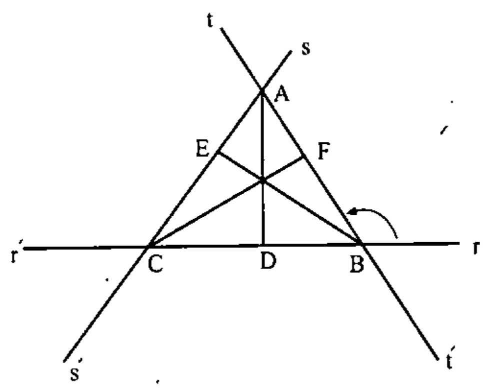
$\overline{FA}$ و $\overline{FB}$ نشان می‌دهیم. اگر سه خط AD، BE و CF همرس باشند، رابطه‌ی زیر مسلم است و برعکس:

$$\frac{\overline{DB}}{\overline{DC}}\cdot\frac{\overline{EC}}{\overline{EA}}\cdot\frac{\overline{FA}}{\overline{FB}}=-1$$



به‌کارگیری قضیه‌ی سوا برای اثبات همرسی ارتفاع‌های مثلث

مثلث ABC و سه ارتفاع AD، BE و CF را در نظر می‌گیریم.



ثابت می‌کنیم رابطه‌ی زیر محقق است و از آن نتیجه می‌گیریم که سه ارتفاع مثلث همرسند.

$$(۱۰)\qquad \frac{\overline{DB}}{\overline{DC}}\cdot\frac{\overline{EC}}{\overline{EA}}\cdot\frac{\overline{FA}}{\overline{FB}}=-1$$

طول‌های اضلاع مقابل به زاویه‌های A، B و C را به ترتیب با a، b و c نشان می‌دهیم. چنین داریم:

$$\overline{DB}=-\overline{BD}=-\left|\overrightarrow{BA}\right|\cos(rBA)=(-c)(-\cos B)$$

پس:

$$\overline{DB}=c\cos B$$

با بیان شیوه‌ی استدلال، مقدار $\overline{DC}$ را حساب می‌کنیم که چنین حاصل می‌شود:

$$\overline{DC}=-b\cos C$$

پس:

$$(۱۱)\qquad \frac{\overline{DB}}{\overline{DC}}=-\frac{c\cos B}{b\cos C}$$

با همان شیوه‌ی محاسبه، تساوی‌های زیر به دست می‌آیند:

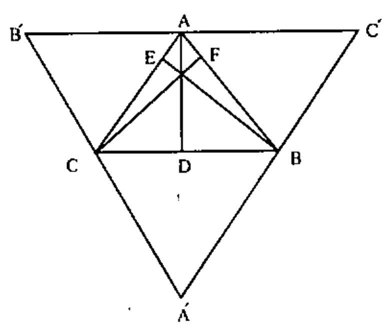
$$(۱۲)\qquad \frac{\overline{EC}}{\overline{EA}}=-\frac{a\cos C}{c\cos A}$$

$$(۱۳)\qquad \frac{\overline{FA}}{\overline{FB}}=-\frac{b\cos A}{a\cos B}$$

از سه رابطه‌ی (۱۱)، (۱۲) و (۱۳)، تساوی (۱۰) حاصل می‌شود. بنابراین سه ارتفاع مثلث همرسند.

برهان پنجم

مثلث ABC و ارتفاع‌های AD، BE و CF آن را در نظر می‌گیریم.



از نقطه‌ی A خط B'C' را موازی خط BC، از نقطه‌ی B خط A'C' را موازی خط AC، و از نقطه‌ی C خط A'B' را موازی خط AB رسم می‌کنیم. چون چهارضلعی AB'CB متوازی‌الاضلاع است، پس: AB' = CB. و نیز چون چهارضلعی AC'BC متوازی‌الاضلاع است، پس: AC' = CB و در نتیجه: AB' = AC'. یعنی نقطه‌ی A وسط ضلع B'C' است. با همین شیوه‌ی استدلال نتیجه می‌شود که نقطه‌ی B وسط پاره‌خط A'C' و نقطه‌ی C وسط پاره‌خط B'A' است.

اکنون می‌گوییم: خط AD که بر خط BC عمود است، عمودمنصف پاره‌خط B'C' است. پس ارتفاع‌های مثلث ABC، عمودمنصف‌های مثلث A'B'C' هستند. می‌دانید که عمودمنصف‌های هر مثلث همرسند (چرا؟)، پس ارتفاع‌های هر مثلث همرسند.

اصل شمول و عدم شمول

اگر تعداد اعضای A را با نماد $|A|$ و متمم مجموعه‌ی A را با $\overline{A}$ نمایش دهیم، در این صورت اصل شمول و عدم شمول برای دو و سه مجموعه به صورت زیر بیان می‌شود:

(اصل شمول برای دو مجموعه)

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

(اصل عدم شمول برای دو مجموعه)

$$|\overline{A \cup B}| = |S| - |A \cup B|$$

توجه دارید که دو مجموعه‌ی A و B هر دو از مجموعه‌ی مرجع S تعریف شده‌اند.

(اصل شمول و عدم شمول برای سه مجموعه)

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

$$|\overline{A \cup B \cup C}| = |S| - |A \cup B \cup C|$$

مثال ۱. معین کنید چند عدد مانند n وجود دارد، به طوری که $1 \le n \le 3400$ و نیز n نه بر ۳ بخش‌پذیر باشد و نه بر ۷.

ترکیبات

آنالیز ترکیبی با ابزارهای شمارشی پیشرفته‌تر (قسمت دوم)

● حمیدرضا امیری

اشاره

در این مقاله سعی می‌کنیم، با استفاده از اصولی هم‌چون «اصل شمول و عدم شمول»، به حل بعضی از مسائل شمارشی بپردازیم و شما را با کاربردهای این اصل آشنا سازیم. هم‌چنین، با استفاده از قضیه‌ی تبدیل با تکرار، قضیه‌ای را اثبات کنیم و از آن قضیه در حل تعدادی دیگر از مسائل شمارشی و حتی یافتن تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی یک معادله‌ی سیاله‌ی خطی و چندمجهولی، بهره خواهیم برد.

$$A=\{1\le n\le 3400:\ 3|n\},\quad B=\{1\le n\le 3400:\ 7|n\}\Rightarrow \text{مجموعه‌ی مورد نظر}=(\overline{A}\cap\overline{B})$$

$$|A\cup B|=\left[\frac{3400}{3}\right]+\left[\frac{3400}{7}\right]-\left[\frac{3400}{[3,7]}\right]=1133+485-161=1457$$

$$|\overline{A}\cap\overline{B}|=|\overline{A\cup B}|=|S|-|A\cup B|=3400-1457=1943$$

توجه: برای استفاده از اصل شمول و عدم شمول، همواره مجموعه‌هایی می‌سازیم که دقیقاً ضد خاصیت یا حالتی باشند که مورد نظر است.

مثال ۲. چند عدد طبیعی بین ۱۰۰ و ۲۵۰۰ وجود دارد که بر ۴ و ۶ بخش‌پذیر نباشند؟

پاسخ:

$$100\le n\le 2500$$

$$A=\{100\le n\le 2500:\ 4|n\},\quad B=\{100\le n\le 2500:\ 6|n\}\Rightarrow \text{مجموعه‌ی مورد نظر}=(\overline{A}\cap\overline{B})$$

$$|A\cup B|=\underbrace{\left[\frac{2401}{4}\right]+1}+\left[\frac{2401}{6}\right]-\left[\frac{2401}{12}\right]$$

چون ۱۰۰ بر ۴ بخش‌پذیر است.

$$=601+400-200=801$$

$$|\overline{A}\cap\overline{B}|=|\overline{A\cup B}|=|S|-|A\cup B|=2401-801=1600$$

تمرین: اگر n عددی طبیعی و $1\le n\le 2600$ باشد، در این صورت چه تعداد از این اعداد بر ۴، ۶ و ۷ بخش‌پذیر نیستند؟

مثال ۳. چه تعداد عدد سه رقمی وجود دارد که در هریک از آن‌ها، هریک از ارقام ۵ و ۶ حداقل یک بار وجود داشته باشد؟

$S=\{\overline{abc}\ |$ ارقام ۰ تا ۹ $c,b,a\}$

پاسخ:

$(\overline{A}\cup\overline{B})$ = مجموعه‌ی مورد نظر

$$A=\{\overline{abc}|a,b,c\ne 5\},\ B=\{\overline{abc}|a,b,c\ne 6\}\Rightarrow$$

$|S|=9\times10\times10=900$ و $|A|=8\times9\times9=648=|B|$

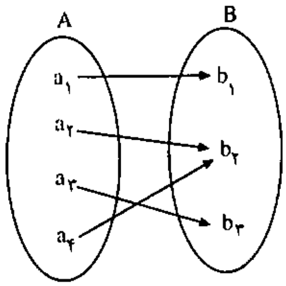
A مجموعه‌ی سه‌رقمی‌هایی است که فاقد ۵ هستند.

$(A\cap B)$ مجموعه‌ی سه‌رقمی‌هایی است که فاقد ۵ و ۶ هستند.

$$|A\cap B|=7\times8\times8=448$$

$$|\overline{A}\cap\overline{B}|=|\overline{A\cup B}|=|S|-|A\cup B|=900-2\times648+448$$

مثال ۴. اگر $A=\{a_1,a_2,a_3,a_4\}$ و $B=\{b_1,b_2,b_3\}$، در این صورت چند تابع پوشا از روی A (توابعی که روی همه‌ی اعضای A اثر کنند) به روی B می‌توان تعریف کرد؟



پاسخ:

$A_1=\{f:A\to B|$ f، b_1 را پوشش ندهد$\}$

$A_2=\{f:A\to B|$ f، b_2 را پوشش ندهد$\}$

$A_3=\{f:A\to B|$ f، b_3 را پوشش ندهد$\}$

$$|\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\overline{A_3}|=|\overline{A_1\cup A_2\cup A_3}|=|S|-|A_1\cup A_2\cup A_3|=81-3\times2^4+3-0=36$$

$$|S|=3\times3\times3\times3=3^4=81$$

$$|A_1|=2^4=|A_2|=|A_3|$$
$$|A_1\cap A_2|=|A_1\cap A_3|=|A_2\cap A_3|=1$$
$$|A_1\cap A_2\cap A_3|=0$$

توجه: تابع $f:A\to B$ را «نگاشت» می‌نامیم هرگاه: $D_f=A$.

نکات مهم: اگر $|B|=k$ و $|A|=m$ در این صورت:

I) اگر $m<k$، هیچ نگاشت پوشا از A به B تعریف نمی‌شود.

II) اگر $m>k$، هیچ نگاشت یک به یک از A به B تعریف نمی‌شود.

III) تعداد کل نگاشت‌های از A به B برابر است با: $|B|^{|A|}=k^m$.

IV) اگر $m < k$ ، در این صورت تعداد نگاشت یک به یک از A به B برابر است با: $P(k,m)$ یا $(k)_m$.

V) اگر $m = k$ ، در این صورت تعداد نگاشت‌های یک به یک وَ درنتیجه پوشا برابر است با: $m!$ یا $k!$ (چون m با k برابر است).

VI) اگر $|B| = 3$ و $|A| = m \geq 4$ ، در این صورت تعداد نگاشت‌های پوشا از A به B برابر است با:

$$3^m - 3 \times 2^m + 3 \times 1^m$$

مثال ۵ . چند نگاشت پوشا از یک مجموعه‌ی ۵ عضوی به یک مجموعه‌ی ۳ عضوی تعریف می‌شود؟

پاسخ:

$$3^5 - 3 \times 2^5 + 3 \times 1^5 = 243 - 96 + 3 = 150$$

قضیه:

اگر k نوع گل مفروض باشند و از هر نوع، به تعداد کافی وجود داشته باشد، در این صورت تعداد حالت‌هایی که می‌توان یک دسته گل شامل n شاخه گل انتخاب کرد، برابر است با:

$$\binom{n+k-1}{k-1}$$

اثبات: k نوع گل را با $k-1$ خط عمودی می‌توان جدا کرد (شکل ۱) و اگر انتخاب هر شاخه گل از یک نوع گل را با یک ستاره مشخص کنیم، برای نمایش انتخاب n شاخه گل از بین این k نوع گل می‌باید از n ستاره استفاده کنیم. بنابراین تعداد ستاره‌ها و خط‌های عمودی برابر است با: $(n+k-1)$. تعداد کل تبدیلات این اشیا نیز برابر است با: $[n+(k-1)]!$. اما می‌دانیم، جابه‌جایی‌های n ستاره با یکدیگر و $k-1$ خط عمودی با یکدیگر، حالت جدید یا دسته گل جدیدی تولید نمی‌کند و طبق قضیه‌ی تبدیل با تکرار، باید تعداد کل تبدیلات را بر $n! \times (k-1)!$ تقسیم کنیم که در این صورت خواهیم داشت:

$$\text{تعداد دسته گل‌های n شاخه‌ای از k نوع گل} = \frac{[n+(k-1)]!}{n! \times (k-1)!} = \binom{n+k-1}{k-1}$$

گل نوع kام	گل نوع (k − ۱) ام	...	گل نوع دوم	گل نوع اول
*	***	...	**	***
⋮				

(شکل ۱)

مثال ۶ . به چند طریق می‌توان از بین ۴ نوع گل، ۷ شاخه گل انتخاب کرد؟

پاسخ:

$$\text{تعداد انتخاب‌های ۷ شاخه گل} = \binom{7+4-1}{4-1} = \binom{10}{3} = 120$$

مثال ۷ . به چند طریق می‌توان از بین ۵ نوع گل، ۸ شاخه گل انتخاب کرد، به شرط آن‌که از هر نوع گل حداقل یک شاخه انتخاب شده باشد؟

پاسخ: ابتدا از هر نوع گل یک شاخه برمی‌داریم و سپس سه شاخه‌ی باقی را به دلخواه از بین ۵ نوع گل انتخاب می‌کنیم که این تعداد انتخاب برابر با $\binom{7}{4}$. در حالت کلی می‌توان از فرمول $\binom{n-1}{k-1}$ برای حل این نوع مسائل استفاده کرد:

$$\binom{n-1}{k-1} = \binom{7}{4}$$

مثال ۸ . به چند طریق می‌توان از بین ۵ نوع گل، ۹ شاخه گل انتخاب کرد، به شرط آن‌که از گل نوع دوم حداقل دو شاخه و از گل نوع چهارم حداقل یک شاخه انتخاب شده باشد؟

پاسخ: ابتدا دو شاخه گل از نوع دوم و یک شاخه از نوع چهارم برمی‌داریم که در این صورت تعداد ۶=۳-۹ شاخه گل برای انتخاب از بین ۵ نوع گل باقی می‌ماند. چون این انتخاب دلخواه است، طبق قضیه برابر است با:

$$\binom{10}{5}.$$

قضیه: تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله‌ی $x_1+x_2+\cdots+x_k=n$ $(n\in N)$ برابر است با: $\binom{n+k-1}{k-1}$.

اثبات: هر جواب صحیح و نامنفی برای معادله‌ی فوق در واقع یک روش انتخاب n شاخه گل از بین k نوع گل است، به شرط آن‌که x_i را تعداد انتخاب‌ها از گل نوع iام فرض کنیم، و برعکس؛ یعنی هر انتخاب n شاخه گل از بین k نوع گل، جوابی برای معادله‌ی فوق است. قبلاً ثابت کردیم، تعداد این انتخاب‌ها یا تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله‌ی فوق برابر است با:

$$\binom{n+k-1}{k-1}$$

مثال ۹. معادله‌ی $x_1+x_2+x_3=4$ چند جواب صحیح و نامنفی دارد؟

پاسخ: راه اول:

۰	۰	۴	→ ۳ جواب
۱	۱	۲	→ ۳ جواب
۰	۲	۲	→ ۳ جواب
۳	۱	۰	→ ۶ جواب
			۱۵ جواب

راه دوم: $\binom{6}{2}=\frac{6\times 5}{2!}=15$

مثال ۱۰. معادله‌ی $x_1+x_2+x_3+x_4=7$ چند جواب صحیح و مثبت دارد؟

پاسخ: x_i ها حداقل می‌توانند ۱ باشند، پس: $k=4$ و $n=7-4=3$. درواقع، این حالت با حالت انتخاب‌های n شاخه گل از بین k نوع گل، با شرط انتخاب حداقل یک شاخه از هر نوع گل معادل و برابر است با: $\binom{n-1}{k-1}=\binom{6}{3}$.

مثال ۱۱. معادله‌ی $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=8$ با شرط $x_2>1$ و $x_4\ge 1$ چند جواب صحیح و نامنفی دارد؟

پاسخ:

$$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=8-2-1$$

توضیح جبری این جواب:

$$x_2\ge 2\to x_2-2\ge 0 \text{ و } x_2-2=y_2\Rightarrow x_2=y_2+2$$
$$x_4\ge 1\to x_4-1\ge 0 \text{ و } x_4-1=y_4\to x_4=y_4+1$$
$$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=8$$
$$\to x_1+y_2+2+x_3+y_4+1+x_5=8$$
$$x_1+y_2+x_3+y_4+x_5=\underbrace{8-2-1}_{5}\Rightarrow$$

$\binom{9}{4}=$ تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی

این مسئله نیز با حالتی که بخواهیم از بین ۵ نوع گل، ۸ شاخه انتخاب کنیم، با شرط آن‌که از گل نوع دوم حداقل ۲ شاخه و از گل نوع چهارم حداقل ۱ شاخه انتخاب شده باشد، معادل است.

مثال ۱۲. معادله‌ی $x_1+x_2+x_3=4$ با شرط $0\le x_i\le 2$ و $i=1,2,3$ چند جواب صحیح و نامنفی دارد؟

پاسخ:

$$A_1=\{(x_1,x_2,x_3)\ |x_1\ge 3\}$$
$$A_2=\{(x_1,x_2,x_3)\ |x_2\ge 3\}$$
$$A_3=\{(x_1,x_2,x_3)\ |x_3\ge 3\}$$

$$x_1+x_2+x_3=4-3=1\to\binom{3}{2}=3\Rightarrow |A_1|=3$$

مجموعه‌ی مورد نظر به صورت زیر است:

$$\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\overline{A_3}=(\overline{A_1\cup A_2\cup A_3})$$
$$\Rightarrow|\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\overline{A_3}|=|\overline{A_1\cup A_2\cup A_3}|$$
$$=|S|-|A_1\cup A_2\cup A_3|=15-3\times 3=6$$

$|S|=\binom{6}{2}=15$ (کل جواب‌ها)

$$|A_1|=3=|A_2|=|A_3|$$
$$|A_1\cap A_2|=|A_2\cap A_3|=|A_1\cap A_3|=0$$

(برای محاسبه‌ی $|A_1|$ می‌باید تعداد جواب‌های معادله را با شرط $x_1\ge 3$ پیدا کنیم که برابر است با تعداد جواب‌های معادله‌ی $y_1+x_2+x_3=4-3$؛ یعنی: $\binom{3}{2}$).

$$|A_1\cap A_2\cap A_3|=0$$

نکته:

تعداد جملات بسط $(a_1+a_2+\cdots+a_k)^n$ برابر است با تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله‌ی $x_1+x_2+\cdots+x_k=n$ ؛ یعنی برابر است با: $\binom{n+k-1}{k-1}$.

زیرا هر جمله‌ی بسط فوق شامل عبارت $(a_1^{x_1}a_2^{x_2}\cdots a_k^{x_k})$ است که در آن باید: $x_1+x_2+\cdots+x_k=n$. تعداد جواب‌های معادله‌ی اخیر نیز همان تعداد جملات بسط است.

مثال ۱۳ . تعداد جملات بسط $(a+b+c)^9$ را به دست آورید.

$$x+y+z=9 \to \binom{11}{2}=55$$

توجه: تعداد جواب‌های صحیح و مثبت نامعادله‌ی $x_1+x_2+\cdots+x_k<n$ برابر است با تعداد جواب‌های صحیح و مثبت معادله‌ی $x_1+x_2+\cdots+x_k+x_{k+1}=n\ (x_{k+1}>0)$ ؛ یعنی برابر است با: $\binom{n-1}{k}$.

مثال ۱۴ . تعداد جواب‌های صحیح و مثبت این نامعادله را بیابید.

$$x+y+z<7$$

$$x+y+z<7 \Leftrightarrow x+y+z+t=7 \to \binom{6}{3}$$

نکته:

الف) تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی نامعادله‌ی $x_1+x_2+\cdots+x_k<n$ با تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله‌ی $x_1+x_2+\cdots+x_k+x_{k+1}=n$ ، با شرط $x_{k+1}\geq 1$ ، یعنی با تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله‌ی $x_1+x_2+\cdots+x_k+x_{k+1}=n-1$ ، یعنی: $\binom{n-1+k}{k}$ ، برابر است.

ب) در اعداد صحیح همواره می‌توان از نامساوی $a\leq b$ نامساوی $a<b+1$ را نتیجه گرفت. بنابراین، اگر نامعادله با رابطه‌ی کوچک‌تر یا مساوی (≤) مورد نظر باشد، ابتدا یک واحد به عدد n می‌افزاییم و سپس با توجه به دو نکته‌ی قبل، تعداد جواب‌های مورد نظر را محاسبه می‌کنیم.

$$a\leq b \Leftrightarrow a<b+1$$
$$x+y+z\leq 7 \to x+y+z<8$$

تفریح اندیشه

● حسین نامی ساعی

پارادوکس (متناقض نما)

آیا قبول دارید که پول توجیبی شما همیشه برابر است با پول توجیبی دوستتان!؟ اگر قبول ندارید این مطلب را بخوانید:

فرض کنید پول توجیبی شما A تومان و پول توجیبی دوستتان B تومان باشد. بنابراین میانگین پول شما و دوستتان برابر است با:

$$2C=A+B \quad \text{یا} \quad C=\frac{A+B}{2}$$

با ضرب (A-B) در رابطه قبل داریم:

$$(A-B)(A+B)=(A-B)2C$$
$$A^2-B^2=2CA-2CB$$
$$A^2-2CA=B^2-2CB$$

C^2 را به طرفین بیفزاییم:

$$A^2-2CA+C^2=B^2-2CB+C^2$$
$$(A-C)^2=(B-C)^2$$

پس:

$$(A-C)=(B-C)$$

حذف (-C) از طرفین:

$$A=B$$

ادب ریاضی

لابد میل دارید بدانید که «اراتوستن» چگونه برای اندازه‌گیری زمین اقدام کرد. استدلال او، این بود: با توجه به این که محیط دایره به ۳۶۰ درجه تقسیم می‌شود، اگر من بتوانم طول یک درجه‌ی آن را بر حسب استاد «stade» معین کنم (هر استاد تقریباً ۱۵۷/۵ متر است)، برای تعیین محیط کره‌ی زمین کافی است که عدد حاصل را در ۳۶۰ ضرب کنم. در واقع، مطلب رجوع شده بود به این که طول کمان یک درجه را معین کنند.

پاسخ‌گو باشید، چگونه؟

(قسمت اول)

● دکتر غلامرضا یاسی‌پور

اشاره

استاد محمدهاشم رستمی عضو هیأت تحریریه‌ی مجله‌ی رشد برهان متوسطه و مؤلف کتاب درسی دوره‌ی متوسطه و عضو شورای برنامه‌ریزی درسی گروه ریاضی دفتر تألیف و برنامه‌ریزی درسی و مؤلف دایرة‌المعارف‌های هندسه ۱۷ جلد و... هستند که ۴۵ سال سابقه‌ی تدریس دارند. در این شماره با ایشان به گفت‌وگو نشسته‌ایم.



■ در دفتر مجله‌ی ریاضی رشد برهان متوسطه، خدمت جناب استاد محمدهاشم رستمی هستیم. آقای رستمی، من این مصاحبه را چهار قسمت کرده‌ام و هر قسمت چند سؤال دارد. قسمت اول مربوط به زندگی متعارف شماست، یعنی زندگی مادی؛ بعداً به بخش معنوی می‌رسیم. اولین سؤال این است که: اهل کجا هستید؟ حتماً همشهریان شما خوشحال می‌شوند که از شهرستانشان شخصیتی مثل شما برخاسته و موفق به انجام کارهای خیلی جالبی شده است که در ادامه به آن‌ها اشاره می‌کنیم. اهل کجا هستید؟

● بسم‌الله الرحمن الرحیم. از لطف شما

و دیگر دوستان در مجله‌ی رشد برهان متوسطه تشکر می‌کنم. متولد ۱۳۱۸ هستم در طبس.

■ **کودکی و نوجوانی‌تان را کجا گذراندید؟ بچه‌ها و دبیران دلشان می‌خواهد با این جزئیات آشنا شوند.**

● در طبس و فردوس، و دوره‌ی دوم دبیرستان را هم در مشهد.

■ **از طبس تا مشهد چه قدر فاصله است؟**

● حدود ۵۰۰ کیلومتر.

■ **و چه‌طور آمدید؟**

● در طبس و فردوس رشته‌ی ریاضی وجود نداشت. بعد از سیکل اول دبیرستان، سیکل دوم دبیرستان تقسیم می‌شد به‌رشته‌های طبیعی، ریاضی و ادبی و من هم علاقه‌مند بودم در رشته‌ی ریاضی تحصیل کنم. بنابراین به جوار امام رضا(ع) آمدم.

■ **این ۵۰۰ کیلومتر را خودتان طی کردید یا با خانواده آمدید؟**

● طبیعتاً، در شروع با خانواده، ولی بعداً تنها بودم.

■ **دبیرستان را تا آخر در مشهد بودید؟**

● بله در دبیرستان «ابومسلم» مشهد. دیپلم ریاضی را سال ۱۳۳۸ گرفتم.

■ **از پدر و مادرتان چه خاطراتی دارید؟**

● خاطرات مربوط به پدر و مادر خاطراتی هستند که همواره در ذهن هر فرزندی می‌مانند. پدر و مادر من، خدا رحمتشان کند، هر دو فوت شده‌اند. آن‌چه که من به یاد دارم، این است که پدرم، با وجودی که جزو تحصیلکرده‌های آن زمان نبود، ولی سواد ششم ابتدایی آن زمان را داشت و اهمیت زیادی برای تحصیل علم قائل بود.

■ **برای آن زمان خیلی بوده، کم نبوده است!**

● بله، گواهی‌نامه‌ی ششم ابتدایی را در آن زمان گرفته بود. علاقه‌ی زیادی داشت که درس بخوانم. به همین دلیل، هم دور بودن و هم هزینه‌ی تحصیل مرا در مشهد، برای یک زندگی مستقل، تحمل کرد. این است که من به سهم خودم از ایشان ـ خدا رحمتش کند ـ سپاس‌گزارم و امیدوارم بتوانم با کارهایی که انجام داده‌ام یا کارهایی که در حال حاضر از دستم برمی‌آید، گوشه‌ای از زحمت‌های پدر و مادرم را جبران کنم.

■ **اگر خاطراتی از معلمین دبستان و دبیرستانتان دارید، بفرمایید.**

● نظام تعلیم و تربیت در سال‌های ۱۳۲۷-۲۸ نظام دیکتاتوری بود، و نظم و ترتیب خشکی داشت. در بعضی موارد هم، ترکه‌ی انار برقرار بود.

■ **شما هم خودتان چوب خورده‌اید؟ ترکه‌ی انار؟**

● تا آن‌جا که یادم هست، راه منزل تا مدرسه (دبستان)، راهی طولانی بود و گاهی اوقات دیر به مدرسه می‌رسیدم. در این موارد برای توضیح تأخیر ورود، با خواهر بزرگ‌ترم می‌رفتیم تا شفاعت مرا بکند که دیر رسیده‌ام. این را یادم هست، ولی چوب خوردن یادم نیست.

■ **خوب پس شاگرد زرنگی بودید.**

● بله، از ابتدای تحصیل. در سال ششم ابتدایی در شهرستان شاگرد اول شدم و در دوره‌ی لیسانس در دانش‌سرای عالی تهران هم شاگرد دوم شدم.

■ **از معلمین دبستان و دبیرستانتان هم خاطراتی دارید؟ مثلاً آن‌هایی که در دبستان سخت‌گیری می‌کردند؛ احتمالاً در سیکل اول دبیرستان.**

● مدارس، چه دبستان چه دبیرستان، نظم خاص خودشان را داشتند. انضباط حاکم بر مدارس، تقریباً در سرتاسر ایران یکسان بود. معلم با اقتدار و هم‌چنین ناظم و مدیر مدرسه. تدریس هم به صورت معلم‌محوری بود. دبیرستان ابومسلم در آن زمان، جزو بهترین دبیرستان‌های مشهد بود و معلمینش با روش‌های آموزشی جدید بیشتر آشنا بودند؛ به همین علت قدری با مدارس دیگر متفاوت بود. دبیران خیلی خوبی داشتیم که من اسامی بعضی از آن‌ها را یادم هست. آقایان: **مرتضی هندی‌نژاد، بهادرزاده، صدقیانی، دکتر ربانی، دکتر رکنی، آخوندزاده، ذات‌علیان و موسوی**. رئیس دبیرستان هم آقای **صدقیانی** بودند که درس جبر را هم تدریس می‌کردند. من از همه‌ی این معلمین گران‌قدر سپاس‌گزاری می‌کنم.

■ **پس معلمین خوبی داشتید.**

● بله، از سال چهارم تا سال ششم دبیرستان، معلمین بسیار خوبی داشتیم؛ هم زبده و هم علاقه‌مند. وجود این معلمین در حقیقت انگیزه‌ی مضاعفی در من ایجاد کرد و علاقه‌ی بیشتری نسبت به ریاضیات و همین‌طور نسبت به معلمی ریاضی پیدا کردم.

■ **چه سالی به دانشگاه رفتید و استادانتان چه کسانی بودند؟**

● سال ۱۳۳۸، وارد دانش‌سرای عالی تهران شدم، در رشته‌ی ریاضی. سال



۱۳۴۱ هم فارغ‌التحصیل شدم. دوره‌ی لیسانس سه ساله بود که بعد از این سه سال، در حقیقت هم لیسانس ریاضی و هم لیسانس علوم تربیتی داده می‌شد؛ چون در دانش‌سرای عالی، علاوه بر دروس خاص دبیری ریاضی، دروس علوم تربیتی هم جزو برنامه‌ی درسی بود.

استادان ما استادان بنام آن زمان بودند. از آن جمله‌اند: آقایان دکتر **هشترودی**، **پروفسور فاطمی**، **دکتر بهفروز**، **دکتر منوچهر وصال**، **دکتر کامکار پارسی**، **دکتر تسلیمی**، **دکتر جوان‌شیر**، و **دکتر علی‌نقی وحدتی** که ریاضی و نجوم تدریس می‌کردند. این‌ها در حقیقت جزو استادان برجسته‌ای بودند که من در خدمتشان شاگردی کردم.

■ **از هم‌شاگردی‌هایتان نام ببرید؛ کسانی که الان یادتان هست و سرکار هستند.**

● از هم‌شاگردی‌ها، **آقای احمد قندهاری**، دوست عزیز من، از هم‌کلاسی‌های ما بودند و از دوستان دیگر، **آقای محمود تلگینی** هستند که جزو مؤلفان کتاب‌های درسی‌اند و الان اصفهان هستند. آقایان: **علاءالدّین جوادی‌ابهری**، **کاظم همدانی**، **دکتر نشوادیان**، **خالدی**، **صالحی**، **صادقی**، **عطار**، **استوار اسفندآبادی**، **دستجردی**، **عابدی مربی هروی و بابایی**، ... و خانم‌ها: **نصر اصفهانی**، **قانعی و صانعی** که از هم‌کلاسی‌های خوب ما بودند. ۳۰ نفر دانشجو بودیم که این سه سال را با هم گذراندیم. شاگرد اول دوره‌ی تحصیلی ما آقای **دکتر یاسایی** بودند که مرحوم شدند؛ خدا رحمتشان کند. من هم شاگرد دوم شدم.

■ **راجع به دو نفر از استادانتان، یکی دکتر هشترودی و یکی پروفسور تقی فاطمی، اگر خاطراتی دارید، بفرمایید.**

● پروفسور فاطمی واقعاً نمونه‌ی یک معلم واقعی بودند؛ دلسوز، مهربان، و در عین حال جدی و سخت‌گیر.

■ **و باسواد.**

● و با سواد.

■ **این خیلی نکته‌ی مهمی است، بسیار باسواد بود!**

● و یک معلم به معنای واقعی. طبیعتاً در تغییر و تحول آموزش و پرورش در دنیا، روش‌ها عوض می‌شوند، دانش‌ها تغییر و تکامل پیدا می‌کنند، ولی نسبت به آن زمان و زمان حاضر، من می‌توانم بگویم ایشان جزو بهترین الگوهای معلمی برای کسانی بودند که بعداً می‌خواستند شغل معلمی را انتخاب کنند. ایشان در حقیقت ممتحن روش تدریس بودند. چون یکی از دروسی که باید دانشجویان دانش‌سرای عالی می‌گذراندند، واحد تدریس عملی بود که برای این درس، چند ساعت در مدارس به صورت عملی کار می‌کردند. بخشی از آن مشاهده بود و بخشی دیگر تدریس عملی. بعد هم امتحان عملی گرفته می‌شد. امتحان تدریس عملی با دانش‌آموز واقعی و در کلاس واقعی گرفته می‌شد که اگر کسی از عهده‌ی آن برمی‌آمد، در حقیقت سند دبیری یا معلمی‌اش صادر می‌شد. یکی از ممتحنین این درس، **استاد پروفسور فاطمی** بودند و یکی هم **استاد پاسارگادی** که ممتحن درس روش تدریس من بودند.

استاد هشترودی هم با توجه به سطح علمی بالایی که داشتند، بیشتر مباحثی را که مطرح می‌کردند، بحث‌های کاربرد ریاضیات در دانش روز و از جمله فرستادن قمرهای مصنوعی به فضا بود.

■ **فکر می‌کنم در مقایسه با پروفسور تقی فاطمی، قدری مطالبشان نوتر بود.**

● ایشان در ارتباط با کارهایی که انجام داده بودند، مانند محاسباتی که برای فرستادن قمرهای مصنوعی، مثل اسپوتنیک روس‌ها به فضا انجام داده بودند، و مقاله‌هایی که در کنفرانس‌های علمی ارائه کرده بودند، اطلاعاتی می‌دادند که برای ما خیلی جالب بود و خود این‌ها برای ما انگیزه ایجاد می‌کرد؛ برای این که بدانیم دریچه‌های علم باز است و امتداد علم هم خیلی طولانی. یعنی در حقیقت، هر قدر بیشتر کسی دنبال علم برود، باز هم جا برایش در این راه وجود دارد.

■ **در شرح حال دکتر فاطمی خواندم که ایشان در اعزام دانشجویان به خارج از**

کشور، شاگرد اول شده بود و شاگردان اول عموماً می‌باید پزشکی بخوانند، ولی ایشان معلمی و معلمی ریاضی را انتخاب کردند. دکتر هشترودی تا سال‌های آخر رشته‌ی پزشکی را خوانده بود، ولی بعد به رشته‌ی ریاضی رفته بود و جزو برجسته‌ترین دانشجویان کشور فرانسه محسوب می‌شد. نسبت به پروفسور فاطمی هم نوگراتر بود.

● البته رشته‌های تحصیل و تدریس آن‌ها با هم فرق می‌کرد. به‌نظر من، هر کدام در کار خود جزو بهترین‌ها بودند.

■ خوب سؤال بعدی این است که آیا تشکیل خانواده داده‌اید؟ کی؟ بلافاصله؟ البته به هر کدام نخواستید جواب بدهید، می‌توانید جواب ندهید. ولی دوستان دلشان می‌خواهد که از این جزئیات هم کمابیش خبر داشته باشند.

● سال ۱۳۴۳ ازدواج کردم، با خانم سیمین‌دخت ترکپور.

■ که مؤلف هم هستند.

● مؤلف و مترجم کتاب هستند و هم‌دوره در دانش‌سرای عالی بودیم.

■ رشته‌ی ریاضی؟

● خیر، ایشان در رشته‌ی ریاضی نبودند، در رشته‌ی دیگری بودند. و سه فرزند داریم: دکتر مهرداد رستمی که دکترای برق در گرایش قدرت هستند و استاد دانشگاه و هیئت علمی دانشگاه شاهد، دکتر کتایون رستمی که پزشک است و دختر بزرگم، و دکتر آتوسا رستمی که دختر کوچکم است و دندانپزشک.

■ پس شما خیلی موفق بوده‌اید. خب سؤال بعدی من باز در مورد فرزندانتان است؛ البته فرزندان علمی‌تان، یعنی تألیفات شما. راجع به دایرة‌المعارف هندسه بعد صحبت می‌کنیم، چون باید قدری مفصل‌تر صحبت کنیم. غیر از آن، تألیفاتتان را بفرمایید.

● شمار تألیفات من بدون احتساب ۱۷ جلد دایرة‌المعارف هندسه، بیش از ۴۵ جلد است که از این تعداد، پنج جلد آن کتاب‌های درسی وزارت آموزش و پرورش است، از این قرار:

◆ **کتاب ریاضی اول دبستان و کتاب راهنمای معلم**، سال ۱۳۶۰، با همکاری آقایان **دکتر کاظم للّهی و دکتر رحیم کریم‌پور**.

◆ **کتاب ریاضی۳** برای سال سوم متوسطه رشته‌ی علوم تجربی نظام جدید، در سال ۱۳۷۳ با همکاری آقایان **دکتر محمد گودرزی و عبدالحمید عطوفی**.

◆ **کتاب هندسه‌ی۲** برای سال سوم متوسطه رشته‌ی ریاضی و فیزیک نظام جدید در سال ۱۳۷۴، با همکاری آقای **جواد حاجی‌بابایی** و دیگران.

◆ **کتاب ریاضی۳** برای سال سوم رشته‌های فنی و کاردانش در سال ۱۳۸۳، با همکاری آقایان **دکتر اسماعیل بابلیان و دکتر جواد لتالی**.

کتاب‌های دیگرم، کتاب‌های کمک‌آموزشی و کمک‌درسی هستند که تعدادی از آن‌ها را نام می‌برم:

الف) تعدادی از کتاب‌هایی که به تنهایی تألیف کرده‌ام:

● **کتاب کار هندسه(۱)** برای دانش‌آموزان سال دوم رشته‌های علوم تجربی و ریاضی فیزیک.

● **کتاب کار هندسه(۲)** برای دانش‌آموزان سال سوم رشته‌ی ریاضی و فیزیک

● **کتاب هندسه‌ی تحلیلی** (بردار، خط و صفحه در فضا) برای دانش‌آموزان پیش‌دانشگاهی رشته‌ی ریاضی فیزیک که بیست‌وپنجمین کتاب کوچک ریاضی است.

● جلد اول **کتاب مکان هندسی** برای دانش‌آموزان دبیرستان و پیش‌دانشگاهی، معلمین ریاضی و داوطلبان المپیادهای ریاضی.

● دو جلد **جبر پایه** برای دانش‌آموزان سال‌های سوم و چهارم متوسطه نظام قدیم و نظام جدید رشته‌های علوم تجربی و ریاضی فیزیک.

● **پرسش‌های چهارگزینه‌ای هندسه(۱)** برای دانش‌آموزان سال دوم رشته‌های ریاضی‌فیزیک و علوم تجربی و داوطلبان کنکور دانشگاه‌ها.

● **پرسش‌های چهارگزینه‌ای هندسه(۲)** برای دانش‌آموزان سال سوم متوسطه رشته‌ی ریاضی‌فیزیک و داوطلبان کنکور دانشگاه‌ها.

● ۲ **جلد تمرین ریاضی سال اول ابتدایی**

● ۲ **جلد تمرین ریاضی سال دوم ابتدایی**

● **کتاب هندسه‌ی همراه** برای دانش‌آموزان دوره‌ی متوسطه، معلمین ریاضی و داوطلبان المپیادهای ریاضی.

ب) تعدادی از کتاب‌هایی که با همکاری دوستان دیگر تألیف کرده‌ام:

● **ریاضیات سال سوم متوسطه** رشته‌ی علوم تجربی، برای دانش‌آموزان سال سوم متوسطه رشته‌ی علوم تجربی و داوطلبان کنکور.

● **ریاضی عمومی پیش‌دانشگاهی** برای دانش‌آموزان پیش‌دانشگاهی رشته‌ی علوم تجربی و داوطلبان کنکور.

● **فرهنگ ریاضیات دبیرستانی**،



برای دانش‌آموزان دوره متوسطه و معلمان ریاضی.

● ویژه‌نامه‌های برهان برای امتحانات نهایی.

■ **خوانندگان مجله‌ی رشد برهان متوسطه کمابیش با آن آشنا هستند. بعد از آن می‌رسیم به مجله‌ی رشد برهان متوسطه. کی با این مجله همکاری‌تان را شروع کردید؟**

● از پایه‌گذاری مجله، در خدمت آقای حمیدرضا امیری بودم و از اولین شماره‌ی مجله‌ی رشد برهان متوسطه جزو هیئت تحریریه. اوایل، کارهای مربوط به چند بخش از مجله را به عهده داشتم و بعد با اضافه شدن دوستان جدید، کارهای مربوط به بخش هندسه را به‌عهده گرفتم. خدا را شکر می‌کنم که توفیق داشتم تا این شماره‌ی مجله رشدبرهان متوسطه در خدمت همکاران هیئت تحریریه‌ی مجله‌ی برهان و دانش‌آموزان ارجمند باشم که البته از شماره‌ی ۲۰ در خدمت آقای میرشهرام صدر بوده‌ام و از لطف ایشان استفاده کرده‌ام و کاری که از دستم برمی‌آمده، انجام داده‌ام.

■ **بله، انتشار ۵۵ شماره مجله به طور مداوم مشکل است. از شاگردان زرنگتان و شاگردان شلوغ، چه خاطرات حائز اهمیتی دارید؟**

● تقریباً می‌توانم بگویم که من شاگردی به اسم شاگرد شلوغ نداشتم. کاری که در چهل و چند سال تدریس داشتم این بود که در اولین جلسه‌ی درس با دانش‌آموزان صحبت می‌کردم و برای ایشان روشن می‌کردم، شمایی که این‌جا نشسته‌اید، چه وظیفه و تکلیفی دارید، چه هزینه‌ای دارد برای شما پرداخته می‌شود و من که این‌جا هستم، چه وظیفه‌ای دارم و چه باید بکنم. مسائل را می‌شکافتم و روشن می‌کردم، هر **لحظه‌ای که دانش‌آموز در کلاس درس حاضر است، ارزش زیادی دارد و برای آن لحظه،** سرمایه‌گذاری مادی و معنوی شده است. پدر و مادر، دولت، ... و دبیر، همه‌ی این‌ها جزو سرمایه‌گذاران مادی و معنوی هستند که در خدمت آموزش شما دانش‌آموزان عزیز قرار دارند. **وظیفه‌ای که شما دارید این است که پاسخ‌گو باشید! چگونه؟** با موفقیت آخر سال، در حقیقت موفقیت شما در پایان سال تحصیلی، پاسخ همه‌ی آن زحمت‌هایی هست که برای شما کشیده می‌شود. بنابراین از هر لحظه‌اش باید استفاده کنید.

با توجه به این صحبت‌ها، از ابتدای سال شاگردان، چه در دبیرستان البرز که ده سال در آن تدریس داشتم، و چه در دبیرستان‌های دیگر از جمله دبیرستان اسدآبادی در تهران در میدان رشدیه، با علاقه‌مندی سر کلاس حاضر می‌شدند و درسشان را می‌خواندند. به جرئت می‌توانم بگویم که در این مدت حتی یک بار هم، من دانش‌آموزی را از کلاس اخراج نکردم و دانش‌آموزی را هم ندیدم که از من ناراضی باشد.

■ **از شاگردانتان، کسانی که شهرتی پیدا**

کردند، الان کسی یادتان هست؟

● من زیاد بررسی نکرده‌ام. ولی گاه به تعدادی از آن‌ها برخورده‌ام و دیده‌ام که لطف و محبت داشتند و افراد موفقی در اجتماع بودند؛ حتی در سطح وزیر و در مشاغل دیگر. عده‌ای هم مثل خود من دبیر و معلم شدند که بعضی از آن‌ها را دیده‌ام که با اشک چشم به استقبال من آمده‌اند و این برای من بهترین پاداش و سرمایه است.

■ **خب، در سؤال بعدی‌مان کمی وارد مقولات معنوی می‌شویم. از کی به هندسه علاقه‌مند شدید؟ چون رشته‌ی اصلی و تخصصی شما ظاهراً هندسه است. اگر غیر از این است، خودتان بفرمایید. ولی در هندسه کار زیاد کرده‌اید و خیلی شهرت دارید. کی به این رشته از علوم علاقه‌مند شدید؟**

● از دوره‌ی دبیرستان به درس هندسه علاقه‌مند بودم و معمولاً به عنوان منبع حل‌کننده‌ی مسئله‌های هندسه برای هم‌کلاسی‌هایم بودم. در دوره‌ی تحصیل در دانش‌سرای عالی هم استاد دکتر محسن هشترودی، درس هندسه‌ی ما را تدریس می‌کردند و بر این نکته تأکید داشتند که هر فردی هندسه می‌داند، در یادگیری دروس دیگر نیز تواناتر است؛ هندسه قوه‌ی تفکر و خلاقیت را تقویت می‌کند. به همین دلایل، از ابتدای شغل معلمی‌ام به تدریس هندسه پرداختم و در مقاطعی، دروس دیگر ریاضی مانند جبر و آنالیز، حساب استدلالی و مثلثات را نیز در دبیرستان‌های محل خدمتم برحسب نیاز تدریس کردم. اما تدریس هندسه در تمام دوران چهل و چند ساله‌ی تدریسم، جزو برنامه‌ی ثابت کاری من بود.

■ **سؤال بعد که یک سؤال فنی است: نقش هندسه در درک ریاضی چیست؟**

● این موضوع بسیار مهم است. خیام در رساله‌ی «شرح ما اَشْکَلَ من مصادرات **اقلیدس**» می‌گوید: «این جزو از حکمت که آن را علوم ریاضی می‌نامند، آسان‌ترین اجزای حکمت است، هم در ادراک تصوری و هم در تصدیق. اما آن رشته که مربوط به عدد و حساب باشد، خود واضح و آشکار است. بخش هندسیات نیز بر کسانی که دارای فطرت سلیم و رأی راست و جودت حدس باشند، پنهان نباشد و فایدت علوم ریاضی این است که موجب ورزیدگی ذهن و تند کردن خاطر گردد و نیز نفس را عادت دهد تا از قبول اموری که مقرون به دلیل و برهان نباشد، اجتناب کند و سبب این امر، همانا سهولت براهین و نزدیک بودن ماخذ آن به ذهن و معاونت تخیل است با تعقل، و قلت مخالفت و هم با عقل...»

پروفسور **جورج پولیا**، استاد بزرگ آموزش ریاضی در قرن حاضر می‌گوید: «**اگر تعلیم و تربیت عمومی در صدد ارزانی داشتن نظام منطقی به دانشجویان است، باید در آن، مقام خاصی برای استدلال‌های هندسی درنظر گرفته شود. حتی استدلال‌های ساده ممکن است از دیدگاه هوش‌افزایی، سودمند واقع شود.**»

آنچه که بسیاری از ریاضی‌دانان دنیا بر آن تأکید کرده‌اند، این است که هندسه قدرت تفکر و خلاقیت را بالا می‌برد و باعث نظم فکری می‌شود. شاید جنبه‌ای از این مطلب، برمی‌گردد به مسئله‌ی اصل موضوعی بودن هندسه. هندسه‌ای که تا به حال بیشتر رایج بوده، هندسه اصل موضوعی **اقلیدس** است؛ یعنی هندسه‌ای است که بر اساس اصول موضوع بنیان نهاده شده است. هندسه‌های نااقلیدسی و هندسه‌های جدید که بعداً مطرح شدند، شاید هیچ‌کدام از این نظر، قدرت هندسه‌ی اقلیدسی را نداشته باشند.

من مثالی را در این مورد بیان کنم: **دیودونه**، یکی از ریاضی‌دانان مشهور فرانسه که به ایران هم آمد، گفت اقلیدس باید برود و هندسه اقلیدسی باید کنار گذاشته شود. همین کار را هم در فرانسه و هم در آمریکا انجام دادند. مدت زیادی طول نکشید، آن چنان افت ریاضی به خصوص در آمریکا، ایجاد شد که موجب عقب‌ماندگی آن‌چنانی آمریکایی‌ها در پرتاب ماهواره‌های سرنشین‌دار گردید. وقتی که شوروی اولین ماهواره‌ی سرنشین‌دار را به فضا پرتاب کرد، دانشمندان ریاضی آمریکا گرد هم آمدند تا برای جبران افت ریاضی کشورشان و رسیدن به دانش روز، چاره‌ای بیندیشند. این ریاضی‌دانان برجسته، دلایل افت ریاضی را بررسی و بیانیه‌ای صادر کردند. در این بیانیه اشاره کرده بودند که یکی از دلایل افت ریاضی، حذف هندسه‌ی اصل موضوعی **اقلیدسی** و در حقیقت کم‌رنگ شدن هندسه‌ی اقلیدسی در برنامه‌ی درسی آمریکا و اروپا بوده است. بعد هم مجدداً هندسه‌ی اقلیدسی را وارد برنامه‌های درسی کردند. در حال حاضر، در استانداردهای موضوعی برنامه‌ی درسی NCTM که استانداردهای برنامه‌ی درسی جهانی هستند، و تعداد کثیری از کشورها آن‌ها را پذیرفته‌اند، **یکی از استانداردهای موضوعی مهم را هندسه قرار داده‌اند.**

ادامه دارد...



اشاره:
در شماره‌ی گذشته رسم نمودار توابع چندجمله‌ای و مثلثاتی را بررسی کردیم، اینک به رسم نمودار توابع کسری می‌پردازیم. بهتر است قبل از مطالعه‌ی این مقاله، قسمت اول آن را از شماره‌ی قبل مطالعه کنید.

رسم نمودار تابع بدون مشتق

(قسمت ۲)

● مجتبی رفیعی
دبیر ریاضی منطقه‌ی شهر قدس

رسم نمودار تابع $\frac{1}{f}$ از روی تابع f

الف) جهت حرکت f و $\frac{1}{f}$ خلاف یکدیگرند.

ب) همواره مقادیر f و $\frac{1}{f}$ هم‌علامت‌اند.

پ) اگر نقطه‌ی $M\Big|_{f(a)}^{a}$ نقطه‌ی می‌نیمم (ماکزیمم) تابع f باشد، نقطه‌ی $M'\Big|_{\frac{1}{f(a)}}^{a}$ نقطه‌ی ماکزیمم (می‌نیمم) تابع $\frac{1}{f}$ است.

ت) هرگاه $\lim_{x\to a} f(x)=0$ باشد، آن‌گاه $\frac{1}{f}$ در $x=a$ مجانب قائم دارد.

ث) اگر $y=b$ مجانب افقی تابع f باشد، آن‌گاه $y=\frac{1}{b}$ مجانب افقی تابع $\frac{1}{f}$ است.

ج) اگر در اثر میل x به سمت بی‌نهایت، تابع y نیز به سمت بی‌نهایت میل کند، آن‌گاه $y=\frac{1}{f}$ دارای مجانب افقی به معادله‌ی $y=0$ است.

چ) اگر تابع f در یک بازه صفر شود، آن‌گاه تابع $\frac{1}{f}$ در آن بازه تعریف نمی‌شود.



ح) محل تقاطع f و $\frac{1}{f}$ در صورت وجود، روی خطوط $y = \pm 1$ است (زیرا $f = \frac{1}{f} \Rightarrow f = \pm 1$).

نمودار توابع ذیل را رسم کنید:

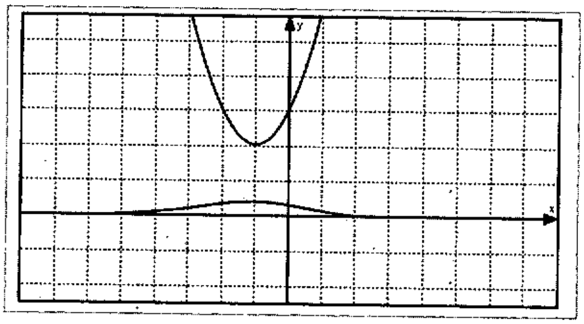
$$1)\quad y = \frac{1}{x^2 + 2x + 3}$$

گام اول: نمودار تابع با ضابطه‌ی $y = x^2 + 2x + 3$ را رسم می‌کنیم.

گام دوم: طبق قسمت ج $y = 0$ مجانب افقی تابع است.

گام سوم: طبق قسمت پ $M'\begin{vmatrix} -1 \\ \frac{1}{2} \end{vmatrix}$ ماکزیمم تابع $\frac{1}{f}$ است.

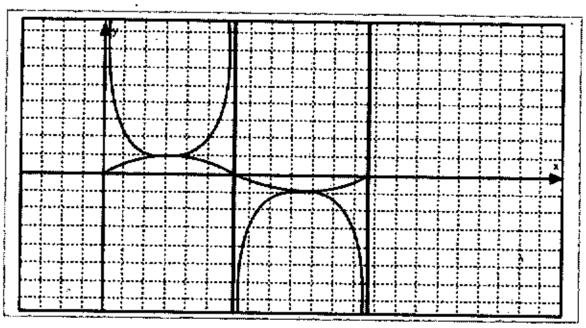
گام چهارم: طبق قسمت الف دو تابع f و $\frac{1}{f}$ جهت حرکتشان مخالف یکدیگر است و طبق قسمت ب بالای محور xها قرار دارند.



$$2)\quad y = \frac{1}{\sin x}$$

گام اول: نمودار تابع با ضابطه‌ی y=sinx در نقاط $x = k\pi$ محور xها را قطع می‌کند.

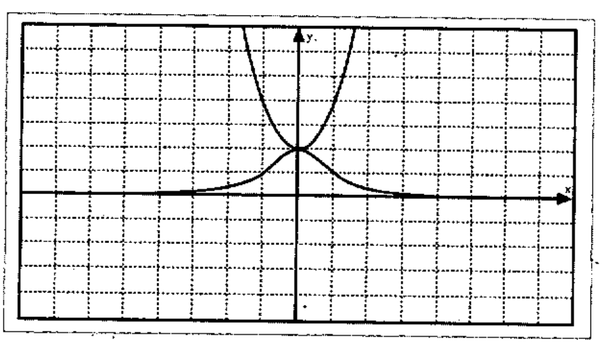
گام دوم: طبق قسمت‌های الف، ب و پ، نمودار به این صورت است.



$$3)\quad y = \frac{1}{x^2 + 1}$$

گام اول: نمودار تابع با ضابطه‌ی $y = x^2 + 1$ را رسم می‌کنیم که رأس آن $S\begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix}$ است.

گام دوم: طبق قسمت‌های الف، ب و پ نمودار به این صورت است.



نمودار توابع کسری زیر را رسم کنید:

$$1)\ f(x)=\frac{x}{x^2+1}$$

گام اول: مجانب‌های تابع را بررسی می‌کنیم:

۱. چون مخرج ریشه ندارد، بنابراین منحنی فاقد مجانب قائم است.

۲. $y=0$ مجانب افقی منحنی است، زیرا:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{x^2+1}=0\Rightarrow y=0$$

۳. چون درجه‌ی صورت از مخرج کمتر است، منحنی فاقد مجانب مایل است.

گام دوم: با حل $f(x)=0$، مقدار $x=0$ به‌دست می‌آید که طبق نکته‌ی ۱ (مقاله‌ی شماره‌ی قبل) ریشه‌ی ساده‌ی منحنی است، زیرا:

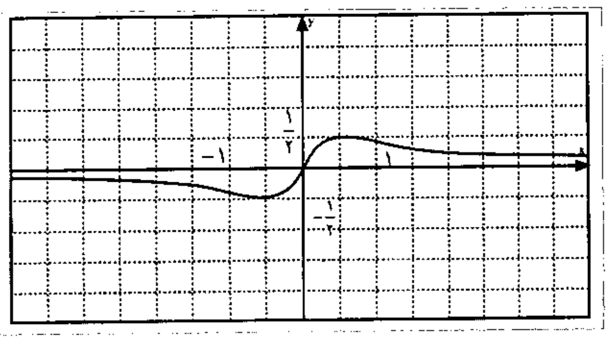
$$y=x\underbrace{\left(\frac{1}{1+x^2}\right)}_{g(x)}$$

گام سوم: برای رسم نمودار این تابع، دو نقطه‌ی دلخواه در دو طرف ریشه‌ی ساده‌ی $x=0$، انتخاب می‌کنیم و در تابع اصلی قرار می‌دهیم:

$$x=-1\Rightarrow y=\frac{-1}{1+(-1)^2}=\frac{-1}{2}$$

$$x=1\Rightarrow y=\frac{1}{1+(1)^2}=\frac{1}{2}$$

بنابراین منحنی از دو نقطه‌ی $A(-1,\frac{-1}{2})$ و $B(1,\frac{1}{2})$ در ناحیه‌ی سوم و ناحیه‌ی اول عبور می‌کند. یعنی: منحنی از منفی بی‌نهایت و پایین مجانب افقی $y=0$ شروع می‌شود و باید با عبور از نقطه‌ی A، در ناحیه‌ی سوم دارای یک می‌نیمم شود و نقطه‌ی $(0,0)$ را قطع کند و سپس با عبور از نقطه B در ناحیه‌ی اول، دارای یک ماکزیمم شود و به سمت مثبت بی‌نهایت و بالای مجانب افقی $y=0$ ادامه پیدا کند.



$$2)\ f(x)=\frac{(x-1)^2}{x^2-2x}$$

گام اول: مجانب‌های تابع را بررسی می‌کنیم:

۱. مخرج کسر را مساوی صفر قرار می‌دهیم. در این صورت نقاط $x=2$ و $x=0$ مجانب قائم منحنی هستند.

۲. $y=1$ مجانب افقی منحنی است، زیرا:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{(x-1)^2}{x^2-2x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2-2x+1}{x^2-2x}=1$$

۳. چون درجه‌ی صورت با مخرج برابر است، منحنی فاقد مجانب مایل است.

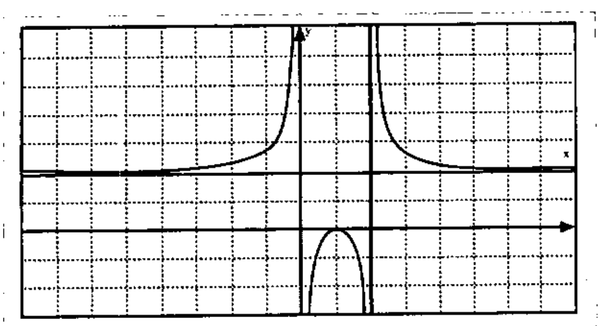
گام دوم: با حل $f(x)=0$ عامل $(x-1)^2$ به‌دست می‌آید که با توجه به نکته‌ی ۳ (مقاله‌ی شماره‌ی قبل)، نقطه‌ی $x=1$ ریشه‌ی مضاعف دارد و مماس بر محور xهاست. که منحنی در این نقطه ماکزیمم نسبی دارد، زیرا: اگر در معادله‌ی

$$f(x)=(x-1)^2\underbrace{\left(\frac{1}{x^2-2x}\right)}_{g(x)}$$

در تابع $g(x)$ مقدار ۱ را قرار دهیم، داریم:

$$g(1)=\frac{1}{(1)^2-2(1)}=-1<0$$

گام سوم: با توجه به این‌که مجانب‌های قائم منحنی ریشه‌های ساده‌ی مخرج هستند، بنابراین دو طرف مجانب‌ها انفصال ساده داریم. (یک شاخه مثبت بی‌نهایت و دیگری منفی بی‌نهایت)



نمودار تابع بالا را به روش $\frac{1}{f}$ نیز می‌توان رسم کرد.

$$۳)\ f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^3}$$

گام اول: مجانب‌های تابع را بررسی می‌کنیم:

۱. مخرج کسر را مساوی صفر قرار می‌دهیم. در این صورت $x = 0$ مجانب قائم منحنی است.

۲. $y = 0$ مجانب افقی منحنی است، زیرا:

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2 - 1}{x^3} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2}{x^3} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{x} = 0$$

۳. چون درجه‌ی صورت از مخرج کوچک‌تر است، منحنی فاقد مجانب مایل است.

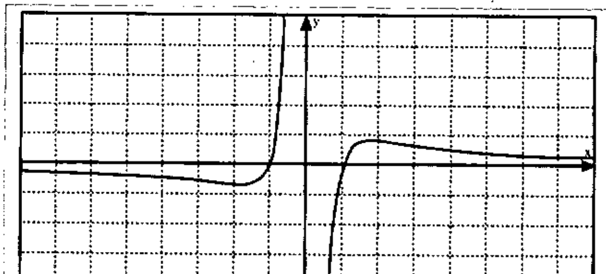
گام دوم: با حل معادله‌ی $f(x) = 0$، ریشه‌های ساده‌ی $x = -1, x = 1$ به دست می‌آیند.

گام سوم: تابع در مجانب قائم خود دارای انفصال ساده است که برای رسم نمودار، دو نقطه‌ی دلخواه یکی بزرگ‌تر از ۱ و دیگری کوچک‌تر از ۱- در تابع قرار می‌دهیم. داریم:

$$f(2) = \frac{(2)^2 - 1}{2^3} = \frac{3}{8} > 0 \Rightarrow$$ در ناحیه‌ی اول

$$f(-2) = \frac{(-2)^2 - 1}{(-2)^3} = -\frac{3}{8} < 0 \Rightarrow$$ در ناحیه‌ی سوم

اکنون با توجه به مجانب‌ها و محل تقاطع منحنی با محور xها داریم:



$$۴)\ f(x) = \frac{x^2 + 4}{x + 1}$$

گام اول: مجانب‌های تابع را بررسی می‌کنیم:

۱. مخرج کسر را مساوی صفر قرار می‌دهیم. در این صورت نقطه‌ی $x = 1$ مجانب قائم منحنی است.

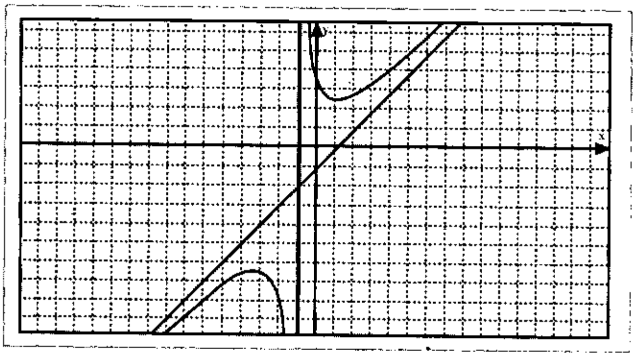
۲. تابع فاقد مجانب افقی است، زیرا:

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2 + 4}{x + 1} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} x = \pm\infty$$

۳. معادله‌ی منحنی را با استفاده از تقسیم چندجمله‌ای‌ها، به صورت $y = x - 1 + \frac{5}{x + 1}$ می‌نویسیم که با توجه به نکته‌ی ۷ (مقاله‌ی شماره‌ی قبل)، دارای مجانب مایل $y = x - 1$ است.

گام دوم: تابع $f(x) = 0$ ریشه ندارد. بنابراین منحنی محور xها را قطع نمی‌کند. یعنی دارای دو اکسترمم نسبی است.

گام سوم: چون مجانب قائم منحنی برابر ۱ و مجانب مایل آن برابر $y = x - 1$ است، آن‌ها را رسم می‌کنیم. با توجه به این که منحنی محور xها را قطع نمی‌کند، نمودار آن بین دو مجانب در بالا و پایین قرار می‌گیرد.



تمرین: نمودار توابع با ضابطه‌های زیر را رسم کنید.

$۱)\ y = \frac{1}{x^3 - 3x^2}$ $۴)\ y = \frac{2x^2 + x + 1}{x + 1}$

$۲)\ y = \frac{-2x}{1 - x}$ $۵)\ y = \frac{4}{x^2 + 3}$

$۳)\ y = \frac{x^2 + 2x - 2}{x - 1}$ $۶)\ y = \frac{x^2}{x^2 + 1}$

توجه: برای رسم دقیق نمودارها می‌توانید از نرم‌افزار Graphmathica استفاده کنید (از سایت زیر می‌توانید آن را دانلود کنید، http://www.graphmatica.com).

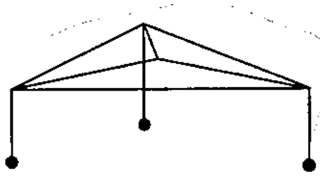
باراهیان



مسائلی با استفاده از فیزیک

در این بخش، به چند مسئله‌ی مقدماتی می‌پردازیم که به سادگی و با دقتی فیزیکی می‌توانیم آن‌ها را حل کنیم، و در موردشان توضیح می‌دهیم که چگونه شهود فیزیکی به یافتن راه‌حلی ریاضی کمک می‌کنند. کار را با مثالی در مورد مسئله‌ی «نقطه‌ی توریچلی»[1] آغاز می‌کنیم، و حل بقیه‌ی مسائل را به عنوان تمرین، به شما وامی‌گذاریم.

نقطه‌ای واقع در صفحه‌ی مثلث حادالزّوایایی را بیابید که دارای کمترین مجموع فواصل از رئوس آن مثلث باشد.



(شکل۱)

روش لایب‌نیتس[2] برای حل این مسئله چنین بود که مثلث را روی یک میز قرار دهیم و سوراخ‌هایی در هر رأس آن تعبیه کنیم. سپس از هریک از آن‌ها، مهره‌ای با وزن برابر، توسط

المپیادهای ریاضی

(قسمت هفتم)

● غلامرضا یاسی‌پور

نخی بیاویزیم. آن‌گاه سه نخ را (مطابق شکل۱) به هم گره بزنیم. در این صورت، دستگاه حاصل زمانی به تعادل می‌رسد که پتانسیل ثقل می‌نیمم باشد؛ یعنی زمانی که مجموع طول‌های اجزای نخ‌هایی که واقع بر میزند، می‌نیمم باشد. نقطه‌ی Pای که سه نخ در آن به هم بسته شده‌اند، نقطه‌ی مورد نظر ماست. از طرف دیگر، مجموع سه نیروی برابری که در P عمل می‌کنند، و نمایشگر وزن‌های مهره‌ها هستند، صفر می‌شود، زیرا تعادل برقرار است؛ در نتیجه:

$$\angle APB = \angle BPC = \angle APC = 120^\circ$$

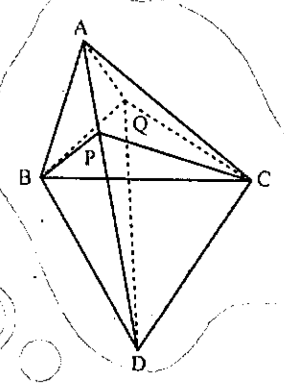
به این طریق، شهود فیزیکی به مشخص کردن مکان P کمک می‌کند. اکنون به طور دقیق ثابت می‌کنیم که اگر:

$$\angle APB = \angle BPC = \angle APC = 120^\circ$$

در این صورت، AP+BP+CP می‌نیمم است.

فرض می‌کنیم D چنان باشد که BCD متساوی‌الاضلاع باشد و چنان که BC، A و D را جدا کند (شکل۲). بنابر «قضیه‌ی پومپیو»[2]، به ازای هر نقطه‌ی Q واقع در صفحه، داریم:

$$BQ + CQ \geq QD$$



(شکل۲)

که برابری آن، اگر و تنها اگر Q بر C، دایره‌ی محیطی مثلث BCD قرار داشته باشد، برقرار است. بنابر نابرابری مثلثی، داریم:

$$AQ + QD \geq AD$$

که برابری آن، اگر و تنها اگر بر پاره‌خط AD واقع باشد، برقرار است. در نتیجه:

$$AQ + BQ + CQ \geq AD$$

و برابری، تنها اگر Q بر تقاطع C و AD، یعنی بر نقطه‌ی P منطبق باشد، برقرار است. در این صورت، نتیجه می‌شود که P، در مورد مجموع فواصل آن از رأس‌ها می‌نیمم و تنها می‌نیمم است. و به این ترتیب، مسئله حل می‌شود.

در این جا از شما دعوت می‌کنیم که صورت سه‌بعدی نقطه‌ی توریچلی را همراه با بعضی مسائل دیگر از همین نوع، بررسی کنید:

۱. بر اضلاع یک چندضلعی، بردارهای متعامدی به طول‌هایی متناسب با طول‌های اضلاع چند ضلعی و متوجه به خارج آن، در نظر می‌گیریم. نشان دهید مجموع این بردارها صفر است.

۲. عمود بر هر وجه یک چندوجهی، برداری به طولی که از لحاظ عددی با سطح آن وجه برابر و متوجه به خارج است، در نظر می‌گیریم، ثابت کنید مجموع این بردارها برابر صفر است.

۳. ثابت کنید، مجموع کسینوس‌های زوایای فرجه‌های یک چهاروجهی، متجاوز از ۲ نیست و گذشته از این برابر ۲ است، اگر و تنها اگر وجوه چهاروجهی مزبور دارای سطح یکسان باشند.

۴. فرض می‌کنیم ABCD یک چهاروجهی باشد و نیز فرض می‌کنیم، نقطه‌ی Pای واقع در درون آن و چنان باشد که مجموع فواصل P از رئوس آن می‌نیمم باشد. ثابت کنید،

نیمسازهای زوایای APB و CPD بر یک خط قرار دارند و گذشته از این، خط مزبور بر خطی عمود است که توسط نیمسازهای $\angle BPC$ و $\angle APD$ معین می‌شود.

۵. نقطه‌ای در درون یک چند وجهی محدب مفروض است. نشان دهید وجهی از این چندوجهی موجود است که تصویر این نقطه بر آن، داخل آن قرار می‌گیرد.

۶. شهرهای A و B توسط رودخانه‌ی مستقیمی جدا شده‌اند. در کدام نقطه باید پل MN را بنا کرد تا طول جاده‌ی AMNB می‌نیمم باشد.

۷. پنج نقطه بر دایره‌ای مفروض است. از مرکز دایره‌ی محیطی مثلث تشکیل شده از هر سه نقطه از آن‌ها، عمودی بر وتر واصل از دو نقطه‌ی باقی‌مانده رسم کرده‌ایم. چنین عمودی در مورد هر سه نقطه رسم شده است. ثابت کنید، ده خطی که به این طریق به دست می‌آیند، نقطه‌ای مشترک دارند. گزاره را در مورد n نقطه تعمیم دهید.

۸. جمیع مجموعه‌های متناهی S با دست‌کم سه نقطه‌ی واقع در صفحه را چنان بیابید که به ازای جمیع نقاط متمایز A و B‌ی واقع در S، عمودمنصف AB محور تقارن S باشد.

حل مسائل

۱. فرض می‌کنیم $A_1A_2\cdots A_n$ چندضلعی مورد نظر و $\bar{V}_i$ بردار عمود بر A_iA_{i+1}، $i=1,\cdots,n$ $(A_{n+1}=A_1)$ باشد. مجموع:

$$\bar{V}_1+\bar{V}_2+\cdots+\bar{V}_n$$

متناسب با دوران:

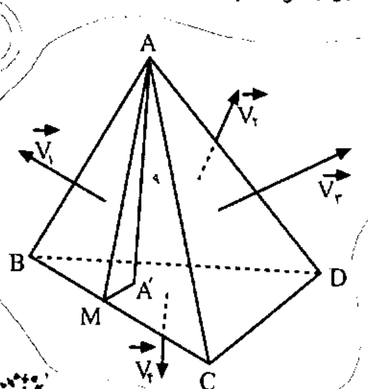
$$\overrightarrow{A_1A_2}+\overrightarrow{A_2A_3}+\ldots+\overrightarrow{A_nA_1}$$

به اندازه‌ی ۹۰ است. از آن‌جا که مجموع اخیر صفر است (بردارها، خطی چندضلعی و بسته می‌سازند)، مجموع بردارهای $\bar{V}_i$ نیز صفر است.

۲. این مسئله صورت خاصی از مسئله‌ی پیشین است که دارای «تعبیر فیزیکی» به این شرح است: اگر چندوجهی را با گازی، در فشار عدداً برابر یک، پر کنیم، آن‌گاه بنابر قانون پاسکال، بردارها نیروهایی هستند که بر وجوه چندوجهی عمل می‌کنند. ویژگی مورد بحث این است که مجموع این نیروها صفر می‌شود. یعنی چندوجهی در حال تعادل است. این موضوع از نظر گاه فیزیکی واضح است، زیرا هیچ نیروی خارجی بر آن عمل نمی‌کند.

توجه داشته باشید که کافی است، ویژگی مورد نظر را برای یک چهاروجهی اثبات کنیم. در این صورت، حالت چندوجهی عمومی به سادگی با تقسیم چندوجهی به چهار وجهی‌ها و استفاده از این مطلب که نیروهای واقع بر دیواره‌های داخلی یکدیگر را حذف می‌کنند، به دست می‌آید.

فرض می‌کنیم ABCD چهاروجهی و $\bar{V}_1$، $\bar{V}_2$، $\bar{V}_3$ و $\bar{V}_4$، چنانچه در شکل ۳ نشان داده شده است، چهار بردار عمود بر وجوه آن باشند.



(شکل۳)

فرض می‌کنیم α_1، α_2 و α_3 زاویه‌هایی باشند که صفحات (ABC)، (ABD)، و (ACD) با صفحه‌ی (BCD) می‌سازند. به خاطر سادگی کار، اثبات را در حالتی انجام می‌دهیم که هر سه زاویه حاده باشند. سایر حالات مشابه همین حالت هستند.

مؤلفه‌ی قائم[۴] $\bar{V}_1+\bar{V}_2+\bar{V}_3$، به طرف بالا متوجه، و دارای طول زیر است:

$$\|\bar{V}_1\|\cos\alpha_1+\|\bar{V}_2\|\cos\alpha_2+\|\bar{V}_3\|\cos\alpha_3$$

این مقدار با

$$\delta_{ABC}\cos\alpha_1+\delta_{ABD}\cos\alpha_2+\delta_{ACD}\cos\alpha_3$$

که در آن، سطح مثلث XYZ با δ_{XYZ} نمایش داده شده، یکسان است.

اگر فرض کنیم A' تصویر A روی صفحه‌ی (BCD) باشد، آن‌گاه سه جمله‌ی مجموع فوق، سطح‌های مثلث‌های $A'BC$، $A'BD$ و $A'CD$ هستند. بنابراین جمعشان برابر سطح مثلث BCD می‌شود. این مطلب نشان می‌دهد که مؤلفه‌ی قائم مجموع چهار بردار، صفر است.

از طرف دیگر، مؤلفه‌ی افقی $\bar{V}_1$، عمود بر BC و دارای طول $\delta_{ABC}\sin\alpha_1$ است. اگر فرض کنیم: $M\in BC$، چنانچه $AM\perp BC$ (شکل۳)، آن‌گاه $\alpha_1=\angle AMA'$؛ در نتیجه:

$$\sin\alpha_1 = AA'/AM$$

که مستلزم برابری زیر است:

$$\delta_{ABC}\sin\alpha_1 = AA'.BC/2$$

به همین ترتیب،

$$\delta_{ABD}\sin\alpha_2 = AA'.BD/2$$

و

$$\delta_{ACD}\sin\alpha_3 = AA'.CD/2$$

از مسئله‌ی پیش نتیجه می‌شود که مجموع سه مؤلفه‌ی افقی صفر می‌شود، و از آن‌جا که بردار چهارم دارای مؤلفه‌ی افقی نیست، مسئله حل می‌شود.

۳. بردارهای یکه‌ی $\vec{V}_1$ ، $\vec{V}_2$ ، $\vec{V}_3$ و $\vec{V}_4$ ، را عمود بر وجوه و متوجه به خارج، در نظر می‌گیریم. S، مجموع کسینوس‌های زوایای فرجه‌های چهاروجهی منفی مجموع «حاصل‌ضرب‌های نقطه‌ای» $\vec{V}_i.\vec{V}_j$ ، به ازای هر $i \neq j$ است. به این ترتیب،

$$-2S + (\vec{V}_1^2 + \vec{V}_2^2 + \vec{V}_3^2 + \vec{V}_4^2) = (\vec{V}_1 + \vec{V}_2 + \vec{V}_3 + \vec{V}_4)^2$$

که از آن نتیجه می‌شود:

$$S = 2 - \frac{1}{2}(\vec{V}_1 + \vec{V}_2 + \vec{V}_3 + \vec{V}_4)^2$$

و نابرابری به اثبات می‌رسد.

در مورد برابری، $S = 2$ اگر و تنها اگر:

$$\vec{V}_1 + \vec{V}_2 + \vec{V}_3 + \vec{V}_4 = 0$$

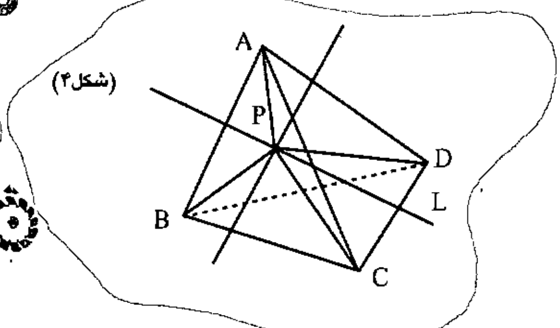
از طرف دیگر، بنابر مسئله‌ی پیشین، مجموع بردارهایی که بر وجوه عمودند، و طول‌هایی برابر سطح‌های این وجوه دارند نیز صفر است. از آن‌جا که این بردارها در یک صفحه نیستند، نتیجه می‌شود که متناسب با $\vec{V}_i$ ها هستند. در نتیجه، سطوح وجوه برابرند، و مسئله حل می‌شود.

۴. فرض می‌کنیم ABCD یک چهاروجهی باشد. در هر رأس چهاروجهی سیاره‌ای به جرم ۱ قرار می‌دهیم. در این صورت، نقطه‌ی P نسبت به «میدان‌های گرانشی»[6] چهار سیاره، «پتانسیل مینی‌مال»[7] دارد. بنابراین، شیء قرار گرفته در P باید در تعادل باشد. نتیجه می‌شود که مجموع «نیروهای جاذبه»ی[8] سیاره‌های A و B هم اندازه و در جهت مقابل مجموع نیروهای جاذبه‌ی سیاره‌های C و D است. جهت برایند[9] اول توسط نیمساز ∠APB و جهت دومی توسط نیمساز ∠CPD داده می‌شود.

در مورد اثباتی دقیق، فرض می‌کنیم ε_1 بیضیوار دوران تعریف شده با معادله‌ی زیر باشد:

$$AX+BX=AP+PB$$

نیز فرض می‌کنیم، ε_2 بیضیوار دوران تعریف شده با معادله‌ی زیر باشد:



$$CY+DY=CP+DP$$

به علت می‌نیمال بودن مجموع فواصل، درون‌های ε_1 و ε_2 نقطه‌ی مشترک ندارند. در نتیجه، دو بیضیوار مماس‌اند. نیمسازهای ∠APB و ∠CPD بر صفحه‌ی مماس مشترک قائم‌اند. بنابراین، «خط حامل»[10] یکسان دارند. همین استدلال در مورد جفت زاویه‌ی دیگر برقرار است.

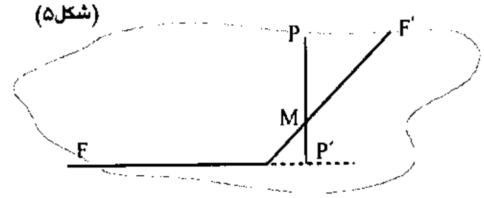
فرض می‌کنیم L خط حامل نیمسازهای ∠APB و ∠CPD باشد. اگر کل شکل را حول L به اندازه‌ی °۱۸۰ دوران دهیم، خط AP به خط BP و DP به CP تبدیل می‌شود (شکل۴). در نتیجه، نیمساز مشترک ∠APD و ∠BPC تحت این دوران بی‌تغییر است، و بنابراین، بر L عمود است.

۵. فرض می‌کنیم این مطلب درست نباشد. یک چندوجهی از ماده‌ی ناهمگنی چنان می‌سازیم که نقطه‌ی مفروض، مرکز جرم آن باشد. در این صورت، از آن‌جا که این نقطه همواره خارج هر وجه تصویر می‌شود، اگر چند وجهی بر صفحه‌ای قرار گیرد، برای همیشه می‌غلتد. به این ترتیب، متحرکی دائمی ساخته‌ایم که از لحاظ فیزیکی غیرممکن است؛ زیرا زمانی که نقطه‌ی مزبور به پایین‌ترین پتانسیلش می‌رسد، حرکت به طور واضح متوقف می‌شود.

این موضوع نشان می‌دهد که نقطه‌ی مزبور داخل وجهی تصویر می‌شود که از همه به آن نزدیک‌تر است. فرض می‌کنیم چنین نباشد، و P نقطه‌ی مزبور، F نزدیک‌ترین وجه به آن، و 'P تصویر مربوطه روی صفحه‌ی F باشد (شکل۵ را ملاحظه کنید). فرض می‌کنیم 'F وجهی باشد که توسط 'PP قطع شده است، و M نقطه‌ی تقاطع باشد. در این صورت، PM بر 'F عمود نیست، و در نتیجه، فاصله‌ی P از 'F ، اکیداً کمتر از PM است که به نوبه‌ی خود کمتر از فاصله‌ی P از F می‌باشد. این موضوع، مناقض می‌نیمال بودن فاصله‌ی P از F است، و

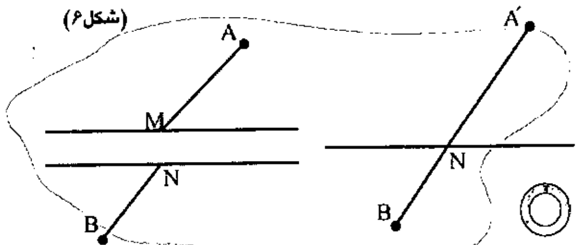
مسئله حل می‌شود.

(شکل۵)



۶. می‌توان جاده را به عنوان مسیری در نظر گرفت که توسط دسته‌ای از شعاع‌های نورانی ایجاد شده و از محیط بسیار چگالی (رودخانه) گذشته است. از آن‌جا که دسته شعاع نورانی مزبور از سریع‌ترین مسیر می‌گذرد، از محیط چگال مزبور در جهتی عمود بر اطراف آن خواهد گذشت. در نتیجه، دسته شعاع مورد بحث مسیر AMNB را خواهد پیمود. خواننده‌ی دارای معلوماتی از فیزیک، می‌داند که دسته شعاع وارد شونده به یک محیط، طبق همان زاویه‌ی ورود از آن خارج می‌شود. بنابراین، می‌توان عملاً وجود رودخانه را فراموش کرد، و شهرها را به اندازه‌ی پهنای رودخانه، به طرف یکدیگر جابه‌جا کرد و کوتاه‌ترین مسیر را در نظر گرفت، و سپس رودخانه را وارد کرد (شکل۶ را ملاحظه کنید).

(شکل۶)



به طور دقیق‌تر، از آن‌جا که طول پل همواره ثابت است، انتقال 'A از A به طرف B را با بردار عمود بر کناره‌ی رودخانه، و طولی برابر طول پل، در نظر می‌گیریم. می‌نیمم کردن طول AMNB برابر می‌نیمم کردن طول A'NB است، و مورد اخیر زمانی می‌نیمم است که 'A، N و B هم‌خط باشند. این موضوع امکان N را مشخص می‌کند، و کار تمام است.

۷. گزاره‌ی عمومی زیر را اثبات می‌کنیم.

n نقطه بر دایره‌ای مفروض است. از مرکز ثقل (مرکزوار)[11] هر $n-2$ نقطه از آن‌ها، عمودی بر وتر واصل از دو نقطه‌ی باقی‌مانده رسم می‌کنیم. ثابت کنید، جمیع خطوطی که به این طریق به دست می‌آیند، نقطه‌ی مشترکی دارند.

اثبات را بر مبنای این ویژگی مرکز ثقل می‌گذاریم: مرکز ثقل دستگاه k+j نقطه‌ای

$A_1, A_2, \cdots, A_k, B_1, B_2, \cdots, B_j$

پاره‌خط G_1G_2 را به نسبت j:k تقسیم می‌کند که در آن، G_1 و G_2 مراکز ثقل دستگاه‌های

$A_1, A_2, \cdots, A_k$

و

$B_1, B_2, \cdots, B_j$

هستند.

با بازگشت به مسئله‌ی مورد بحث، فرض می‌کنیم O مرکز دایره، G مرکز ثقل n نقطه‌ی مفروض، G_1 مرکز ثقل $n-2$ نقطه از آن‌ها، و M وسط وتر واصل از دو نقطه‌ی باقی‌مانده (که در ضمن مرکز ثقل دستگاه حاصل از این دو نقطه نیز هست) باشد. نیز، فرض می‌کنیم L عمود از G_1 بر وتر حاصل از این دو نقطه‌ی باقی‌مانده باشد.

بنابر ویژگی فوق‌الذکر، نقاط G، G_1، و M هم‌خط‌اند، و:

$G_1G:GM = 2:(n-2)$

نقطه‌ی تقاطع خطوط L و OG را با P نمایش می‌دهیم. مثلث‌های GG_1P و GMO مشابه‌اند، زیرا OM موازی L است؛ درنتیجه:

$GP:OG = 2:(n-2)$

و به این ترتیب، نقطه‌ی P به گونه‌ای یکتا، توسط O و G معین می‌شود، و بنابراین، مشترک بین جمیع نقاط تحت بررسی است.

۸. کار را بر مرکز ثقل S متمرکز می‌کنیم. می‌دانیم که مرکز ثقل بر عمود منصف قطعه‌ی مشخص شده با هر دو نقطه، در S قرار دارد. بنابراین، جمیع نقاط واقع در S، بر دایره‌ای به مرکزِ در مرکز ثقل، قرار می‌گیرند. از این مرحله به بعد، حل مسئله آسان است.

سه نقطه‌ی متوالی A، B، C را اختیار می‌کنیم. از آن‌جا که S نسبت به عمود منصف AC متقارن است، B باید بر این عمود منصف واقع باشد. درنتیجه: AB=BC. با تکرار این استدلال برای جمیع سه‌تایی‌های نقاط متوالی، نتیجه می‌گیریم که S یک چندضلعی منتظم است، و واضح است که جمیع چندضلعی‌های منتظم، شرط داده شده را برقرار می‌کنند.

زیرنویس

1. Toricelli Point
2. Leibniz
3. Pompeiu's theorem
4. Vertical Component
5. dot products
6. gravitational fields
7. minimal potential
8. attractive forces
9. resultant
10. supporting line
11. Centroid

کشف فرمول اعداد اول و نتایج آن*

(حل مسأله‌های لاینحل ۲۳۰۰ ساله)

قسمت ۴

معادله‌های سیال و تعیین یک جواب عمومی با استفاده از اتحادهای حلال معادله‌ها

$$p_1, p_2, \dots, p_k < p \; ; \; a_1X_1^{p_1} + a_2X_2^{p_2} + \dots + a_kX_k^{p_k} = X_{k+1}^{p}$$

$p_1, p_2, \dots, p_k \in \mathbb{N} \; ; \; p \in \mathbb{P}$ (مجموعه ی اعداد اول)

$$(p, m) = 1 \; ; \; a_1X_1^{p} + a_2X_2^{p} + \dots + a_kX_k^{p} = X_{k+1}^{m}$$

$a_1, a_2, \dots, a_k \in \mathbb{Q}$ (مجموعه ی اعداد گویا)

$$(m, N) = 1 \; ; \; a_1X_1^{m} + a_2X_2^{m} + \dots + a_kX_k^{m} = X_{k+1}^{N}$$

سید محمدرضا هاشمی موسوی*

hashemi – moosavi@yahoo.com

اشاره

با توجه به روش حل معادله‌هایی مانند:

$$p_1, p_2 \in \mathbb{N} \;,\; p_1, p_2 < p \; ; \; X_1^{p_1} + X_2^{p_2} = X_3^{p}$$

$$(p, m) = 1 \; ; \; X_1^{p} + X_2^{p} = X_3^{m}$$

$$(m, N) = 1 \; ; \; X_1^{m} + X_2^{m} + X_3^{N}$$

که در شماره‌ی پیش ارایه شد، در این شماره می‌خواهیم تعمیم این گونه معادله‌ها را بررسی و یک سلسله جواب عمومی معادله را تعیین کنیم. نتیجه‌ی جالب و بسیار مهم از حل معادله‌ی اخیر این است که مجموع توان mام دو عدد را می‌توان به هر توان دلخواه با شرط $(m, N) = 1$ نوشت. برای مثال،

معادله‌ی $x^n + y^n = z^{2003}$ به ازای هر n با شرط $(n,2003) = 1$ دارای جواب است؛ یعنی همه‌ی معادله‌های زیر جواب عمومی دارند:

$n = 2:\ x^2 + y^2 = z^{2003}$

$n = 3:\ x^3 + y^3 = z^{2003}$

$n = 4:\ x^4 + y^4 = z^{2003}$

....

$n = 1386:\ x^{1386} + y^{1386} = z^{2003}$

....

$n = 2002:\ x^{2002} + y^{2002} = z^{2003}$

$n = 2004:\ x^{2004} + y^{2004} = z^{2003}$

$n = 2005:\ x^{2005} + y^{2005} = z^{2003}$

....

توجه: اگر n مضربی از عدد ۲۰۰۳ باشد، در واقع مسأله به حل معادله‌ی سیال قوای متشابه تحویل می‌شود که همان قضیه‌ی بزرگ فرما یا در اصل حکم بزرگ فرما است؛ یعنی معادله‌ی[1]:

$$(n,2003) = 2003\ ;\ x^n + y^n = z^{2003}$$

که به حکم بزرگ فرما تبدیل می‌شود و جوابی به جز صفر ندارد.

الف) معادله‌ی سیال به صورت عمومی زیر را بررسی و یک سلسله جواب عمومی برای آن تعیین می‌کنیم:

$$a_1X_1^{p_1} + a_2X_2^{p_2} + \cdots + a_kX_k^{p_k} = X_{k+1}^{p} \qquad (1)$$

در معادله‌ی ۱، p عددی اول و a_1، a_2، ... و a_k عددهایی گویا هستند و شرط زیر نیز برقرار است:

$$p_1, p_2, p_3, \dots, p_k < p$$

برای تعیین یک جواب عمومی برای معادله‌ی ۱، کافی است یک سلسله جواب عمومی معادله‌ی زیر را به‌دست آوریم:

$$a_1x_1^n + a_2x_2^n + \cdots + a_kx_k^n = x_{k+1}^{n+1} \qquad (2)$$

برای تعیین یک جواب عمومی معادله‌ی ۲ کافی است آن را با اتحاد زیر مقایسه کنیم:

$$\begin{aligned}&a_1(a_1b_1^{n+1} + a_2b_1b_2^n + \cdots + a_kb_1b_k^n)^n\\ &+ a_2(a_1b_2b_1^n + a_2b_2^{n+1} + \cdots + a_kb_2b_k^n) + \cdots\\ &\cdots + a_k(a_1b_kb_1^n + a_2b_kb_2^n + \cdots + a_kb_k^{n+1})^n\\ &= (a_1b_1^n + a_2b_2^n + \cdots + a_kb_k^n)^{n+1}\end{aligned} \qquad (3)$$

از مقایسه‌ی معادله‌ی ۲ و اتحاد ۳ خواهیم داشت:

$$\left|\begin{array}{l}x_1 = a_1b_1^{n+1} + a_2b_1b_2^n + \cdots + a_kb_1b_k^n\\ x_2 = a_1b_2b_1^n + a_2b_2^{n+1} + \cdots + a_kb_2b_k^n\\ x_3 = a_1b_3b_1^n + a_2b_3b_2^n + a_3b_3^{n+1} + \cdots + a_kb_3b_k^n\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ x_k = a_1b_kb_1^n + a_2b_kb_2^n + \cdots + a_kb_k^{n+1}\\ x_{k+1} = a_1b_1^n + a_2b_2^n + \cdots + a_kb_k^n\end{array}\right. \qquad (4)$$

در این جا، با فرض $n = (p-1)!$، معادله‌ی ۲ به معادله‌ی زیر تحویل می‌شود:

$$a_1x_1^{(p-1)!} + a_2x_2^{(p-1)!} + \cdots + a_kx_k^{(p-1)!} = x_{k+1}^{(p-1)!+1} \qquad (5)$$

طبق قضیه‌ی ویلسن، اگر p عددی اول باشد، عبارت $(p-1)!+1$ بر p بخش‌پذیر است. از طرف دیگر ثابت می‌شود، برای هر عبارت تجزیه‌پذیر[1] (p عددی اول و $\lfloor\ \rfloor$ نماد قسمت درست عدد است):

$$(p-1)!+1 = p\left(1 + 2\left\lfloor\frac{(p-1)!+1}{2p}\right\rfloor\right) \qquad (6)$$

از رابطه‌ی ۶ و با توجه به شرط $p_1, p_2, \dots, p_k < p$، معادله‌ی ۵ را به صورت زیر می‌توان نوشت $(p \in \mathbb{P})$:

$$a_1\left(x_1^{\frac{(p-1)!}{p_1}}\right)^{p_1}+a_2\left(x_2^{\frac{(p-1)!}{p_2}}\right)^{p_2}+\cdots+a_k\left(x_k^{\frac{(p-1)!}{p_k}}\right)^{p_k}=\left(x_{k+1}^{1+2\left[\frac{(p-1)!+1}{2p}\right]}\right)^{p} \qquad (7)$$

از مقایسه‌ی معادله‌ی ۱ با اتحاد ۷، بلافاصله یک سلسله از جواب‌های معادله‌ی ۱ حاصل می‌شود. در اتحاد۷، اگر $H(m)$ (فرمول اعداد اول) را جایگزین p کنیم، در این صورت، دامنه‌ی متغیر به مجموعه‌ی اعداد طبیعی گسترش خواهد یافت؛ زیرا به ازای هر $m\in\mathbb{N}$ ، مقدار $H(m)$ عددی اول است:

$$m\in\mathbb{N}:\ p=H(m)=2\left(\frac{2m+1}{2}\right)^{\Delta_m}$$

$$,\ \Delta_m=\left[\frac{2m+1}{(2m)!+1}\left[\frac{(2m)!+1}{2m+1}\right]\right]$$

در واقع به اتحادهای حلال معادله‌ها دست خواهیم یافت و در نتیجه می‌توان نوشت:

$$(8)\begin{cases}X_1=\left(a_1b_1^{(p-1)!+1}+a_2b_1b_2^{(p-1)!}+\cdots+a_kb_1b_k^{(p-1)!}\right)^{\frac{(p-1)!}{p_1}}\\ X_2=\left(a_1b_2b_1^{(p-1)!}+a_2b_2^{(p-1)!+1}+\cdots+a_kb_2b_k^{(p-1)!}\right)^{\frac{(p-1)!}{p_2}}\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ X_k=\left(a_1b_kb_1^{(p-1)!}+a_2b_kb_2^{(p-1)!}+\cdots+a_kb_k^{(p-1)!+1}\right)^{\frac{(p-1)!}{p_k}}\\ X_{k+1}=\left(a_1b_1^{(p-1)!}+a_2b_2^{(p-1)!}+\cdots+a_kb_k^{(p-1)!}\right)^{1+2\left[\frac{(p-1)!+1}{2p}\right]}\end{cases}$$

مثال: معادله‌ی زیر را بررسی کنید و یک سلسله از جواب‌های عمومی آن را بیابید.

$$x_1+x_2^2+x_3^3+x_4^4+\cdots+x_{10}^{10}=x_{11}^{11} \qquad (9)$$

حل: کافی است در رابطه‌های ۸، مقادیر زیر را جایگزین کنیم:

$k=10:\ a_1=a_2=\cdots=a_{10}=1$;

$p_1=1, p_2=2,\cdots,p_{10}=10, p=11$

در این صورت، یک مجموعه جواب معادله حاصل می‌شود:

$$(10)\begin{cases}x_1=\left(b_1^{10!+1}+b_1b_2^{10!}+\cdots+b_1b_{10}^{10!}\right)^{10!}\\ x_2=\left(b_2b_1^{10!}+b_2^{10!+1}+\cdots+b_2b_{10}^{10!}\right)^{\frac{10!}{2}}\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ x_{10}=\left(b_{10}b_1^{10!}+b_{10}b_2^{10!}+\cdots+b_{10}^{10!+1}\right)^{9!}\\ x_{11}=\left(b_1^{10!}+b_2^{10!}+\cdots+b_{10}^{10!}\right)^{329891}\end{cases}$$

بدیهی است که با در دست داشتن یک سلسله جواب عمومی۱۰، بررسی معادله خاتمه می‌یابد.

ب) بررسی معادله‌ی عمومی $X_1^p+X_2^p=X_3^m$ با شرط $(p,m)=1$ انجام شد. اکنون در این جا به بررسی تعمیم این معادله می‌پردازیم:

$$(p,m)=1:\ a_1X_1^p+a_2X_2^p+\cdots+a_kX_k^p=X_{k+1}^m \qquad (1)$$

با توجه به بررسی $X_1^p+X_2^p=X_3^m$ ، تعمیم این معادله را بررسی می‌کنیم.

حل: برای تعیین یک سلسله از جواب‌های عمومی معادله‌ی۱، ابتدا معادله‌ی زیر را بررسی می‌کنیم:

$$a_1x_1^{n-1}+a_2x_2^{n-1}+\cdots+a_kx_k^{n-1}=x_{k+1}^n \qquad (2)$$

برای تعیین یک سلسله از جواب‌های عمومی معادله‌ی۲، کافی است آن را با اتحاد زیر مقایسه کنیم:

$$a_1(a_1b_1^n+a_2b_1b_2^{n-1}+\cdots+a_kb_1b_k^{n-1})^{n-1}+a_2(a_1b_2b_1^{n-1}+a_2b_2^n+\cdots+a_kb_2b_k^{n-1})^{n-1}+\cdots+a_k(a_1b_kb_1^{n-1}+a_2b_kb_2^{n-1}+\cdots+a_kb_k^n)^{n-1}=(a_1b_1^{n-1}+a_2b_2^{n-1}+\cdots+a_kb_k^{n-1})^n \qquad (3)$$

از مقایسه‌ی معادله‌ی ۲ با اتحاد۳، خواهیم داشت:

$$(4)\begin{cases}x_1=a_1b_1^n+a_2b_1b_2^{n-1}+\cdots+a_kb_1b_k^{n-1}\\ x_2=a_1b_2b_1^{n-1}+a_2b_2^n+\cdots+a_kb_2b_k^{n-1}\\ x_3=a_1b_3b_1^{n-1}+a_2b_3b_2^{n-1}+\cdots+a_kb_3b_k^{n-1}\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ x_k=a_1b_kb_1^{n-1}+a_2b_kb_2^{n-1}+\cdots+a_kb_k^n\\ x_{k+1}=a_1b_1^{n-1}+a_2b_2^{n-1}+\cdots+a_kb_k^{n-1}\end{cases}$$

در این جا، با فرض $n=m^{p-1}$ ، معادله‌ی۲ به معادله‌ی زیر تحویل می‌شود:

$$a_1x_1^{m^{p-1}-1}+a_2x_2^{m^{p-1}-1}+\cdots+a_kx_k^{m^{p-1}-1}=x_k^{m^{p-1}} \qquad (5)$$

طبق قضیه‌ی فرما، اگر p عددی اول باشد، عبارت $(m^{p-1}-1)$ بر p بخش‌پذیر است، در صورتی که m و p نسبت به هم اول باشند: $(m,p)=1$

از طرف دیگر می‌توان نوشت:

$$(m,p)=1:\ m^{p-1}-1=p\left(1+2\left[\frac{m^{p-1}-1}{2p}\right]\right) \qquad (6)$$

(در رابطه‌ی ۶، p عدد اول و [ ]، نماد قسمت درست عدد است). حال با استفاده از رابطه‌ی۶، می‌توان معادله‌ی ۵ را به صورت زیر نوشت:

$$a_1\left(x_1^{1+2\left[\frac{m^{p-1}-1}{2p}\right]}\right)^p+a_2\left(x_2^{1+2\left[\frac{m^{p-1}-1}{2p}\right]}\right)^p+\cdots$$

$$+a_k\left(x_k^{1+2\left[\frac{m^{p-1}-1}{2p}\right]}\right)^p=\left(x_{k+1}^{m^{p-2}}\right)^m \qquad (7)$$

از مقایسه‌ی معادله‌ی ۱ با اتحاد۷، بلافاصله یک مجموعه جواب عمومی برای معادله‌ی۱ حاصل می‌شود:

$$(8)\begin{cases}X_1=\left(a_1b_1^{m^{p-1}}+a_2b_1b_2^{m^{p-1}-1}+\cdots+a_kb_1b_k^{m^{p-1}-1}\right)^{1+2\left[\frac{m^{p-1}-1}{2p}\right]}\\ X_2=\left(a_1b_2b_1^{m^{p-1}-1}+a_2b_2^{m^{p-1}}+\cdots+a_kb_2b_k^{m^{p-1}-1}\right)^{1+2\left[\frac{m^{p-1}-1}{2p}\right]}\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ X_k=\left(a_1b_kb_1^{m^{p-1}-1}+a_2b_kb_2^{m^{p-1}-1}+\cdots+a_kb_k^{m^{p-1}}\right)^{1+2\left[\frac{m^{p-1}-1}{2p}\right]}\\ X_{k+1}=\left(a_1b_1^{m^{p-1}-1}+a_2b_2^{m^{p-1}-1}+\cdots+a_kb_k^{m^{p-1}-1}\right)^{m^{p-2}}\end{cases}$$

مثال: یک مجموعه جواب عمومی برای معادله‌ی زیر بیابید، در صورتی که p و m نسبت به هم اول باشند.

$$(p,m)=1:\ X_1^p+X_2^p+\cdots+X_k^p=X_{k+1}^m \qquad (9)$$

حل: کافی است در رابطه‌های ۸، قرار دهیم:

$$a_1=a_2=a_3=\cdots=a_k=1$$

در این صورت، بلافاصله یک مجموعه جواب عمومی با k پارامتر دلخواه برای معادله‌ی۹ حاصل می‌شود:

$$(10)\begin{cases}X_1=\left(b_1^{m^{p-1}}+b_1b_2^{m^{p-1}-1}+\cdots+b_1b_k^{m^{p-1}-1}\right)^{1+2\left[\frac{m^{p-1}-1}{2p}\right]}\\ X_2=\left(b_2b_1^{m^{p-1}-1}+b_2^{m^{p-1}}+\cdots+b_2b_k^{m^{p-1}-1}\right)^{1+2\left[\frac{m^{p-1}-1}{2p}\right]}\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ X_k=\left(b_kb_1^{m^{p-1}-1}+b_kb_2^{m^{p-1}-1}+\cdots+b_k^{m^{p-1}}\right)^{1+2\left[\frac{m^{p-1}-1}{2p}\right]}\\ X_{k+1}=\left(b_1^{m^{p-1}-1}+b_2^{m^{p-1}-1}+\cdots+b_k^{m^{p-1}-1}\right)^{m^{p-2}}\end{cases}$$

نتیجه: در حالت خاص، اگر $k=2$، آن‌گاه:

$$X_1^p+X_2^p=X_3^m \qquad (11)$$

معادله‌ی ۱۱ برای هر p اول با شرط $(p,m)=1$، همیشه جواب دارد. بنابراین، معادله‌ی ۱۱ نشان می‌دهد که مجموع قوای متشابه‌ی دو عدد را ممکن است به صورت توانی از یک عدد نوشت، به شرطی که توان‌ها نسبت به هم اول باشند. به بیان دیگر، اگر m مضربی از p نباشد، یعنی $m\neq tp\ (t\in N)$ و در واقع حکم بزرگ فرما پیش نیاید $(p>2:\ x^p+y^p=z^p)$، معادله‌ی۱۱ همیشه جواب دارد. هم‌چنین، اگر $m\neq tp$، معادله‌ی۹ نیز همیشه دارای جواب است.

ج) با توجه به بررسی معادله‌ی $X_1^m+X_2^m=X_3^N$، تعمیم این معادله را بررسی می‌کنیم:

$$(m,N)=1:\ a_1X_1^m+a_2X_2^m+\cdots+a_kX_k^m=X_{k+1}^N \quad (1)$$

در حالت خاص، اگر $a_1=a_2=\cdots=a_k=1$، معادله‌ی زیر حاصل می‌شود:

$$X_1^m+X_2^m+\cdots+X_k^m=X_{k+1}^N$$

در معادله‌ی۱، a_1، a_2، ... و a_k اعداد گویای دلخواه و m و N نسبت به هم اول‌اند.

حل: برای حل معادله ی ۱ و تعیین یک مجموعه جواب برای آن، ابتدا یک سلسله از جواب‌های معادله‌ی زیر را به دست می‌آوریم:

$$a_1x_1^{n-1}+a_2x_2^{n-1}+\cdots+a_kx_k^{n-1}=x_{k+1}^n \qquad (2)$$

به این منظور کافی است، معادله‌ی۲ را با اتحاد زیر مقایسه کنیم:

$$a_1\left(a_1b_1^n+a_2b_1b_2^{n-1}+\cdots+a_kb_1b_k^{n-1}\right)^{n-1}$$
$$+a_2\left(a_1b_2b_1^{n-1}+a_2b_2^n+\cdots+a_kb_2b_k^{n-1}\right)^{n-1}+\cdots$$
$$\cdots+a_k\left(a_1b_kb_1^{n-1}+a_2b_kb_2^{n-1}+\cdots+a_kb_k^n\right)^{n-1}$$
$$=\left(a_1b_1^{n-1}+a_2b_2^{n-1}+\cdots+a_kb_k^{n-1}\right)^n \qquad (3)$$

از مقایسه‌ی معادله‌ی۲ با اتحاد۳ خواهیم داشت:

$$(4)\begin{cases} x_1=a_1b_1^n+a_2b_1b_2^{n-1}+\cdots+a_kb_1b_k^{n-1}\\ x_2=a_1b_2b_1^{n-1}+a_2b_2^n+\cdots+a_kb_2b_k^{n-1}\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ x_k=a_1b_kb_1^{n-1}+a_2b_kb_2^{n-1}+\cdots+a_kb_k^n\\ x_{k+1}=a_1b_1^{n-1}+a_2b_2^{n-1}+\cdots+a_kb_k^{n-1}\end{cases}$$

در این جا، با فرض $n=N^{\varphi(m)}$، معادله‌ی ۲ به معادله‌ی زیر تحویل می‌شود:

$$a_1x_1^{N^{\varphi(m)}-1}+a_2x_2^{N^{\varphi(m)}-1}+\cdots+a_kx_k^{N^{\varphi(m)}-1}=x_{k+1}^{N^{\varphi(m)}} \qquad (5)$$

در معادله‌ی۵، φ تابع اویلر است و $\varphi(m)$ برابر با تعداد اعداد طبیعی و کوچک‌تر از m است که نسبت به آن اول هستند. برای مثال، $\varphi(18)$ برابر ۶ است؛ زیرا:

؛ $\{1,5,7,11,13,17\}$ = مجموعه اعدادی که نسبت به ۱۸ اول‌اند

$\varphi(18)=6$

نکته: همیشه باید توجه داشت که عدد۱ نسبت به تمام عددهای بزرگ‌تر از خودش، اول است. طبق قضیه‌ی اویلر، اگر $(m,N)=1$، آن‌گاه عبارت $\left(N^{\varphi(m)}-1\right)$ بر m بخش‌پذیر است. از طرف دیگر می‌توان نوشت:

$$(m,N)=1;\ \ N^{\varphi(m)}-1=m\left(1+2\left[\frac{N^{\varphi(m)}-1}{2m}\right]\right) \qquad (6)$$

(در رابطه‌ی ۶، $[\ ]$ نماد قسمت درست عدد است).

حال با استفاده از رابطه‌ی۶، معادله‌ی۵ را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$a_1\left(x_1^{1+2\left[\frac{N^{\varphi(m)}-1}{2m}\right]}\right)^m+a_2\left(x_2^{1+2\left[\frac{N^{\varphi(m)}-1}{2m}\right]}\right)^m+\cdots$$
$$+a_k\left(x_k^{1+2\left[\frac{N^{\varphi(m)}-1}{2m}\right]}\right)^m=\left(x_{k+1}^{N^{\varphi(m)-1}}\right)^N \qquad (7)$$

از مقایسه‌ی معادله‌ی۱ با اتحاد۷، بلافاصله یک سلسله از جواب‌های عمومی معادله‌ی۱ حاصل می‌شود:

$$(8)\begin{cases} X_1=\left(a_1b_1^{N^{\varphi(m)}}+a_2b_1b_2^{N^{\varphi(m)}-1}+\cdots+a_kb_1b_k^{N^{\varphi(m)}-1}\right)^{1+2\left[\frac{N^{\varphi(m)}-1}{2m}\right]}\\ X_2=\left(a_1b_2b_1^{N^{\varphi(m)}-1}+a_2b_2^{N^{\varphi(m)}}+\cdots+a_kb_2b_k^{N^{\varphi(m)}}\right)^{1+2\left[\frac{N^{\varphi(m)}-1}{2m}\right]}\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ X_k=\left(a_1b_kb_1^{N^{\varphi(m)}-1}+a_2b_kb_2^{N^{\varphi(m)}-1}+\cdots+a_kb_k^{N^{\varphi(m)}}\right)^{1+2\left[\frac{N^{\varphi(m)}-1}{2m}\right]}\\ X_{k+1}=\left(a_1b_1^{N^{\varphi(m)}-1}+a_2b_2^{N^{\varphi(m)}-1}+\cdots+a_kb_k^{N^{\varphi(m)}-1}\right)^{N^{\varphi(m)-1}}\end{cases}$$

توجه: اگر m عددی اول مانند p باشد:

$$\varphi(p)=\varphi(m)=p-1$$

و در صورتی که m عددی مرکب و به صورت $m=p^r.q^s.t^n.\cdots$ (p، q و t... عامل‌های اول هستند) نوشته شود، همیشه می‌توان نوشت:

$$\varphi(m)=m(1-\frac{1}{p})(1-\frac{1}{q})(1-\frac{1}{r})\cdots=\begin{vmatrix}1&0&0&\cdots&1\\1&1&0&\cdots&2\\1&0&1&\cdots&3\\1&1&0&\cdots&4\\\vdots&\vdots&\vdots&\cdots&\vdots\\1&\vdots&\vdots&\cdots&m\end{vmatrix} \qquad (9)$$

مثال: در این جا $\varphi(m)$ را برای $m=1024$، $m=1025$

و $m = 1026$ ، از رابطه‌ی ۹ محاسبه می‌کنیم:

$$m = 1024 = 2^{10}: \varphi(1024) = 1024(1-\frac{1}{2}) = 512$$

$$m = 1025 = 5^2 \times 41: \varphi(1025) = 1025(1-\frac{1}{5})(1-\frac{1}{41}) = 800$$

$$m = 1026 = 2 \times 3^3 \times 19:$$

$$\varphi(1026) = 1026(1-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{3})(1-\frac{1}{19}) = 324$$

مثال: اگر $m = p$ و p عددی اول باشد، معادله‌ی ۱ به معادله‌ی زیر تحویل می‌شود:

$$a_1X_1^p + a_2X_2^p + \cdots + a_kX_k^p = X_{k+1}^N \qquad (10)$$

با استفاده از سلسله جواب‌های ۸، یک مجموعه جواب عمومی معادله‌ی ۱۰ را نتیجه بگیرید.

حل: کافی است که در رابطه‌های ۸، به جای $\varphi(m)$ عبارت $(p-1)$ را جایگزین کنیم:

$$m = p: \varphi(m) = \varphi(p) = p-1$$

بنابراین، یک سلسله جواب عمومی معادله که پیش از این هم به صورت مستقل به آن رسیده بودیم، نتیجه خواهد شد.

نتیجه‌ی نهایی

در صورتی که در همه‌ی معادله‌ها و مجموعه‌ی جواب‌های به‌دست آمده، به جای p (عدد اول) فرمول اعداد اول H(m) را جایگزین کنیم، بدیهی است به جواب‌هایی خواهیم رسید که دامنه‌ی متغیر آن اعداد طبیعی است، یعنی $p = H(m)$ و $m \in \mathbb{N}$. و هم‌چنین، اگر در اتحادهای عمومی حلال معادله‌های سیال درجه‌ی n، به جای p (عدد اول) فرمول اعداد اول را جایگزین کنیم، واضح است که به اتحادهای حلال با دامنه‌ی متغیر $m \in \mathbb{N}$ خواهیم رسید. پس در این جا نتایج را در قالب سه قضیه‌ی عمومی در رابطه با وجود یا عدم جواب برای معادله‌های سیال عمومی سه‌گانه، با نام قضیه‌های اساسی H.M می‌آوریم.

۱. **قضیه‌ی اول H.M**: اگر p عددی اول و a_1 ، a_2 ، ... و a_k عددهایی گویا باشند و داشته باشیم $p_1, p_2, \ldots, p_k < p$ ، آن‌گاه معادله‌ی زیر در مجموعه‌ی اعداد گویا دارای جواب است:

$$a_1X_1^{p_1} + a_2X_2^{p_2} + \cdots + a_kX_k^{p_k} = X_{k+1}^p$$

۲. **قضیه‌ی دوم H.M**: اگر p عددی اول و m عددی طبیعی باشد و داشته باشیم $(p,m) = 1$ ، آن‌گاه معادله‌ی زیر در مجموعه‌ی اعداد گویا دارای جواب است (با در نظر گرفتن این که a_1 ، a_2 ، ... و a_k گویا باشند):

$$a_1X_1^p + a_2X_2^p + \cdots + a_kX_k^p = X_{k+1}^m$$

$$(p,m) = 1;\ a_1, a_2, \cdots, a_k \in \mathbb{Q} \text{ (مجموعه‌ی اعداد گویا)}$$

۳. **قضیه‌ی سوم H.M**: اگر m و N اعدادی طبیعی و a_1 ، a_2 ، ... و a_k اعدادی گویا باشند و هم‌چنین m و N نسبت به هم اول باشند، معادله‌ی زیر در مجموعه‌ی اعداد گویا دارای جواب است:

$$(m,N) = 1:\ a_1X_1^m + a_2X_2^m + \cdots + a_kX_k^m = X_{k+1}^N$$

● **از کشف فرمول اعداد اول و نتایج آن، احکام زیر نیز حاصل می‌شود:**

۴. **حکم اساسی H.M در رابطه با مولد اعداد اول**: تابع H با ضابطه‌ی زیر:

$$H(m) = 2\left(\frac{2m+1}{2}\right)^{\left\lfloor \frac{2m+1}{(2m)!+1}\left\lfloor \frac{(2m)!+1}{2m+1}\right\rfloor \right\rfloor} = 2\left(\frac{2m+1}{2}\right)^{\Delta_{N(m)}}$$

به ازای هر $m \in \mathbb{N}$ ، همه‌ی اعداد اول را تولید می‌کند.

توضیح: مولد H(m) همه‌ی اعداد اول را تولید می‌کند و به جای اعداد مرکب عدد ثابت ۲ که عددی اول است را جایگزین می‌کند. بنابراین، تابع H یک تابع پوشا با دامنه‌ی متغیر $m \in \mathbb{N}$ است:

$$R_H = \mathbb{P} \text{ (برد تابع) و } D_H = \mathbb{N} \text{ (دامنه تابع)}$$

$$H = \mathbb{P} = \{3,5,7,2,11,13,2,17,19,\cdots\} = \{2,3,5,7,\cdots\}$$

۵. **حکم اساسی H.M در رابطه با توزیع اعداد اول**: تابع π با ضابطه‌ی زیر، به ازای هر N طبیعی، تعداد اعداد اول نابزرگ‌تر از N را به‌طور دقیق تعیین می‌کند:

$$\pi(N) = \frac{N+1}{2} - \sum_{m=1}^{\frac{N-1}{2}} \left\lfloor 2^{-\Delta_{N(m)}} \right\rfloor;\ N = 2m+1$$

$$\Delta_{N(m)} = \left\lfloor \frac{1 + \left\lfloor \frac{3}{2m+1} \right\rfloor}{1 + \sum_{k=1}^{S^*} \left\lfloor \frac{2k+1}{2m+1} \left\lfloor \frac{2m+1}{2k+1} \right\rfloor \right\rfloor} \right\rfloor,\ m \in \mathbb{N}$$

$$S^* = \left\lfloor \frac{\sqrt{2m+1}+1}{2} \right\rfloor$$

توجه : این حکم در واقع معادل حل معادله‌ی زتای ریمان است :

$$\zeta(s) = 0$$

این مسأله ، یکی از مسأله‌های لاینحل جهانی هزاره‌ی هفت‌میلیون دلاری است که در سال ۲۰۰۱ به مسابقه گذاشته شده است و انستیتوی ریاضیات «Clay» آمریکا پس از دو سال جایزه را پرداخت خواهد کرد (جواب معادله‌ی زتای ریمان را در شماره‌ی ۵۳ ، قسمت دوم مقاله ببینید) .

۶ . حکم اساسی H.M در رابطه با تعیین k امین عدد اول : تابع P_k با ضابطه‌ی زیر ، با فرض $N = 2n + 1$ و $\pi(N) = k$ به‌طور دقیق kامین عدد اول را تعیین می‌کند :

$$p_k(m) = \left\lfloor \frac{1}{\left| k - \frac{N+1}{2} + \sum_{m=1}^{\frac{N-1}{2}} \left\lfloor 2^{-\Delta_{N(m)}} \right\rfloor \right| + 1} \right\rfloor . N$$

$$= \begin{cases} N & \text{اگر } N\text{، }k\text{امین عدد اول باشد} \\ 0 & \text{اگر } N\text{، }k\text{امین عدد اول نباشد} \end{cases}$$

توجه : می‌دانیم بزرگ‌ترین عدد اول شناخته شده در سال ۲۰۰۶ ، عددی است با حدود ۹٫۸ میلیون رقم که چهل‌وچهارمین عدد مرسن اول شناخته شده محسوب می‌شود :

$$M_{44} = 2^{32582657} - 1$$

این اعداد توسط جست‌وجوی اینترنتی تحت برنامه‌ی «GIMPS» به صورت عمومی و با استفاده از سیستم‌های شخصی در جهان انجام می‌گیرد . ارایه و تست هر عدد مرسن به صورت $M = 2^p - 1$ در صورتی که تایید شود ، مبلغ یک صد میلیون دلار (جایزه) به همراه دارد . در این جا می‌توان با استفاده از فرمول اعداد اول ، مجموعه‌ی اعداد اول مرسن را تعریف کرد .

۷ . حکم اساسی H.M در رابطه با تعریف مجموعه‌ی اعداد اول مرسن : مجموعه‌ی اعداد اول مرسن IM تعریف‌پذیر است :

$$\mathbb{M} = \left\{ M(n) : n \in \mathbb{N}, M(n) = 3\left(\frac{2^{n+1}-1}{3}\right)^{\Delta_{(2^n-1)}} \right\}$$

$$= \left\{ 3, 7, 31, 127, \cdots, 2^{32582657} - 1, \cdots \right\}$$

توجه : با استفاده از فرمول اعداد اول ، مجموعه‌های اعداد تام زوج ، اعداد اول سامان‌پذیر و سامان‌ناپذیر[2] (در اثبات حکم بزرگ فرما نقش اساسی دارند) قابل تعریف هستند . برای اطلاع بیش‌تر ، به کتاب مرجع (*) رجوع شود .

۸ . حکم اساسی H.M در رابطه با بی‌نهایت بودن اعداد اول دوقلو (Twin) : اعداد اول دوقلو بی‌نهایت‌اند و مجموعه‌ی دوقلوهای اول تعریف‌پذیر است :

$$T = \left\{ n \in \mathbb{N} - \mathbb{H} : (6n-1, 6n+1) \right\} \cup \left\{ (3,5) \right\}$$
$$= \left\{ (3,5), (5,7), (11,13), (17,19), (29,31), (41,43), \cdots \right\}$$

$$\mathbb{H} = \left\{ 5m \mp 1, 7m \pm 1, 11m \mp 2, \cdots, pm \pm \frac{p_i \pm 1}{6} \right\},$$
$$m \in \mathbb{N}, \ p \in \mathbb{P}$$

توجه : لازم به ذکر است که کشف فرمول اعداد اول و نتایج آن ، توسط داور بین‌المللی ، پروفسور سایمون پورپل[3] داوری شد و بالاترین امتیاز (G) را در سال ۲۰۰۷ که معادل ++A است[4] ، از آکادمی علوم آمریکا (NAAS) کسب کرد و بار دیگر ، جمهوری اسلامی ایران در عرصه‌ی تولید علم درخشید . این کشف نتایج ارزنده و مهم دیگری نیز به دنبال داشت که شرح آن را در کتاب مرجع (*) و فهرست عناوین مطالب را در سایت کاشف (**) می‌توانید مشاهده کنید . ادامه‌ی نتایج را در شماره‌های آتی ملاحظه نمایید .

زیرنویس

۱ . اثبات این مطلب در قالب یک تضیه‌ی کاربردی و بسیار مهم (از مؤلف) در کتاب مرجع(*) موجود است .

2. Prime numbers of regular and irregular

3. Simon purple

4. Excellent

منابع

* هاشمی موسوی ، سیدمحمدرضا . انتشارات بین‌المللی 2006:Brill/VSP
The discovery of prime numbers formula and its results & other top researches (Author: S.M.R.Hashemi Moosavi)

** سایت کاشف فرمول :
www.primenumbersformula.com

معرفی سایت‌های ریاضی

● احسان یارمحمدی

http://www.sosmath.com

سایت اینترنتی sosmath.com که در آن کلمه sosmath به اختصار به جای کلمه s.o.s. mathematics قرار گرفته است، شامل مطالب بسیار ارزنده‌ای پیرامون برخی موضوعات ریاضی است. در واقع، سایت sosmath، سایتی رایگان و مجانی برای علاقه‌مندان و دوست‌داران ریاضیات است که می‌خواهند، مطالبی از جبر (اعم از جبر مقدماتی) تا معادلات دیفرانسیل را مرور کنند. منبع مناسبی برای دانش‌آموزان دوره‌ی دبیرستان، دانش‌پژوهان پیش از دوره‌ی دانشگاه، دانشجویان کالج‌ها و بزرگسالانی است که مایل به یادگیری هستند. هم‌چنین، برای انجام تکالیف منزل، تقویت ذهن، و آماده شدن برای امتحانات ریاضی به مخاطب کمک می‌کند. این سایت در برگیرنده‌ی بیش از ۲۵۰۰ صفحه، شامل مطالب ریاضی است که به وسیله‌ی تعاریف، تفسیرها و توضیحات کوتاه و قابل فهم ارائه شده‌اند.

موضوع‌های اصلی سایت sosmath عبارتند از:

۱. جبر (Algebra)
۲. مثلثات (Trigonometry)
۳. حساب دیفرانسیل و انتگرال (Calculus)
۴. معادلات دیفرانسیل (Differential Equations)
۵. متغیرهای مختلط (Complex Variables)
۶. جبر ماتریسی (Matrix Algebra)

این سایت به گونه‌ای طراحی شده است که اگر بخواهید مطالب بیشتری بخوانید، می‌توانید قسمت CyberExams را مرور کنید که بیانگر مثال‌هایی است که سایت در اختیار مخاطب قرار می‌دهد.

اکنون که با الفبایی از این سایت آشنا شدید، برخی از عنوان‌های موضوع‌های این سایت را ارائه می‌کنیم. در ضمن، هریک از عنوان‌های موضوعی این سایت زیر عنوان‌هایی دارد که مطالب زیبا و جالب توجهی ارائه می‌کند.

❑ جبر

۱-۱. کسرها (Fractions)
۱-۲. واحدهای تبدیل (Units of Conversion)
۱-۳. اعداد مختلط (Complex Numbers)
۱-۴. معادلات درجه دوم (Quadratic Equations)
۱-۵. فاکتورگیری و ریشه‌های چندجمله‌ای‌ها (Factorization and Roots of Polynomials)
۱-۶. معادلات حل‌شدنی (Solving Equations)
۱-۷. دستگاه معادلات (Systems of Equations)
۱-۸. نامساوی‌ها (Inequalities)
۱-۹. توابع معکوس (Inverse Functions)
۱-۱۰. لگاریتم‌ها و توابع نمایی (Logarithms and Exponential Functions)
۱-۱۱. توابع گویا (Rational Functions)

❑ مثلثات

۲-۱. مثلثات (Trigonometry)
۲-۲. معادلات مثلثاتی حل شدنی (Solving Trigonometry Equations)
۲-۳. حساب دیفرانسیل و مثلثات (Calculus and Trigonometry)
۲-۴. مثلثات هذلولوی (Hyperbolic Trigonometry)

❑ حساب دیفرانسیل وانتگرال

۳-۱. دنباله‌ها (Sequences)
۳-۲. سری‌ها (Series)
۳-۳. حد و پیوستگی (Limit and Continuity)
۳-۴. مشتق‌گیری (Differentiation)
۳-۵. انتگرال‌گیری (Integration)
۳-۶. روش‌های انتگرال‌گیری (Techniques of Integration)
۳-۷. رفتار موضعی توابع (Local Behavior of Functions)
۳-۸. سری‌های توانی (Power Series)
۳-۹. سری‌های فوریه (Fourier Series)
۳-۱۰. پیوست (Appendix)

❑ جبر ماتریسی

۶-۱. مقدمه‌ای بر ماتریس‌ها (Introduction to Matrices)
۶-۲. دستگاه‌های معادلات خطی (Systems of Linear Equations)
۶-۳. دترمینان‌ها (Determinants)
۶-۴. مقادیر ویژه و بردارهای ویژه (Eigenvalues and Eigenvectors)
۶-۵. پیوست (Appendix)

برای دانش‌آموزان سال سوم و پیش‌دانشگاهی

بحث در وجود و علامت ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی سوم

قسمت ۳

محمدهاشم رستمی

اشاره

بخشی از حل و بحث معادله‌ی درجه‌ی سوم را در شماره‌ی قبل دیدیم. اینک ادامه‌ی مطلب را در پی می‌آوریم.

برای بحث در وجود ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی سوم پارامتری که به صورت $x^3 + px + q = 0$ است، باید به ازای مقدارهای متفاوت پارامتر داده شده در معادله، $\Delta = 4p^3 + 27q^2$ را تعیین علامت کنیم و برای بحث در وجود و علامت ریشه‌های این معادله باید $\Delta = 4p^3 + 27q^2$ و q را تعیین علامت کنیم. به مثال‌های ذیل توجه کنید:

مثال۱. در وجود ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی سوم پارامتری $x^3 - 4x + \sqrt{3}(m-2) = 0$، به ازای مقدارهای متفاوت پارامتر m بحث کنید.

حل: باید $\Delta = 4p^3 + 27q^2$ را برحسب m محاسبه و تعیین علامت کنیم. داریم:

$$p = -4\ ,\ \ q = 3(m-2)\ ,$$
$$\Delta = 4p^3 + 27q^2 = 4(-4)^3 + 27 \times 3(m-2)^2$$
$$\Rightarrow \Delta = -256 + 81(m-1)^2 = 81(m-1)^2 - 256\ ,\ \ \Delta = 0$$
$$\Rightarrow 81(m-1)^2 - 256 = 0 \Rightarrow (m-1)^2 = \frac{256}{81} \Rightarrow m - 1 = \pm\frac{16}{9}$$
$$\Rightarrow m = 1 + \frac{16}{9} = \frac{25}{9}\ ,\ \ m = 1 - \frac{16}{9} = -\frac{7}{9}$$

m	$-\infty$		$-\frac{7}{9}$		$\frac{25}{9}$		$+\infty$
Δ		+	0	−	0	+	
R		یک ریشه دارد	یک ریشه‌ی مضاعف و یک ریشه‌ی ساده دارد	سه ریشه دارد	یک ریشه‌ی مضاعف و یک ریشه‌ی ساده دارد	یک ریشه دارد	

مثال۲. در وجود و علامت ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی سوم پارامتری، $x^3 - 4x + \sqrt{3}(m-2) = 0$ به ازای مقدارهای متفاوت پارامتر m فاصله بحث کنید.

حل: باید $\Delta = 4p^3 + 27q^2$ و q را تعیین علامت کنیم. داریم:

$$\Delta = 4p^3 + 27q^2 = 4(-4)^3 + 27 \times 3(m-2)^2$$
$$= 81(m-2)^2 - 256$$
$$\Delta = 0 \Rightarrow 81(m-2)^2 - 256 = 0 \Rightarrow m = \frac{25}{9}\ ,\ \ m = -\frac{7}{9}$$
$$q = \sqrt{3}(m-2)\ ,\ \ q = 0 \Rightarrow \sqrt{3}(m-2) = 0$$
$$\Rightarrow m - 2 = 0 \Rightarrow m = 2$$

m	$-\infty$		$-\frac{7}{9}$		2		$\frac{25}{9}$		$+\infty$
Δ		+	0	−		−	0	+	
q		−		−	0	+		+	
R		یک ریشه‌ی مثبت دارد	ریشه‌ی ساده مثبت و ریشه‌ی مضاعف منفی دارد	یک ریشه‌ی مثبت و دو ریشه‌ی منفی دارد	یک ریشه‌ی صفر و دو ریشه‌ی قرینه دارد	یک ریشه‌ی منفی و دو ریشه‌ی مثبت دارد	ریشه‌ی ساده منفی و ریشه‌ی مضاعف مثبت دارد	یک ریشه‌ی منفی دارد	

مثال۳. در وجود و علامت ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی سوم پارامتری زیر به ازای مقدارهای متفاوت پارامتر m بحث کنید.

$$x^3 - 3x + 2 - m = 0$$

حل: $\Delta = 4p^3 + 27q^2$ و q را بر حسب m محاسبه و تعیین علامت می‌کنیم. داریم:

$$\Delta = 4p^3 + 27q^2 = 4(-3)^3 + 27(2-m)^2 = 27(m^2 - 4m)$$

$$\Delta = 0 \Rightarrow m^2 - 4m = 0 \Rightarrow m = 0 \ , \ m = 4$$

$$q = 2 - m \ , \ q = 0 \Rightarrow 2 - m = 0 \Rightarrow m = 2$$

m	$-\infty$		0		2		4		$+\infty$
Δ		+	0	−		−	0	+	
q		+		+	0	−		−	
R		$X_1 < 0$	$X_1 < 0 < X_2 = X_3$	$X_1 < 0 < X_2 < X_3$	$X_1 < X_2 = 0 < X_3$	$X_1 < X_2 < 0 < X_3$	$X_1 = X_2 < 0 < X_3$	$X_1 > 0$	

مثال۳. در وجود و علامت ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی سوم پارامتری $(2m-1)x^3 - 3x^2 + 1 = 0$ به ازای مقدارهای متفاوت پارامتر m بحث کنید.

حل: این معادله را با تغییر متغیر $x = \frac{1}{X}$، به معادله‌ی $X^3 + pX + q = 0$ تبدیل می‌کنیم. داریم:

$$(2m-1)\left(\frac{1}{X}\right)^3 - 3\left(\frac{1}{X}\right)^2 + 1 = 0 \Rightarrow \frac{2m-1}{X^3} - \frac{3}{X^2} + 1 = 0$$

$$\frac{2m - 1 - 3X + X^3}{X^3} = 0 \Rightarrow X^3 - 3X + 2m - 1 = 0$$

$$p = -3 \ , \ q = 2m - 1 \ , \ \Delta = 4p^3 + 27q^2$$

$$= 4(-3)^3 + 27(2m-1)^2$$

$$\Delta = 27(2m-1)^2 - 108 = 27\left[(2m-1)^2 - 4\right] \ , \ \Delta = 0$$

$$\Rightarrow 27\left[(2m-1)^2 - 4\right] = 0 \Rightarrow (2m-1-2)(2m-1+2) = 0$$

$$(2m-3)(2m+1) = 0 \Rightarrow 2m - 3 = 0 \Rightarrow m = \frac{3}{2} \ , 2m+1 = 0$$

$$\Rightarrow 2m + 1 = 0 \Rightarrow m = -\frac{1}{2}$$

$$q = 2m - 1 \ , \ q = 0 \Rightarrow 2m - 1 = 0 \Rightarrow m = \frac{1}{2}$$

m	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
Δ		+	0	−		−	0	+	
q		−		−	0	+		+	
X		$X_1 > 0$	$X_1 < 0 < X_2 = X_3$	$X_1 < X_2 < 0 < X_3$	$X_1 < X_2 = 0 < X_3$	$X_1 < 0 < X_2 < X_3$	$X_1 = X_2 < 0 < X_3$	$X_1 < 0$	

با توجه به این‌که $x = \frac{1}{X}$، علامت ریشه‌های معادله‌ی داده شده با علامت ریشه‌های معادله‌ی $X^3 - 3X + 2m - 1 = 0$، یکی است و برای تعیین وضع آن‌ها نسبت به‌هم می‌توانیم در جدول بالا، $X_1 = \frac{1}{x_1}$، $X_2 = \frac{1}{x_2}$ و $X_3 = \frac{1}{x_3}$ را قرار دهیم.

استدلال های ریاضی

(قسمت ۱)

● میرشهرام صدر

برای دانش آموزان سال سوم

درک شهودی

سه لیوان آب با دماهای متفاوت را در اختیارتان قرار می دهند و از شما می خواهند آن‌ها را به ترتیب صعودی دمایشان مرتب کنید. بی‌درنگ سه انگشت متفاوت خود را به ترتیب در هر لیوان فرو می برید، درجه حرارت هر کدام را حدس می زنید و سپس آن‌ها را مرتب می کنید.

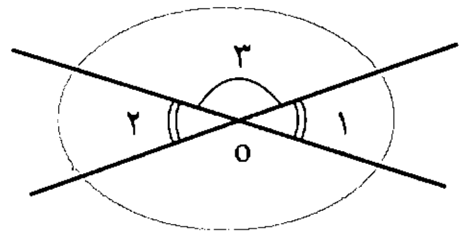
برای انجام این آزمایش، در حقیقت از حس لامسه ی خود کمک گرفته‌اید. این گونه ادراک از محیط پیرامون خود را که به‌کمک یکی از حواس پنج گانه به‌دست می‌آید، درک شهودی می‌نامیم. اگر در این آزمایش از شما می خواستند دمای آب هر لیوان را به طور دقیق بگویید، به ابزار قوی‌تری مانند دماسنج نیاز داشتید.

درک شهودی، نوعی استدلال دقیق ریاضی به حساب نمی‌آید، بلکه به ما کمک می کند تا مسائل ریاضی یا روزمره ی زندگی را بهتر بفهمیم و برای رسیدن به نتیجه، حدس هایی بزنیم. برای اثبات این حدس‌ها به ابزار قوی‌تری نیاز داریم و آن، انواع استدلال‌های ریاضی است.

انسان به طور فطری، همواره برای درک اتفاق‌های پیرامون خود از شهودش کمک می گرفته، اما نکته ی مهم این است که شهود افراد گوناگون در زمان‌های متفاوت یکسان نبوده است. برای مثال در یونان باستان، فیثاغورس و پیروان او، شهودشان با بقیه ی مردم متفاوت بود و کروی بودن زمین را باور داشتند، اما برای آن دلیل محکم و منطقی نداشتند. آن‌ها با شهود خود، تنها به دلیل این که می دیدند «وقتی در سفرهای دریایی یک کشتی از دور دست به ساحل نزدیک می شود، ابتدا دماغه و سپس بدنه ی آن بر ساحل‌نشینان آشکار می شود»، به این باور رسیده بودند. پس شهود افراد گوناگون، به نوع تفکر، سطح

تحصیلات و حتی نوع کار آن‌ها نیز وابسته است. شهود یک دانشمند، با شهود یک فرد عادی تفاوت‌های چشم‌گیری دارد.

مثال: برای اثبات این حکم که «دو زاویه‌ی متقابل به‌رأس با یکدیگر برابرند»، ابتدا شکلی به صورت زیر رسم می‌کنیم و بعد از فهم درست حکم از روی شکل، برای آن استدلال دقیق می‌آوریم.



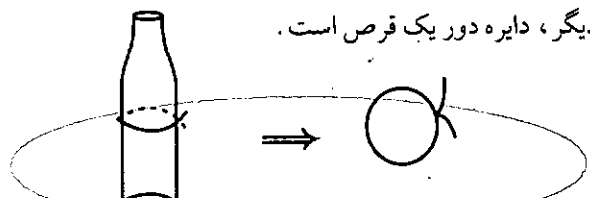
هر زاویه‌ی نیم‌صفحه برابر با ۱۸۰° است، پس داریم:

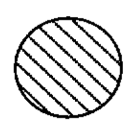
$$\begin{cases} \angle O_۱ + \angle O_۳ = ۱۸۰^\circ \\ \angle O_۲ + \angle O_۳ = ۱۸۰^\circ \end{cases} \Rightarrow \angle O_۱ + \angle O_۳ = \angle O_۲ + \angle O_۳ \Rightarrow \angle O_۱ = \angle O_۲$$

توجه: واقعاً بدون استفاده از شکل و درک شهودی، اثبات این حکم جذاب و قابل فهم نیست.

مثال: برای این که درک درستی از تعریف دایره پیدا کنیم، بهتر است قطعه‌ای سیم مفتولی را برداریم و آن را دور یک بطری قرار دهیم و دو سر سیم را به هم ببندیم. سپس بطری را از داخل سیم بیرون می‌آوریم و شکل به‌دست آمده را یک دایره می‌نامیم.

با انجام این کار، دانش‌آموزان تفاوت بین دایره و قرص (دیسک) را متوجه می‌شوند. درحقیقت یک قرص، از یک دایره به همراه نقاط داخلش تشکیل شده است. به عبارت دیگر، دایره دور یک قرص است.

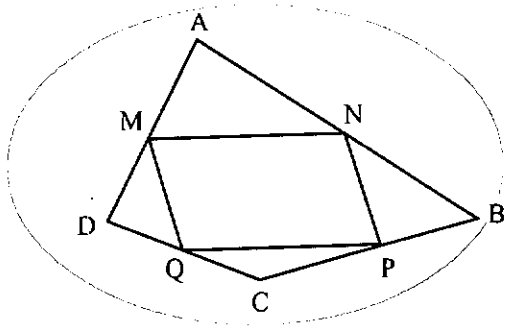




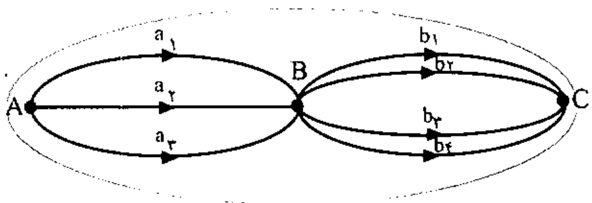
قرص یا دیسک

توجه: به خط بسته‌ای که دور قرص قرار دارد، دایره گفته می‌شود.

مثال: برای اثبات این حکم که: «اگر وسط‌های اضلاع یک چهارضلعی را به هم وصل کنیم، آن‌گاه یک متوازی‌الاضلاع تشکیل می‌شود»، ابتدا شکلی به این صورت رسم می‌کنیم و بعد از درک درستی حکم از روی شکل، برای آن استدلال دقیق می‌آوریم.



مثال: برای حل این مسأله که: «از شهر A به شهر B، ۳ راه و از شهر B به شهر C، ۴ راه متفاوت وجود دارد. هرگاه شخصی قصد سفر از شهر A و از طریق شهر B به شهر C را داشته باشد، این کار به چند طریق امکان‌پذیر است؟» ابتدا شکل زیر را رسم می‌کنیم، سپس با استفاده از اصل ضرب در آنالیز ترکیبی، جواب مسئله را به‌دست می‌آوریم.



با استفاده از اصل ضرب می‌توان نوشت: $۱۲=۳\times۴$. پس ۱۲ راه متفاوت وجود دارد که آن‌ها را به این صورت مشخص می‌کنیم:

$a_۱, b_۱$ $a_۲, b_۱$ $a_۳, b_۱$
$a_۱, b_۲$ $a_۲, b_۲$ $a_۳, b_۲$
$a_۱, b_۳$ $a_۲, b_۳$ $a_۳, b_۳$
$a_۱, b_۴$ $a_۲, b_۴$ $a_۳, b_۴$

مثال: دو عدد صحیح مثبت را چنان بیابید که حاصل جمع آن‌ها ۱۲ و حاصل ضربشان بیش‌ترین مقدار ممکن باشد.

حل: ابتدا با استفاده از شهود، سعی می‌کنیم جفت عددهای صحیح و مثبتی را پیدا کنیم که حاصل جمع آن‌ها برابر با ۱۲ باشد. سپس حاصل ضرب هر کدام را پیدا می‌کنیم. از بین این حاصل ضرب‌ها، هر کدام که از بقیه بیش‌تر باشد، دو عدد مربوط به آن، جواب مسئله هستند.

$۱+۱۱=۱۲\ ;\ ۱\times۱۱=۱۱$ $۴+۸=۱۲\ ;\ ۴\times۸=۳۲$
$۲+۱۰=۱۲\ ;\ ۲\times۱۰=۲۰$ $۵+۷=۱۲\ ;\ ۵\times۷=۳۵$
$۳+۹=۱۲\ ;\ ۳\times۹=۲۷$ $۶+۶=۱۲\ ;\ ۶\times۶=۳۶$

با توجه به حاصل جمع و حاصل ضرب‌های بالا ملاحظه می‌کنیم، هرچه اختلاف دو عدد کم‌تر می‌شود، حاصل ضربشان بیش‌تر می‌شود، تا آن‌جا که وقتی هر دو عدد برابر با

۶ باشند، حاصل ضربشان بیش‌ترین مقدار را دارد. بنابراین، به‌روش شهودی به این حدس کلی می‌رسیم:

«دو عدد حقیقی x و y که حاصل جمعشان برابر با a ولی حاصل ضربشان بیش‌ترین مقدار ممکن را داشته باشد، برابرند با: $x = y = \frac{a}{۲}$»

می‌توان حدس بالا را به طور دقیق به صورت زیر ثابت کرد:

$$\begin{cases} x + y = a \Rightarrow y = a - x \\ P = xy \end{cases} \Rightarrow P = x(a - x)$$

$$\Rightarrow P = x(a - x) = -x^۲ + ax = -(x^۲ - ax)$$

$$= -(x^۲ - ax + \frac{a^۲}{۴} - \frac{a^۲}{۴}) = \frac{a^۲}{۴} - (x - \frac{a}{۲})^۲$$

در نتیجه داریم:

$$P = \frac{a^۲}{۴} - (x - \frac{a}{۲})^۲ \qquad (۱)$$

با توجه به رابطه‌ی ۱ درمی‌یابیم، بیش‌ترین مقدار P وقتی به‌دست می‌آید که: $(x - \frac{a}{۲})^۲ = ۰$. بنابراین داریم:

$$x - \frac{a}{۲} = ۰ \Rightarrow x = \frac{a}{۲} \qquad (۲)$$

از طرفی $x + y = a$؛ پس با توجه به رابطه‌ی ۲ ملاحظه می‌کنیم که $y = \frac{a}{۲}$. درنتیجه، وقتی P بیش‌ترین مقدار ممکن را دارد که داشته باشیم:

$$x = y = \frac{a}{۲}$$

استدلال تمثیلی

برای بسیاری از تصمیم‌گیری‌ها یا نتیجه‌گیری‌ها در زندگی روزمره، از یک ضرب‌المثل یا یک بیت شعر استفاده می‌کنیم که مشابهتی با رویداد پیش‌آمده دارد. برای مثال:

اگر بخواهیم کسی را به صبر و حوصله تشویق کنیم، می‌گوییم: گر صبر کنی ز غوره حلوا سازی!

اگر دیگران شرایط فردی را درک نکرده و نتیجه‌گیری نادرستی از عملکرد او داشته باشند، می‌توان به آن‌ها گفت:

هر کسی از ظن خود شد یار من
از درون من نجست اسرار من

وقتی مبحث آمار را مطالعه می‌کنیم، برای تفهیم این موضوع که یک نمونه تصادفی همه‌ی خاصیت‌های جامعه‌ی آماری را دارد، از ضرب‌المثل «مشت نمونه‌ی خروار است»، پس نمونه بیانگر جامعه است، استفاده می‌کنیم.

استدلال تمثیلی یا مقایسه‌ای، در حقیقت یافتن نوعی مشابهت بین دو یا چند مفهوم است. به عبارت دیگر، اساس استدلال تمثیلی، نوعی شباهت است.

تذکر: استدلال تمثیلی، نوعی استدلال دقیق ریاضی محسوب نمی‌شود، زیرا محدودیت‌هایی دارد. این نوع استدلال فقط در ایجاد یک زمینه‌ی شهودی برای درک بسیاری از مفاهیم و اثبات‌های ریاضی به ما کمک می‌کند.

مثال: وقتی از دانش‌آموز می‌خواهیم به جای □ در برابری $\frac{۹}{\square} = \frac{۳}{۲}$ عدد مناسب قرار دهد، مبنای استدلال دانش‌آموز این است که چون صورت کسر سه برابر شده است، پس مخرج هم مشابه صورت باید سه برابر شود تا این‌که تناسب برقرار باشد. درنتیجه، به جای □ عدد $۶ = ۳ \times ۲$ را قرار می‌دهد.

مثال: برای هر عدد طبیعی n و عدد حقیقی $a \neq ۰$، داریم: $\frac{۱}{a^n} = a^{-n}$. مشابه با این فرمول، وقتی n عدد طبیعی نباشد، از این فرمول هم استفاده می‌شود. برای مثال، با فرض $a \neq ۰$ داریم:

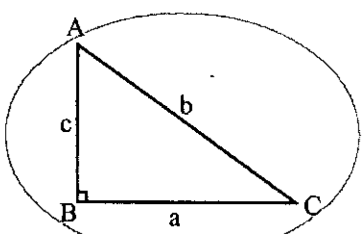
$$\frac{۱}{\sqrt[۵]{a}} = \frac{۱}{a^{\frac{۱}{۵}}} = a^{\frac{-۱}{۵}}$$

توجه: برای محاسبه‌ی حاصل عبارت‌های جبری به کمک اتحاد، از استدلال تمثیلی استفاده می‌کنیم!

مثال: همه‌ی دانش‌آموزان با مثلث قائم‌الزاویه و رابطه‌ی فیثاغورس در آن از دوره‌ی راهنمایی آشنا هستند. رابطه‌ی فیثاغورس چنین است:

در مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABC داریم:

$$b^۲ = a^۲ + c^۲$$

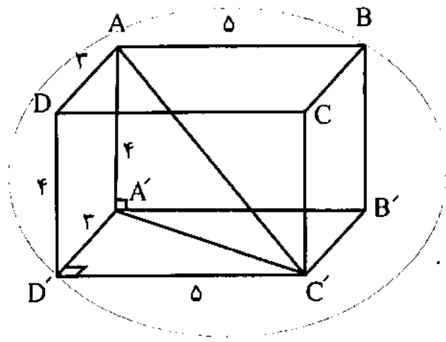


با استفاده از این رابطه و به کمک استدلال تمثیلی، می‌توان قطر مکعب مستطیل را محاسبه کرد. فرض کنید مکعب

مستطیلی به ابعاد ۳، ۴ و ۵ داریم و می‌خواهیم قطر آن را محاسبه کنیم:

چون مثلث $A'D'C'$ در رأس D' قائم‌الزاویه است، پس می‌توان رابطه‌ی فیثاغورس را برای آن، به کمک استدلال تمثیلی، چنین نوشت:

$$A'C'^{۲} = A'D'^{۲} + D'C'^{۲} \Rightarrow A'C'^{۲} = ۳^{۲} + ۵^{۲} = ۳۴$$
$$\Rightarrow A'C' = \sqrt{۳۴}$$



هم‌چنین مثلث $AA'C'$ در رأس A' قائم‌الزاویه است، پس می‌توان رابطه‌ی فیثاغورس را برای آن به کمک استدلال تمثیلی چنین نوشت:

$$AC'^{۲} = AA'^{۲} + A'C'^{۲} \Rightarrow AC'^{۲} = ۴^{۲} + (\sqrt{۳۴})^{۲} = ۴۰$$
$$\Rightarrow AC' = ۲\sqrt{۱۰}$$

استدلال استقرایی

برخی از ریاضی‌دانان بزرگ، وقتی به‌درستی قانونی تا حداکثر بیست حالت پشت سر هم پی می‌بردند، آن را به صورت یک حکم کلی بیان می‌کردند. از این‌رو، تا میانه‌های قرن هفدهم میلادی، با استفاده از استدلال استقرایی، حکم‌های بسیاری در ریاضیات، به‌ویژه در شاخه‌ی نظریه‌ی اعداد روی هم انباشته شده بودند که یک نمونه را ذکر می‌کنیم:

مارن مرسن (۱۶۴۸ـ۱۵۸۸ م)، ریاضی‌دان فرانسوی و از دوستان صمیمی دکارت بود. او معتقد بود، عدد $M_n = ۲^n - ۱$ به ازای عددهای اول ۲، ۳، ۵، ۷، ۱۳، ۱۷، ۱۹، ۳۱، ۶۷، ۱۲۷ و ۲۵۷ عددی اول، و به ازای بقیه‌ی عددهای طبیعی کوچک‌تر از ۲۵۷، عددی مرکب است. این عدد به «عدد مرسن» معروف است. در صورتی که به جای n، عددهای اول یاد شده را قرار دهیم، عددهای مرسن به دست می‌آیند:

$n = ۲ \Rightarrow M_{۲} = ۲^{۲} - ۱ = ۳$

$n = ۳ \Rightarrow M_{۳} = ۲^{۳} - ۱ = ۷$

$n = ۵ \Rightarrow M_{۵} = ۲^{۵} - ۱ = ۳۱$

$n = ۷ \Rightarrow M_{۷} = ۲^{۷} - ۱ = ۱۲۷$

$n = ۱۳ \Rightarrow M_{۱۳} = ۲^{۱۳} - ۱ = ۸۱۹۱$

$\vdots$

$n = ۲۵۷ \Rightarrow M_{۲۵۷} = ۲^{۲۵۷} - ۱$

مرسن چند اشتباه صادقانه داشت. ابتدا این که او به خطا تصور کرد، $M_{۶۷} = ۲^{۶۷} - ۱$ و $M_{۲۵۷} = ۲^{۲۵۷} - ۱$ عددهایی اول هستند. دیگر این که $M_{۶۱} = ۲^{۶۱} - ۱$ و $M_{۸۹} = ۲^{۸۹} - ۱$ و $M_{۱۰۷} = ۲^{۱۰۷} - ۱$ را جزو اعداد اول به حساب نیاورده بود.

همان‌طور که ملاحظه می‌کنید، بعضی از ریاضی‌دانان با بهره‌گیری از استدلال استقرایی (استقرای ناقص)، حکم‌هایی را صادر می‌کردند که در حالت کلی درست نبودند، زیرا آن‌ها با بررسی آزمایش‌های محدودی به یک نتیجه‌ی کلی می‌رسیدند و می‌دانیم که چنین نتیجه‌هایی ممکن است با یک مثال نقض باطل شوند.

استدلال استقرایی، به طور معمول، با مقایسه‌ی مشاهده‌ها و نتیجه‌های ناشی از آزمایش‌هایی محدود آغاز می‌شود. سپس نتیجه‌ی این آزمایش‌ها را به همه‌ی پدیده‌های مشابه تعمیم می‌دهند. استدلال استقرایی، اثبات دقیق ریاضی محسوب نمی‌شود، زیرا مجموعه‌ی مشاهدات ما همواره محدود است و نمی‌توانیم آزمایش را روی همه‌ی پدیده‌ها انجام دهیم. فقط روش خوبی برای حدس زدن است و برای اثبات درستی این حدس، باید از اصول استقرای ریاضی استفاده کرد.

مثال: حاصل عبارت زیر را با روش استدلال استقرایی حدس بزنید:

$$A = ۲ + ۶ + ۱۰ + \cdots + (۴n - ۲)$$

ابتدا مجموع جملات را محاسبه می‌کنیم:

$n = ۱:\ ۲ = ۲ \times ۱ = ۲ \times (۱^{۲})$

$n = ۲:\ ۲ + ۶ = ۸ = ۲ \times ۴ = ۲ \times (۲^{۲})$

$n = ۳:\ ۲ + ۶ + ۱۰ = ۱۸ = ۲ \times ۹ = ۲ \times (۳^{۲})$

$n = ۴:\ ۲ + ۶ + ۱۰ + (۴ \times ۴ - ۲) = ۳۲ = ۲ \times ۱۶ = ۲ \times (۴^{۲})$

در حالتی که $n = ۵$، می‌توان حدس زد که مجموع پنج جمله‌ی عبارت A برابر با $۲ \times (۵^{۲})$ یا ۵۰ است، زیرا:

$n = ۵:\ ۲ + ۶ + ۱۰ + ۱۴ + ۱۸ = ۵۰ = ۲ \times ۲۵ = ۲ \times (۵^{۲})$

بنابراین، هرگاه مجموع n جمله‌ی عبارت A را محاسبه کنیم، حاصل آن $۲ \times (n^{۲})$ است؛ یعنی داریم:

$$A = ۲ + ۶ + ۱۰ + \cdots + (۴n - ۲) = ۲ \times (n^{۲}) \qquad (۱)$$

برای آن که درستی حدس خود را ثابت کنیم، باید ابتدا اصل

استقرای ریاضی را مطالعه کنیم. سپس با استفاده از آن، درستی رابطه‌ی ۱ را بررسی می‌کنیم.

فعالیت ۱: الگوی زیر را در نظر بگیرید:

۷۴ × ۳ = ۲۲۲

۷۴ × ۶ = ۴۴۴

الف) بدون محاسبه، حاصل سطر زیر را ابتدا حدس بزنید و سپس مقدار آن را محاسبه کنید.

۷۴ × ۱۲ =

ب) آیا حدس شما درست بود؟

ج) با چه نوع استدلالی حدس زده‌اید؟

د) حاصل سطر زیر را حدس بزنید، سپس مقدار آن را محاسبه کنید.

۷۴ × ۲۴ =

هـ) آیا حدس شما درست بود؟

و) از قسمت‌های بالا چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

حل:

الف) چون ۲۲۲ دو برابر ۴۴۴ است، پس حاصل ۱۲×۷۴، عددی است که هر رقم آن دو برابر رقم‌های ۴۴۴، یعنی ۸۸۸ است.

ب) بله، زیرا:

۷۴ × ۱۲ = ۷۴ × (۶ × ۲) = (۷۴ × ۶) × ۲

= ۴۴۴ × ۲ = ۸۸۸

ج) استدلال استقرایی، زیرا براساس مجموعه‌ای از مشاهدات جزئی به نتیجه‌ای کلی رسیدیم.

د) مانند پاسخ مرحله‌ی الف، حاصل ۲۴×۷۴، عددی است که هر رقم آن دو برابر رقم‌های ۸۸۸ یعنی ۱۶۱۶۱۶ است.

هـ) خیر، زیرا:

۷۴ × ۲۴ = ۷۴ × (۱۲ × ۲) = (۷۴ × ۱۲) × ۲

= ۸۸۸ × ۲ = ۱۷۷۶

و) استدلال استقرایی براساس مجموعه‌ای محدود از مشاهدات است؛ بنابراین استدلال دقیق ریاضی محسوب نمی‌شود. همان‌طور که ملاحظه می‌کنید، حدس ما برای مرحله‌ی «د» درست نیست.

فعالیت ۲: به حاصل‌ضرب‌های زیر توجه کنید:

۲۰۳ × ۱۲۲ = ۲۴۷۶۶

۲۲۱ × ۳۰۲ = ۶۶۷۴۲

الف) حاصل ۳۱۲×۱۲۱ را به‌دست آورید.

ب) حاصل ۲۱۳×۱۲۱ را حدس بزنید.

ج) حاصل ۲۱۳×۱۲۱ را به دست آورید. آیا حدس شما درست بود؟

د) حاصل ۲۱۴×۱۳۲ را به‌دست آورید.

هـ) حاصل ۴۱۲×۲۳۱ را حدس بزنید.

و) حاصل ۴۱۲×۲۳۱ را به دست آورید. آیا حدس شما درست بود؟ چرا؟ توضیح دهید.

فعالیت ۳: در الگوی زیر، حاصل سطر چهارم را حدس بزنید. برای حدس خود از چه استدلالی استفاده کرده‌اید؟

$\sqrt{۱۲۱} = ۱۱$

$\sqrt{۱۲۳۲۱} = ۱۱۱$

$\sqrt{۱۲۳۴۳۲۱} = ۱۱۱۱$

$\sqrt{۱۲۳۴۵۴۳۲۱} = ?$

فعالیت ۴: الگوی زیر را در نظر بگیرید:

۳۷ × ۱۸ = ۶۶۶

۳۷ × ۲۱ = ۷۷۷

۳۷ × ۲۴ = ۸۸۸

۳۷ × ۲۷ = ؟

۳۷ × ۳۰ = ؟

الف) مقدار سطر چهارم را بدون محاسبه حدس بزنید.

ب) با چه نوع استدلالی حدس زده‌اید؟

پ) حاصل سطر چهارم را به دست آورید. آیا حدس شما درست بود؟

ت) حاصل سطر پنجم را ابتدا حدس بزنید و سپس مقدار آن را به دست آورید.

آیا حدس شما درست بود؟ چرا؟

فعالیت ۵: الگوی زیر را در نظر بگیرید:

۶۱ × ۲ = ۱۲۲

۶۱ × ۴ = ۲۴۴

۶۱ × ۸ = ؟

۶۱ × ۱۶ = ؟

الف) بدون محاسبه، سطر سوم الگو را حدس بزنید.

ب) مقدار سطر سوم را محاسبه کنید. آیا حدس شما درست بود؟

پ) از کدام استدلال برای حدس مقدار سطر سوم استفاده کرده‌اید؟

ت) حاصل سطر چهارم را حدس بزنید، سپس مقدار آن را محاسبه کنید. آیا حدس شما درست بود؟

ادامه دارد...

مسابقه های ریاضی در کشورهای مختلف دنیا (قسمت ۷)

مسابقه ی آزاد ریاضی در کانادا



● هوشنگ شرقی

برهان متوسطه ۱ دوره ی هفدهم / شماره ی ۱ / پاییز ۱۳۸۶

اشاره

درباره ی مسابقه ی آزاد ریاضی در کشور کانادا، قبلاً در شماره ی ۴۹ برهان مطالبی نوشتیم و مسابقه ی آزاد ریاضی سال ۲۰۰۰ را نیز در آن شماره آوردیم. اینک مسائل مسابقه ی سال ۲۰۰۳ را تقدیم شما می کنیم. یادآوری می شود که مدت مسابقه ۲/۵ ساعت و استفاده از ماشین های محاسبه در آن غیر مجاز است. مسائل در دو بخش A و B تنظیم شده اند. بخش A شامل ۸ سؤال است (که آسان ترند) و هر سؤال دارای ۱۵ امتیاز است. مسائل بخش B (که دشوارترند) شامل ۴ سؤال هستند و هر سؤال ۱۰ امتیاز دارد.

ابتدا صورت سؤال‌ها و سپس پاسخ آن‌ها را ملاحظه می‌کنید.

بخش A

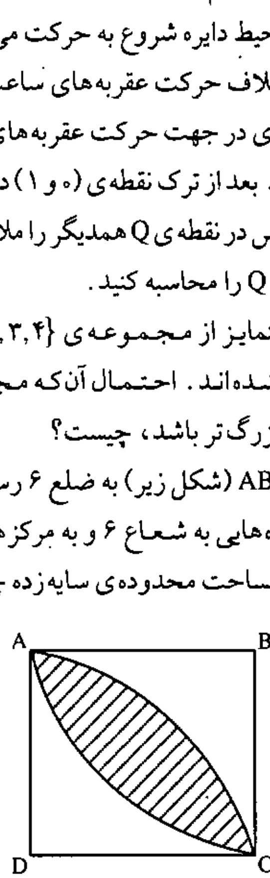
۱. جف، گِرت و اینا، همگی در یک روز از سال به دنیا آمده‌اند. گرت یک سال بزرگ‌تر از جف و اینا دو سال بزرگ‌تر از گرت است. امسال مجموع سن آن‌ها ۱۱۸ سال می‌شود. گرت چند سال دارد؟

۲. تصویر نقطه‌ی (۲- و ۴) بر محور xها را روی خط y=x تصویر می‌کنیم. مختصات نقطه‌ی آخر چیست؟

۳. دایره‌ای به شعاع ۱ و به مرکز مبداء مختصات مفروض است. دو ذره به طور هم‌زمان از نقطه‌ی (۰ و ۱) و در دو جهت مخالف، روی محیط دایره شروع به حرکت می‌کنند: یکی از آن دو در جهت خلاف حرکت عقربه‌های ساعت و با سرعت ثابت V، و دیگری در جهت حرکت عقربه‌های ساعت و با سرعت ثابت ۳V. بعد از ترک نقطه‌ی (۰ و ۱) دو ذره، نخست در نقطه‌ی P و سپس در نقطه‌ی Q همدیگر را ملاقات می‌کنند. مختصات نقطه‌ی Q را محاسبه کنید.

۴. دو عدد متمایز از مجموعه‌ی {۰،۱،۲،۳،۴} به طور تصادفی انتخاب شده‌اند. احتمال آن‌که مجموع آن‌ها از حاصل ضربشان بزرگ‌تر باشد، چیست؟

۵. مربع ABCD (شکل زیر) به ضلع ۶ رسم شده است. کمان‌هایی از دایره‌هایی به شعاع ۶ و به مرکزهای B و D نیز ترسیم شده‌اند. مساحت محدوده‌ی سایه‌زده چه قدر است؟



۶. نماد ⌊a⌋ به معنی بزرگ‌ترین عدد صحیح کوچک‌تر یا مساوی a است؛ برای مثال: ۵ = ⌊۵/۷⌋، ۴ = ⌊۴⌋ و ۵- = ⌊۴/۲-⌋. همه‌ی مقادیر x را به‌دست آورید به طوری که داشته باشیم:

$$\left\lfloor \frac{۳}{x} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{۴}{x} \right\rfloor = ۵$$

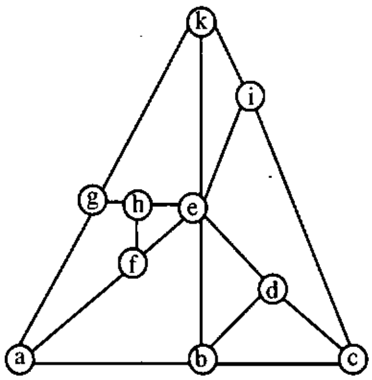
۷. نقاط P(۴،۱)، Q(۷،-۸) و R(۱۰،۱) وسط‌های شعاع‌هایی از دایره‌ی C_1 هستند. طول شعاع این دایره را به‌دست آورید.

۸. تعداد سه‌تایی‌های (k،l،m) را به‌دست آورید، به طوری که k و l و m عددهای طبیعی باشند و:

$$\frac{۴k}{۵} + \frac{۵l}{۶} + \frac{۶m}{۷} = ۸۲ \text{ و } k + l + m = ۹۷$$

بخش B

۱. در نمودار زیر، عددهای صحیح، باید در دایره‌ها طوری واقع شوند که مجموع عددهای واقع در دایره‌های روی هریک از ده خط راست، مساوی ۱۵ شود؛ برای مثال: a + g + k = ۱۵ و e + i = ۱۵.



الف) اگر k = ۲ و e = ۵، همه‌ی عددهای مناسب را در دایره‌ها قرار دهید.

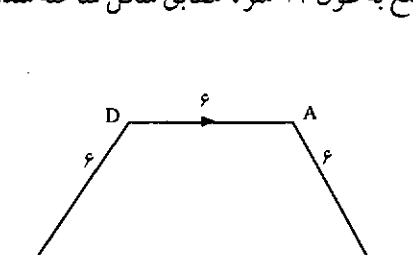
ب) فرض کنید k = ۲ و e غیر مشخص باشد:

۱ـ ۱. دستوری برای محاسبه‌ی b و c بر حسب e به‌دست آورید.

۲ـ ۱. نشان دهید، مقدار e باید مساوی ۵ باشد.

ج) حال فرض کنید k = x و x نامعین باشد. ثابت کنید که e هم‌چنان باید مساوی ۵ باشد.

۲. انباری به شکل یک ذوزنقه، با سه ضلع به طول ۶ متر و یک ضلع به طول ۱۲ متر، مطابق شکل ساخته شده است.

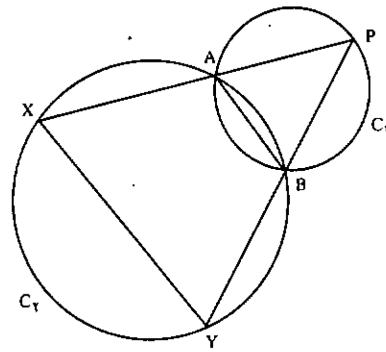


الف) اندازه‌های زوایای داخلی ذوزنقه را به‌دست آورید.

ب) اگر زنجیری در نقطه‌ی A به دیوار خارجی انبار وصل

شده و طول زنجیر ۸ متر باشد و کسی انتهای زنجیر را در دست بگیرد و حرکت کند، حداکثر مساحت محدوده‌ای که می‌تواند در خارج انبار طی کند، چه‌قدر است؟

۳. الف) در شکل زیر، دایره‌های C_1 و C_2 دارای وتر مشترک AB هستند.



نقطه‌ی P روی دایره‌ی C_1 و در خارج دایره‌ی C_2 انتخاب شده است و امتداد خطوط PA و PB دایره‌ی C_2 را به‌ترتیب در نقاط X و Y قطع کرده است. اگر $AB = 6$ ، $PA = 5$ ، $PB = 7$ و $AX = 16$ باشد، طول XY را به‌دست آورید.

ب) دو دایره‌ی C_3 و C_4 در وتر GH مشترک هستند. نقطه‌ی Q روی C_3 و در خارج C_4 انتخاب شده و امتداد خطوط QG و QH دایره‌ی C_4 را به‌ترتیب در نقاط V و W قطع کرده است. نشان دهید که بدون بستگی به جای Q، طول VW همواره مقداری ثابت است.

۴. معادله‌ی $x^3 - 6x^2 + 5x - 1 = 0$ دارای ریشه‌های حقیقی a و b و c است. مقدار $a^5 + b^5 + c^5$ را به‌دست آورید.

حل مسائل بخش A

۱. اگر سن جف را x فرض کنیم، سن گرت $x+1$ و سن اینا $x+3$ خواهد بود. به سادگی و به کمک فرض مسئله می‌توان نوشت:

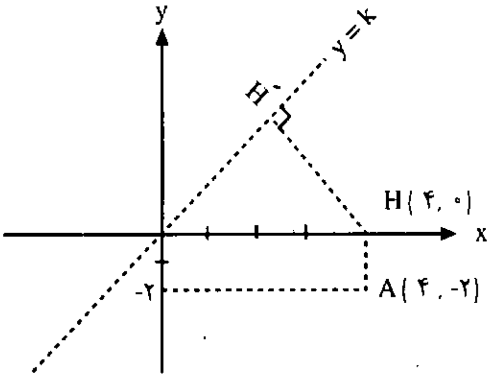
$$x + x + 1 + x + 3 = 118 \Rightarrow 3x = 114 \Rightarrow x = 38$$

یعنی گرت ۳۹ سال دارد.

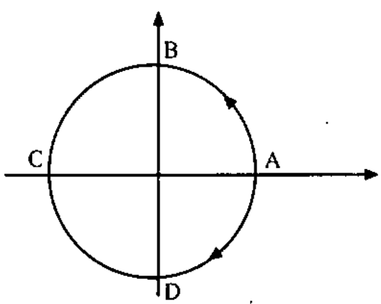
۲. تصویر نقطه‌ی $A(4,-2)$ بر محور xها، نقطه‌ی $H(4,0)$ است. اگر تصویر H بر نیمساز ربع اول و سوم، نقطه‌ی $H'(a,b)$ باشد، بدیهی است که $a = b$ و نیز شیب HH' مساوی -1 است. بنابراین می‌توان نوشت:

$$m_{HH'} = \frac{b-0}{a-4} = \frac{b}{a-4} = -1$$

$$\Rightarrow b = 4 - a \Rightarrow a = 4 - a \Rightarrow a = 2 \Rightarrow H'(2,2)$$



۳. وقتی ذره‌ی اول از نقطه‌ی شروع (A) به نقطه‌ی B می‌رسد، ذره‌ی دوم که سرعتش سه برابر سرعت آن است، از سمت دیگر به نقطه‌ی B می‌رسد. (اولی °۹۰ و دومی °۲۷۰ روی محیط دایره حرکت می‌کنند.) بنابراین، نقطه‌ی P روی نقطه‌ی $B(0,1)$ واقع است. اکنون مبدأ حرکت، نقطه‌ی (۱ و ۰) است و ذره‌ی اول با سرعت V در همان جهت (خلاف حرکت عقربه‌های ساعت) و ذره‌ی دوم نیز در جهت حرکت عقربه‌های ساعت به حرکت خود ادامه می‌دهند. با همان استدلال به سادگی در می‌یابیم که نقطه‌ی Q بر نقطه‌ی $C(-1,0)$ قرار دارد.



۴. تعداد اعضای فضای نمونه‌ی این پیشامد تصادفی معادل تعداد انتخاب‌های ۲ شیء از ۵ شیء است:

$$n(S) = \binom{5}{2} = 10$$

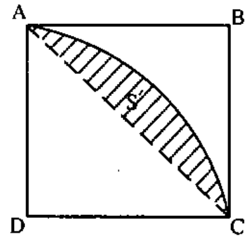
به سادگی و بدون هیچ محاسبه‌ای می‌توان با امتحان کردن این ۱۰ جفت عدد، عددهایی را که در شرط مسئله صدق می‌کنند، تعیین کرد:

$$A = \{(0,1),(0,2),(0,3),(0,4),(1,2),(1,3),(1,4)\}$$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{7}{10}$$

۵. اگر قطر مربع را رسم کنیم، مساحت محدوده‌ی سایه‌زده در شکل ذیل برابر است با مساحت ربع دایره به شعاع $OA = OC$ ، منهای مساحت مثلث قائم‌الزاویه‌ی OAC:

$$S' = S_1 - S_2 = \frac{36\pi}{4} - \frac{36}{2} = 9(\pi - 2)$$



اما مساحت محدوده‌ای که در شکل اصلی رسم شده است، دو برابر محدوده‌ی شکل بالاست. بنابراین:

$$S = 2S' = 18(\pi - 2)$$

۶. این نخستین مسئله‌ی جدی در این آزمون است! می‌دانیم که: $[x] = a \Leftrightarrow a \le x < a+1$. بنابراین اگر $\left[\frac{3}{x}\right] = k$، با توجه به فرض $\left[\frac{4}{x}\right] = 5 - k$ و با توجه به نابرابری فوق داریم:

$$k \le \frac{3}{x} < k+1, 5-k \le \frac{4}{x} < 6-k$$

از جمع کردن دو نابرابری بالا داریم:

$$5 \le \frac{7}{x} < 7$$

و از حل دستگاه نامعادله‌های فوق (انجام دهید) داریم:

$$1 < x < 1/4 \Rightarrow x \in (1, 1/4)$$

۷. P، Q و R همگی روی محیط دایره‌ای هستند که شعاع آن نصف شعاع دایره‌ی اصلی است. مرکز این دایره، نقطه‌ی برخورد عمودمنصف‌های اضلاع مثلث PQR است. بنابراین، معادله‌ی عمودمنصف‌های دو ضلع از اضلاع این مثلث (مثلاً PQ و PR) را می‌نویسیم. نقطه‌ی برخورد آن‌ها، مرکز دایره‌ی محیطی مثلث PQR است. فاصله‌ی مرکز تا یکی از این سه نقطه، شعاع دایره‌ی محیطی مثلث است و شعاع دایره‌ی اصلی دو برابر شعاع این دایره.

وسط PQ: $M(\frac{11}{2}, -\frac{7}{2})$ شیب PQ: $m = \frac{-8-1}{7-4} = -3$

$\Rightarrow$ شیب عمودمنصف PQ: $m' = \frac{1}{3} \Rightarrow$

معادله‌ی عمودمنصف PQ: $y + \frac{7}{2} = \frac{1}{3}(x - \frac{11}{2}) \Rightarrow x - 3y = 16$

وسط PR: $N(7,1)$ شیب PR: $m = \frac{1-1}{10-4} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ شیب عمودمنصف PR تعریف نشده است

معادله‌ی عمود منصف PR: $x = 7$

$$\begin{cases} x = 7 \\ x - 3y = 16 \end{cases} \Rightarrow x = 7 , \ y = -3 \Rightarrow$$

مرکز دایره‌ی محیطی مثلث PQR: $o(7, -3) \Rightarrow$

شعاع دایره‌ی محیطی مثلث PQR: $r = op = \sqrt{(7-4)^2 + (-3-1)^2} = 5$

$$\Rightarrow R = 2r = 10$$

۸. $\frac{4k}{5} + \frac{5l}{6} + \frac{6m}{7} = 82$

$$\Rightarrow (k - \frac{k}{5}) + (l - \frac{l}{6}) + (m - \frac{m}{7}) = 82$$

$$\Rightarrow (\underbrace{l + k + m}_{97}) - (\frac{k}{5} + \frac{l}{6} + \frac{m}{7}) = 82$$

$$\Rightarrow \frac{k}{5} + \frac{l}{6} + \frac{m}{7} = 15 \Rightarrow \frac{42k + 35l + 30m}{5 \times 6 \times 7} = 15$$

$$\Rightarrow \frac{30(\overbrace{m + l + k}^{97}) + 5l + 12k}{5 \times 6 \times 7} = 15$$

$$\Rightarrow 2910 + 5l + 12k = 3150 \Rightarrow 5l + 12k = 240$$

$$\Rightarrow l = \frac{240 - 12k}{5} = \frac{12(20 - k)}{5}$$

با توجه به این‌که $(5,12) = 1$ نتیجه می‌شود که l باید مضرب ۱۲ و $20 - k$ مضرب ۵ باشد:

$$20 - k = 5t \Rightarrow k = -5t + 20 > 0 , \ l = 12t > 0$$

$$\Rightarrow -5t + 20 + 12t + m = 97 \Rightarrow m = 77 - 7t > 0$$

$$\Rightarrow t = 1, 2, 3$$

بنابراین، برای k و l و m سه دسته جواب به‌صورت زیر وجود دارد:

$(k,l,m) =$ (۱۵و۱۲و۷۰) یا (۱۰و۲۴و۶۳) یا (۵و۳۶و۵۶)

بخش B

۱. الف) معادلات زیر از فرض مسئله و فرض $k = 2$ و $e = 5$ به‌دست می‌آیند:

$a + y = 13, \ a + b + c = 15, \ c + i = 13, \ b = 8, \ i = 10,$
$c + d = 10, \ b + d = 15, \ g + h = 10, \ f + h = 15, \ a + f = 10$

(مجموع عددهای دایره‌های واقع بر یک خط راست را نوشته‌ایم.)

اکنون به سادگی به کمک نتایج بالا به‌دست می‌آید:

$e = 5, \ b = 8, \ i = 10, \ d = 7, \ c = 3, \ d = 7, \ a = 4,$
$g = 9, \ h = 1, \ f = 14$

ب) فرض می‌کنیم $k = 2$ و e نامشخص باشد. این معادلات

به‌دست می‌آیند:

$a+g=۱۳,\ b+e=۱۳,\ c+i=۱۳,\ a+b+c=۱۵,$
$e+i=۱۵,\ c+d+e=۱۵,\ b+d=۱۵,\ a+f+e=۱۵,$
$f+h=۱۵,\ g+h+e=۱۵$

اکنون می‌توان نوشت:

$b=۱۳-e,\quad b+d=۱۵\Rightarrow ۱۳-e+d=۱۵$
$\Rightarrow d=۲+e,\quad c+d+e=۱۵\Rightarrow c+۲+e+e=۱۵$
$\Rightarrow c=۱۳-۲e,\quad a+b+c=۱۵\Rightarrow a+۱۳-e+۱۳-۲e=۱۵$
$\Rightarrow a=۳e-۱۱,\quad g=۱۳-a\Rightarrow g=۲۴-۳e$
$i=۱۳-c\Rightarrow i=۲e,\quad i=۱۵-e\Rightarrow ۲e=۱۵-e\Rightarrow e=۵$

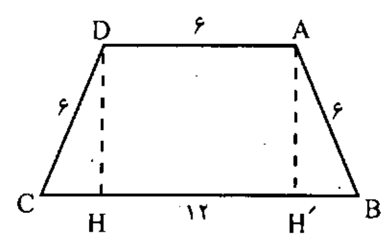
ج) با فرض $x=k$ نیز خواهیم داشت:

$a+g+x=x+i+c=a+b+c=x+e+b=e+d+c=$
$a+f+e=b+d=e+i=g+h+e=f+h=۱۵$

و از ترکیب این معادله‌ها داریم:

$b+e+x=۱۵\Rightarrow b=۱۵-x-e$
$b+d=۱۵\Rightarrow d=۱۵-b\Rightarrow d=x+e$
$c+d+e=۱۵\Rightarrow c+x+e+e=۱۵\Rightarrow c=۱۵-x-۲e$
$a+b+c=۱۵\Rightarrow a+۱۵-x-e+۱۵-x-۲e=۱۵$
$\Rightarrow a=۳e+۲x-۱۵$
$a+g+x=۱۵\Rightarrow ۳e+۲x-۱۵+g+x=۱۵$
$\Rightarrow g=۳۰-۳e-۳x$
$x+i+c=۱۵\Rightarrow x+i+۱۵-x-۲e=۱۵\Rightarrow i=۲e\ ,$
$e+i=۱۵\Rightarrow ۳e=۱۵\Rightarrow e=۵$

۲. الف) مطابق شکل، عمودهای DH و AH' را بر BC رسم می‌کنیم. داریم:

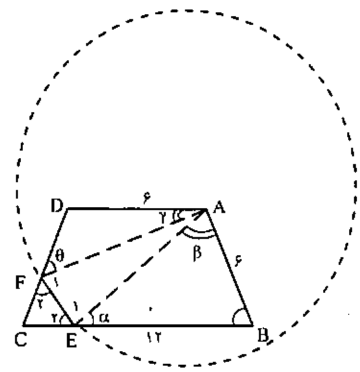


$$CH=BH'=\frac{BC-AD}{۲}=\frac{۱۲-۶}{۲}=۳$$

در مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABH'، ضلع BH' نصف وتر AB است. بنابراین: $\angle CDH=\angle BAH'=۳۰^\circ$. و در نتیجه:

$\angle A=\angle D=۱۲۰^\circ$ و $\angle B=\angle C=۶۰^\circ$

ب) مطابق شکل ذیل، دایره‌ای به مرکز A و به شعاع $r=۸$ را رسم می‌کنیم. این دایره BC را در E و CD را در F قطع می‌کند؛ به‌طوری که: $AE=AF=۸$



حال کافی است مساحت دایره‌ی به شعاع ۸ را از مساحت پنج ضلعی ADFEB کم کنیم تا مساحت محدوده‌ی مورد نظر به‌دست آید. برای محاسبه‌ی مساحت پنج ضلعی نیز می‌توان مساحت ذوزنقه را از مساحت مثلث CEF کم کرد. برای این کار محاسبات زیر را انجام می‌دهیم:

$$\Delta ABE:\frac{AE}{\sin B}=\frac{۶}{\sin\alpha}\Rightarrow\frac{۸}{\sin ۶۰^\circ}=\frac{۶}{\sin\alpha}$$

$$\Rightarrow\sin\alpha=\frac{۶\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}}{۸}\Rightarrow\sin\alpha=\frac{۳\sqrt{۳}}{۸}$$

$$\frac{BE}{\sin\beta}=\frac{۶}{\sin\alpha}\ ,\quad \cos\alpha=\sqrt{۱-\frac{۲۷}{۶۴}}=\frac{\sqrt{۳۷}}{۸}$$

$$\sin\beta=\sin(\pi-\alpha-\beta)=\sin(\alpha+۶۰^\circ)$$
$$=\sin\alpha\cos۶۰+\cos\alpha\sin۶۰$$
$$=\frac{۳\sqrt{۳}}{۸}\times\frac{۱}{۲}+\frac{\sqrt{۳۷}}{۸}\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}=\frac{\sqrt{۱۱۱}}{۱۶}$$

$$\Rightarrow BE=\frac{\frac{۶\times\sqrt{۱۱۱}}{۱۶}}{\frac{۳\sqrt{۳}}{۸}}=\frac{۶\sqrt{۱۱۱}}{۶\sqrt{۳}}=\sqrt{۳۷}\Rightarrow CE=۱۲-\sqrt{۳۷}$$

و در مثلث ADF داریم:

$$\frac{AD}{\sin\theta}=\frac{AF}{\sin۱۲۰}=\frac{DF}{\sin\gamma}\Rightarrow\frac{۶}{\sin\theta}=\frac{۸}{\frac{\sqrt{۳}}{۲}}$$

$$\Rightarrow\sin\theta=\frac{۳\sqrt{۳}}{۸}\Rightarrow\theta=\alpha$$

$$\Rightarrow F_۲=E_۲(\hat{F}_۲=۱۸۰^\circ-\hat{F}_۱-\hat{\theta},$$
$$\hat{E}_۲=۱۸۰^\circ-\hat{E}_۱-\hat{\alpha},\ \hat{E}_۱=\hat{F}_۱)$$
$$\Rightarrow CE=CF=۱۲-\sqrt{۳۷}$$

حال می‌توان نوشت:

$$S_{CEF}=\frac{۱}{۲}CE.CF.\sin\hat{C}$$

$$= \frac{1}{2}(12-\sqrt{37})^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}(144+37-24\sqrt{37})$$

$$= \frac{181\sqrt{3}-24\sqrt{111}}{4}$$

$$S_{ABCD} = \frac{12+6}{2} \times \sqrt{27} = 27\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow S_{ABEFD} = 27\sqrt{3} - \frac{181\sqrt{3}-24\sqrt{111}}{4} = \frac{24\sqrt{111}-73\sqrt{3}}{4}$$

و مساحت مورد نظر برابر است با:

$$S = 64\pi - \frac{24\sqrt{111}-73\sqrt{3}}{4} = \frac{256\pi+73\sqrt{3}-24\sqrt{111}}{4}$$

۳. الف) با توجه به شکل می‌توان نوشت:

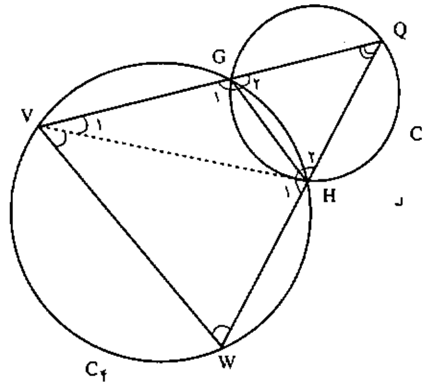
$$\left.\begin{array}{l}\angle XAB + \angle PAB = 180^\circ \\ \angle XAB + \angle XYB = 180^\circ\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}\angle PAB = \angle XYB \\ \angle XPY = \angle APB\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Delta PAB \sim \Delta PXY \Rightarrow \frac{PA}{PY} = \frac{PB}{PX} = \frac{AB}{XY},$$

$$PX = PA + AX = 5 + 16 = 21 \Rightarrow$$

$$\frac{5}{PY} = \frac{7}{21} = \frac{6}{XY} \Rightarrow PY = 15, \quad XY = 18$$

ب) به نظر می‌رسد که شکل مسئله تغییری نکرده و فقط اسامی دایره‌ها و نقاط تغییر کرده‌اند و مجهول مسئله (VW) جانشین XY شده است.



با کمی توجه به شکل و بدون هیچ گونه محاسبه‌ای می‌توان نتیجه‌ی مورد نظر را به‌دست آورد. زاویه‌ی $\hat{Q}$ در دایره‌ی C_3، محاطی و روبه‌رو به وتر ثابت GH و در نتیجه مقدار آن ثابت است و زاویه‌ی V_1 در دایره‌ی C_4 محاطی و روبه‌رو به وتر ثابت GH و در نتیجه مقدار آن ثابت است. در مثلث QVH زاویه‌ی خارجی H_1 برابر است با: $\hat{Q}+\hat{V}_1$ و در نتیجه مقدار آن ثابت است. لذا طول وتر مقابل به آن (یعنی VW)، نیز ثابت است.

۴. الف) چون a و b و c ریشه‌های معادله‌ی فوق هستند، پس در آن صدق می‌کنند:

$$\begin{array}{l}a^2 \times \\ b^2 \times \\ c^2 \times\end{array}\begin{cases}a^3-6a^2+5a-1=0 \\ b^3-6b^2+5b-1=0 \\ c^3-6c^2+5c-1=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a^5-6a^4+5a^3-a^2=0 \\ b^5-6b^4+5b^3-b^2=0 \\ c^5-6c^4+5c^3-c^2=0\end{cases}$$

و از جمع معادله‌های بالا خواهیم داشت:

$$a^5+b^5+c^5-6(a^4+b^4+c^4)$$
$$+5(a^3+b^3+c^3)-(a^2+b^2+c^2)=0 \qquad (1)$$

یک‌بار هم سه معادله‌ی فوق را در a و b و c ضرب و با هم جمع می‌کنیم:

$$a(a^3-6a^2+5a-1)+b(b^3-6b^2+5b-1)$$
$$+c(c^3-6c^2+5c-1)=0$$
$$\Rightarrow a^4+b^4+c^4-6(a^3+b^3+c^3)$$
$$+5(a^2+b^2+c^2)-(a+b+c)=0$$
$$\Rightarrow a^4+b^4+c^4=6(a^3+b^3+c^3)$$
$$-5(a^2+b^2+c^2)-(a+b+c)$$

و با جای‌گزین کردن این مقادیر در رابطه‌ی (۱) نتیجه می‌شود:

$$(a^5+b^5+c^5)-36(a^3+b^3+c^3)$$
$$+30(a^2+b^2+c^2)+6(a+b+c)$$
$$+5(a^3+b^3+c^3)-(a^2+b^2+c^2)=0$$
$$\Rightarrow a^5+b^5+c^5=31(a^3+b^3+c^3)$$
$$-29(a^2+b^2+c^2)-6(a+b+c) \qquad (2)$$

بار دیگر خود سه معادله‌ی اصلی را هم جمع می‌کنیم:

$$(a^3-6a^2+5a-1)+(b^3-6b^2+5b-1)$$
$$+(c^3-6c^2+5c-1)=0$$
$$\Rightarrow a^3+b^3+c^3=6(a^2+b^2+c^2)-5(a+b+c)+3$$

و این مقدار را در رابطه‌ی (۲) جای‌گزین می‌کنیم:

$$a^5+b^5+c^5=186(a^2+b^2+c^2)-155(a+b+c)$$
$$+93-29(a^2+b^2+c^2)-6(a+b+c)$$
$$\Rightarrow a^5+b^5+c^5=157(a^2+b^2+c^2)-161(a+b+c)+93$$

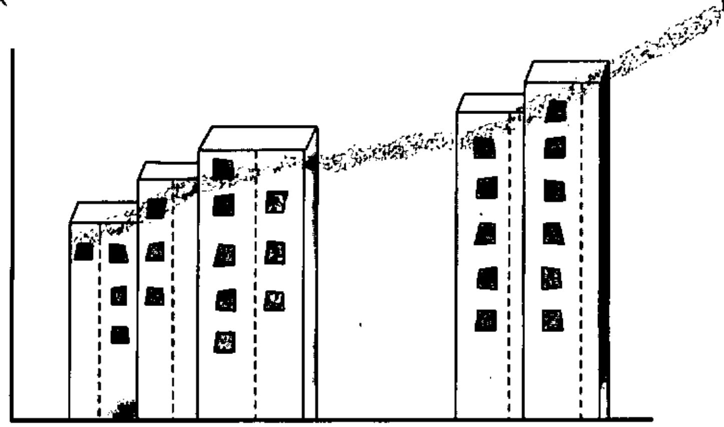
اکنون با توجه به قضیه‌ی «وی‌یت» (برای آشنایی با آن می‌توانید به کتاب آموزش المپیاد ریاضی، جلد۱، از انتشارات مدرسه رجوع کنید) داریم:

$$a+b+c=6, \quad a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+ac+bc)$$
$$=36-2(5)=26 \Rightarrow a^5+b^5+c^5=157(26)-161(6)+93$$
$$\Rightarrow a^5+b^5+c^5=3209$$

محاسبه‌ی حد مجموع به کمک انتگرال معین

(قسمت ۲)





● احسان یارمحمدی

اشاره

در شماره‌ی قبل درباره‌ی محاسبه‌ی پاره‌ای از حدهای توابعی صحبت کردیم که به صورت مجموع‌های خاصی مطرح می‌شوند و با استفاده از روش‌های متعارفی که در محاسبه‌های حدها وجود دارند، قابل حل نیستند. سپس در این خصوص مراحل محاسبه‌ی حد مجموع به کمک انتگرال معین را مطرح کرده و آزمون‌هایی را آوردیم. اینک در ذیل، ادامه‌ی آزمون‌ها را ملاحظه می‌کنید. (قبل از مطالعه‌ی این مقاله، قسمت اول آن را از شماره‌ی قبل مطالعه کنید)

آزمون ۶. حاصل این حد، کدام‌یک از گزینه‌های ذیل است؟

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(1\times 2\times 3\times\cdots\times(n-3)\times(n-2)\times(n-1)\times n)^{\frac{1}{n}}}{n}$$

۱) e ۲) $\frac{1}{e}$

۳) -1 ۴) 1

جواب: گزینه‌ی (۲) صحیح است.

$$L=\lim_{n\to\infty}\frac{(1\times 2\times 3\times\cdots\times(n-3)\times(n-2)\times(n-1)\times n)^{\frac{1}{n}}}{n}$$

$$\Rightarrow L=\lim_{n\to\infty}\frac{(n!)^{\frac{1}{n}}}{n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(n!)^{\frac{1}{n}}}{\sqrt[n]{n^n}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1\times 2\times 3\times\cdots\times(n-1)\times n}{n\times n\times n\times\cdots\times n}}$$

$$\Rightarrow \ln(L) = \ln \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1\times 2\times 3\times\cdots\times(n-1)\times n}{n\times n\times n\times\cdots\times n}}$$

$$\Rightarrow \ln(L) = \lim_{n\to\infty} \ln \sqrt[n]{\frac{1\times 2\times 3\times\cdots\times(n-1)\times n}{n\times n\times n\times\cdots\times n}}$$

$$\Rightarrow \ln(L) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}.\ln \frac{1\times 2\times 3\times\cdots\times(n-1)\times n}{n\times n\times n\times\cdots\times n}$$

$$\Rightarrow \ln(L) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}.(\ln(\frac{1}{n}) + \ln(\frac{2}{n}) + \ln(\frac{3}{n}) + \cdots + \ln(\frac{n-2}{n}) + \ln(\frac{n-1}{n}) + \ln(\frac{n}{n}))$$

با فرض این که $b=1$ و $a=0$ اختیار شوند، $\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{1}{n}$ است. بنابراین:

$$x_n = \frac{1}{n}.(\ln(\frac{1}{n}) + \ln(\frac{2}{n}) + \ln(\frac{3}{n}) + \cdots + \ln(\frac{n-2}{n}) + \ln(\frac{n-1}{n}) + \ln(\frac{n}{n})) \quad (*)$$

از مقایسه ی (*) با

$\{x_n\} = \frac{1}{n}(f(\frac{1}{n}) + f(\frac{2}{n}) + f(\frac{3}{n}) + \cdots + f(\frac{n}{n}))$ داریم:

$$f(\frac{k}{n}) = \ln(\frac{k}{n}) \overset{x=\frac{k}{n}}{\Rightarrow} f(x) = \ln(x)$$

بنابراین:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(1\times 2\times 3\times\cdots\times(n-3)\times(n-2)\times(n-1)\times n)^{\frac{1}{n}}}{n} = \int_0^1 \ln(x)dx = (x\ln(x) - x)\Big|_0^1 = -1$$

درنتیجه:

$$\ln(L) = -1 \Rightarrow L = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

آزمون ۷. حاصل این حد کدام یک از گزینه های زیر است؟

$$\lim_{n\to\infty} (\frac{1}{\sqrt{n^2+1^2}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2^2}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+3^2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n^2}})$$

۱) $\ln(2+\sqrt{2})$ ۲) $\ln(\frac{1}{1+\sqrt{2}})$

۳) $\ln(1+\sqrt{2})$ ۴) $\ln(\frac{1}{2+\sqrt{2}})$

جواب: گزینه ی (۳) صحیح است.

$$\lim_{n\to\infty} (\frac{1}{\sqrt{n^2+1^2}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2^2}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+3^2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n^2}})$$

$$= \lim_{n\to\infty} (\frac{1}{\sqrt{n^2(1+\frac{1^2}{n^2})}} + \frac{1}{\sqrt{n^2(1+\frac{2^2}{n^2})}} + \frac{1}{\sqrt{n^2(1+\frac{3^2}{n^2})}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2(1+\frac{n^2}{n^2})}})$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}.(\frac{1}{\sqrt{1+(\frac{1}{n})^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+(\frac{2}{n})^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+(\frac{3}{n})^2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{1+(\frac{n}{n})^2}})$$

با فرض این که $b=1$ و $a=0$ اختیار شوند، $\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{1}{n}$ است. بنابراین:

$$x_n = \frac{1}{n}.(\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1^2}{n^2}}} + \frac{1}{\sqrt{1+\frac{2^2}{n^2}}} + \frac{1}{\sqrt{1+\frac{3^2}{n^2}}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{1+\frac{n^2}{n^2}}}) \quad (*)$$

از مقایسه ی (*) با رابطه ی زیر:

$\{x_n\} = \frac{1}{n}(f(\frac{1}{n}) + f(\frac{2}{n}) + f(\frac{3}{n}) + \cdots + f(\frac{n}{n}))$ داریم:

$$f(\frac{k}{n}) = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{k^2}{n^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1+(\frac{k}{n})^2}} \overset{x=\frac{k}{n}}{\Rightarrow} f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

بنابراین:

$$\lim_{n\to\infty} (\frac{1}{\sqrt{n^2+1^2}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2^2}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+3^2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n^2}}) = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \ln(x+\sqrt{1+x^2})\Big|_0^1 = \ln(1+\sqrt{2})$$

آزمون ۸. حاصل این حد کدام یک از گزینه های زیل است؟

$$\lim_{n\to\infty}\left((\frac{\pi}{n})\sin(\frac{\pi}{n}) + (\frac{\pi}{n})\sin(\frac{2\pi}{n}) + (\frac{\pi}{n})\sin(\frac{3\pi}{n}) + \cdots + (\frac{\pi}{n})\sin(\frac{n\pi}{n})\right)$$

۱) $\frac{\pi}{2}$ ۲) $\frac{\pi}{4}$

۳) 2 ۴) 4

جواب: گزینه‌ی (۳) صحیح است.

$$\lim_{n\to\infty}\left((\frac{\pi}{n})\sin(\frac{\pi}{n})+(\frac{\pi}{n})\sin(\frac{2\pi}{n})+(\frac{\pi}{n})\sin(\frac{3\pi}{n})+\cdots+(\frac{\pi}{n})\sin(\frac{n\pi}{n})\right)$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{n}.\left(\sin(\frac{\pi}{n})+\sin(\frac{2\pi}{n})+\sin(\frac{3\pi}{n})+\cdots+\sin(\frac{n\pi}{n})\right)$$

با فرض این‌که $b=\pi$ و $a=0$ اختیار شوند، $\Delta x=\frac{b-a}{n}=\frac{\pi}{n}$ است. بنابراین:

$$x_n=\frac{\pi}{n}.\left(\sin(\frac{\pi}{n})+\sin(\frac{2\pi}{n})+\sin(\frac{3\pi}{n})+\cdots+\sin(\frac{n\pi}{n})\right)\quad(*)$$

از مقایسه‌ی (*) با رابطه‌ی زیر:

$$\{x_n\}=\frac{\pi}{n}(f(\frac{\pi}{n})+f(\frac{2\pi}{n})+f(\frac{3\pi}{n})+\cdots+f(\frac{n\pi}{n}))$$ داریم:

$$f(\frac{k\pi}{n})=\sin(\frac{k\pi}{n})\overset{x=\frac{k\pi}{n}}{\Rightarrow}f(x)=\sin(x)$$

بنابراین:

$$\lim_{n\to\infty}\left((\frac{\pi}{n})\sin(\frac{\pi}{n})+(\frac{\pi}{n})\sin(\frac{2\pi}{n})+(\frac{\pi}{n})\sin(\frac{3\pi}{n})+\cdots+(\frac{\pi}{n})\sin(\frac{n\pi}{n})\right)=\int_0^{\pi}\sin(x)dx=-\cos(x)\Big|_0^{\pi}=2$$

آزمون ۹ . حاصل حد زیر کدام یک از گزینه‌های زیر است؟

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3}{n}(1+\sqrt{\frac{n}{n+3}}+\sqrt{\frac{n}{n+6}}+\cdots+\sqrt{\frac{n}{n+3(n-1)}})$$

۱) 2 ۲) $\frac{1}{4}$

۳) 4 ۴) $\frac{1}{2}$

جواب: گزینه‌ی (۱) صحیح است.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3}{n}(1+\sqrt{\frac{n}{n+3}}+\sqrt{\frac{n}{n+6}}+\cdots+\sqrt{\frac{n}{n+3(n-1)}})$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{n}.(\sqrt{\frac{1}{1+0}}+\sqrt{\frac{n}{n+3}}+\sqrt{\frac{n}{n+6}}+\cdots+\sqrt{\frac{n}{n+3(n-1)}})$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{n}.(\sqrt{\frac{1}{1+0}}+\sqrt{\frac{n}{n(1+\frac{3}{n})}}+\sqrt{\frac{n}{n(1+\frac{6}{n})}}+\cdots+\sqrt{\frac{n}{n+(1+\frac{3(n-1)}{n})}})$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{n}.(\sqrt{\frac{1}{1+\frac{0}{n}}}+\sqrt{\frac{1}{1+\frac{3}{n}}}+\sqrt{\frac{1}{1+\frac{6}{n}}}+\cdots+\sqrt{\frac{1}{1+\frac{3(n-1)}{n}}})$$

با فرض این‌که $b=3$ و $a=0$ اختیار شوند، $\Delta x=\frac{b-a}{n}=\frac{3}{n}$ است. بنابراین:

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{n}.(\sqrt{\frac{1}{1+\frac{0}{n}}}+\sqrt{\frac{1}{1+\frac{3}{n}}}+\sqrt{\frac{1}{1+\frac{6}{n}}}+\cdots+\sqrt{\frac{1}{1+\frac{3(n-1)}{n}}})\quad(*)$$

از مقایسه‌ی (*) با رابطه‌ی زیر:

$$\{x_n\}=\frac{3}{n}(f(\frac{3}{n})+f(\frac{6}{n})+f(\frac{9}{n})+\cdots+f(\frac{3n}{n}))$$ داریم:

$$f(\frac{3k}{n})=\sqrt{\frac{1}{1+\frac{3k}{n}}}\overset{x=\frac{k}{n}}{\Rightarrow}f(x)=\sqrt{\frac{1}{1+x}}=\frac{1}{1+x}$$

بنابراین:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3}{n}(1+\sqrt{\frac{n}{n+3}}+\sqrt{\frac{n}{n+6}}+\cdots+\sqrt{\frac{n}{n+3(n-1)}})=\int_0^3\frac{dx}{\sqrt{1+x}}=2\sqrt{1+x}\Big|_0^3=2$$

آزمون ۱۰ : حاصل حد زیر کدام‌یک از گزینه‌های ذیل است؟

$$\lim_{n\to\infty}\left((\frac{\pi}{2n})+(\frac{\pi}{2n})\cos(\frac{\pi}{2n})+(\frac{\pi}{2n})\cos(\frac{\pi}{2n})+\cdots+(\frac{\pi}{2n})\cos(\frac{(n-1)\pi}{2n})\right)$$

۱) $\frac{\pi}{2}$ ۲) $\frac{1}{2}$

۳) π ۴) 1

جواب: گزینه‌ی (۴) صحیح است.

$$\lim_{n\to\infty}\left((\frac{\pi}{2n})+(\frac{\pi}{2n})\cos(\frac{\pi}{2n})+(\frac{\pi}{2n})\cos(\frac{2\pi}{2n})+\cdots+(\frac{\pi}{2n})\cos(\frac{(n-1)\pi}{2n})\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{2n}.(1+\cos(\frac{\pi}{2n})+\cos(\frac{2\pi}{2n})+\cdots+\cos(\frac{(n-1)\pi}{2n}))$$

با فرض این‌که $b=\frac{\pi}{2}$ و $a=0$ اختیار شوند، $\Delta x=\frac{b-a}{n}=\frac{\pi}{2n}$ است. بنابراین:

$$x_n=\frac{\pi}{2n}.(\cos(\frac{0\pi}{2n})+\sin(\frac{\pi}{2n})+\sin(\frac{2\pi}{2n})+\cdots+\sin(\frac{(n-1)\pi}{2n}))\qquad (*)$$

از مقایسه‌ی (*) با رابطه‌ی زیر:

$$\{x_n\}=\frac{\pi}{2n}(f(\frac{0\pi}{2n})+f(\frac{\pi}{2n})+f(\frac{2\pi}{2n})+\cdots+f(\frac{(n-1)\pi}{2n}))$$

داریم:

$$f(\frac{k\pi}{2n})=\cos(\frac{k\pi}{2n})\overset{x=\frac{k\pi}{2n}}{\Rightarrow}f(x)=\cos(x)$$

بنابراین:

$$\lim_{n\to\infty}\left((\frac{\pi}{2n})+(\frac{\pi}{2n})\cos(\frac{\pi}{2n})+(\frac{\pi}{2n})\cos(\frac{2\pi}{2n})+\cdots+(\frac{\pi}{2n})\cos(\frac{(n-1)\pi}{2n})\right)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(x)dx=\sin(x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=1$$

مسئله‌ی ۱ [قضیه]. به ازای هر $p\in\mathbb{N}$ همواره:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1^p+2^p+3^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}}=\frac{1}{p+1}$$

برهان:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1^p+2^p+3^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}.\frac{1^p+2^p+3^p+\cdots+n^p}{n^p}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}.(\frac{1^p}{n^p}+\frac{2^p}{n^p}+\frac{3^p}{n^p}+\cdots+\frac{n^p}{n^p})$$

با فرض این‌که $b=1$ و $a=0$ اختیار شوند، $\Delta x=\frac{b-a}{n}=\frac{1}{n}$ است. بنابراین:

$$\{x_n\}=\frac{1}{n}.(\frac{1^p}{n^p}+\frac{2^p}{n^p}+\frac{3^p}{n^p}+\cdots+\frac{n^p}{n^p})\qquad (*)$$

از مقایسه‌ی (*) با رابطه‌ی زیر:

$$\{x_n\}=\frac{1}{n}(f(\frac{1}{n})+f(\frac{2}{n})+f(\frac{3}{n})+\cdots+f(\frac{n}{n}))$$ داریم:

$$f(\frac{k}{n})=(\frac{k}{n})^p\overset{x=\frac{k}{n}}{\Rightarrow}f(x)=x^p$$

بنابراین:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1^p+2^p+3^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}}=\int_0^1 x^p dx=\frac{x^{p+1}}{p+1}\Big|_0^1=\frac{1}{p+1}$$

مسئله‌ی ۲. ثابت کنید: $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{x}{n+kx}=\ln(1+x)$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{x}{n+kx}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{x}{n(1+\frac{kx}{n})}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{kx}{n}}$$

بنا بر $\lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n}f(a+\frac{k(b-a)}{n})=\int_a^b f(t)dt$ و با فرض این‌که $b=x$ و $a=0$ اختیار شده‌اند، $\Delta x=\frac{b-a}{n}=\frac{x}{n}$ است. بنابراین:

$$x_n=\frac{x}{n}.(\frac{1}{1+\frac{x}{n}}+\frac{1}{1+\frac{2x}{n}}+\frac{1}{1+\frac{3x}{n}}+\cdots+\frac{1}{1+\frac{nx}{n}})\qquad (*)$$

از مقایسه‌ی (*) با رابطه‌ی زیر:

$$\{x_n\}=\frac{x}{n}.(f(\frac{x}{n})+f(\frac{2x}{n})+f(\frac{3x}{n})+\cdots+f(\frac{nx}{n}))$$ داریم:

$$f(\frac{kx}{n})=\frac{1}{1+\frac{kx}{n}}\overset{t=\frac{kx}{n}}{\Rightarrow}f(t)=\frac{1}{1+t}$$

بنابراین:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x}{n}\sum_{k=1}^{n}f(\frac{kx}{n})=\int_0^x f(t)dt\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\frac{x}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{kx}{n}}$$

$$=\int_0^x\frac{dt}{1+t}=\ln(1+t)\Big|_0^x=\ln(1+x)\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{x}{n+kx}$$

$$=\ln(1+x)$$

مسئله‌ی ۳ [قضیه]. به ازای هر $p \in Z^+ - \{1\}$ (pهای صحیح مثبت بزرگ‌تر از یک یا pهای صحیح مثبت بزرگ‌تر مساوی با دو)، همواره:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\cdots+\frac{1}{pn}\right)=\ln\left(\frac{p}{p-1}\right)$$

برهان:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\cdots+\frac{1}{pn}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\cdots+\frac{1}{(p-1)+n}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n(1+\frac{1}{n})}+\frac{1}{n(1+\frac{2}{n})}+\frac{1}{n(1+\frac{3}{n})}+\cdots+\frac{1}{n((p-1)+\frac{n}{n})}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}.\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}+\frac{1}{1+\frac{2}{n}}+\frac{1}{1+\frac{3}{n}}+\cdots+\frac{1}{(p-1)+\frac{n}{n}}\right)$$

با فرض این‌که $b=1$ و $a=0$ اختیار شوند، $\Delta x=\frac{b-a}{n}=\frac{1}{n}$ است. بنابراین:

$$x_n=\frac{1}{n}.\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}+\frac{1}{1+\frac{2}{n}}+\frac{1}{1+\frac{3}{n}}+\cdots+\frac{1}{(p-1)+\frac{n}{n}}\right)\quad (*)$$

از مقایسه‌ی (*) با رابطه‌ی زیر:

$\{x_n\}=\frac{1}{n}\left(f(\frac{1}{n})+f(\frac{2}{n})+f(\frac{3}{n})+\cdots+f(\frac{n}{n})\right)$ داریم:

$$f(\frac{k}{n})=\frac{1}{(p-1)+\frac{k}{n}}\overset{x=\frac{k}{n}}{\Rightarrow} fx=\frac{1}{(p-1)+x}$$

بنابراین:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\cdots+\frac{1}{pn}\right)$$
$$=\int_0^1\frac{dx}{(p-1)+x}=\ln(p-1+x)\Big|_0^1=\ln\left(\frac{p}{p-1}\right)$$

مسئله‌ی ۴. ثابت کنید:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2+k^2x^2}=\frac{\mathrm{Arc}\tan(x)}{x}$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{nx}{n^2+k^2x^2}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{nx}{n^2(1+\frac{k^2x^2}{n^2})}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{x}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{k^2x^2}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{x}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+(\frac{kx}{n})^2}$$

بنا بر $\lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n}f(a+\frac{k(b-a)}{n})=\int_a^b f(t)dt$ و با فرض این‌که $b=x$ و $a=0$ اختیار شده‌اند، $\Delta x=\frac{b-a}{n}=\frac{x}{n}$ است. بنابراین:

$$x_n=\frac{x}{n}.\left(\frac{1}{1+(\frac{x}{n})^2}+\frac{1}{1+(\frac{2x}{n})^2}+\frac{1}{1+(\frac{3x}{n})^2}+\cdots+\frac{1}{1+(\frac{nx}{n})^2}\right)\quad (*)$$

از مقایسه‌ی (*) با رابطه‌ی زیر:

$\{x_n\}=\frac{x}{n}\left(f(\frac{x}{n})+f(\frac{2x}{n})+f(\frac{3x}{n})+\cdots+f(\frac{nx}{n})\right)$ داریم:

$$f(\frac{kx}{n})=\frac{1}{1+\frac{k^2x^2}{n^2}}=\frac{1}{1+(\frac{kx}{n})^2}\overset{t=\frac{kx}{n}}{\Rightarrow} f(t)=\frac{1}{1+t^2}$$

بنابراین:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x}{n}\sum_{k=1}^{n}f(\frac{kx}{n})=\int_0^x f(t)dt\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\frac{x}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+(\frac{kx}{n})^2}$$
$$=\int_0^x\frac{dt}{1+t^2}=\mathrm{Arc}\tan(t)\Big|_0^x=\mathrm{Arc}\tan(x)$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{۱}{n}\sum_{k=۱}^{n} \frac{۱}{n+(\frac{kx}{n})^{۲}} = \frac{\mathrm{Arc}\tan(x)}{x}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sum_{k=۱}^{n} \frac{n}{n^{۲}+k^{۲}x^{۲}} = \frac{\mathrm{Arc}\tan(x)}{x}$$

تمرین ۱ . حاصل هریک از حدهای زیر را به‌دست آورید :

الف) $\lim_{n\to\infty} \frac{۱+\sqrt{۲}+\sqrt{۳}+\cdots+\sqrt{n}}{n\sqrt{n}}$

ب) $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{e}+\sqrt[n]{e^{۲}}+\sqrt[n]{e^{۳}}+\cdots+\sqrt[n]{e^{n}}}{n}$

پ) $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n+۱}+\sqrt{n+۲}+\sqrt{n+۳}+\cdots+\sqrt{۲n-۱}}{n^{\frac{۳}{۲}}}$

ت) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{(n+۱)^{۲}}+\frac{n}{(n+۲)^{۲}}+\frac{n}{(n+۳)^{۲}}+\cdots+\frac{n}{(n+n)^{۲}}\right)$

تمرین ۲ . ثابت کنید : $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=۱}^{n}\sin(\frac{kx}{n}) = \frac{۱-\cos(x)}{x}$

زیرنویس

1. Limit
2. Algebric
3. Trigonometric
4. L'Hopital Rule
5. Induction
6. Continuous
7. Sequence
8. Definite Integral
9. Partial Sum
10. Integration Methods

منابع

۱ . تلگینی، محمود؛ خرده‌پژوه، فروزان؛ رجالی، علی؛ و قیاسیان، احمد. حساب دیفرانسیل و انتگرال دوره‌ی پیش‌دانشگاهی رشته‌ی علوم ریاضی. شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران. ۱۳۸۶ .

۲ . توماس، جورج و فینی، راس. حساب دیفرانسیل و انتگرال و هندسه‌ی تحلیلی. ترجمه‌ی مهدی بهزاد، سیامک کاظمی و علی کافی. مرکز نشر دانشگاهی. ۱۳۷۰ .

۳ . اشپیگل، م. حساب دیفرانسیل و انتگرال پیشرفته. ترجمه‌ی خلیل پاریاب. حمید ترلایی و بیژن شمس. انتشارات پاریاب. ۱۳۸۱ .

4. Gillett, Philip. "Calculus and Analytic Geometry". D. C. Heath (2nd Edition). 1984.

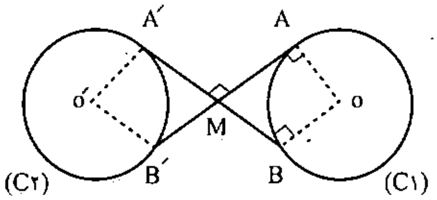
5. Varerg, D. W. and Purcell, E. j. "Calculus". Prentic Hall (7th Edition). 1997.

تفریح اندیشه

● سید ابراهیم حسینی

طول تسمه

تسمه‌ای به صورت ضربدری دور دو چرخ مطابق شکل می‌پیچد، اگر قطر هر چرخ ۱۶ سانتی‌متر باشد و تسمه در عبور از کنار خود در نقطه‌ی M زاویه‌ی قائمه بسازد، طول تسمه چه‌قدر است؟



حل : از مرکز دایره‌ی $(C_۱)$ یعنی نقطه‌ی O به A و B پاره‌خط‌هایی را رسم می‌کنیم. چون شعاع در نقطه‌ی تماس بر خط مماس عمود است بنابراین $\angle A_۱ = ۹۰°$ و $\angle B_۱ = ۹۰°$ و چون $OA = OB = ۸$ (شعاع دایره) درنتیجه چهارضلعی MAOB مربع است، پس $MA = MB = ۸$. به همین ترتیب چهارضلعی MA′O′B′ نیز مربع می‌باشد، بنابراین $A'M = MB' = ۸$ ، درنتیجه داریم :

$$A'B + AB' = ۳۲ \qquad (۱)$$

چون چهارضلعی MAOB مربع است، پس $\angle O = ۹۰°$ و زاویه‌ی مرکزی O برابر با کمان مقابلش است، درنتیجه $AB = ۹۰°$ ، پس قسمتی از دایره‌ی $(C_۱)$ که تسمه دور آن قرار دارد، برابر با $\frac{۳}{۴}$ محیط این دایره می‌باشد؛ یعنی :

$$\frac{۳}{۴}\times ۲\pi r = \frac{۳}{۴}\times ۲\pi \times ۸ = ۱۲\pi$$

به همین ترتیب قسمتی از دایره‌ی $(C_۲)$ که تسمه دور آن قرار دارد برابر با ۱۲π است، پس طول تسمه با توجه به رابطه‌ی (۱) برابر است با :

$$۳۲ + ۱۲\pi + ۱۲\pi = ۳۲ + ۲۴\pi$$

اتحاد و معادله (۱۴)

مسئله‌های گوناگون درباره‌ی معادله

● پرویز شهریاری

اشاره:

در شماره‌های قبل درباره ی اتحاد و معادله، تجزیه یک چندجمله‌ای دلخواه بحث شد، اینک در پی آن مسئله‌های گوناگونی را درباره‌ی معادله‌ها می‌آوریم:

۱) $(m^2 - n^2)\sin x - 2m\cos x = (m^2 + n^2)\cos\frac{x}{3}$ با شرط $m^2 + n^2 \neq 0$.

حل: شرط $m^2 + n^2 \neq 0$ به معنای آن است که m و n، هیچ‌کدام برابر صفر نیستند. دو طرف معادله را بر $m^2 + n^2$ بخش می‌کنیم و فرض می‌کنیم که $\frac{m^2 - n^2}{m^2 + n^2} = \sin\alpha$ به سادگی روشن می‌شود که $\frac{2m}{m^2 + n^2} = \cos\alpha$ است. معادله به این صورت درمی‌آید: $\sin x\sin\alpha - \cos x\cos\alpha = \cos\frac{x}{3}$

که چنین می‌شود: $\cos(x + \alpha) = \cos(\pi - \frac{x}{3})$

از آن جا، جواب‌های کلی x به دست می‌آید:

$$x = \frac{3}{2}k\pi + (\frac{3\pi}{4} - \frac{3\alpha}{4})$$

$$x = 3k\pi + (\frac{3\pi}{2} - \frac{3\alpha}{2})$$

α، کمانی است بین ۰ و $\frac{\pi}{2}$ که سینوس آن برابر $\frac{m^2 - n^2}{m^2 + n^2}$ است.

۲) $\sqrt[3]{2x - 1} + \sqrt[3]{x - 1} = 1$.

حل: دو طرف معادله را به توان ۳ می‌رسانیم:

$$3x - 2 + 3\sqrt[3]{(2x - 1)(x - 1)}(\sqrt[3]{2x - 1} + \sqrt[3]{x - 1}) = 1$$

باید توجه داشته باشیم که ضمن عبور از معادله ی اصلی به این معادله، ممکن است جواب اضافی وارد معادله شود که باید آخر کار آزمایش شود. به جای مقدار پرانتز در معادله‌ای که به دست آوردیم، بنا به فرض مسئله می‌توان مقدار آن، یعنی عدد۱، را قرار داد:

$$\sqrt[3]{(2x - 1)(x - 1)} = 1 - x \qquad (1)$$

اگر یک‌بار دیگر دو طرف را به توان ۳ برسانیم، به‌دست می‌آید:

$$(2x - 1)(x - 1) = (1 - x)^3 \qquad (2)$$

معادله‌ی (۲) به صورت $x^2(1 - x) = 0$ در می‌آید که جواب‌های آن، یعنی ۰و۱، در معادله‌ی (۲) و هم‌ارز آن، معادله‌ی (۱)، صدق می‌کند؛ در حالی که معادله ی اصلی تنها جواب $x = 1$ را می‌پذیرد.

۳) با شرط $ab^2 + 1 = 0$ و $abc \neq 0$، این معادله را حل کنید:

$$\frac{x}{a} + \frac{x^2}{b} + \frac{x^3}{c} = bc$$

حل: در معادله به جای a، مقدارش $-\frac{1}{b^2}$ را قرار می‌دهیم. به دست می‌آید:

$$-b^2x + \frac{x^2}{b} + \frac{x^3}{c} = bc$$

مخرج‌ها را از بین می‌بریم (فرض بر این است که a، b و c برابر صفر نیستند):

$$bx^3 + cx^2 - b^3cx - b^2c^2 = 0$$

که با اندکی توجه، به این صورت تجزیه می‌شود:

$$(x^2 - b^2c)(bx + c) = 0$$

پاسخ. $x_1 = -\frac{c}{b}$ ، $x_2 = b\sqrt{c}$ ، $x_3 = -b\sqrt{c}$.

۴. معادله‌ی $\cos f(x)\left(1 - \frac{\sin^2 f(x)}{m}\right) = 1$ را برای $m > 0$ حل کنید.

حل: معادله به ترتیب به این صورت درمی‌آید:

$$\cos f(x)(m - \sin^2 f(x)) = m;$$

$$m(1 - \cos f(x)) + \cos f(x)\sin^2 f(x) = 0;$$

$$2m\sin^2\frac{f(x)}{2} + 4\sin^2\frac{f(x)}{2}\cos^2\frac{f(x)}{2}\cos f(x) = 0;$$

$$2\sin^2\frac{f(x)}{2}\left[m + (1 + \cos f(x))\cos f(x)\right] = 0;$$

$$2\sin^2\frac{f(x)}{2}\left[\cos^2 f(x) + \cos f(x) + m\right] = 0;$$

$$1)\ \sin\frac{f(x)}{2} = 0 \Rightarrow f(x) - 2k\pi = 0$$

که یک معادله‌ی جبری است و جواب‌های آن، به شرط درست بودن عدد k، جواب معادله‌ی مفروض است.

$$2)\ \cos^2 f(x) + \cos f(x) + m = 0$$

$$\Rightarrow \cos f(x) = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4m}}{2}$$

$$f(x) = 2k\pi \pm \arccos\frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4m}}{2} \qquad (1)$$

این معادله وقتی معنا دارد که داشته باشیم:

$$1 - 4m \geq 0\ ,\ -1 \leq \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4m}}{2} \leq 1$$

از نامعادله‌ی اول به دست می‌آید: $m \leq \frac{1}{4}$ و با توجه به مثبت بودن m، نامعادله‌های دوم همیشه برقرار است، زیرا داریم:

$$a)\ -1 \leq \frac{-1 - \sqrt{1 - 4m}}{2} \leq 1\ ;\ -2 \leq -1 - \sqrt{1 - 4m} \leq 2;$$

$$-1 \leq -\sqrt{1 - 4m} \leq 3; \sqrt{1 - 4m} \leq 1\ ;\ 1 - 4m \leq 1\ ;\ m \geq 0$$

$$b)\ -1 \leq \frac{-1 + \sqrt{1 - 4m}}{2} \leq 1\ ;\ -2 \leq \sqrt{1 - 4m} \leq 3;$$

$$\sqrt{1 - 4m} \leq 3\ ;\ 1 - 4m \leq 9\ ;\ 4m \geq -8\ ;\ m \geq -2$$

بنابراین، اگر $0 < m \leq \frac{1}{4}$ باشد، معادله‌ی (۱) وجود دارد و جواب‌های آن جواب‌های معادله‌ی مفروض هستند (k را باید عددی درست گرفت).

۵. عددی سه رقمی را پیدا کنید که در این رابطه صدق کند (مبنای عدد را ده بگیرید): $\overline{abc} = abc(a + b + c)$

حل: رابطه‌ی فرض را می‌توان این‌طور نوشت:

$$100a + 10b + c = abc(a + b + c)$$

که از آن به‌دست می‌آید:

$$9(11a + b) = (a + b + c)(abc - 1) \qquad (1)$$

که در آن، a، b و c رقم‌هایی هستند بین ۰ و ۱۰. اگر هر کدام از عددهای $a + b + c$ و $abc - 1$ مضربی از ۳ باشند، حاصل‌ضرب آن‌ها بر ۹ بخش‌پذیر می‌شود، ولی اگر همه‌ی حالت‌های ممکن را آزمایش کنیم، به این نتیجه می‌رسیم که هر سه رقم a، b و c باید در تقسیم بر ۳، باقی‌مانده‌ای برابر ۱ داشته باشند که در این صورت $11a + b$ هم بر ۳ بخش‌پذیر می‌شود و در نتیجه، سمت چپ رابطه‌ی (۱) مضربی از ۲۷ خواهد بود. بنابراین، باید یکی از دو عدد $a + b + c$ یا $abc - 1$ بر ۹ بخش‌پذیر باشند.

اگر $a + b + c > 17$، آن‌گاه:

$$abc > 72\ ,\ abc(a + b + c) > 1000$$

یعنی عدد چهاررقمی می‌شود. بنابراین، اگر $a + b + c$ بر ۹ بخش‌پذیر باشد، باید داشته باشیم:

$$a + b + c = 9\ ,\ 11a + b = abc - 1$$

در این حالت، بنا به رابطه‌ی بین واسطه‌ی حسابی با واسطه‌ی هندسی، باید داشته باشیم:

$$\sqrt[3]{abc} \leq \frac{a + b + c}{3} = 3\ ,\ abc \leq 27$$

و a برابر است با ۲ یا ۱. در غیر این صورت:

$$abc = 11a + b + 1 > 27$$

اگر $a = 2$، آن‌وقت به این دستگاه معادله‌ها می‌رسیم:

$$\begin{cases} b + c = 7 \\ 2bc = b + 23 \end{cases}$$

که جواب درست ندارد. بنابراین $a = 1$. با حل دستگاهی که به این ترتیب به‌دست می‌آید:

$$\begin{cases} b + c = 8 \\ 11 + b = bc - 1 \end{cases}$$

دو جواب برای مسئله حاصل می‌شود: ۱۳۵ و ۱۴۴.

به حالتی می‌پردازیم که در آن $abc - 1$ مضربی از ۹ باشد. اگر $abc - 1 = 9$، آن‌وقت از رابطه‌ی (۱) به دست می‌آید: $c = 10a$ که ممکن نیست. حالت‌هایی هم که $abc - 1$ برابر ۱۸، ۳۶، ۴۵، ۵۴، ۷۲، ۸۱ و ۹۰ باشد، ممکن نیست، زیرا abc شامل عامل اولی بزرگ‌تر از ۱۰ می‌شود.

اگر $abc - 1 = 27$ ، آن‌وقت به این دستگاه می‌رسیم:

$$\begin{cases} 8a = 2b + 3c \\ abc = 28 \end{cases}$$

که جواب مطلوبی برای ما ندارد.

اگر $abc - 1 = 63$ ، آن‌وقت به این دستگاه می‌رسیم:

$$\begin{cases} 4a = 6b + 7c \\ abc = 64 \end{cases}$$

که باز هم جوابی برای مسئله‌ی ما ندارد. سرانجام باید فرض کنیم: $(10 > l)abc - 1 - 1 = 91$ که از آن‌جا نتیجه می‌شود:

$$11a + b < l(a + b + c)$$

به این‌ترتیب، مسئله همان دو جواب را دارد: ۱۳۵ و ۱۴۴.

۶. x ، y و z را در این دستگاه حذف کنید (رابطه‌ای بین a ، b ، c و d پیدا کنید):

$$\begin{cases} \sin x + \sin y = a \\ \cos x + \cos y = b \\ \sin z - \sin(x + y + z) = c \\ \cos z + \cos(x + y + z) = d \end{cases}$$

حل: اگر $ad + bc$ را محاسبه کنیم، حاصل برابر صفر می‌شود:

$$ad + bc = 4\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$$

$$\times\cos\frac{x+y+2z}{2}\cos\frac{x+y}{2} - 4\cos\frac{x+y}{2}$$

$$\times\cos\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y+2z}{2}\sin\frac{x+y}{2} = 0$$

۷. این معادله را حل کنید (معادله‌ی دکارت):

$$x^4 - 4x^3 - 19x^2 + 106x - 120 = 0$$

حل: عبارت سمت چپ برابری را به ضرب تبدیل می‌کنیم:

$$x^4 - 4x^3 - 19x^2 + 76x + 30x - 120 = 0;$$

$$x^3(x - 4) - 19x(x - 4) + 30(x - 4) = 0;$$

$$(x - 4)(x^3 - 19x + 30) = 0;$$

$$(x - 4)(x^3 - 3x^2 + 3x^2 - 9x - 10x + 30) = 0;$$

$$(x - 4)(x - 3)(x^2 + 3x - 10) = 0$$

پاسخ: $x_1 = 4$ ، $x_2 = 3$ ، $x_3 = 2$ ، $x_4 = -5$.

۸. این معادله را حل کنید:

$$\sqrt[5]{\frac{a+x}{a}} + \sqrt[5]{\frac{a+x}{b}} = \sqrt[5]{\frac{x}{ab}}$$

حل: معادله‌ی مفروض به این صورت در می‌آید:

$$\sqrt[5]{a+x}\,(\sqrt[5]{b} + \sqrt[5]{a}) = \sqrt[5]{x}$$

دو طرف را به توان ۵ می‌رسانیم:

$$(a + x)(\sqrt[5]{a} + \sqrt[5]{b})^5 = x$$

پاسخ: $x = \dfrac{a(\sqrt[5]{a} + \sqrt[5]{b})^5}{1 - (\sqrt[5]{a} + \sqrt[5]{b})^5}$.

۹. این دستگاه سه معادله‌ی سه مجهولی را حل کنید:

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 18 \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = 4 \end{cases}$$

حل: معادله‌ی دوم دستگاه را از مجذور معادله‌ی اول کم می‌کنیم. به‌دست می‌آید:

$$xy + xz + yz = 9 \qquad (1)$$

اکنون معادله‌ی اول را از مجذور معادله‌ی سوم کم می‌کنیم، به‌دست می‌آید:

$$\sqrt{xy} + \sqrt{xz} + \sqrt{yz} = 5 \qquad (2)$$

حال اگر معادله‌ی (۱) را از مجذور معادله‌ی (۲) کم کنیم، به‌دست می‌آید:

$$(\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z})\sqrt{xyz} = 8$$

که با توجه به معادله‌ی سوم دستگاه، چنین می‌شود:

$$\sqrt{xyz} = 2 \Rightarrow xyz = 4$$

اکنون به این دستگاه می‌رسیم:

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ xy + xz + yz = 9 \\ xyz = 4 \end{cases}$$

یعنی x ، y و z ریشه‌های این معادله‌ی درجه سوم هستند:

$$t^3 - 6t^2 + 9t - 4 = 0$$

با توجه به مجموع ضریب‌های این معادله که برابر صفر شده است، یکی از ریشه‌های آن برابر است با ۱ و عبارت سمت چپ برابری بر $t - 1$ بخش‌پذیر است. خارج قسمت درجه‌ی دوم می‌شود و ریشه‌های ۱ و ۴ دارد. بنابراین، جواب‌های معادله‌ی مفروض چنین هستند:

$$\begin{vmatrix} x_1 = 1 \\ y_1 = 1 \\ z_1 = 4 \end{vmatrix},\quad \begin{vmatrix} x_2 = 1 \\ y_2 = 4 \\ z_2 = 1 \end{vmatrix},\quad \begin{vmatrix} x_3 = 4 \\ y_3 = 1 \\ z_3 = 1 \end{vmatrix}$$

۱۰. معادله‌ی $\sin ax \sin bx = \sin mx \sin nx$ را حل کنید،

به شرط این‌که a، b، m و n جمله‌های پشت سر همِ یک تصاعد حسابی صعودی باشند.

حل: قدرنسبت تصاعد حسابی را $d > 0$ فرض می‌کنیم. بنابراین داریم:

$$\begin{cases} b = a + d, \\ m = a + 2d, \\ n = a + 3d \end{cases}$$

اگر به جای b، m و n مقدارهایشان را قرار دهیم و از این رابطه‌ها استفاده کنیم:

$$\sin ax \sin(a+d)x = \frac{1}{2}\left[\cos dx - \cos(2a+d)x\right]$$

$$\sin(a+2d)x \sin(a+3d)x = \frac{1}{2}\left[\cos dx - \cos(2a+5d)x\right]$$

معادله‌ی مفروض به این صورت درمی‌آید:

$$\cos(2a+d)x - \cos(2a+5d)x = 0$$

که با تبدیل به مجموع، چنین می‌شود:

$$\sin(2a+3d)x . \sin 2dx = 0$$

و از آن‌جا

$$\sin(2a+3d)x = 0 \Rightarrow (2a+3d)x = k\pi$$

$$\sin 2dx = 0 \Rightarrow 2dx = k\pi$$

پاسخ:

$x = \frac{k}{2d}\pi, x = \frac{k}{b+m}\pi$ (زیرا $2a + 3d = b + m$).

۱۱. این معادله را حل کنید:

$$\tan(\pi \tan x) - \cot(\pi \cot x) = 0 .$$

حل: معادله را می‌توان این‌طور نوشت:

$$\tan(\pi \tan x) = \tan(\frac{\pi}{2} - \pi \cot x) \qquad (1)$$

می‌دانیم شرط لازم و کافی برای این‌که داشته باشیم: $\cot x = \cot y$ یا $\tan x = \tan y$ این است که $x - y = k\pi$ باشد. بنابراین از معادله‌ی (۱) به دست می‌آید:

$$\pi \tan x - \frac{\pi}{2} + \pi \cot x = k\pi \qquad (2)$$

یعنی $\tan^2 x(2k+1)\tan x + 2 = 0$. از آن‌جا:

$$\tan x = \frac{2k+1 \pm \sqrt{(2k+1)^2 - 16}}{4} \qquad (3)$$

به سادگی دیده می‌شود که معادله‌های (۱) و (۲) هم‌ارز نیستند، زیرا برای نمونه، اگر معادله‌ی (۲) برای مقدارهایی از

$$\tan x = \frac{1}{2}(2k+1) \qquad (4)$$

صادق باشد (k عددی است درست)، این مقدارها در معادله‌ی (۱) صدق نمی‌کنند، زیرا برای این مقدارها، $\tan(\pi \tan x)$ مفهوم خود را از دست می‌دهد. بنابراین، پاسخ‌هایی از معادله‌ی (۲) که به صورت (۴) باشد، باید از این پاسخ‌ها کنار بروند. بنابه رابطه‌ی (۳)، وقتی tanx وجود دارد که نابرابری $(2k+1)^2 - 16 \geq 0$ برقرار باشد. بنابراین، باید مقدارهایی از k را که برابر $0, \pm 1, \pm 2$ هستند، از بین پاسخ‌ها کنار زد. به جز این، اگر tanx بخواهد به صورت (۴) باشد، باید پیش از همه، مقدار زیر رادیکال در رابطه‌ی (۳) مربع کامل باشد:

$$2k+1 = y; (2k+1)^2 - 16 = z^2$$

(z، عددی است درست)، و به دست می‌آید:

$$y^2 - 16 = z^2 \Rightarrow (y-z)(y+z) = 16 \qquad (5)$$

برای حل این معادله که معادله‌ای سیال و شامل دو مجهول

با مقدارهای درست است، فرض می‌کنیم:

$$y-z=u,\ y+z=v \qquad (*)$$

که معادله‌ی (۵) را به این صورت درمی‌آورد:

$$u.v=16 \qquad (6)$$

وقتی y و z عددهایی درست هستند، u و v هم عددهایی درست خواهند بود و برای آن‌ها، این پاسخ‌ها به دست می‌آید:

$$\begin{vmatrix} u_{1,2}=\pm 2 \\ v_{1,2}=\pm 8 \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} u_{3,4}=\pm 8 \\ v_{3,4}=\pm 2 \end{vmatrix}$$

با حل دستگاه (*) به دست می‌آید: $y=\frac{u+v}{2}$

که با توجه به این که عدد $y=2k+1$، عددی است فرد، داریم: $y=\pm 5$

برای $y=5$ به دست می‌آید: $k=2$ و برای $y=-5$ داریم: $k=-3$.

از رابطه‌ی (۳) برای $k=2$ به دست می‌آید:

$$\tan x=2,\ \tan x=\frac{1}{2}$$

و برای $k=-2$:

$$\tan x=-2,\ \tan x=-\frac{1}{2}$$

پاسخ‌های $\tan x=\pm\frac{1}{2}$ در معادله‌ی مفروض صدق نمی‌کند، ولی پاسخ‌های $\tan x=\pm 2$ در آن صدق می‌کند.

رابطه‌های (۳) و (۷) پاسخ‌های مسأله را می‌دهند:

$$x=m\pi+\operatorname{Arc}\tan\frac{2k+1\pm\sqrt{(2k+1)^2-16}}{4}$$

$$x=n\pi\pm\operatorname{Arc}\tan 2$$

که در آن‌ها m و n عددهایی درست و k برابر $\pm 3, \pm 4, \pm 5, \ldots$ است.

۱۲. این دستگاه را به ازای $n<1$ حل کنید.

$$\begin{cases} \tan\frac{x}{2}+\tan\frac{y}{2}=m \\ 1+n\cos y=\frac{1-n^2}{1-n\cos x} \end{cases}$$

حل: معادله‌ی دوم دستگاه را تبدیل می‌کنیم:

$$n\cos y=\frac{-1+n\cos x+1-n^2}{1-n\cos x}=\frac{n\cos x-n^2}{1-n\cos x}$$

از آن‌جا:

$$\frac{\cos y}{1}=\frac{\cos x-n}{1-n\cos x}$$

در دو طرف، در صورت، «تفضیل نسبت» و در مخرج، «ترکیب نسبت» می‌کنیم:

$$\frac{1-\cos y}{1+\cos y}=\frac{(1+n)-(1+n)\cos x}{(1-n)+(1-n)\cos x}=\frac{1+n}{1-n}.\frac{1-\cos x}{1+\cos x};$$

که به این صورت درمی‌آید:

$$\tan^2\frac{y}{2}=\frac{1+n}{1-n}\tan^2\frac{x}{2}$$

و درنتیجه:

$$\tan\frac{y}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+m}{1-m}}\tan\frac{x}{2}$$

و دیگر به یاری معادله‌ی اول دستگاه، $\tan\frac{x}{2}$ و $\tan\frac{y}{2}$ و درنتیجه x و y به دست می‌آید.

پاسخ: با شرط $n<1$:

$$\begin{vmatrix} x=2\left[k\pi+\operatorname{Arc}\tan\frac{m}{2n}(n-1\pm\sqrt{1-n^2})\right] \\ y=2\left[k\pi+\operatorname{Arc}\tan\frac{m}{2n}(n+1\mp\sqrt{1-n^2})\right] \end{vmatrix}$$

واژه‌شناسی ریاضیات

پرویز شهریاری

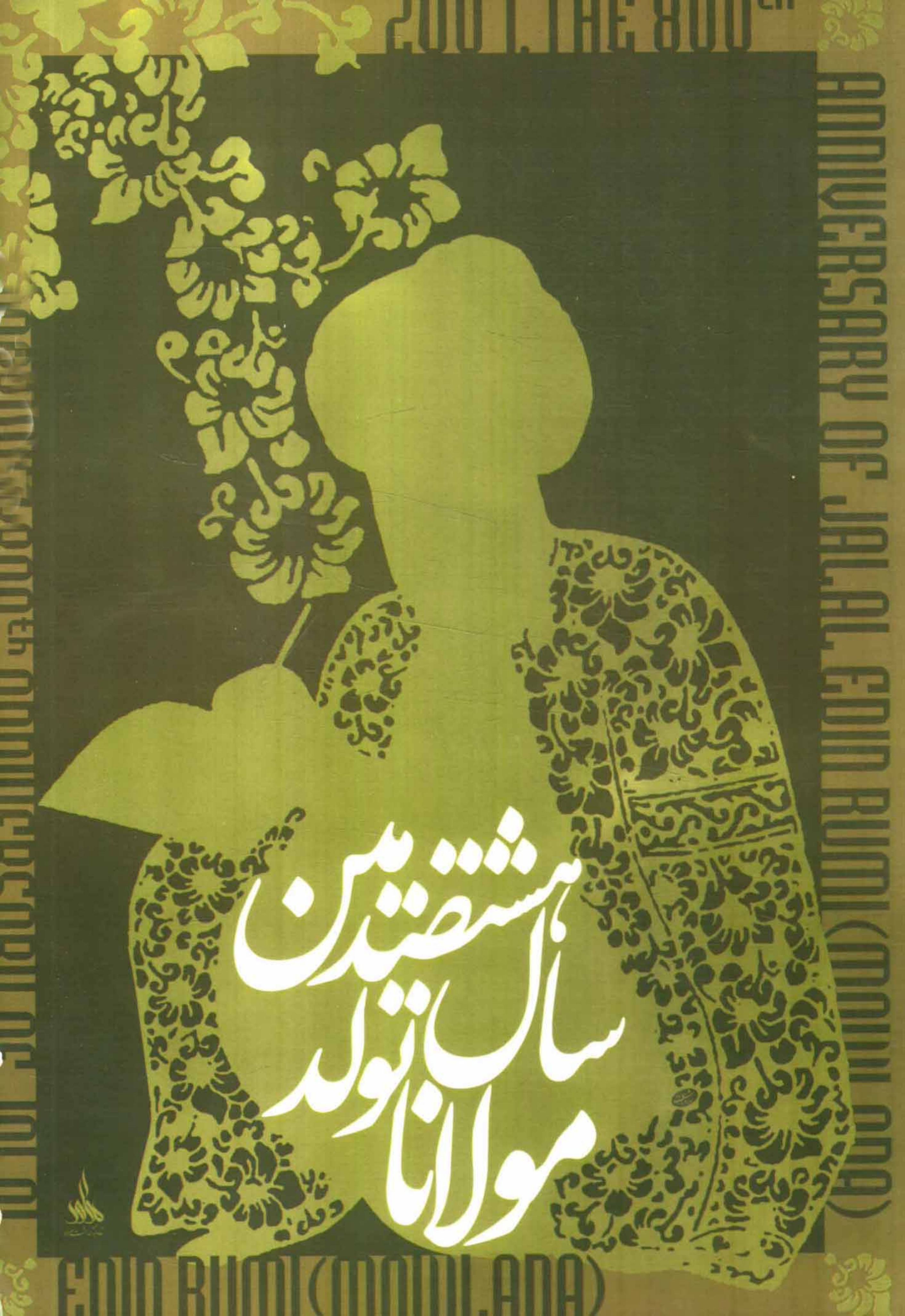
واژه‌ی ریاضیات، به‌جای واژه‌ی یونانی ماته‌ماتیکه (mathēmatikē) گذاشته شده است که خود از ماته‌ما (mathēma) به معنای «دانش» و «دانایی» آمده است.

غالباً واژه‌ی «ریاضیات» را برگرفته از واژه‌ی «ریاضت» دانسته‌اند؛ چرا که «ریاضت» تنها به معنای «پرهیزکاری بدنی» نیست و «در خود فرو رفتن»، «فهمیدن» و «رسیدن به رازها» را هم می‌رساند.

دیدگاه‌های دیگری هم وجود دارند. بسیاری از زبان‌شناسان معتقدند، واژه‌ی «ریاضی» از واژه‌ی فارسی «راز» به معنای «اندازه گرفتن» آمده است. واژه‌ی «راز» هنوز در واژه‌های «تراز» با حفظ معنای خود باقی مانده است. در واژه‌ی «ترازو»، «ترا» به معنای «از این سو و آن سو» و «راز» به معنای «اندازه‌گیری» است. پسوند «او» در بسیاری جاها در زبان فارسی، به معنای «بسیار» به کار رفته است. به این ترتیب، «ترازو»، یعنی «اندازه‌گیری و مقایسه‌ی بسیار». در ضمن، واژه‌ی «مر» در زبان فارسی (که در واژه‌های «شمر» و «شمردن» وجود دارد)، به معنای «شمردن» و «محاسبه کردن» است. بدین ترتیب، اینان به‌جای واژه‌ی «ریاضیات»، واژه‌ی «راز و مر» را پیشنهاد می‌کنند که درست به معنای «اندازه گرفتن و شمردن» است و اگر ریاضیات را «دانش رابطه‌های کمیتی و شکل‌های فضایی» بدانیم، واژه‌ی «راز و مر» می‌تواند انتخابی درست باشد.

اگر واژه‌ی «ریاضیات» را (که نه در ترکیب زیباست و نه به روشنی معرف یکی از دانش‌هاست)، برگرفته از واژه‌ی «ریاضت» فرض کنیم، می‌تواند اثری منفی در علاقه‌مندان به این دانش بگذارد؛ زیرا همگان «ریاضت» را به معنای «سختی کشیدن»، «در انزوا فرو رفتن» و «فشار بیش از اندازه به خود» می‌دانند که با ماهیت دانش ریاضی سازگاری ندارد. این تعبیر، شبیه تعبیری است که برخی برای واژه‌ی «جبر» می‌آورند و آن را به معنای «زور» و «فشار» می‌دانند، در حالی که خوارزمی، واژه‌ی جبر را به معنای «جبران کردن» گرفته است؛ چرا که به تعبیر خوارزمی و به زبان امروزی، می‌توان عدد منفی را از یک طرف معادله، به طرف دیگر برابری برد تا مقداری مثبت شود (یعنی جبران شود). در مصراع که «جبر» خاطر مسکین بلا بگرداند، واژه‌ی «جبر» درست به همین معنای «جبران کردن» به کار رفته است.

جدا از این بحث به‌نظر می‌رسد، اگر قرار باشد واژه‌ای فارسی به‌جای واژه‌ی «ریاضیات» انتخاب شود، بهترین پیشنهاد، همان واژه‌ی «راز و مر» باشد که هم زیباست و هم از نظر معنا، با واژه‌ی «ریاضیات» سازگار است.


2007, THE 800th
ANNIVERSARY OF JALAL EDIN RUMI (MOWLANA)
EDIN RUMI (MOWLANA)
هشتصدمین
سال تولد
مولانا

وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش وبرنامه ریزی آموزشی
دفتر انتشارات کمک آموزشی

رشد برهان ۵۶

فصلنامه ی آموزشی، تحلیلی و اطلاع رسانی

مجله ی ریاضی

دوره ی متوسطه

• دوره‌ی هفدهم • شماره‌ی ۲ • زمستان ۱۳۸۶ • بها: ۳۵۰۰ ریال



- آجرهای پُرشیار
- رویکرد هندسی ـ رویکرد جبری در آموزش هندسه
- نخبه پروری نکنیم!
- مسائل و مباحثی پیرامون اعداد گویا وگنگ



ریاضیات و دانش‌های دیگر

کاربردهای ریاضیات، بی‌اندازه زیاد و بسیار گوناگون است. در واقع به کار بردن روش‌های ریاضی، مرزی نمی‌شناسد: همه‌ی شکل‌های حرکت ماده را می‌توان با روش ریاضی بررسی کرد. البته نقش و اهمیت روش ریاضی در حالت‌های گوناگون، متفاوت است. هیچ طرح معین ریاضی نمی‌تواند از عهده‌ی بیان همه‌ی ویژگی‌های پدیده‌های حقیقی برآید. وقتی می‌خواهیم پدیده‌ای را بررسی کنیم، شکل خاصی از آن را در معرض تحلیل منطقی قرار می‌دهیم. در ضمن می‌کوشیم، نکته‌هایی را بیابیم که در این شکل جدا شده از پدیده‌ی واقعی وجود ندارند و شکل‌های تازه‌ای پیدا کنیم که بیشتر و کامل‌تر، دربرگیرنده‌ی پدیده‌ی ما باشند.

مکانیک آسمانی، به‌ویژه مطالعه‌ی حرکت سیاره‌ها، نمونه‌ی روشنی از توانایی روش‌های ریاضی را به ما نشان دهد. قانون جاذبه‌ی عمومی که بیان ریاضی بسیار ساده‌ای دارد، به تقریب تمامی حوزه‌ی عملکرد پدیده را معین می‌کند. به‌جز حرکت ماه که برای مشاهده‌ی دقیق در دسترس ماست، جسم‌های آسمانی را به دلیل اندازه‌های کوچک ظاهری آن‌ها، «نقطه‌های ریاضی» به حساب می‌آورند. ولی حل مسئله‌ی مربوط به حرکت نقطه‌ی مادی زیر تأثیر نیروی جاذبه، حتی در حالت $n = ۳$، دشواری‌ها و پیچیدگی‌های زیادی را پدید می‌آورد. با وجود این، هر نتیجه‌ای که به یاری تجزیه و تحلیل ریاضی طرح پذیرفته شده، به دست آید، با دقت زیادی با آن‌چه در واقعیت پیش می‌آید، تطبیق می‌کند. از نظر منطقی، طرح ساده‌تر بهتر می‌تواند میدان انتخابی پدیده‌ها را بازتاب دهد و همه‌ی دشواری کار، به بیرون آوردن نتیجه‌های ریاضی از این طرح انتخابی مربوط می‌شود.

اگر از مکانیک به فیزیک برویم، نقش روش‌های ریاضی چندان کاهش نمی‌یابد، ولی پیچیدگی کاربرد این روش‌ها، به میزان زیادی افزایش می‌یابد. به تقریب، هیچ زمینه‌ای از فیزیک وجود ندارد که به دستگاه‌های پیشرفته‌ای نیازمند نباشد، ولی اغلب دشواری اصلی بررسی‌ها، به پیشرفته‌تر کردن نظریه‌های ریاضی مربوط نمی‌شود، بلکه به انتخاب شرط‌های لازم برای به ریاضی درآوردن موضوع، و به تفسیر نتیجه‌هایی که از راه‌های ریاضی به دست می‌آید، بستگی دارد.

نظریه‌ی آماری پراکندگی، بر بررسی جابه‌جایی تصادفی میکروسکوپی ذره‌ها، زیر تأثیر مولکول‌های ماده‌ی حلال، تکیه دارد. قانون دقیق این جابه‌جایی میکروسکوپی برای ما معلوم نیست. ولی نظریه‌ی ریاضی «احتمال»، به ما اجازه می‌دهد (از شرط‌های عمومی درباره‌ی جابه‌جایی ناچیز در فاصله‌ی زمانی کوچک و بدون ارتباط با جابه‌جایی ذره‌ها در دو فاصله‌ی زمانی پشت سرهم)، نتیجه‌ی کمیتی مشخصی به دست آوریم: تعیین قانون (تقریبی) احتمالی، برای جابه‌جایی ذره‌ها در فاصله‌ی زمانی بزرگ (ماکروسکوپی).

در دانش زیست‌شناسی، روش‌های ریاضی، نقش درجه دوم دارند. روش‌های ریاضی، بیشتر از زیست‌شناسی، در تحلیل پدیده‌های مربوط به «علوم انسانی» و «علوم اجتماعی»، با همه‌ی پیچیدگی‌هایی که دارند، جای خود را باز کرده است. کاربرد روش‌های ریاضی در زیست‌شناسی، علوم اجتماعی و علوم انسانی، بیشتر از راه «سیبرنتیک» انجام می‌گیرد. اهمیت ریاضیات برای قانون‌های اجتماعی (و دانش زیست‌شناسی)، به صورت یک دانش کمکی و از راه آمار ریاضی جلوه می‌کند. ولی در تحلیل آخر، پدیده‌های اجتماعی در لحظه‌های تغییر کیفی هر دوره‌ی تاریخی، چنان موضع نیرومندی دارند که غالب روش‌های ریاضی را در صف عقب قرار می‌دهند.

منبع

فرهنگ ریاضیات. گروه ریاضیات انتشارات مدرسه. ناشر: مدرسه‌ی برهان

بسم الله الرحمن الرحیم

وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه ریزی آموزشی
دفتر انتشارات کمک آموزشی

- مدیر مسئول: علیرضا حاجیان زاده
- سردبیر: حمیدرضا امیری
- مدیر داخلی: میرشهرام صدر
- طراح گرافیک: آزیتا کوثری
- ویراستار ادبی: کبری محمودی
- اعضای هیأت تحریریه: حمیدرضا امیری
محمد هاشم رستمی، احمد قندهاری،
میرشهرام صدر، هوشنگ شرقی،
سید محمدرضا هاشمی موسوی،
غلامرضا یاسی پور
و با تشکر از همکاری ارزنده ی
استاد پرویز شهریاری
صندوق الکترونیکی سردبیر:
H66Amiri@yahoo.com
پیام گیر نشریات رشد: ۸۸۸۳۹۲۳۲-۰۱۴۸۲-۸۸۳۰
- چاپ و صحافی: شرکت افست (سهامی عام)
- نشانی دفتر مجله: تهران، صندوق پستی ۱۵۸۷۵/۶۵۸۵
تلفن دفتر مجله: ۹-۸۸۸۳۱۱۶۰ داخلی ۳۹۷
تلفن امور مشترکین: ۷۷۳۳۶۶۵۶ - ۷۷۳۳۵۱۱۰
www.roshdmag.ir
ISSN 1735 - 4951

رشد برهان ۵۶

مجله ی ریاضی

دوره ی متوسطه

فصلنامه ی آموزشی، تحلیلی واطلاع رسانی

دوره ی هفدهم /شماره ی ۲/ زمستان ۱۳۸۶/شمارگان: ۲۵۰۰۰ نسخه

رشد برهان متوسطه، تمامی دبیران محترم و دانش آموزان عزیز را در زمینه های زیر به همکاری دعوت می کند:

- نگارش مقاله‌های کمک درسی (شرح و بسط و رفع مشکلات مبحث درسی کتاب‌های ریاضی دوره ی متوسطه و پیش دانشگاهی)
- طرح مسائل کلیدی به همراه حل آن‌ها (برای دانش‌آموزان)
- طرح مسائل مسابقه‌ای به همراه حل آن‌ها (برای دانش‌آموزان)
- طرح معماهای ریاضی
- نگارش یا ترجمه ی مقاله‌های عمومی ریاضی (مانند تاریخ ریاضیات، زندگینامه ی علمی و اجتماعی ریاضیدانان، نکته‌های تازه و لطیف ریاضیات، آموزش ریاضیات، آموزش کامپیوتر و ...)

رشد برهان متوسطه هر سه ماه، یکبار منتشر می شود.
مجلّه در حکّ، اصلاح، حذف و اضافه ی مقاله ها آزاد است.
مقاله های وارده ،باید خوانا و حتی الامکان کوتاه باشد.
مقاله های رسیده مسترد نمی شود.
استفاده از مطالب مجلّه در کتاب ها یا مجله های دیگر با ذکر دقیق مأخذ بلامانع است.

حرف اول

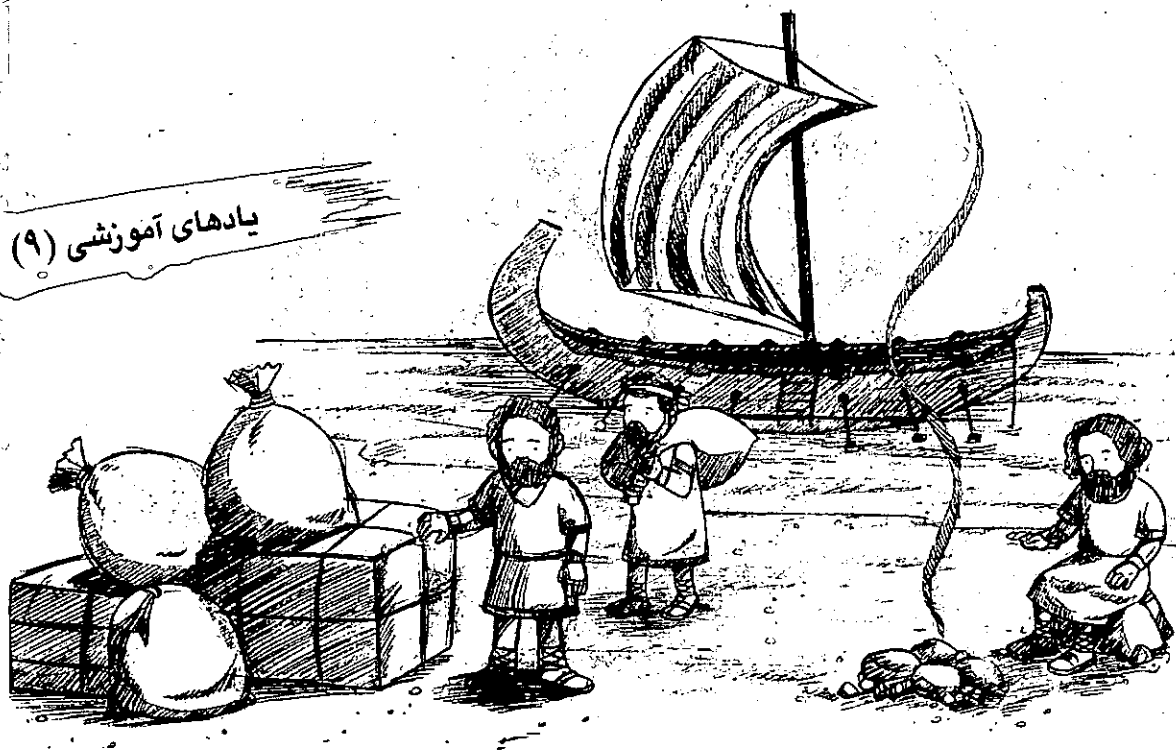
وقتی در ریاضیات با یک قضیه‌ی شرطی مواجه می‌شویم، شرط را به عنوان فرض می‌پذیریم و به دنبال رسیدن به حکم هستیم. سعی می‌کنیم از کوتاه‌ترین راه و با دقت کافی از فرض استفاده کنیم و درستی حکم را به اثبات برسانیم. در راه رسیدن به حکم، قطعاً از فرض و گاهی اوقات از معادل فرض استفاده می‌کنیم که اگر از فرض استفاده‌ای نکنیم و بتوانیم به حکم برسیم، یا راه ما اشکال داشته است، یا فرض اضافی به ما داده‌اند (که این جریان اصلاً منطقی نیست و هیچ‌گاه برای یک قضیه‌ی شرطی فرض اضافی درنظر نمی‌گیرند) و یا بدون آن‌که اطلاع داشته باشیم، از فرض (به صورت پنهانی) استفاده کرده‌ایم.

اگر در اثبات یک مسئله یا قضیه‌ی شرطی راه اضافی طی کنیم، باز دچار همین اشکال هستیم که از فرض قضیه یا مسئله به خوبی و به جا استفاده نکرده‌ایم. این نوع تفکر که برای رسیدن به حکم یا اثبات درستی حکم، می‌باید با استفاده از همه‌ی امکانات (فرضیات) کوتاه‌ترین مسیر را طی کرد، در استدلال به روش استنتاجی نیز به چشم می‌خورد. به عبارت دیگر، اگر درستی k گزاره را بپذیریم و بخواهیم درستی گزاره‌ای را ثابت کنیم، حتماً می‌باید با چینشی منطقی و دقیق از درستی هر k گزاره استفاده کنیم. به هر صورت، نوع استدلال کردن و به حکم رسیدن تابع قوانینی است که تأثیر آن‌ها را در زندگی روزمره نیز می‌توان مشاهده کرد.

شاید این سؤالات که: ریاضیات در زندگی به چه دردی می‌خورد؟ یادگیری قضیه‌های هندسه، حل معادله، رسم توابع و... به چه کار می‌آید؟ و... و آیا با مشتق‌گیری می‌توان فردی گرسنه را از مرگ نجات داد؟ شاید به گوش شما هم رسیده باشد، که البته جواب‌گویی به آن‌ها در حد تخصص فرد سؤال‌کننده نیست! اما آن‌چه بسیار آشکار است، تأثیر مثبت تفکر ریاضی در راه‌یابی به فهم مسائل، تجزیه و تحلیل و درنهایت حل مشکلات بسیار پیچیده است. اگر تفکر صحیح ریاضی فقط در همین حد در زندگی ما تأثیر داشته باشد که ما برای حل مشکلاتی که با آن‌ها مواجه می‌شویم، به بررسی همه‌ی امکانات موجود (فرضیات) بپردازیم، همه‌ی راه‌های موجود را بررسی کنیم و با انتخابی منطقی و مناسب (و با پیروی از قضیه‌ی «مسیر نور» یا همان قضیه‌ی حمار)، کوتاه‌ترین راه را برگزینیم، آیا ریاضیات به درد ما خورده است یا خیر؟

آیا شما کاربردها یا تأثیراتی از ریاضیات و تفکر ریاضی را در زندگی خودتان در جهان اطراف خود دیده یا شنیده‌اید؟ اگر مورد یا مواردی را می‌توانید مثال بزنید، برای ما یادداشت کنید و ارسال بفرمایید.

آجرهای پُرشیار



یادهای آموزشی (۹)

• پرویز شهریاری

۱.

فنیقی‌ها قومی دریانورد بودند و بسته به نیاز هر منطقه، کالای خود را که از جای دیگری «خریداری» کرده بودند، به جای دیگر می‌بردند و با کالای بومی آن سرزمین معاوضه می‌کردند. هرودوت، تاریخ‌نویس هزاره‌ی پیش از میلاد یونان، روایت جالبی درباره‌ی «خریدوفروش» فنیقی‌ها دارد. او می‌نویسد:

«فنیقی‌ها در ساحل لنگر می‌اندازند. کالای خود را به صورتی منظم در ساحل می‌چینند. سپس به کشتی باز می‌گردند و آتشی روشن می‌کنند که ما آماده‌ایم. مردم آن سرزمین با دیدن دود به سوی ساحل دریا می‌آیند، کالا را برآورد می‌کنند و مقداری طلا در آن‌جا می‌گذارند. ولی به کالاها دست نمی‌زنند و از آن‌جا دور می‌شوند. فنیقی‌ها از کشتی فرود می‌آیند و مقدار طلاها را بررسی می‌کنند. اگر مقدار طلا را با کالای خود مناسب دیدند، آن را برمی‌دارند و کشتی آن‌ها، راه برگشت را پیش می‌گیرد. ولی اگر ارزش طلا را کمتر از مقدار کالای خود احساس کنند، بدون این‌که دست به طلا یا کالای خود بزنند، به کشتی برمی‌گردند و منتظر می‌مانند. مردم بومی آن ناحیه باز می‌گردند و به مقدار طلا می‌افزایند... این وضع، آن قدر ادامه پیدا می‌کند تا ملوانان راضی شوند. در این جا هیچ کدام از دو طرف در اندیشه‌ی فریب طرف دیگر نیست. فنیقی‌ها به طلا دست نمی‌زنند تا هم‌ارز کالایشان شود. مردم هم تا زمانی که ملوانان طلا را برنداشته‌اند، دست به کالا نمی‌زنند.»

این رفتار و روحیه‌ی قوم‌ها در برخورد با هم، پیش از دوهزار و پانصدسال پیش بود. قوم‌ها و مردمی که یکدیگر را نمی‌شناختند و زبان یکدیگر را نمی‌فهمیدند، ولی به خاطر

نیاز باهم مراوده داشتند، از یکدیگر سود می‌بردند و در عین حال، با رفتار انسانی خود، در اندیشه‌ی غارت یا نابودی دیگری نبودند.

از سده‌ی هجدهم که به تدریج، نظام ارباب و رعیتی در اروپا و وارثان آن‌ها در آمریکا جای خود را به نظام استعماری داد و تجارت رونق گرفت. از یک طرف هجوم به کشورهای آسیایی، آفریقایی و آمریکای لاتین، برای مستعمره کردن آن‌ها آغاز شد و از طرف دیگر، دوران برده‌داری به شیوه‌ای بسیار ظالمانه، به ویژه در دو کشور انگلیس و آمریکا، به اوج خود رسید. دزدان دریایی به کشورهای آسیا و آفریقا، به‌ویژه آفریقا وارد می‌شدند، زن‌ها و مردها را می‌دزدیدند، به زنجیر می‌کشیدند، و با وضع اسف‌باری به انگلیس و آمریکا می‌رساندند تا به صاحبان زمین و صاحبان کارخانه‌ها و معدن‌ها بفروشند. بیش از دوسوم مردم در بند افتاده، در راه تلف می‌شدند و آن‌هایی هم که به مقصد می‌رسیدند، ناچار بودند تا سرحد مرگ برای صاحبان خود کار کنند. این انسان‌ها، از هیچ حقی، حتی حق ازدواج، برخوردار نبودند و اغلب در پایان جوانی از بین می‌رفتند.

نظریه‌پردازان جامعه‌ی استعماری، برای توجیه این رفتار ضد انسانی، نظریه‌ی نادرست و غیرعلمی «انسان متمدن» و «انسان وحشی» را ساختند. اربابان کشورهای استعماری «متمدن» بودند و حق داشتند برای «بقای تمدن»، جهان «وحشی» را به زنجیر بکشند و در واقع نابود کنند.

بسیاری از ملت‌ها، در گذشته‌های دور تاریخی خود، دوران بردگی و برده‌داری را از سرگذرانده بودند، ولی هرگز با فاجعه‌ای به بزرگی برده‌داری دوران استعماری اول روبه‌رو نشده بودند. باگذشت زمان، واژه‌های «استعمار» و «برده‌داری» به صورت ناسزا درآمد، ولی ماهیت عمل جهان استعماری تغییر نکرد و جنگ و آدم‌کشی سابقه‌ای گسترده‌تر پیدا کرد. آدم‌کشی تنها به رگبار بستن آدم‌ها نیست. به قول برتولت برشت، نویسنده و اندیشمند آلمانی: «آدم‌کشی انواع گوناگون دارد. می‌شود با چاقو شکم کسی را پاره کرد یا بیماری او را مداوا نکرد. می‌توان کسی را در دخمه‌ای جا داد یا تا سرحد مرگ به‌کار کشید. ممکن است کسانی را به خودکشی واداشت در حالی‌که تنها برخی از این آدم‌کشی‌ها ممنوع است.»

جهان استعماری به دنبال سود و سود بیشتر است و یکی از راه‌های کسب سود، ایجاد جنگ است تا هم سلاح‌های خود را بفروشد و هم ملت‌های فقیر را فقیرتر کند. نزدیک به ۳۰ سال پیش دکتر پتروال نوشت: «بنا بر برخی برآوردها، هر سال ۹۰۰ میلیارد دلار هزینه‌ی تسلیحات می‌شود، در حالی‌که تنها یک درصد از این منبع کافی است تا برای همه‌ی ملت‌های جهان آب تصفیه شده فراهم کنند. هزینه‌ی یک فروند جت جنگی برای ساختن و اداره‌ی ۴۰هزار داروخانه در نقطه‌های کوهستانی کفایت می‌کند. می‌توان با پول یک تانک، هزار کلاس درس برای آموزش ۳۰هزار دانش‌آموز فراهم کرد...»

هنوز میلیون‌ها کودک سیاره‌ی ما امکان تحصیل و رفتن به مدرسه را ندارد. جنگ‌های منطقه‌ای میلیون‌ها انسان را آواره کرده است، در حالی‌که هر سال صدها و صدها میلیارد دلار صرف ساختن سلاح می‌شود. بیش از ۷۰۰میلیون نفر گرفتار گرسنگی مزمن‌اند و میلیون‌ها کودک به دلیل کم‌غذایی و بیماری در خطر مرگ هستند. جون دس برنارد، فیزیک‌دان انگلیسی و عضو جامعه‌ی سلطنتی لندن، رجل اجتماعی و مبارز راه صلح، نزدیک به ۵۰سال پیش نوشت:

«در زمان ما، مهم‌ترین چیز درک این موضوع است که سوءاستفاده از دانش برای خوشبختی مردم، آن‌قدر عظیم است که در مقایسه با آن، بحث‌ها و کشمکش‌هایی که در گذشته موجب جنگ شده‌اند و امروز پیمان‌های تدافعی و تهاجمی را آورده‌اند، بی‌معنا می‌نمایند. ثروتی که می‌توان با همین موفقیت‌های دانش موجود به‌دست آورد، بسیار بیشتر از همه‌ی چیزهایی است که در اثر تسخیر پربارترین سرزمین‌ها و حاکمیت بی‌رقیب بر سرچشمه‌های مواد خام، نفت و زغال عاید می‌شود. هدف‌های مادی دولت‌ها که به دلیل آن، آماده‌ی جنگ می‌شوند، در مقایسه با آن‌چه می‌توان در موقعیت صلح، آن هم خیلی زود، به‌دست آورد، ناچیز و احمقانه است.»

۲.

در سال ۱۳۷۹ خورشیدی بیانیه‌ای از سوی «مرکز پژوهش‌های آموزشی پیش از دبستان» با عنوان «به نام دوستدار کودکان» منتشر شد. در این بیانیه سفارش شده است، به کودکان خود از همان سال‌های نخست زندگی، روش انسانی زیستن را بیاموزیم تا یاد بگیرند، همه‌ی انسان‌ها را از هر نژاد، ملت، مذهب، رنگ پوست و... با حقوقی برابر در نظر بگیرند، خود را یا گروه ویژه‌ای را، بر دیگران برتری ندهند، از خشونت بپرهیزند و دیگران را از خشونت باز دارند. محیط زیست و زندگی انسان را نیالایند و دیگران را از آلودگی محیط زیست و گسترش آن باز دارند...

به این بیانیه‌ی «مرکز پژوهش‌های آموزشی پیش از دبستان»، ایراد کمی وارد نیست و تنها می‌توان با دیدی تحسین‌آمیز به آن نگریست و آرزومند توفیق گردانندگان آن مرکز شد. با همه‌ی این‌ها، بد نیست اگر به نکته‌هایی اشاره کنیم:

جنگ در سرشت نظام استعماری است. طبیعی است که با تلاش‌های شخصی و عادت دادن کودکان خود به دوستی و صلح‌خواهی نمی‌توان استعماری را از ادامه‌ی کار سنتی خود بازداشت. جنگ و جنگ‌طلبی جز با مبارزه‌ی جمعی انسان‌ها، از سیاره‌ی ما برنمی‌افتد. کودکان ما، به‌جز به‌دست آوردن اخلاق و رفتار انسانی، باید بدانند تنها با مبارزه‌ی بی‌وقفه‌ی ملت‌هاست که می‌توان نظام استعماری را از سنگر جنگ به عقب راند. ما در زمانی زندگی می‌کنیم که اگر «مروت با دوستان» لازمه‌ی زندگی انسان است، «مدارا با دشمنان» نباید و نمی‌تواند به معنای تسلیم به روحیه‌ی جنگ‌طلبی آن‌ها باشد. بنابراین، در آموزش پیش از دبستان، توجه دادن کودکان به مبارزه‌ی جمعی و بی‌امان با این جرثومه‌ی فساد، یعنی غارتگری جهان استعماری، باید جزو وظیفه‌های اصلی

هر پدر و مادر و هر مربی باشد.

این ضرب‌المثل چینی بسیار آموزنده است: «وقتی مردم با هم نفس بکشند، طوفان می‌شود و اگر باهم به زمین بکوبند، زلزله خواهد شد.» کودکان ما در ضمن باید با مضمون این پند ارسطو، شاگرد افلاطون آشنا باشند که: «استعمار خودکامه، تنها نابکاران را دوست دارد و تشنه‌ی گزافه گویی درباره‌ی خود است.» ولی هیچ انسان فرزانه‌ی آزاداندیشی خود را به زبونی تملق خودکامگان دچار نمی‌کند و به‌قول استاد سخن سعدی:

برتن چو هیچ جامه نباشند به اتفاق،

بهتر ز جامه‌ای که در آن هیچ مرد نیست

البته به شرطی که «مرد» را به مفهوم عام آن، یعنی «انسان» بپذیریم.

نکته‌ی دوم، به رفتار و روحیه‌ی ایرانی در طول تاریخ هزاران ساله‌ی خود مربوط می‌شود. ایرانی همیشه به دو جنبه از زندگی انسانی باور داشته است: مبارزه با شیوه‌های اهریمنی، و پذیرفتن و پراکندن روحیه‌ی انسانی. وقتی کورش به سرزمین بابل رسید، در حالی که جلوی لشکریان خود به نیایشگاه مردم بومی نزدیک می‌شد، با آن‌که باورهای دینی مردم آن سامان را نداشت، چندمتری مانده به نیایشگاه از اسب پیاده شد، در برابر نیایشگاه حالت احترام به خود گرفت، چند متر عقب‌عقب رفت و سپس دوباره بر اسب خود نشست. کورش در عهد عتیق، به عنوان «نجات‌دهنده» شناخته شده است، چرا که قوم «بنی‌اسرائیل»، را از بند چند ده‌ساله‌ی حاکمان سرزمین بابل نجات داد. در لوح‌های گلی تخت‌جمشید، که بعد از آتش زدن اسکندر پخته شده و تا امروز باقی مانده است، فرمانی از داریوش خطاب به حسابدار کل می‌بینیم که به‌خاطر فراهم نکردن موقعیت لازم برای قومی که اعتقادهای مذهبی ویژه‌ای داشته‌اند، مورد سرزنش قرار گرفته است.

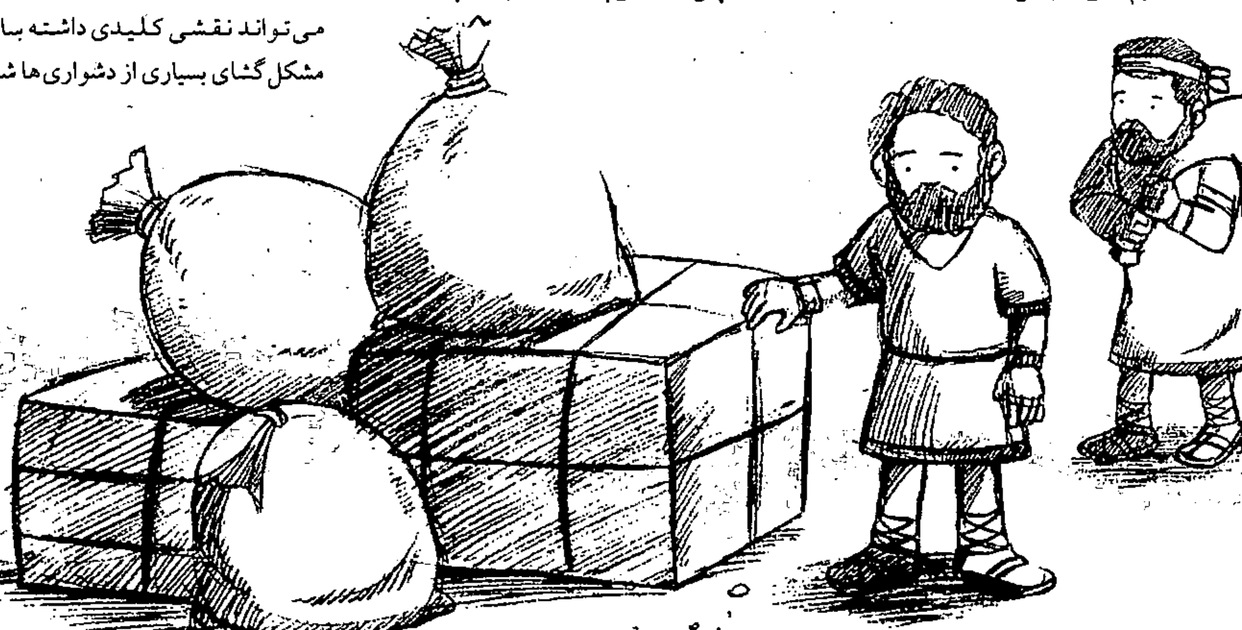
۳.

در هزاره‌های پیش از میلاد، تمدنی بزرگ در سرزمین میان دو رود (بین‌النهرین) بنیان گذاشته شده بود. قوم‌های زحمت‌کش و هنرمندی چون آشوری‌ها، کلدانی‌ها و سومری‌ها، با وجود نظام ستمگر برده‌داری و حاکمیت مستبد و مطلق شاهان خود، توانسته بودند به مرتبه‌ی بالایی از دانش و هنر برسند. همین دانش و هنر بابل باستان بود که با آگاهی‌های فنیقی و قبطی و ایرانی درهم آمیخت و سرانجام به یونان باستان رسید و سرچشمه دانش و فلسفه‌ی یونانی شد. سپس از آن‌جا به شرق آمد و در سرزمین‌های مستعد خاورمیانه و به‌ویژه ایران و هند بارور شد. دوباره به اروپای غربی و جنوبی مهاجرت کرد و سرانجام تمدن امروزی را، با همه‌ی تنوعی که در دانش، فلسفه، صنعت و هنر دارد، به‌وجود آورد. ولی شاهکار بابلی‌ها (و هم عیلامی‌ها که در جنوب و جنوب غربی ایران حکم می‌راندند)، در نحوه‌ی ثبت و نگاه‌داری آگاهی‌هایشان بود. آن‌ها آگاهی‌های خود را بر خشت خام می‌نوشتند. سپس آن را می‌پختند و آجرهای پخته را در کتاب‌خانه‌های خود جا می‌دادند. این هوشیاری بابلی‌ها در نگاه‌داری آگاهی‌های خود روی لوح‌های پخته‌ی گلی، موجب شد نوشته‌های آن‌ها، بعد از گذشت هزاران سال، سالم و دست‌نخورده به ما برسد.

نظام برده‌داری بابلی فرو ریخت و قوم‌های ساکن میان دو رود نابود یا آواره شدند، ولی نوشته‌های آن‌ها زیر خروارها خاک برای آیندگان باقی ماند تا بتوانند رازگشای توشه‌ای از کنش‌ها و کوشش‌های انسان درباره‌ی پرده برداشتن از قانون‌های حاکم بر طبیعت و جامعه باشد.

ولی مردمی که هزاران سال بعد و در همین سال‌های نزدیک، تمدن شهری خود را در نزدیکی و یا روی کتیبه‌های بابلی بنا می‌کردند، این‌جا و آن‌جا، به آجرهای محکم و خوش‌تراشی برخوردند که به‌نظر می‌آمد که در نتیجه‌ی گزند سال‌ها، «شیارهایی» در آن‌ها پدید آمده باشد. جهل آدمی موجب شد تا از این «آجرهای پرشیار» که هر کدامشان بیش از طلای هم‌وزن خود ارزش داشت، برای پر کردن لای ستون‌های ساختمان‌های خود استفاده کنند. به این ترتیب، مجموعه‌ی گران‌بهایی از ارثیه‌های پدران ما را، فدای جهل خود کردند. تنها در صدساله‌ی اخیر بود که به تدریج به اهمیت شیارهای روی آجرها پی بردند و آزمندان اروپایی با هجوم به «عراق»، آن‌چه را که باقی مانده بود، به موزه‌های کشورهای خود منتقل کردند.

گاهی حتی یک کتیبه، یک نقاشی یا یک وسیله‌ی تزیینی باقی مانده از دوران گذشته، می‌تواند نقشی کلیدی داشته باشد و مشکل‌گشای بسیاری از دشواری‌ها شود. به



سختی می‌توان اندیشید که اگر «کتیبه‌ی رزتا» در سال ۱۷۹۹ در مصب رود نیل پیدا نمی‌شد، ژان‌فرانسوا شامپولیون (۱۷۹۰ - ۱۸۳۲)، مهرشناس فرانسوی یا کس دیگری می‌توانست پرده از خط «هیروگلیف» بردارد. این، تنها کتیبه یا لوحی بود که به دو زبان مصری و یونانی نوشته شده بود و دانشمند فرانسوی توانست، به یاری زبان یونانی، راه خواندن زبان هیروگلیفی را پیدا کند.

گردن‌کشانی که هزاران سال برگرده‌ی ملت ما سوار بودند، کاری جز ویرانی اثرهای پیش از خود نداشته‌اند. هرکسی تنها می‌خواست، اثرهای شخصی او برای آیندگان بماند و به همین دلیل، اثرهای تاریخی گذشته را ویران می‌کرد، کتاب‌ها را می‌سوزاند و حتی دانشمندان و هنرمندان را با اندک بدگمانی به دم تیغ می‌سپرد و به گمان خود اثرهای «جاودان» عصر خود را بنیان می‌نهاد. ولی این اثرها هم، بعد از او به همان سرنوشتی دچار می‌شدند که اثرهای دیگر شده بودند.

یاکوب ادوارد پولاک، پزشک آلمانی دربار ناصرالدین شاه، در سفرنامه‌ی خود می‌نویسد: «ایرانی [منظور صاحبان زر و زور است] تمام کردن و کامل کردن را خوش ندارد. تنها در پی ایجاد چیز تازه است و آن‌چه را قدیمی است، با مسامحه و بی‌اعتنایی به دست نابودی می‌سپارد. به این ترتیب، مبالغ گزافی برای ساختن کاخ‌ها و منزل‌ها به مصرف می‌رسد. اما از پرداخت مبلغی ناچیز برای تعمیر و مرمت لازم پرهیز دارند... همین اصل نیز در اصفهان که مرکز شاهان صفوی بود، به کار بسته شد. کاخ‌های باعظمت که به سبکی بسیار دل‌پسند ساخته شده بودند، به‌خاطر غارت مصالح ساختمانی آن منهدم شدند یا به دست ویرانگی سپرده شدند...»

نگه‌داری اثرهای تاریخی و توجه به اثرهای باقی مانده از نسل‌های گذشته، کتیبه باشد یا کتاب یا یک نقاشی، به معنای تأیید نظام‌های گذشته نیست. این‌ها، نتیجه‌ی کار دانشمندان و هنرمندان مردم این سرزمین، و از طرف دیگر، زمینه‌ای برای تنظیم تاریخ اجتماعی گذشته‌ی پردرد این مردم است. نگه‌داری یک کاخ سلطنتی یا حتی یک گورستان، نه به معنای پذیرش ظلم‌وجور شاهان، بلکه به معنای به نمایش گذاشتن این ظلم و جور است.

گذشته‌ی تاریخی مردم سرزمین ما، واقعیتی است غیرقابل تغییر، در یک طرف حکام ستمگر، و در طرف دیگر مردمی ستم‌کشیده نه تنها نباید گذشته را به فراموشی سپرد، بلکه باید با ترتیب دادن درست و منطقی موزه‌ها و نمایشگاه‌ها و تنظیم درست و آگاهانه‌ی بازدید مردم از کاخ‌ها و ابزارهای درون آن‌ها، آگاهی مردم را بالا برد و کینه‌ی آن‌ها را نسبت به ستمگران تیزتر کرد.

۴.

خیام، اندیشمند، ریاضی‌دان و اخترشناس نیشابوری در پیشگفتار رساله‌ی «فی براهین‌الجبر و المقابله» با دردی جانکاه می‌گوید: «... تعریف‌های زمان همواره با پیشامدهایی همراه بود... که برایم حال و مجال تکمیل بررسی‌هایی را که کرده بودم و دقت در آن‌ها را نمی‌گذاشت. چون ما در دورانی زندگی می‌کنیم که از اهل دانش، جز عده‌ی کمی که به هزاران رنج و محنت دچارشده‌اند، چیزی نمانده و آن‌ها نصیب خود را از دقیقه‌های ایام، صرف پژوهش‌های علمی می‌کنند. بسیاری از هم‌عصران متظاهر و علم‌فروش، حق را جامه‌ی باطل می‌پوشانند و گاهی از حد خودنمایی و تظاهر به علم و معرفت، پا را فراتر نمی‌گذارند و آن‌چه از راه دانش‌ها می‌دانند، تنها در غرض‌های جسمانی پست صرف می‌کنند.»

و ما این فریاد را در دو بیتی‌های زیبای خیام هم می‌بینیم که:

«چون چرخ به کام یک خردمند نگشت»

یا:

«ای چرخ فلک نه عقل داری نه هنر
هرگز نکنی به کار آزاده نظر»

یا:

«گر بر فلکم دست بدی چون یزدان
برداشتمی من این فلک را ز میان
از نو فلکی دگر چنان ساختمی،
کازاده به کام دل رسیدی آسان»

یا

«نا آمدگان، اگر بدانند که ما،
از دهر چه می‌کشیم، نایند دگر».

و این طبیعی است که در روزگار تسلط زر و زور، همه‌ی نیک‌اندیشان و آزاد فکران، و همه‌ی دانشمندان و هنرمندان، از دست «مهره‌فروشانِ گوهرشناس»، بنالند و به خاطر مصون بودن از قهر قهاران، گناه ناروایی‌ها را بر گردن «گردون» و «فلک» بگذارند. ولی در واقع، خطاب خیام به حکم‌رانان زمان خود است که می‌گوید: «نه عقل داری نه هنر».

هنر و دانش متعلق به مردم است و همه‌ی تلاش پر حماسه‌ی مردم، از جمله به این خاطر است که هنر را از کاخ‌ها بیرون بکشند، در خدمت خود قرار دهند و دانش را از وسیله‌ی کشتارجمعی به ابزار سازندگی تبدیل کنند. دانش باید با شناخت قانون‌های حاکم بر جامعه و طبیعت، وسیله‌ای برای مقابله با دشواری‌های موجود باشد، نه ابزاری در دست جهان سرمایه‌داری برای درهم کوفتن قهر ملت‌ها. و هنر با تخیل خود به عنوان ظریف‌ترین و زیباترین جنبه‌های روح بشری، باید به صورت یکی از برنده‌ترین سلاح‌ها، خشم مردم را تندتر کند و همه‌ی این‌ها، جز با به خدمت گرفتن دانش و هنر همه‌ی دانشمندان و هنرمندان مردمی ممکن نیست.

باید به یاد داشته باشیم، در زمان ما، هر ضربه‌ای که به یک انسان راستین وارد شود، ضربه‌ای است که به همه‌ی انسان‌ها، با هر آیین و اندیشه‌ای برمی‌گردد. به یاد داشته باشیم، زمان ما، زمانه‌ی سرنوشت است و بدون کنار گذاشتن «من»ها، نمی‌توان دشمن را، که با همه‌ی زبونی به اندازه‌ی کافی نیرومند است، به تاریخ سپرد. حرمت دانش و هنر را، هرجا که می‌یابیم، نگه‌داریم و اجازه ندهیم نیروی پرتوان دانشمندان و هنروران در دام حیله‌های دشمن، تباه شود.

بگذار از این پس، دورانی چون دوران خیام، امکان تکرار پیدا نکند و هم‌چون گله‌ای مربوط به دوران گذشته باقی بماند. این، امید همه‌ی اندیشمندان و هنروران روزگار ماست.

بخش پذیری

برای دانش آموزان پایه ی سوم ریاضی

● احمد قندهاری

اشاره

در این مقاله به بررسی بخش پذیری عبارت $P(x)$ بر عبارت $Q(x)$ خواهیم پرداخت. همچنین روش هایی برای یافتن باقی مانده تقسیم عبارت جبری $P(x)$ بر عبارت جبری $Q(x)$ را در می آوریم.

الف) شرط لازم و کافی برای این‌که عبارت $P(x)$ بر $(x-a)$ بخش‌پذیر باشد، آن است که: $P(a)=0$. و $P(a)$ را باقی‌مانده‌ی تقسیم گویند.

مثال ۱. اگر عبارت $P(x)=x^3-2ax+8$ بر $(x-2)$ بخش‌پذیر باشد، مقدار عددی a را بیابید.

حل: باید $P(2)=0$

$$P(2)=(2)^3-2a(2)+8=0$$

$$\Rightarrow 8-4a+8=0 \Rightarrow 4a=16 \Rightarrow \boxed{a=4}$$

ب) شرط لازم و کافی برای این‌که عبارت $P(x)$ بر $(x-a)(x-b)$ بخش‌پذیر باشد، این است که:

$$\begin{cases}P(a)=0\\P(b)=0\end{cases}$$

تعمیم: شرط لازم و کافی برای این‌که عبارت $P(x)$ بر $(x-a)(x-b)(x-c)\cdots(x-k)$ بخش‌پذیر باشد این است که:

$$\begin{cases}P(a)=0\\P(b)=0\\P(c)=0\\\vdots\\P(k)=0\end{cases}$$

مثال ۲. a و b را چنان بیابید که عبارت $P(x)=ax^4+bx^3+4x-8$ بر (x^2-4) بخش‌پذیر باشد.

حل: روش اول

برای آن‌که $P(x)$ بر $x^2-4=(x-2)(x+2)$ بخش‌پذیر باشد، باید: $\begin{cases}P(2)=0\\P(-2)=0\end{cases}$؛ پس:

$$\begin{cases}P(2)=a(2)^4+b(2)^3+4(2)-8=0\\P(-2)=a(-2)^4+b(-2)^3+4(-2)-8=0\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}16a+8b+8-8=0\\16a-8b-8-8=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}16a+8b=0\\16a-8b=16\end{cases}$$

$$\Rightarrow 32a=16\Rightarrow \boxed{a=\frac{1}{2}}$$

$$16a+8b=0\Rightarrow 16(\frac{1}{2})+8b=0$$

$$\Rightarrow 8+8b=0\Rightarrow \boxed{b=-1}$$

روش دوم (خیلی مهم است)

می‌توانیم بنویسیم $x^2-4=0\Rightarrow x^2=4$ و در عبارت $P(x)$، به جای هر x^2، عدد ۴ را قرار دهیم. عبارت حاصل را متحد با صفر قرار می‌دهیم.

$$P(x)=a(x^2)^2+bx(x^2)+4x-8$$

$$x^2=4$$

$$R=a(4)^2+bx(4)+4x-8=16a+4bx+4x-8$$

$R = (4b+4)x + (16a-8) \equiv 0$

$$\begin{cases} 4b+4=0 \Rightarrow \boxed{b=-1} \\ 16a-8=0 \Rightarrow \boxed{b=\frac{1}{2}} \end{cases}$$

تذکر: وقتی عبارتی از هر درجه متحد با صفر باشد، باید ضریب‌های همه‌ی جملات را مساوی صفر قرار دهیم. هم‌چنین عدد ثابت را هم مساوی صفر قرار دهیم.

مثال ۳. باقی‌مانده‌ی تقسیم $P(x) = x^{16} + x^9 - x^4 + 1$ را بر (x^3+1) بیابید.

حل: به روش دوم

$x^3+1=0 \Rightarrow x^3=-1$

$P(x) = x(x^3)^5 + (x^3)^3 - x(x^3) + 1$

$R = x(-1)^5 + (-1)^3 - x(-1) + 1$

$R = -x-1+x+1 \Rightarrow R=0$

مثال ۴. a و b را چنان بیابید که عبارت $P(x) = ax^3 + bx^2 + 4x - 3$ بر (x^2+2) بخش‌پذیر باشد.

حل: ناچاریم این مسأله را به روش دوم حل کنیم، چون (x^2+2) تجزیه نمی‌شود.

$x^2+2=0 \Rightarrow x^2=-2$

ممکن است سؤال کنید، آیا ممکن است x^2 برابر ۲- شود؟

در پاسخ باید عرض کنم: بله. زیرا در ریاضیات مجموعه‌ای وجود دارد به نام مجموعه‌ی اعداد مختلط که در آن x^2 می‌تواند مساوی ۲- باشد.

$P(x) = ax(x^2) + b(x^2) + 4x - 3$ و $x^2=-2$

$R = ax(-2) + b(-2) + 4x - 3$

$R = -2ax - 2b + 4x - 3 \equiv 0$

$R = (4-2a)x - (2b+3) \equiv 0$

$\Rightarrow 4-2a=0 \Rightarrow \boxed{a=2}$

$2b+3=0 \Rightarrow \boxed{b=-\frac{3}{2}}$

مثال ۵. اگر باقی‌مانده‌ی تقسیم عبارت $(ax^8 + bx^4 + 1)$ بر (x^4+1) عدد ۱ باشد، آن‌گاه باقی‌مانده‌ی تقسیم عبارت (x^2+ax+b) بر $(x+2)$ را بیابید.

حل: به روش دوم

$x^4+1=0 \Rightarrow x^4=-1$

$ax^8 + bx^4 + 1 = a(x^4)^2 + b(x^4) + 1$ و $R_1 = 1$

$R_1 = a(-1)^2 + b(-1) + 1 = 1$

$\Rightarrow a-b+1=1 \Rightarrow a-b=0 \Rightarrow \boxed{a=b}$

تعیین باقی‌مانده‌ی قسمت دوم:

$x+2=0 \Rightarrow x=-2$

$x^2+ax+2b$

$R_2 = (-2)^2 + a(-2) + 2b = 4 - 2a + 2b$

$a=b \Rightarrow \boxed{R_2=4}$

ج) اگر باقی‌مانده‌ی تقسیم $P(x)$ بر $(x-a)$ برابر R_1، باقی‌مانده‌ی تقسیم $P(x)$ بر $(x-b)$ برابر R_2، و باقی‌مانده‌ی تقسیم $P(x)$ بر $(x-a)(x-b)$ برابر $mx+n$ باشد، آن‌گاه m و n از دستگاه $\begin{cases} m(a)+n=R_1 \\ m(b)+n=R_2 \end{cases}$ به‌دست می‌آید.

اثبات: فرض می‌کنیم خارج‌قسمت تقسیم $P(x)$ بر $(x-a)(x-b)$، $Q(x)$ و باقی‌مانده‌ی تقسیم $mx+n$ باشد. می‌توان نوشت:

$P(x) = (x-a)(x-b).Q(x) + mx + n \qquad (I)$

در ضمن داریم: $P(a)=R_1$ و $P(b)=R_2$

در رابطه‌ی (I) به جای x، یک‌بار a و یک‌بار b را قرار می‌دهیم. خواهیم داشت:

$$\begin{cases} P(a) = (0)(x-b)\ Q(a) + m(a) + \pi \\ P(b) = (x-a)(0)\ Q(b) + m(b) + \pi \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} R_1 = m(a)+n \\ R_2 = m(b)+n \end{cases} \text{ یا } \begin{cases} m(a)+n=R_1 \\ m(b)+n=R_2 \end{cases}$$

مثال ۶. اگر باقی‌مانده‌ی تقسیم $P(x)$ بر $(x-1)$ برابر ۷ و باقی‌مانده‌ی تقسیم $P(x)$ بر $(x-2)$ برابر ۳ باشد، آن‌گاه باقی‌مانده‌ی تقسیم $P(x)$ را بر $(x-a)(x-b)$ بیابید.

حل: فرض می‌کنیم باقی‌مانده‌ی تقسیم $P(x)$ بر $(x-1)(x-2)$ برابر $mx+n$ باشد. بنابه درس می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} m(a)+n=R_1 \\ m(b)+n=R_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m(1)+n=7 \\ m(2)+n=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -m-n=-7 \\ 2m+n=3 \end{cases}$$

$\Rightarrow m=-4, m+n=7 \Rightarrow -4+n=7 \Rightarrow n=11$

پس باقی‌مانده‌ی تقسیم $P(x)$ بر $(x-1)(x-2)$، $(-4x+11)$ است.

مثال ۷. اگر باقی‌مانده‌ی تقسیم عبارت‌های $x^4+ax^3+bx^2-4$ و $x^2-8x+12$ بر (x^2-2) یکی باشند، a و b را بیابید.

$x^4+ax^3+bx^2-4 = (x^2)^2 + ax(x^2) + bx^2 - 4$

الف) $x^2-2=0 \Rightarrow x^2=2$

$R_1 = (2)^2 + ax(2) + b(2) - 4$

$R_1 = 4 + 2ax + 2b - 4 \Rightarrow R_1 = 2ax + 2b$

ب) $x^2-8x+12 \quad x^2=2$

$R_2 = 2 - 8x + 12 \Rightarrow R_2 = -8x + 14$

$R_1 \equiv R_2 \Rightarrow 2ax + 2b \equiv -8x + 14$

$\Rightarrow 2a = -8 \Rightarrow \boxed{a=-4}$

$2b = 14 \Rightarrow \boxed{a=7}$

مثال ۸. اگر $x=\sqrt{2}$ یکی از صفرهای تابع با ضابطه‌ی $f(x)=x^3-(4+\sqrt{2})x^2+(3+4\sqrt{2})x-3\sqrt{2}$ باشد، صفرهای دیگر تابع را بیابید.

حل: باید $f(x)$ را بر $(x-\sqrt{2})$ تقسیم کنیم و سپس خارج قسمت را مساوی صفر قرار دهیم:

$$x^3-4x^2-\sqrt{2}x^2+3x+4\sqrt{2}x-3\sqrt{2} \;\Big|\; \frac{x-\sqrt{2}}{x^2-4x+3}$$

خارج قسمت $=0 \Rightarrow x^2-4x+3=0$

مجموع ضرایب صفر است. $\Rightarrow \begin{cases}x=1\\ x=\frac{c}{a}=3\end{cases}$

پس $x=1$ و $x=3$ صفرهای دیگر تابع هستند.

آزمون ۱. اگر $f(-2)=f(2)=5$، آن‌گاه کدام یک از عبارت‌های زیر بر $(4-x^2)$ بخش‌پذیر است؟

الف) $f(x)-4$ ب) $f(x)-5$

ج) $f(x)-2$ د) $f(x)+2$

حل: گزینه‌ی ب. زیرا عبارتی بر $(4-x^2)$ بخش‌پذیر است که به‌ازای $x=2$ و $x=-2$ برابر صفر شود. پس گزینه‌ی ب درست است.

آزمون ۲. اگر باقی‌مانده‌ی تقسیم $f(x)$ بر $(x-2)$ مساوی ۸ باشد، آن‌گاه باقی‌مانده‌ی تقسیم $f(x^2-7)$ بر $(x+3)$ کدام است؟

الف) ۸ ب) ۷

ج) ۶ د) ۵

حل: گزینه‌ی الف. داریم:

$f(2)=8$

$x+3=0 \Rightarrow x=-3 \Rightarrow f(9-7)=f(2)=8$

آزمون ۳. اگر باقی‌مانده‌ی تقسیم $f(x)$ بر (x^2-8) صفر باشد، آن‌گاه باقی‌مانده‌ی تقسیم $f(x^3)$ بر x^4+2x^2+4 کدام است؟

الف) صفر ب) x

ج) $x-1$ د) $2x$

حل: گزینه‌ی الف.

$f(x)=(x^2-8)Q(x)$

$$x \xrightarrow{\text{تبدیل}} x^3 \Rightarrow f(x^3)=(x^6-8)Q(x^3)$$

$$\Rightarrow f(x^3)=(x^2-2)(x^4+2x^2+4)Q(x^3) \Rightarrow \underset{\text{جدید}}{R}=0$$

تفریح اندیشه

رحیم خیرالله‌زاده
دبیر ریاضی ناحیه‌ی ۲ شهرری

اثبات اصل لانه کبوتری در حالت کلی

صورت قضیه: اگر n کبوتر در k لانه قرار گیرند، به‌طوری که هر لانه گنجایش n کبوتر داشته باشد، آن‌گاه لانه‌ای یافت می‌شود که حداقل دارای $\left[\frac{n-1}{k}\right]+1$ کبوتر باشد.

اثبات: فرض می‌کنیم تعداد کبوترها در لانه‌ی iام برابر x_i باشد که در آن: $1 \le i \le k$ و $0 \le x_i \le n$. در این صورت، حکم مسئله معادل این خواهد بود که ثابت کنیم:

$$\exists i: x_i \ge \left[\frac{n-1}{k}\right]+1$$

برای اثبات از برهان خلف استفاده می‌کنیم. فرض می‌کنیم حکم برقرار نباشد. در این صورت در تمام لانه‌ها، تعداد کبوترها کمتر از $\left[\frac{n-1}{k}\right]+1$ خواهد بود؛ یعنی:

$$\forall i: x_i < \left[\frac{n-1}{k}\right]+1 \qquad \text{(فرض خلف)}$$

حال نشان می‌دهیم که به تناقض می‌رسیم:

می‌دانیم $([x] \le x < [x]+1)$

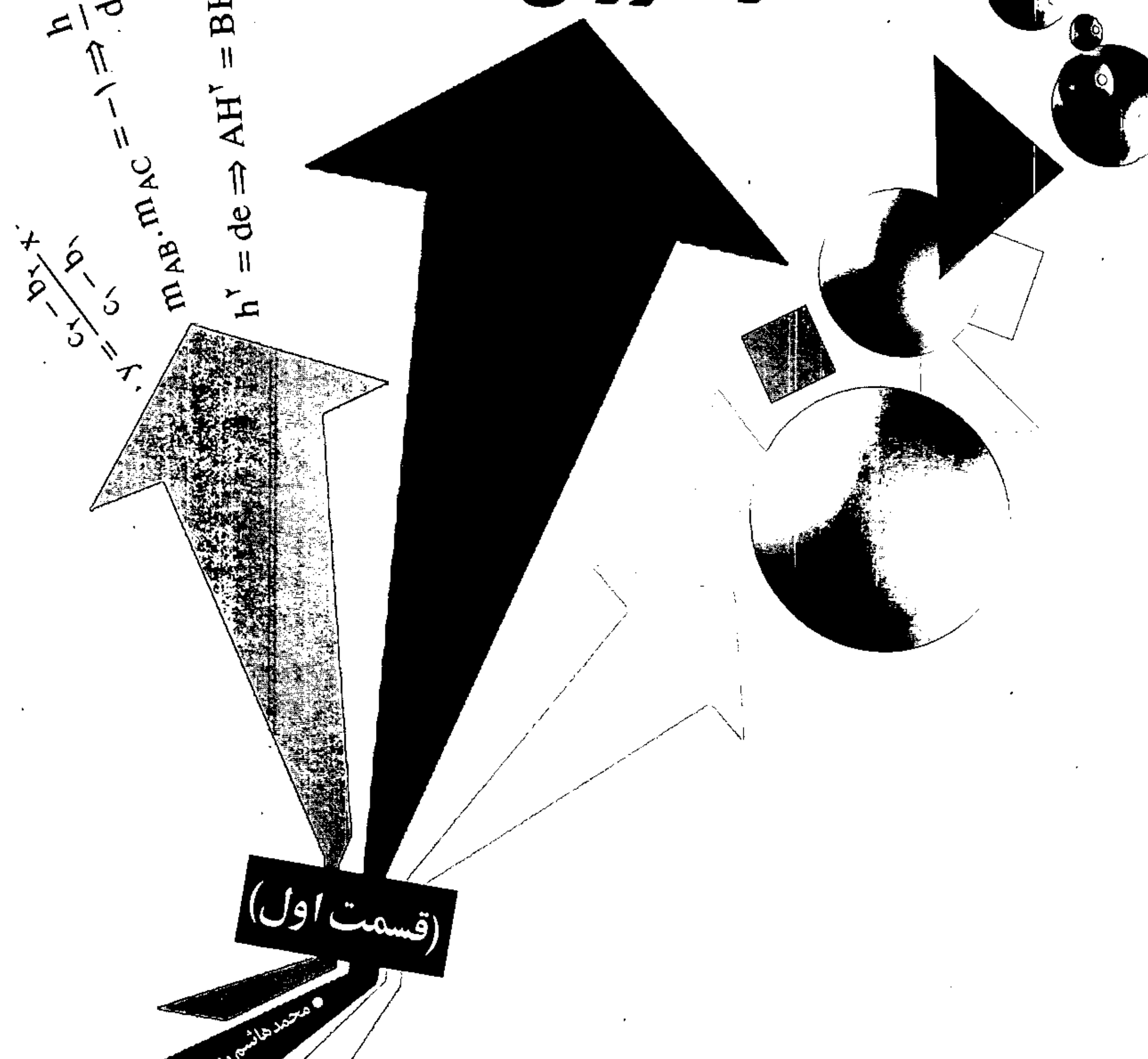
$$n = x_1+x_2+\ldots+x_k \le k\left[\frac{n-1}{k}\right] \le k\left[\frac{n-1}{k}\right] \le n-1$$

هر x_i از ماکزیمم مقدار x_iها، یعنی: $\left[\frac{n-1}{k}\right]$ کوچک‌تر یا با آن‌ها مساوی است.

به سادگی نتیجه می‌شود: $n \le n-1$ که یک تناقض آشکار است.

بنابراین فرض خلف غلط است، یعنی حکم قضیه درست است و اثبات کامل می‌شود.

رویکرد هندسی- رویکرد جبری در آموزش هندسه



(قسمت اول)

● محمد هاشم رستمی

بین فلاسفه‌ی ریاضی و تاریخ‌دانان ریاضی، اختلاف نظر وجود دارد که آیا ابتدا مفاهیم مربوط به عدد در ریاضیات مطرح شد، یا مفاهیم مربوط به نقطه، خط، صفحه و پیوستارهای هندسی. ولی مسلم است که تکامل ریاضیات در ارتباط با پیشرفت‌های دو رشته‌ی حساب و هندسه صورت پذیرفته است؛ گرچه این دو عنصر اساسی ریاضیات همواره همدوش یکدیگر به پیش نرفته‌اند. چه بسیار اتفاق افتاده است که این دو با هم رقابت داشته‌اند.

اولین قدم واقعی ریاضی به‌وسیله‌ی هندسه برداشته شد. یونانیان سال‌های ۳۰۰ تا ۶۰۰ قبل از میلاد، به ریاضیات سازمان و رنگ تجرد و استدلال قیاسی دادند و ساختمان عظیم هندسه‌ی اصل موضوعی اقلیدسی را بنیان نهادند.

چون یونانیان به‌طور خالص پیرامون هندسه کار می‌کردند،

بنابراین هندسه‌ی اقلیدسی، جبری را که تا آن زمان شناخته شده بود، نیز دربر می‌گرفت؛ مثلاً حل معادله‌ی درجه‌ی دوم یک‌مجهولی به روش هندسی انجام می‌شد.

پس از ویرانی تمدن یونان به‌وسیله‌ی **اسکندر مقدونی** و انتقال آن به **اسکندریه** در مصر، دانشمندان **اسکندریه**، حساب و جبر را به هندسه‌ی اقلیدسی اضافه کردند تا به این وسیله بتوانند نتایج کمی به دست آورند.

بعد از ریاضی‌دانان اسکندریه، ریاضی‌دانان اسلامی و ایرانی در پیشرفت و تکامل ریاضیات نقش عمده‌ای داشته‌اند. **محمدبن موسی خوارزمی** بنیان‌گذار جبر و مقابله است که کلمه‌ی جبر یا الجبرا[1] از نام کتاب وی گرفته شده و واژه‌ی «الگوریتم» نیز شکل لاتینی شده‌ی نام **الخوارزمی** است. کتاب جبر و مقابله‌ی خوارزمی سال‌ها در مدارس اروپا و کشورهای اسلامی به‌عنوان کتاب درسی تدریس می‌شد؛ در واقع کتاب اصول اقلیدس، کتاب درسی هندسه و کتاب جبر و مقابله‌ی خوارزمی، کتاب درسی جبر در مدارس این کشورها بود.

در استاندارد ۸ مربوط به استانداردهای موضوعی NCTM که «**هندسه از دیدگاه جبری**» است، آمده است: «یکی از مهم‌ترین پیوندها و اتصال‌ها در همه‌ی ریاضیات، اتصال و ارتباط بین هندسه و جبر است.»

در تکامل هندسه که به پیدایش هندسه‌های جدید از جمله هندسه‌ی تحلیلی منجر شده است، ریاضی‌دانان ایرانی نقش مهمی داشته‌اند. حکیم عمر خیام (۴۳۹ـ ۵۲۶هـ. ق) اولین کسی است که در جبر و مقابله، معادلات را برحسب درجه‌ی مجهول مرتب و با روشی تحلیلی گونه حل و بحث کرد. خیام نخستین ریاضی‌دانی است که ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی سوم را به روش هندسی به‌دست آورد و مقدمات کاربرد جبر در هندسه، یعنی هندسه‌ی تحلیلی را طرح‌ریزی کرد. اما هندسه‌ی تحلیلی به طور رسمی توسط **رنه‌دکارت**[2] (۱۵۹۶ تا ۱۶۵۰) در سال ۱۶۱۹ به دنیا معرفی شد و **پی‌یر فرما**[3] (۱۶۰۱ تا ۱۶۶۵) نیز تقریباً هم‌زمان با دکارت، این هندسه را کشف کرد.

با پیدایش هندسه‌ی تحلیلی در قرن هفدهم میلادی، ریاضیات گام بزرگی به جلو برداشت، زیرا این امکان به‌وجود آمد که ایده‌های هندسی ریاضی‌دانان باستان، به زبان هندسه‌ی مختصاتی بیان شود و بسط و گسترش یابد و درنتیجه ابزار جدیدی برای حل دامنه‌ی وسیعی از مسأله‌ها فراهم شود.

در واقع، تناظری مستقیم بین مفاهیم و ایده‌های پایه‌ای هندسه در دو دیدگاه هندسی و جبری وجود دارد. نقطه، خط و صفحه، از مفاهیم اساسی و تعریف‌نشده‌ی هندسه هستند. اگرچه این موضوع‌ها تعریف نشده‌اند، ولی به وسیله‌ی اصول موضوعه‌ی معینی تبیین و توصیف شده‌اند. این مفهوم‌ها در دیدگاه جبری ارائه می‌شوند.

اینک ارتباط بین دو رویکرد هندسی و رویکرد جبری در صفحه (دو بعد) را بررسی می‌کنیم. اگر صفحه‌ی E به مفهوم هندسی را به یک دستگاه مختصات دکارتی [متعامد] متشکل از دو محور مختصات عمود بر هم و مجهز کنیم، یک تناظر یک‌به‌یک بین صفحه‌ی E و حاصل‌ضرب دکارتی $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ [ضرب دکارتی روی اعداد حقیقی] برقرار می‌شود. به این ترتیب که به هر نقطه‌ی P از صفحه‌ی E، یک زوج مرتب (x و y) از اعداد حقیقی نظیر می‌شود و برای هر زوج مرتب (x و y)، نقطه‌ای نظیر، در صفحه‌ی مختصات وجود خواهد داشت. درحقیقت، **دستگاه مختصات دکارتی، ابزار اصلی برای ایجاد ارتباط بین هندسه و جبر است** و تحت این شرایط:

نقطه‌ی P از صفحه‌ی E $\xleftrightarrow{\text{تناظر}}$ $\{(x,y)|x\in\mathbb{R},\ y\in\mathbb{R}\}$

و این صفحه به مفهوم جبری است.

صفحه‌ی E به مفهوم هندسی $\xleftrightarrow[\text{تناظر}]{}$ $\{(x,y)|x\in\mathbb{R},y\in\mathbb{R}\}=\mathbb{R}\times\mathbb{R}$

خط L از صفحه‌ی E $\xleftrightarrow{\text{تناظر}}$ $\{L: ax+by+c=0|(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}\}$

منحنی (C) از صفحه‌ی E $\xleftrightarrow{\text{تناظر}}$ $\{y=f(x)|(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}\}$

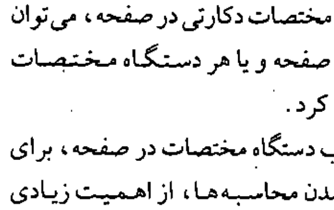
نکته‌ی ۱. به‌جای دستگاه مختصات دکارتی در صفحه، می‌توان از دستگاه مختصات قطبی در صفحه و یا هر دستگاه مختصات تعریف‌شده‌ی دیگری استفاده کرد.

نکته‌ی ۲. چگونگی نصب دستگاه مختصات در صفحه، برای ساده‌تر شدن و یا طولانی‌تر شدن محاسبه‌ها، از اهمیت زیادی برخوردار است؛ یعنی ما می‌توانیم با انتخاب دستگاه مختصات در صفحه، به‌نحوی مناسب، محاسبه‌ها را به حداقل برسانیم.

اکنون به چند مثال که با استفاده از دو رویکرد هندسی و جبری حل شده‌اند، توجه کنید.

مثال ۱. قضیه: ثابت کنید که در هر مثلث قائم‌الزاویه، ارتفاع وارد بر وتر، واسطه‌ی هندسی بین دو قطعه‌ی ایجادشده روی وتر است.

اثبات با رویکرد هندسی: مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABC ($\hat{A}=90^\circ$) را در نظر می‌گیریم و ارتفاع AH را رسم می‌کنیم (شکل ۱). دو مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABH و ACH به دلیل برابری زاویه‌های متناظرشان، متشابه‌اند؛ زیرا داریم:



(شکل ۱)

$\hat{H}_1=\hat{H}_2=90^\circ$ و $\hat{A}_1+\hat{A}_2=90^\circ$ (۱)

$\hat{A}_1+\hat{B}=90^\circ$ (۲)

$$(1),(2) \Rightarrow \hat{A}_2 = \hat{B}$$

از متشابه بودن این دو مثلث قائم‌الزاویه داریم:

$$\frac{AH}{BH} = \frac{CH}{AH} \Rightarrow AH^2 = BH.CH$$

و این، حکم مسئله است.

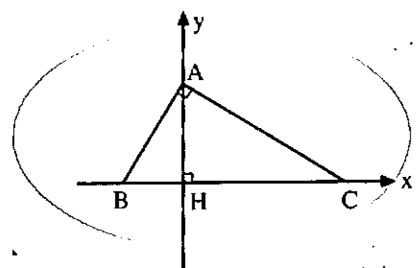
اثبات با رویکرد جبری: مثلث قائم‌الزاویه‌ی $ABC\ (\hat{A} = 90^\circ)$ را در نظر می‌گیریم و ارتفاع AH را رسم می‌کنیم. H را مبدأ مختصات، محور xها را منطبق بر BC و محور yها را منطبق بر AH اختیار می‌کنیم. اگر $AH = h$ ، $BH = d$ و $CH = e$ فرض شود، خواهیم داشت:

$$A = (0,h) \text{ و } B = (-d,0) \text{ و } C = (e,0) \qquad AB \perp AC$$

$$m_{AB} = \frac{0-h}{-d-0} = \frac{h}{d} \text{ و } m_{AC} = \frac{0-h}{e-0} = -\frac{h}{d}$$

$$m_{AB} \cdot m_{AC} = -1 \Rightarrow \frac{h}{d} \times \frac{-h}{e} = -1$$

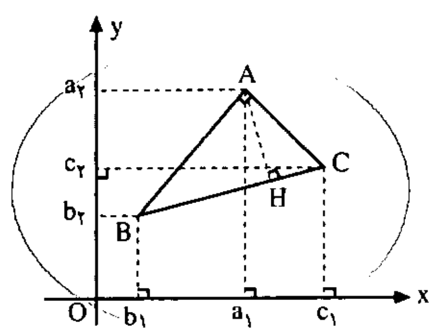
$$\Rightarrow h^2 = de \Rightarrow AH^2 = BH.CH$$



(شکل ۲)

و این حکم مسئله است.

توجه کنید:
اگر دستگاه محورهای مختصات را به طور دل‌خواه در نظر بگیریم (شکل ۳)، رأس‌های مثلث قائم‌الزاویه‌ی $ABC\ (\hat{A} = 90^\circ)$ از این قرار خواهد بود: $A = (a_1, a_2)$ ، $B = (b_1, b_2)$ و $C = (c_1, c_2)$.



(شکل ۳)

ارتفاع وارد بر وتر، یعنی AH را رسم می‌کنیم. اکنون برای اثبات رابطه‌ی $AH^2 = HB.HC$ ، لازم است طول پاره‌خط‌های AH ، BH و CH را برحسب مختصات رأس‌های مثلث، یعنی برحسب مختصات نقطه‌های A ، B و C به دست آوریم و در این رابطه قرار دهیم و ثابت کنیم که این رابطه به ازای مقدارهای قرار داده شده به جای AH ، BH و CH همواره برقرار است.

اما نخست لازم است مختصات نقطه‌ی H، پای ارتفاع AH را برحسب مختصات رأس‌های A ، B و C محاسبه کنیم. برای این کار باید معادله‌ی خط AH و معادله‌ی خط BC را به دست آوریم و آن‌گاه، مختصات نقطه‌ی برخورد آن‌ها را تعیین کنیم. داریم:

$$B\begin{vmatrix} b_1 \\ b_2 \end{vmatrix} \quad C\begin{vmatrix} c_1 \\ c_2 \end{vmatrix} \Rightarrow BC: y - b_2 = \frac{c_2 - b_2}{c_1 - b_1}(x - b_1)$$

$$\Rightarrow y = \frac{c_2 - b_2}{c_1 - b_1}x - b_1 \times \frac{c_2 - b_2}{c_1 - b_1} + b_2$$

$$m/_{BC} = \frac{c_2 - b_2}{c_1 - b_1}, AH \perp BC \Rightarrow m/_{AH} = -\frac{c_1 - b_1}{c_2 - b_2}$$

$$\Rightarrow AH: y - a_2 = -\frac{c_1 - b_1}{c_2 - b_2}(x - a_1)$$

معادله‌ی ارتفاع AH ، $\Rightarrow y = -\frac{c_1 - b_1}{c_2 - b_2}x + a_1 \times \frac{c_1 - b_1}{c_2 - b_2} + a_2$

$$\begin{aligned} BC: &\begin{cases} y = \dfrac{c_2 - b_2}{c_1 - b_1}x - b_1 \times \dfrac{c_2 - b_2}{c_1 - b_1} + b_2 \\ \end{cases} \\ AH: &\begin{cases} y = -\dfrac{c_1 - b_1}{c_2 - b_2}x + a_1 \times \dfrac{c_1 - b_1}{c_2 - b_2} + a_2 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{c_2 - b_2}{c_1 - b_1}x - b_1 \times \frac{c_2 - b_2}{c_1 - b_1} + b_2 = -\frac{c_1 - b_1}{c_2 - b_2}x + a_1 \times \frac{c_1 - b_1}{c_2 - b_2} + a_2$$

$$\Rightarrow \left(\frac{c_2 - b_2}{c_1 - b_1} + \frac{c_1 - b_1}{c_2 - b_2}\right)x = a_1 \times \frac{c_1 - b_1}{c_2 - b_2} + b_1 \times \frac{c_2 - b_2}{c_1 - b_1} + a_2 - b_2$$

$$\frac{(c_2 - b_2)^2 + (c_1 - b_1)^2}{(c_1 - b_1)(c_2 - b_2)}x = \frac{a_1(c_1 - b_1)^2 + b_1(c_2 - b_2)^2}{(c_2 - b_2) \times (c_1 - b_1)} + a_2 - b_2$$

$$\Rightarrow x = \frac{a_1(c_1 - b_1)^2 + b_1(c_2 - b_2)^2 + (a_2 - b_2)(c_1 - b_1)(c_2 - b_2)}{(c_2 - b_2)^2 + (c_1 - b_1)^2} = \alpha$$

طول نقطه‌ی H را α می‌گیریم. برای محاسبه‌ی عرض نقطه‌ی H داریم:

$$\Rightarrow y = \frac{c_2 - b_2}{c_1 - b_1} \times \alpha - b_1 \times \frac{c_2 - b_2}{c_1 - b_1} + b_2$$

$$\Rightarrow H\left|\begin{array}{l} x=\alpha \\ y=\dfrac{c_2-b_2}{c_1-b_1}\alpha-b_1\times\dfrac{c_2-b_2}{c_1-b_1}+b_2=\beta\end{array}\right.$$

از آن خواهیم داشت:

$$AH=\sqrt{(\alpha-a_1)^2+(\beta-a_2)^2},\ BH=\sqrt{(\alpha-b_1)^2+(\beta-b_2)^2}$$

$$CH=\sqrt{(\alpha-c_1)^2+(\beta-c_2)^2}$$

$$AH^2=BH.CH$$

$$\Rightarrow(\alpha-a_1)^2+(\beta-a_2)^2=\sqrt{(\alpha-b_1)^2+(\beta-b_2)^2}\times\sqrt{(\alpha-c_1)^2+(\beta-c_2)^2}$$

$$\Rightarrow\left[(\alpha-a_1)^2+(\beta-a_2)^2\right]^2=\left[(\alpha-b_1)^2+(\beta-b_2)\right]\times\left[(\alpha-c_1)^2+(\beta-c_2)^2\right]$$

با قرار دادن مقدار به جای α و β برحسب (a_1,a_2)، (b_1,b_2) و (c_1,c_2)، دو طرف این رابطه با هم برابر خواهند شد و این مطلب درستی رابطه‌ی $AH^2=BH.CH$ را نشان می‌دهد.

می‌بینید که با انتخاب دستگاه محورهای مختصات به این صورت، چه قدر محاسبه‌ها پیچیده و مشکل می‌شود. بنابراین اهمیت انتخاب مناسب دستگاه محورهای مختصات هرچه بیشتر نمایان می‌گردد.

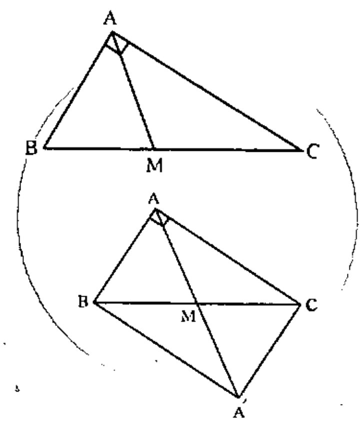
اینک به مثال‌های دیگری از حل یک مسئله با دو رویکرد هندسی و جبری توجه کنید.

مثال ۱. ثابت کنید که در هر مثلث قائم‌الزاویه، میانه‌ی وارد بر وتر نصف وتر است.

اثبات

الف) روش هندسی

راه اول:



(شکل ۴)

مثلث قائم‌الزاویه‌ی $ABC(\hat{A}=90^\circ)$ را در نظر می‌گیریم و میانه‌ی AM را رسم می‌کنیم. می‌خواهیم ثابت کنیم که $AM=\frac{BC}{2}$ است. برای اثبات، میانه‌ی AM را به اندازه‌ی خود تا نقطه‌ی A′ امتداد می‌دهیم؛ یعنی $AM=MA'$. سپس از A′ به B و C وصل می‌کنیم. چهارضلعی ABA′C متوازی‌الاضلاع است، زیرا قطرهایش یکدیگر را نصف کرده‌اند ($AM=MA'$ و $BM=MC$).

از طرف دیگر، زاویه‌ی A از این متوازی‌الاضلاع 90° است، پس این متوازی‌الاضلاع مستطیل است. اما می‌دانیم که قطرهای هر مستطیل با هم مساوی‌اند، بنابراین: $AA'=2AM=BC$ و از آن‌جا: $AM=\frac{BC}{2}$. پس حکم مسئله ثابت شد.

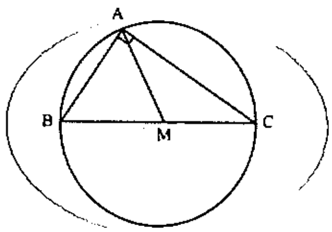
نکته: در این اثبات از قضیه‌های زیر استفاده شده است:

۱. اگر قطرهای یک چهارضلعی یکدیگر را نصف کنند، آن چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است.

۲. متوازی‌الاضلاعی که یک زاویه‌ی 90° داشته باشد، مستطیل است.

۳. قطرهای هر مستطیل با هم مساوی‌اند.

راه دوم:



(شکل ۵)

مثلث قائم‌الزاویه‌ی $ABC(\hat{A}=90^\circ)$ را در نظر می‌گیریم و میانه‌ی AM را رسم می‌کنیم. می‌خواهیم ثابت کنیم: $AM=\frac{BC}{2}$.

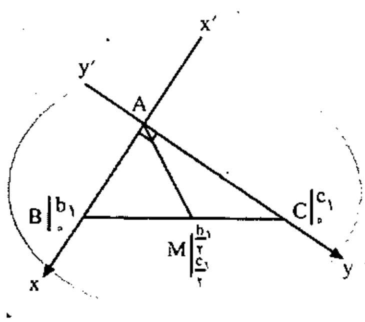
برای اثبات، دایره‌ای به قطر BC رسم می‌کنیم. می‌دانیم که این دایره از رأس A می‌گذرد، زیرا کمان درخور زاویه‌ی 90° روبه‌رو به یک پاره‌خط، دایره‌ای است که به قطر آن پاره‌خط رسم می‌شود. پس AM مساوی شعاع این دایره است؛ یعنی داریم:

$$AM=MB=MC\Rightarrow AM=\frac{BC}{2}$$

پس حکم مسئله ثابت شد.

ب) راه حل جبری

مثلث قائم‌الزاویه‌ی $ABC(\hat{A}=90^\circ)$ را در نظر می‌گیریم و میانه‌ی AM را رسم می‌کنیم. می‌خواهیم ثابت کنیم: $AM=\frac{BC}{2}$.



(شکل ۶)

دستگاه محورهای مختصات قائم را چنان اختیار می‌کنیم که A مبدأ مختصات، AB روی محور xها و AC روی محور yها باشد (شکل ۶). در این صورت، با فرض $AB = b_1$ و $AC = c_1$ خواهیم داشت:

$A = (0,0), B = (b_1,0), C = (0,c_1)$

$$M \text{ وسط } BC \left| \begin{array}{l} x_M = \frac{x_B + x_C}{2} = \frac{b_1 + 0}{2} = \frac{b_1}{2} \\ y_M = \frac{y_B + y_C}{2} = \frac{0 + c_1}{2} = \frac{c_1}{2} \end{array} \right.$$

از آن‌جا:

$$BC = \sqrt{(0 - b_1)^2 + (c_1 - 0)^2} = \sqrt{b_1^2 + c_1^2} \qquad (1)$$

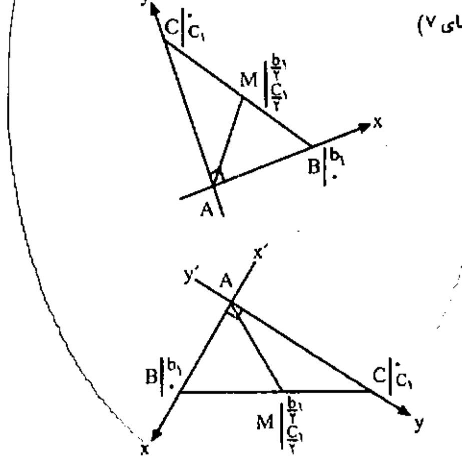
$$AM = \sqrt{(\frac{b_1}{2} - 0)^2 + (\frac{c_1}{2} - 0)^2} = \sqrt{\frac{b_1^2}{4} + \frac{c_1^2}{4}}$$
$$= \sqrt{\frac{b_1^2 + c_1^2}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{b_1^2 + c_1^2} \qquad (2)$$

از رابطه‌های ۱ و ۲ نتیجه می‌شود:

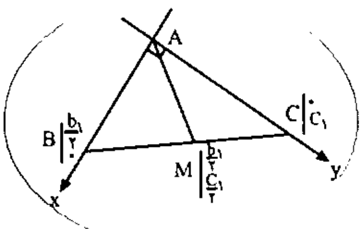
$$AM = \frac{1}{2}BC$$

و حکم مسئله ثابت شد.

نکته‌ی ۱. راستای محورهای Ax و Ay در این دستگاه مختصات قائم و حالت این دستگاه مختصات قائم، کمی غیرمعمول به نظر می‌رسد. زیرا به‌طور معمول محور xها حالت افقی و محور yها حالت عمودی دارند. باید توجه داشته باشیم که این مطلب هیچ اشکالی ندارد، زیرا محورهای Ax و Ay از دستگاه محورهای مختصات قائم xAy هر حالتی می‌توانند داشته باشند؛ حالت افقی، حالت عمودی و یا حالت مایل، مانند شکل‌های ۷ و شکل ۸:

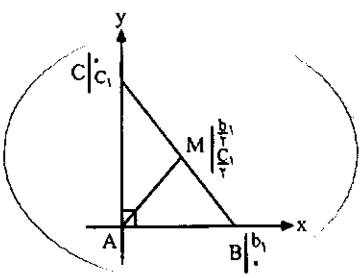


(شکل‌های ۷)



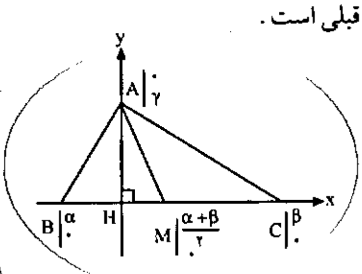
(شکل ۸)

در واقع، علت به‌وجود آمدن این حالت برای دستگاه مختصات xAy آن است که ما مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABC $(\hat{A} = 90^\circ)$ را به صورت شکل روبه‌رو در نظر گرفتیم. حال اگر مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABC $(\hat{A} = 90^\circ)$ را به صورت شکل ۹ در نظر بگیریم، دستگاه محورهای مختصات قائم xAy، دارای حالت معمول خود خواهد بود. یعنی محور Ax حالت افقی و محور Ay حالت عمودی خواهد داشت. اما همان‌طوری که قبلاً هم گفتیم، هیچ ضرورتی وجود ندارد که دستگاه محورهای مختصات قائم xAy، حالت معمول خود را داشته باشد.



(شکل ۹)

نکته‌ی ۲. در همین مسئله، برای حالتی که وتر BC حالت افقی دارد، می‌توانیم BC را روی محور xها و AH را روی محور yها در نظر بگیریم؛ یعنی نقطه‌ی H پای ارتفاع AH را مبدأ مختصات بگیریم. در این صورت، دستگاه محورهای مختصات xHy، حالت معمول خود را خواهد داشت و با فرض $B = (\alpha,0)$ ، $C = (\beta,0)$ و $A = (0,\gamma)$ ، نقطه‌ی M وسط وتر BC به مختصات $M = (\frac{\alpha+\beta}{2},0)$ خواهد بود و با محاسبه‌ی طول پاره‌خط‌های AM و BC برحسب α ، β و γ ، رابطه‌ی $AM = \frac{1}{2}BC$ ثابت می‌شود. بدیهی است که محاسبه در این دستگاه مختصات، قدری مفصل‌تر از حالت قبلی است.



(شکل ۱۰)

زیرنویس

1. Algebra 2. René Descartes 3. Pierre Feremat

احتمال شرطی در فضاهای هم‌شانس و غیرهم‌شانس

• حمیدرضا امیری

می‌دانیم، احتمال رخداد پیشامد A به شرط آن‌که پیشامد B (هر دو از فضای نمونه‌ای S) رخ داده باشد، از رابطه‌ی زیر به‌دست می‌آید:

$$p(A|B)=\frac{p(A\cap B)}{p(B)}$$

از طرف دیگر می‌دانیم، اگر $S=\{s_1,s_2,\dots,s_n\}$ فضای نمونه‌ای یک پدیده یا آزمایش تصادفی باشد و $A\subseteq S$ پیشامدی تصادفی در فضای نمونه‌ای S باشد و فرض کنیم: $A=\{s_1,s_2,\dots,s_k\}$، در این صورت برای محاسبه‌ی $p(A)$ دو حالت در نظر گرفته می‌شود:

۱. اگر فضای نمونه‌ای S هم‌شانس باشد، یعنی برای هر i و j داشته باشیم: $p(\{S_i\})=p(\{S_j\})=\frac{1}{n}$، در این صورت:

$$p(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{k}{n}$$

که در واقع، $\frac{k}{n}$ همان مجموع احتمال پیشامدهای ساده‌ی A است، یعنی:

$$p(A)=p(\{S_1\})+p(\{S_2\})+\dots+p(\{S_k\})=\frac{1}{n}+\dots+\frac{1}{n}=\frac{k}{n}$$

۲. اگر فضای نمونه‌ای S غیرهم‌شانس باشد، یعنی i و jای وجود داشته باشند، به قسمی که: $p(\{S_i\})\neq p(\{S_j\})$، در این صورت برای محاسبه‌ی $p(A)$ باید احتمال همه‌ی پیشامدهای ساده‌ی A را با هم جمع کنیم؛ یعنی:

$$p(A)=p(\{S_1\})+\dots+p(\{S_k\})$$

در واقع، از رابطه‌ی $p(A)=\frac{n(A)}{n(S)}$ فقط در فضاهای هم‌شانس می‌توان استفاده کرد.

بنابراین، اگر فرمول احتمال شرطی را به صورت زیر ساده کنیم، یعنی بنویسیم:

$$p(A|B)=\frac{p(A\cap B)}{p(B)}=\frac{\frac{n(A\cap B)}{n(S)}}{\frac{n(B)}{n(S)}}=\frac{n(A\cap B)}{n(B)}$$

فقط زمانی حق داریم از ساده شده‌ی این فرمول استفاده کنیم که فضای نمونه‌ای S، فضایی هم‌شانس تعریف شده باشد.

به مثال زیر توجه کنید:

مثال: اگر $S=\{a,b,c,d\}$، به طوری که $p(\{a,b\})=\frac{1}{5}$ و $p(\{a\})=p(\{b\})$ و $p(\{c\})=p(\{d\})$، در این صورت مطلوب است محاسبه‌ی:

الف) $p\left(\{a,b,c\}|\{b,c,d\}\right)$

ب) $p\left(\{d\}|\{b,d\}\right)$

حل: واضح است که S فضایی غیرهم‌شانس است. پس ابتدا احتمال هر پیشامد ساده‌ی فضا را می‌یابیم (پیشامد ساده به پیشامدهای تک‌عضوی گفته می‌شود).

$$p(\{a,b\}) = p(\{a\}) + p(\{b\}) = \frac{۱}{۵}$$

$$\overset{\text{فرض}}{\Rightarrow} p(\{a\}) + p(\{a\}) = \frac{۱}{۵} \Rightarrow p(\{a\}) = \frac{۱}{۱۰} = p(\{b\})$$

$$p(S) = ۱ \Rightarrow p(\{a\}) + p(\{b\}) + p(\{c\}) + p(\{d\}) = ۱$$

$$\overset{\text{فرض}}{\Rightarrow} p(\{c\}) + p(\{c\}) = ۱ - \frac{۱}{۵} = \frac{۴}{۵} \Rightarrow p(\{c\}) = \frac{۲}{۵}$$

$$\Rightarrow p(\{d\}) = \frac{۲}{۵}$$

الف) $$p\left(\{a,b,c\}|\{b,c,d\}\right) = \frac{p\left(\{a,b,c\}\cap\{b,c,d\}\right)}{p\left(\{b,c,d\}\right)}$$

$$= \frac{p(\{b,c\})}{p(\{b,c,d\})} = \frac{p(\{b\}) + p(\{c\})}{p(\{b\}) + p(\{c\}) + p(\{d\})}$$

$$= \frac{\frac{۱}{۱۰} + \frac{۲}{۵}}{\frac{۱}{۱۰} + \frac{۲}{۵} + \frac{۲}{۵}} = \frac{\frac{۵}{۱۰}}{\frac{۹}{۱۰}} = \frac{۵}{۹}$$

ب) $$p\left(\{d\}|\{b,d\}\right) = \frac{p\left(\{d\}\cap\{b,d\}\right)}{p(\{b,d\})} = \frac{p(\{d\})}{p(\{b\}) + p(\{d\})}$$

$$= \frac{\frac{۲}{۵}}{\frac{۱}{۱۰} + \frac{۲}{۵}} = \frac{\frac{۲}{۵}}{\frac{۵}{۱۰}} = \frac{۴}{۵}$$

حال اگر به اشتباه بخواهیم از رابطه‌ی $p(A|B) = \frac{n(A\cap B)}{n(B)}$ استفاده کنیم، خواهیم داشت:

الف) $$p\left(\{a,b,c\}|\{b,c,d\}\right) = \frac{n(\{b,c\})}{n(\{b,c,d\})} = \frac{۲}{۳}$$

ب) $$p\left(\{d\}|\{b,d\}\right) = \frac{n(\{d\})}{n(\{b,d\})} = \frac{۱}{۲}$$

که در هر دو مورد جواب غلط است. بنابراین، توجه به این مطلب اهمیت دارد که در فضاهای غیرهم‌شانس، هیچ گاه نباید از رابطه‌ی $p(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$ استفاده کرد.

منظور اصلی‌ام را از نوشتن این مقاله، با ذکر یک مثال و در واقع طرح یک سؤال و ایجاد چالشی بیان می‌کنم!

مثال: خانواده‌ای دو فرزند دارد. اگر بدانیم یکی از فرزندان این خانواده پسر است، چه قدر احتمال دارد فرزند دیگر هم پسر باشد؟

حل: واضح است که فضای نمونه‌ای این پدیده یک فضای هم‌شانس است. یعنی اگر

S = {(د و پ) و (پ و د) و (د و د) و (پ و پ)}

فضای نمونه‌ای باشد، همواره:

p({(پ و پ)}) = p({(د و د)}) = p({(پ و د)}) = p({(د و پ)}) = $\frac{۱}{۴}$

یعنی:

p({(پ و پ)}) = p(اولی پسر و دومی پسر) = $\frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۲} = \frac{۱}{۴}$

p({(پ و د)}) = p(اولی دختر و دومی پسر) = $\frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۲} = \frac{۱}{۴}$

قبل از این که بخواهیم مسئله را از طریق فرمول احتمال شرطی حل کنیم، به طور معمول و طبیعی چه جوابی برای مسئله به ذهن شما می‌رسد؟ احتمال پسر بودن یک فرزند چه قدر است؟ بله درست فکر کرده‌اید. احتمال $\frac{۱}{۲}$ است. در واقع اگر خانواده‌ای هر تعداد فرزند داشته باشد، احتمال آن که یکی از آن‌ها (فرق نمی‌کند کدام یکی، اولی، دومی، ... یا آخری) پسر باشد، همواره $\frac{۱}{۲}$ است.

حالا همین مسئله را از طریق احتمال شرطی حل می‌کنیم؛ یعنی با محدود کردن فضای نمونه‌ای. می‌دانیم که گذاشتن شرط روی هر مسئله‌ی احتمال، فضای نمونه‌ای را محدود می‌کند. در این مثال نیز چون شرط کرده‌ایم یکی از فرزندان این خانواده پسر است، پس حالت (د و د) از بین می‌رود. یعنی اگر فرض کنیم، B پیشامدی باشد که رخ داده است و A پیشامد مطلوبی که به دنبال محاسبه‌ی احتمال آن هستیم، خواهیم داشت:

A = {(پ و پ)} و B = {(د و پ) و (پ و د) و (پ و پ)}

$$\Rightarrow p(A|B) = \frac{n(A\cap B)}{n(B)} = \frac{۱}{۳}$$

به نظر شما کدام جواب، جواب واقعی و صحیح است: $\frac{۱}{۳}$ یا $\frac{۱}{۲}$؟ اگر $\frac{۱}{۲}$ جواب صحیح است، اشتباه کجا صورت گرفته؟ حال اگر بخواهیم همین مسئله را از طریق «قانون بیز» حل کنیم، کدام یک از دو جواب تأیید می‌شود؟

فرض کنیم A پیشامد آن باشد که فرزند دیگر هم پسر باشد (هر دو پسر)، و B پیشامد آن باشد که یکی از فرزندان پسر باشد. پس به

دنبال همان $p(A|B)$ هستیم که طبق قانون بیز داریم:

$$p(A|B)=\frac{p(A)}{p(B)}\times p(B|A)$$

$$p(A)=\frac{1}{4} \text{ و } p(B)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2} \text{ و } p(B|A)=1$$

($p(B|A)$ یعنی احتمال آن که یکی پسر باشد. اگر بدانیم هر دو پسرند، همواره این احتمال ۱ است.)

$$p(A|B)=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}}\times 1=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

بنابراین مشاهده می‌شود، همان عددی که قبل از حل مسئله نیز حدس زده بودید، برای این احتمال حاصل می‌شود. لذا باید اشتباهی در محاسبه‌ی عدد $\frac{1}{3}$ صورت گرفته باشد!

در واقع این اشتباه از آن‌جا ناشی می‌شود که ما توجه نکردیم، زمانی که شرطی روی یک مسئله گذاشته می‌شود و فضای نمونه‌ای محدود می‌شود، این امکان وجود دارد که شرط گذاشته شده، فضای نمونه‌ای را از حالت هم‌شانس خارج کند و فضای نمونه‌ای محدود شده، به یک فضای نمونه‌ای غیرهم‌شانس تبدیل شود. به عبارت دیگر، گاهی اوقات شرط گذاشته شده چنان است که دیگر در فضای نمونه‌ای حاصل، احتمال هر عضو فضای نمونه‌ای با اعضای دیگر برابر نیست.

در مثال فوق، ابتدا فضای نمونه‌ای به صورت زیر تعریف می‌شود.

S ={(پ و د) و (د و پ) و (د و د) و (پ و پ)}

وقتی شرط می‌کنیم که «یکی از فرزندان پسر است»، واضح است که حالت (د و د) از S حذف و فضای نمونه‌ای محدودشده به صورت {(د و پ) و (پ و د) و (پ و پ)}=´S حاصل می‌شود. حال این سؤال پیش می‌آید که آیا با شرط اعمال شده، ´S یک فضای هم‌شانس است یا خیر؟ یعنی اگر ما بدانیم یکی از فرزندان پسر است، آیا شانس (د و پ) با شانس (پ و پ) یکسان است؟ مسلماً چنین نیست! در واقع، وقتی می‌دانیم یکی از فرزندان پسر است، شانس هر دو پسر از یکی پسر و یکی دختر بیشتر است. پس فضای غیرهم‌شانس تولید شده است و لذا حق نداریم در محاسبه‌ی احتمال، از رابطه‌ی $p(A)=\frac{n(A)}{n(S')}$ استفاده کنیم.

به یک مثال دیگر توجه کنید:

اگر سه کارت A_1 و A_2 و A_3 به ترتیب با این ویژگی که A_1 هر دو طرفش قرمز و A_2 یک طرف قرمز و یک طرف آبی و A_3 هر دو طرف آبی، مفروض باشند و این سه کارت را در یک کیسه بریزیم و یک کارت به تصادف خارج کنیم، به شرط آن‌که بدانیم یک طرف کارت قرمز است، چه‌قدر احتمال دارد طرف دیگر آن نیز قرمز باشد؟

برای حل این مسئله نیز اگر نکات ذکر شده و مطلب مهم در مسئله‌ی قبل را در نظر نگیریم، جوابی اشتباه خواهیم یافت. به این ترتیب که می‌گوییم چون می‌دانیم یک طرف کارت قرمز است، پس فضای نمونه‌ای حاصل و محدود شده به صورت $S'=\{A_1,A_2\}$ به دست می‌آید و احتمال آن‌که کارت A_1 (هر دو طرف قرمز) خارج شده است، برابر است با $\frac{1}{2}$ که این پاسخ اشتباه است. اما اگر به این نکته توجه کنیم که شرط گذاشته شده روی مسئله، فضای ´S را به فضایی غیرهم‌شانس تبدیل کرده است، از «قانون بیز» و قانون احتمال کل که در آن‌ها از $n(A)$ یا $n(S')$ استفاده نمی‌شود، کمک می‌گیریم و به جواب درست هم خواهیم رسید!

حال فرض کنیم A پیشامد آن باشد که هر دو طرف قرمز باشد (کارت A_1 انتخاب شود) و B پیشامد آن باشد که یک طرف کارت قرمز است. پس باید $p(A|B)$ را محاسبه کنیم. طبق قانون بیز داریم:

$$p(A|B)=\frac{p(A)}{p(B)}\times p(B|A)$$

هم‌چنین برای محاسبه‌ی $P(B)$ به دو طریق می‌توان عمل کرد: یکی آن‌که احتمال قرمز بودن یک طرف کارت را مستقیماً با توجه به این‌که در سه کارت مفروض، سه طرف آبی و سه طرف قرمز داریم، پس احتمال قرمز بودن یک طرف قرمز برابر است با $\frac{3}{6}$ یا $\frac{1}{2}$.

و راه دیگر، استفاده از قانون احتمال کل است. به این ترتیب که کارت انتخاب شده یا A_1 است یا A_2 و یا A_3. پس می‌توان نوشت:

$$p(B)=p(B|A_1)\times p(A_1)+p(B|A_2)\times p(A_2)+p(B|A_3)\times p(A_3)$$

$$\Rightarrow p(B)=1\times\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}+0\times\frac{1}{3}=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$$

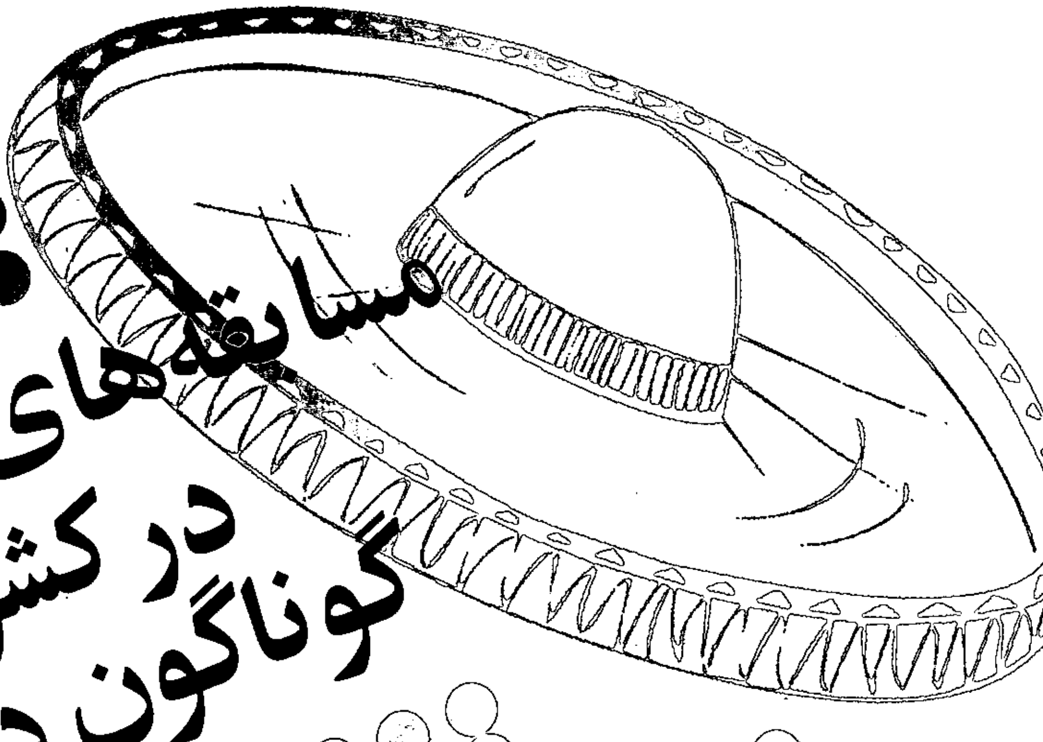
($p(B|A_1)$ یعنی احتمال آن‌که یک طرف قرمز باشد، به شرط آن‌که بدانیم کارت A_1 انتخاب شده که این احتمال ۱ است.)

مشاهده می‌کنید که از هر دو راه، احتمال قرمز بودن یک طرف کارت $\frac{1}{2}$ است. پس می‌توان نوشت:

$$p(A|B)=\frac{p(A)}{p(B)}\times p(B|A)=\frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}}\times 1=\frac{2}{3}$$

($P(A)$ یعنی احتمال آن‌که کارت A_1 انتخاب شود و $P(B|A)$ یعنی احتمال آن‌که یک طرف کارت قرمز باشد، به شرط آن‌که بدانیم A_1 انتخاب شده است.)

بنابراین، در حل مسائل احتمال شرطی باید به این نکته توجه کنیم که در مواردی ممکن است شرط اعمال‌شده روی مسئله، فضای نمونه‌ای محدود شده‌ی غیرهم‌شانس به‌وجود آورد که در این شرایط برای حل مسئله از قوانینی چون قانون بیز یا قانون احتمال کل استفاده خواهیم کرد.



مسابقه‌های ریاضی در کشورهای گوناگون دنیا (۸)

• هوشنگ شرقی

گزیده‌ای از سؤالات مسابقه‌ی ریاضی شهر نیومکزیکو

سؤالات

۱. کوچک‌ترین جمله‌ی دنباله‌ی زیر را به‌دست آورید:

$$\sqrt{\frac{7}{6}}+\sqrt{\frac{96}{7}},\ \sqrt{\frac{8}{6}}+\sqrt{\frac{96}{8}},\ \sqrt{\frac{9}{6}}+\sqrt{\frac{96}{9}},\ \dots,\ \sqrt{\frac{95}{6}}+\sqrt{\frac{96}{95}}$$

۲. الف) عددهای طبیعی a و b را چنان بیابید که داشته باشیم:

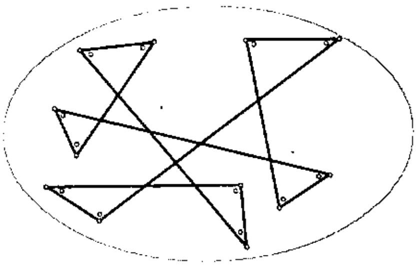
$$\mathrm{tg}\frac{3\pi}{8}=a+\sqrt{b}.$$

ب) نشان دهید که عبارت $(\mathrm{tg}\frac{3\pi}{8})^n+(-\cot g\frac{3\pi}{8})^n$ به‌ازای هر عدد طبیعی n، همواره برابر یک عدد صحیح زوج است.

ج) برای هر عدد طبیعی n، فرض کنید $k_n=\left[(\mathrm{tg}\frac{3\pi}{8})^n\right]$ ([ ] علامت جزء صحیح است). نشان دهید که همواره n و k_n زوجیت متفاوت دارند.

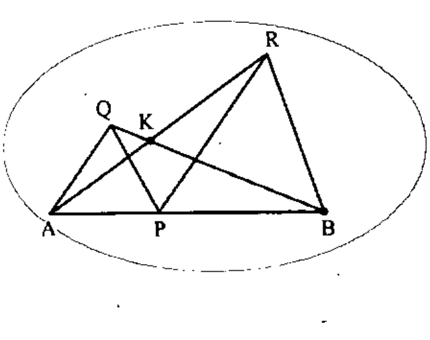
۳. یک شرط لازم و کافی برای پارامتر k بیابید، به‌طوری که معادله‌ی $2\sin\theta+k\cos\theta=\sqrt{7}$ دارای جواب باشد.

۴. مجموع دوازده زاویه‌ای را که در شکل مشخص شده‌اند، به‌دست آورید.

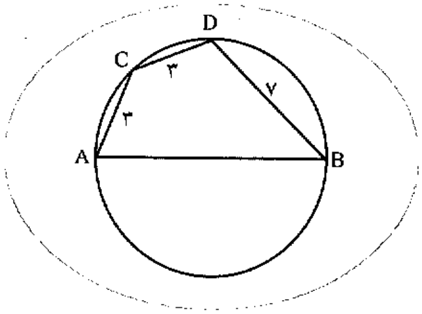


۵. فرض کنید P نقطه‌ای در صفحه‌ی مثلث متساوی‌الاضلاع ABC باشد و هر سه مثلث PAB، PBC و PCA متساوی‌الساقین باشند. چند وضع برای نقطه‌ی P وجود دارد؟

۶. در شکل زیر، P نقطه‌ای متغیر روی پاره‌خط AB است و مثلث‌های QAB و RPB متساوی‌الاضلاع هستند. مکان هندسی نقطه‌ی K، محل برخورد AR و BQ را به‌دست آورید.



۷. در شکل زیر، AB قطر دایره است و $AC = DC = 3$ و $DB = 7$. اندازه‌ی شعاع دایره چیست؟



حل

۱. با توجه به نابرابری واسطه‌های حسابی- هندسی و جمله‌ی عمومی دنباله می‌توان نوشت:

$$a_n = \sqrt{\frac{n}{6}} + \sqrt{\frac{96}{n}} \ge 2\sqrt{\sqrt{\frac{n}{6}}\times\sqrt{\frac{96}{n}}} = 2\sqrt{4} = 4$$

یعنی کوچک‌ترین جمله‌ی دنباله مساوی ۴ است. و برای یافتن شماره‌ی این جمله، توجه می‌کنیم که برابری در نابرابری واسطه‌های حسابی- هندسی وقتی پیش می‌آید که $a = b$ باشد؛ یعنی:

$$\sqrt{\frac{n}{6}} = \sqrt{\frac{96}{n}} \Rightarrow n = \sqrt{6\times 96} = 24$$

بنابراین کوچک‌ترین جمله‌ی این دنباله، جمله‌ی بیست‌وچهارم، یعنی $a_{24} = 4$ است.

۲. الف) به روش‌های گوناگونی می‌توان مقدار $tg\frac{3\pi}{8}$ را به‌دست آورد. یکی از آن‌ها، استفاده از اتحاد مثلثاتی $tg\frac{x}{2} = \frac{\sin x}{1+\cos x}$ است که به‌عنوان تمرین می‌توانید به سادگی آن را اثبات کنید. می‌توان نوشت:

$$tg\frac{x}{2} = \frac{\sin x}{1+\cos x} \Rightarrow tg\frac{3\pi}{8} = \frac{\sin\frac{3\pi}{4}}{1+\cos\frac{3\pi}{4}} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}} =$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}(2+\sqrt{2})}{4-2} = \frac{2\sqrt{2}+2}{2} = \sqrt{2}+1$$

$$\Rightarrow a = 1, b = 2$$

ب) با توجه به نتیجه‌ی الف خواهیم داشت:

$$\cot g\frac{3\pi}{8} = \frac{1}{\sqrt{2}+1} = \sqrt{2}-1 \Rightarrow (tg\frac{3\pi}{8})^n + (-\cot g\frac{3\pi}{8})^n$$
$$= (1+\sqrt{2})^n + (1-\sqrt{2})^n$$

حال اگر با استفاده از بسط دو جمله‌ای نیوتون به صورت زیر:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \cdots + \binom{n}{n}$$

پرانتزها را بسط دهیم، عبارت‌های گنگ با هم حذف و عبارت‌های گویای برابر، دو به دو با هم جمع می‌شوند و یک عبارت مضرب ۲ به دست می‌آید:

$$(1+\sqrt{2})^n + (1-\sqrt{2})^n = 2t$$

ج) با توجه به نتیجه‌ی ب خواهیم داشت:

$$(tg\frac{3\pi}{8})^n = (1+\sqrt{2})^n = 2t - (1-\sqrt{2})^n$$

و با توجه به این‌که $1-\sqrt{2}$ عددی منفی است، اگر n فرد باشد، $-(1-\sqrt{2})^n$ مثبت و اگر n زوج باشد، منفی خواهد بود. با توجه به این‌که قدر مطلق $1-\sqrt{2}$ کمتر از یک است، قدر مطلق $(1-\sqrt{2})^n$ نیز کمتر از یک خواهد بود. لذا $(tg\frac{3\pi}{8})^n$ تفاضل عدد زوج 2t از یک عدد، کمتر از یک است. بنابراین، اگر n فرد باشد، این مقدار از 2t تجاوز می‌کند و درنتیجه: $k_n = \left[(tg\frac{3\pi}{8})^n\right] = 2t$. و به ازای nهای زوج نیز: $k_n = 2t-1$. بنابراین n و k_n از نظر زوجیت نقطه‌ی مقابل یکدیگر هستند.

۳. این یک مسئله‌ی کاملاً شناخته شده و کلاسیک در مثلثات است. درواقع قضیه‌ای شناخته‌شده می‌گوید: شرط لازم و کافی برای آن‌که معادله‌ی $a\sin x + b\cos x = c$ دارای جواب باشد، آن است که: $a^2 + b^2 \ge c^2$.

به عنوان تمرین سعی کنید این رابطه را اثبات کنید. برای این منظور بنویسید:

$$a\sin x + b\cos x = c \Rightarrow \sin x + \frac{b}{a}\cos x = \frac{c}{a}$$

حال فرض کنید: $\frac{b}{a} = tg\varphi$ و از آن‌جا نتیجه بگیرید:

$$\sin x + tg\varphi\cos x = \frac{c}{a} \Rightarrow \frac{\sin x\cos\varphi + \cos x\sin\varphi}{\cos\varphi} = \frac{c}{a}$$

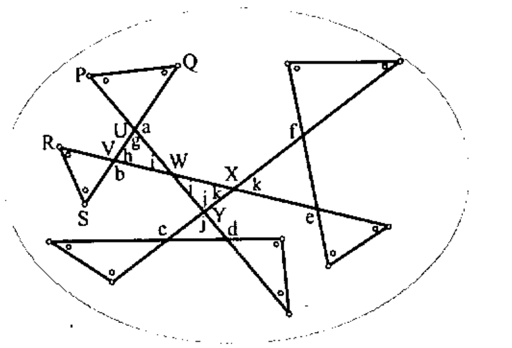
$$\Rightarrow \sin(x+\varphi) = \frac{c}{a}\cos\varphi$$

حال مقدار $\cos\varphi$ را برحسب a و b به‌دست آورید و با توجه به این‌که $|\sin(x+\varphi)| \le 1$، نتیجه‌ی فوق را اثبات کنید. اکنون با استفاده از این دستور، حل مسئله بسیار آسان می‌شود:

$$2\sin\theta + k\cos\theta = \sqrt{7}$$

$$\Rightarrow 2^2 + k^2 \ge (\sqrt{7})^2 \Rightarrow k^2 \ge 3 \Rightarrow k \ge \sqrt{3} \text{ یا } k \le -\sqrt{3}$$

۴ . مسئله‌ی نسبتاً آسانی است! کافی است از ویژگی مجموع زوایای داخلی مثلث‌ها و زاویه‌های خارجی استفاده کنیم . اگر مطابق شکل زیر زوایا را نام‌گذاری کنیم ، خواهیم داشت :



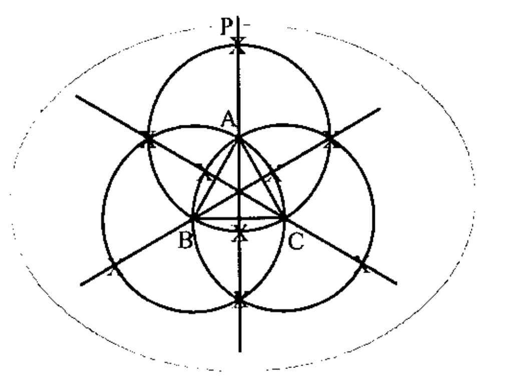
$g+h+i=۱۸۰^\circ$ و $g+h+a+b=۲\times۱۸۰^\circ$

$\Rightarrow a+b=۱۸۰^\circ+i$

به طریق مشابه نتیجه می‌شود: $c+d=j+۱۸۰^\circ$ و $e+f=k+۱۸۰^\circ$ و با توجه به ویژگی زاویه‌های خارجی در مثلث ، به‌سادگی نتیجه می‌شود که مجموع دوازده زاویه‌ی مورد نظر برابر است با مجموع زوایای a ، b ، c ، d ، e و f :

$$a+b+c+d+e+f=\underbrace{(i+j+k)}_{۱۸۰^\circ}+۳\times۱۸۰^\circ=۴\times۱۸۰^\circ=۷۲۰^\circ$$

۵ . کافی است به شکل زیر توجه کنید :

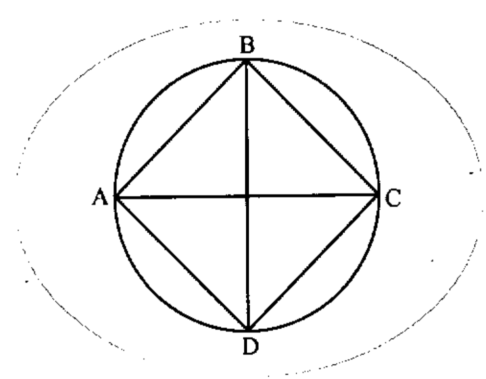


از آن‌جا ده جواب متمایز برای نقطه‌ی P را در شکل علامت بزنید .

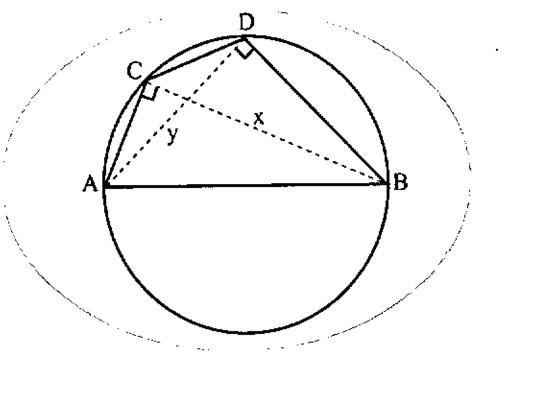
۶ . یک ایده‌ی بسیار جالب برای حل مسئله ، توجه به این نکته است که با در نظر گرفتن نقطه‌ی P به‌عنوان مرکز دوران ، می‌توان Q را دوران‌یافته‌ی A حول P به اندازه‌ی ۶۰° و B را دوران‌یافته‌ی R حول P و به اندازه‌ی ۶۰° در نظر گرفت . لذا پاره‌خط BQ دوران‌یافته‌ی AR حول P به اندازه‌ی ۶۰° است و از قضایای تبدیل‌های هندسی می‌دانیم ، دوران‌یافته‌ی هر پاره‌خط ، با آن زاویه‌ای مساوی زاویه‌ی دوران می‌سازد؛ یعنی: $\angle AKQ=۶۰^\circ$.

درنتیجه: $\angle AKB=۱۲۰^\circ$ و چون AB ثابت است ، لذا مکان هندسی K ، کمان درخور زاویه‌ی ۱۲۰° تحت پاره‌خط AB است .

۷ . مسئله‌ی خوبی است که راه‌های گوناگونی برای حل آن وجود دارد . یک راه ، استفاده از قضیه‌ای موسوم به «قضیه‌ی بطلمیوس» در مورد چهارضلعی محاطی ABCD است . این قضیه می‌گوید : $AB\times CD+AD\times BC=AC\times BD$ (اثبات قضیه را می‌توان در بسیاری از کتاب‌های هندسه دید) .



اکنون با توجه به این قضیه و با توجه به این‌که زاویه‌ی محاطی روبه‌رو به قطر مساوی ۹۰° است و به کمک قضیه‌ی فیثاغورس ، می‌توان نوشت :



$$AC\times BD+CD\times AB=BC\times AD$$
$$\Rightarrow ۳\times۷+(۲R)=xy\Rightarrow xy=۶R+۲۱,$$
$$x=\sqrt{AB^۲-AC^۲}=\sqrt{۴R^۲-۹}$$
$$y=\sqrt{AB^۲-BD^۲}=\sqrt{۴R^۲-۴۹}\Rightarrow\sqrt{(۴R^۲-۹)(۴R^۲-۴۹)}$$
$$=۶R+۲۱\Rightarrow(۲R-۳)(۲R+۳)(۲R-۷)(۲R+۷)$$
$$=۹(۲R+۷)^۲\Rightarrow(۲R-۳)(۲R+۳)(۲R-۷)=۹(۲R+۷)$$

و با فرض $t=۲R$ و پس از ساده‌کردن رابطه‌ی فوق ، به معادله‌ی $t^۳-۷t^۲-۱۸t=۰$ می‌رسیم که از حل آن خواهیم داشت :

$$t(t^۲-۷t-۱۸)=۰$$
$$\Rightarrow t(t-۹)(t+۲)=۰\Rightarrow t=۹\Rightarrow R=\frac{۹}{۲}$$

اتحاد و معادله (۱۴)

معادله‌های با توان مجهول و معادله‌های لگاریتمی

• پرویز شهریاری

اشاره

در شماره‌های قبل درباره‌ی اتحاد و معادله، تجزیه‌ی چند جمله‌ای دلخواه و مسئله‌های گوناگون درباره‌ی معادله‌ها بحث شد. اینک در ادامه‌ی مقاله‌ی شماره‌ی قبل بقیه‌ی مسئله‌های گوناگون درباره‌ی معادله‌ها را در پی می‌آوریم.

۱۳. $4^{\sqrt{x-2}}+16-10\times 2^{\sqrt{x-2}}=0$.

حل: ۴ را به صورت 2^2 می‌نویسیم:

$$2^{2\sqrt{x-2}}-10\times 2^{\sqrt{x-2}}+16=0$$

که با فرض $y=2^{\sqrt{x-2}}$ ، به‌دست می‌آید:

$$y^2-10y+16=0 \Rightarrow y_1=2 \text{ و } y_2=8$$

بنابراین:

$$2^{\sqrt{x-2}}=2 \text{ و } 2^{\sqrt{x-2}}=8=2^3$$

یعنی $\sqrt{x-2}=1$ و $\sqrt{x-2}=3$ و درنتیجه:

$$x_1=3 \text{ و } x_2=11$$

۱۴. $2\log 2+(1+\frac{1}{2x})\log 3-\log(\sqrt[x]{3}+27)=0$.

حل: معادله‌ی مفروض را می‌توان این طور نوشت:

$$\log 4+\log(3^{1+\frac{1}{2x}})=\log(\sqrt[x]{3}+27)$$

با اندکی تبدیل به‌دست می‌آید:

$$\log(4\times 3\times 3^{\frac{1}{2x}})=\log(3^x+27)$$

$$\Rightarrow 12\times 3^{\frac{1}{2x}}=3^x+27$$

$$\Rightarrow 3^{\frac{1}{x}}-12\times 3^{\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{2}}+27=0$$

اگر $3^{\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{2}}$ را y فرض کنیم، $3^{\frac{1}{x}}$ برابر y^2 می‌شود و به معادله‌ی درجه‌ی دوم زیر می‌رسیم:

$$y^2-12y+27=0 \Rightarrow y_1=9 \text{ و } y_2=3$$

پاسخ: $x_1=\frac{1}{4}$ و $x_2=\frac{1}{3}$.

۱۵. $2x^{\log x}+3x^{-\log x}=5$.

حل: داریم:

$$2x^{\log x}+\frac{3}{x^{\log x}}=5$$

که به صورت این معادله درمی‌آید:

$$2x^{2\log x}-5x^{\log x}+3=0$$

که نسبت به $x^{\log x}$ از درجه‌ی دوم است و بنابراین:

$$x^{\log x}=1 \text{ و } x^{\log x}=\frac{3}{2}$$

از حل معادله‌ی اول به‌دست می‌آید:

$$\log^2 x=0 \text{ و } x=1$$

و از حل معادله‌ی دوم:

$$\log^2 x=\log\frac{3}{2}\Rightarrow \log x=\pm\sqrt{\log\frac{3}{2}}$$

پاسخ: $x_1=1$ و $x_{2,3}=10^{\pm\sqrt{\frac{3}{2}}}$.

۱۶. $$\sqrt{\log_a \sqrt[4]{ax}+\log_x \sqrt[4]{ax}}+\sqrt{\log_a \sqrt[4]{\frac{x}{a}}+\log_x \sqrt[4]{\frac{x}{a}}}=a$$

حل: داریم:

$$\sqrt{\frac{1}{4}(1+\log_a x)+\frac{1}{4}(1+\log_x a)}+\sqrt{\frac{1}{4}(\log_a x-1)+\frac{1}{4}(\log_x a-1)}=a$$

روشن است که $\log_x a=\frac{1}{\log_a x}$ ؛ بنابراین:

$$\sqrt{\frac{1}{4}(1+\log_a x)+\frac{1}{4}(1+\frac{1}{\log_a x})}+\sqrt{\frac{1}{4}(\log_a x-1)+\frac{1}{4}(\frac{1}{\log_a x}-1)}=a$$

که می‌توان آن را چنین نوشت:

$$\sqrt{\frac{(1+\log_a x)^2}{4\log_a x}}+\sqrt{\frac{(\log_a x-1)^2}{4\log_a x}}=a \qquad (1)$$

در حالتی که $\log_a x>1$ باشد، $1<a$ است و معادله‌ی (۱) چنین می‌شود:

$$\log_a x=a\sqrt{\log_a x}\Rightarrow \log_a x=a^2\Rightarrow x=a^{a^2}$$

در حالت $0<\log_a x\le 1$ ، $1<a$ و معادله‌ی (۱) چنین می‌شود:

$$\frac{1+\log_a x}{2\sqrt{\log_a x}}-\frac{\log_a x-1}{2\sqrt{\log_a x}}=a$$

که از آن‌جا به‌دست می‌آید:

$$1=a\sqrt{\log_a x}\Rightarrow \log_a x=\frac{1}{a^2}\Rightarrow x=a^{\frac{1}{a^2}}$$

پاسخ: $x_1=a^{a^2}$ و $x_2=a^{\frac{1}{a^2}}$.

۱۷. $$\begin{cases}3^x-2^{y^2}=77\\ 3^{\frac{x}{2}}-2^{\frac{y^2}{2}}=7\end{cases}$$

حل: معادله‌ی اول دستگاه را به این صورت می‌نویسیم:

$$(3^{\frac{x}{2}})^2-(2^{\frac{y^2}{2}})^2=77$$

از تقسیم دو طرف این معادله بر دو طرف معادله‌ی دوم، به معادله‌ای می‌رسیم که با معادله‌ی دوم، این دستگاه را تشکیل می‌دهند:

$$\begin{cases}3^{\frac{x}{2}}+2^{\frac{y^2}{2}}=11\\ 3^{\frac{x}{2}}-2^{\frac{y^2}{2}}=7\end{cases}$$

پاسخ: $x_1=4$ ، $y_1=\sqrt{2}$ ، $x_2=4$ و $y_2=-\sqrt{2}$.

۱۸. $\begin{cases}x^y=y^x\\ x^m=y^n\end{cases}$ به شرط $m\ne n$.

حل: از معادله‌ی اول، x را به دست می‌آوریم:

$$x=y^{\frac{x}{y}}$$

که می‌توان آن را این‌طور نوشت:

$$x^m=y^{\frac{mx}{y}} \qquad (1)$$

از مقایسه‌ی این معادله با معادله‌ی دوم دستگاه به دست می‌آید:

$$y^n=y^{\frac{mx}{y}}$$

از این‌جا نتیجه می‌گیریم: یا $y=1$ و یا $\frac{mx}{y}=n$ ؛ یعنی:

$$y=\frac{mx}{n} \qquad (2)$$

برای $y=1$ ، به دست می‌آید $x=1$.

اگر مقدار y را از رابطه‌ی (۲) در معادله‌ی دوم دستگاه قرار دهیم:

$$x^m=x^n.(\frac{m}{n})^n$$

یا:

$$x^{m-n}=(\frac{m}{n})^n$$

که از آن‌جا، مقدار x به‌دست می‌آید:

پاسخ: $\begin{vmatrix}x_1=1\\ y_1=1\end{vmatrix}$ ، $\begin{vmatrix}x_2=(\frac{m}{n})^{\frac{n}{m-n}}\\ y_2=(\frac{m}{n})^{\frac{n}{m-n}}\end{vmatrix}$

۱۹. $\begin{cases} x^y = y^x \\ a^x = b^y \end{cases}$ با شرط $x>0$، $y>0$، $a>0$، $b>0$؛ $a\neq b$، $a\neq 1$ و $b\neq 1$.

راه‌حل اول: از دو طرف معادله‌ی دوم لگاریتم می‌گیریم:

$$x\log a = y\log b \qquad (۱)$$

فرض می‌کنیم: $x=b^t$ و $y=a^z$. در این صورت معادله‌ی اول به این صورت درمی‌آید:

$$b^{yt}=a^{xz}$$

چون با توجه به معادله‌ی دوم $b^y=a^x$ است، بنابراین:

$$a^{tx}=a^{xz}\Rightarrow tx=xz\Rightarrow x(t-z)=0$$

یعنی یا $x=0$ و یا $t=z$.

برای $x=0$، مقدار y مساوی صفر می‌شود که با شرط‌های مسئله نمی‌سازد. برای $z=t$ داریم:

$$x=b^z \text{ و } y=a^z \qquad (۲)$$

که اگر در رابطه‌ی (۱) به جای x و y قرار دهیم، به‌دست می‌آید:

$$b^z\log a=a^z\log b\Rightarrow \left(\frac{b}{a}\right)^z=\frac{\log b}{\log a}$$

و از آن‌جا:

$$z=\frac{\log\frac{\log b}{\log a}}{\log\frac{b}{a}}=\frac{\log\frac{\log b}{\log a}}{\log b}\cdot\frac{\log b}{\log\frac{b}{a}}$$

نسبت لگاریتم‌های دو عدد، به مبنایی که لگاریتم در آن‌ها محاسبه شده است، مربوط نیست، بنابراین:

$$b^{\frac{\log\frac{\log b}{\log a}}{\log b}}=b^{\frac{\log_b\frac{\log b}{\log a}}{\log_b b}}=\frac{\log b}{\log a};$$

$$\frac{\log\frac{\log b}{\log a}}{\log b}\cdot\frac{\log b}{\log\frac{b}{a}}=\left(\frac{\log b}{\log a}\right)^{\frac{\log b}{\log\frac{b}{a}}}$$

$$x=b^z=b$$

درنتیجه، با شرط $\frac{\log b}{\log a}>0$ داریم:

$$x=\left(\frac{\log b}{\log a}\right)^{\frac{\log b}{\log\frac{b}{a}}}$$

و به همین ترتیب:

$$y=\left(\frac{\log b}{\log a}\right)^{\frac{\log a}{\log\frac{b}{a}}}$$

ولی با شرط $\frac{\log b}{\log a}<0$، معادله بدون پاسخ است.

راه حل دوم: داریم:

$$y\log x=x\log y \qquad (۱)$$

$$x\log a=y\log b \qquad (۲)$$

از دو رابطه‌ی بالا، به این رابطه می‌رسیم:

$$\frac{\log y}{\log x}=\frac{\log a}{\log b} \qquad (۳)$$

اگر از رابطه‌ی (۲)، یک‌بار دیگر لگاریتم بگیریم (با فرض $\log a>0$ و $\log b>0$)، به‌دست می‌آید:

$$\log x-\log y=\log\log b-\log\log a \qquad (۴)$$

با حل دستگاه معادله‌های شامل (۳) و (۴)، مقدارهای $\log x$ و $\log y$ به‌دست می‌آید و پاسخ وقتی وجود دارد که $\frac{\log b}{\log a}>0$ باشد.

و اینک، یک مسأله می‌شود:

۲۰. الف) زاویه‌های B و C یک مثلث را با معلوم بودن زاویه‌ی A و رابطه‌ی $\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}=m$ به‌دست آورید $(m>0)$.

ب) از بخش الف نتیجه بگیرید: $\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\le\frac{1}{8}$.

حل: الف) زاویه‌های B و C جواب‌های این دستگاه هستند:

$$\begin{cases}\frac{B}{2}+\frac{C}{2}=\frac{\pi}{2}-\frac{A}{2}\\ \sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}=m\end{cases}$$

($B>0$، $C>0$). از معادله‌ی دوم دستگاه نتیجه می‌شود:

$$\cos\frac{B-C}{2}=2m+\sin\frac{A}{2}$$

α را زاویه‌ی حاده‌ای در نظر می‌گیریم که کسینوس آن برابر $2m+\sin\frac{A}{2}$ باشد؛ یعنی: $\frac{B-C}{2}=\alpha$. آن‌وقت:

$$C=\frac{\pi}{2}-\frac{A}{2}-\alpha;\quad B=\frac{\pi}{2}-\frac{A}{2}+\alpha$$

شرط این‌که α وجود داشته باشد، این است که داشته باشیم:

$$2m+\sin\frac{A}{2}\le 1$$

برای این که زاویه‌های B و C مثبت باشند، با فرض $B > C$ باید داشته باشیم:

$$\cos\alpha > \sin\frac{A}{2} \quad \text{یا} \quad \alpha < \frac{\pi}{2} - \frac{A}{2}$$

بنابراین، شرط وجود جواب عبارت است از:

$$\sin\frac{A}{2} < 2m + \sin\frac{A}{2} \le 1$$

از نابرابری سمت راست نتیجه می‌شود:

$$m \le \frac{1}{2}\left(1 - \sin\frac{A}{2}\right)$$

ب) از بحث بالا نتیجه می‌شود:

$$\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} \le \frac{1}{2}\left(1 - \sin\frac{A}{2}\right)$$

دو طرف نابرابری را در $\sin\frac{A}{2} > 0$ ضرب می‌کنیم:

$$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} \le \frac{1}{2}\left(1 - \sin\frac{A}{2}\right)\sin\frac{A}{2}$$

$\left(1 - \sin\frac{A}{2}\right)\sin\frac{A}{2}$، حاصل‌ضرب دو عامل مثبت به مجموع واحد است و حداکثر حاصل‌ضرب در حالت برابری آن‌ها به‌دست می‌آید؛ یعنی وقتی که $\sin\frac{A}{2} = \frac{1}{2}$ باشد. درنتیجه:

$$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} \le \frac{1}{8}$$

و این هم یک مسئله درباره‌ی محاسبه در مثلثات:

۲۱. حاصل این عبارت را محاسبه کنید:

$$f(\alpha) = \left(\sqrt{\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}} - \sqrt{\frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}}\right) \times \left(\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} - \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}\right)$$

حل: $|\sin\alpha| \le 1$ و $|\cos\alpha| \le 1$. بنابراین $1 \pm \sin\alpha$ و $1 \pm \cos\alpha$، یعنی مقدارهای زیر رادیکال‌ها، همیشه مثبت هستند و می‌توان عمل‌های مربوط به رادیکال‌ها را درباره‌ی آن‌ها انجام داد:

$$\sqrt{\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}} - \sqrt{\frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}} = \frac{(1-\sin\alpha)-(1+\sin\alpha)}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}} = \frac{2\sin\alpha}{|\cos\alpha|}$$

به همین ترتیب به دست می‌آید:

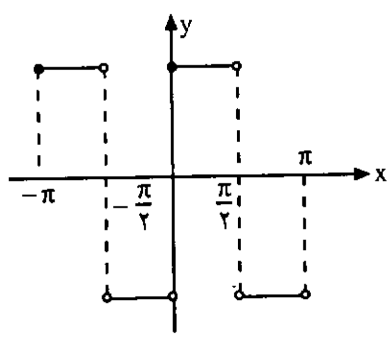
$$\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} - \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}} = \frac{2\cos\alpha}{|\sin\alpha|}$$

برای کمان‌هایی که انتهای آن‌ها در نیمه‌ی اول دایره باشد، $\sin\alpha$ مثبت و بنابراین $|\sin\alpha| = \sin\alpha$ است. و برای کمان‌هایی که انتهای آن‌ها در نیمه‌ی دوم دایره باشد، $\sin\alpha$ منفی و بنابراین $|\sin\alpha| = -\sin\alpha$ است.

همچنین، برای کمان‌هایی که انتهای آن‌ها در نیمه‌ی راست دایره باشد، $\cos\alpha$ مثبت و بنابراین $|\cos\alpha| = \cos\alpha$، و برای کمان‌هایی که انتهای آن‌ها در نیمه‌ی چپ دایره باشد، $\cos\alpha$ منفی و $|\cos\alpha| = -\cos\alpha$ است. بنابراین داریم:

$$f(\alpha)\begin{cases} 4 & \text{به شرطی که } 2k\pi < \alpha < 2k\pi + \frac{\pi}{2} \ \text{(مربع اول)} \\ -4 & \text{به شرطی که } 2k\pi + \frac{\pi}{2} < \alpha < (2k+1)\pi \ \text{(مربع دوم)} \\ 4 & \text{به شرطی که } (2k+1)\pi < \alpha < 3k\pi + \frac{3\pi}{4} \ \text{(مربع سوم)} \\ -4 & \text{به شرطی که } 2k\pi + \frac{3\pi}{2} < \alpha < (2k+2)\pi \ \text{(مربع چهارم)} \end{cases}$$

تابع $f(\alpha)$، تابعی متناوب با دوره‌ی تناوب π است. نمایش تغییر این تابع در فاصله‌ی از $-\pi$ تا π در این جا رسم شده است. نقطه‌های $\alpha = k\frac{\pi}{2}$، نقطه‌های ناپیوستگی تابع هستند:



مسائل و مباحثی پیرامون اعداد گویا و گنگ

$$\text{۰/۰۵۸۸۲۳۵۲۹۴۱۱۷۶۴۷} = \frac{۱}{۱۷}$$

$$۱۰X - X = ۹/۹۹۹۹... - ۰/۹۹۹۹...$$

● عنایت‌اله راستی‌زاده ـ دبیر ریاضی شیراز

اشاره

این مقاله در تکمیل بحث اعداد گویا و گنگ از کتاب ریاضیات سال اول متوسطه آمده است. با توجه به گستردگی و جالب بودن این بحث و سؤالات فراوان دانش‌آموزان علاقه‌مند، در این مقاله کوشش شده است، به طرح چند بحث دیگر همراه با حل تعدادی مسئله بپردازیم. لذا از ذکر تعریف‌ها و ویژگی‌های مقدماتی اعداد گویا و گنگ صرف نظر و بیشتر به مسائلی توجه کرده‌ایم که در کتاب درسی به وضوح به آن‌ها پرداخته نشده است.

۱. دستوری کلی برای یافتن هر تعداد عدد گویا بین دو عدد گویای مفروض

مجموعه‌ی اعداد گویا را به این صورت تعریف می‌کنیم:

$$Q = \left\{ \frac{m}{n} | m \in z, n \in N : (m,n) = ۱ \right\}$$

دو عدد گویای $\frac{a}{b}$ و $\frac{c}{d}$ را در نظر می‌گیریم. با فرض $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$، به‌راحتی دیده می‌شود که: $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$. از آن‌جا که

$\frac{a}{b}=\frac{na}{nb}$، پس: $\frac{na}{nb}<\frac{c}{d}$ و در نتیجه: $\frac{a}{b}<\frac{na+c}{nb+d}<\frac{c}{d}$ که $n\in N$.

به کمک دستور فوق می‌توانیم هر تعداد عدد گویا که بخواهیم، بین دو عدد گویای مفروض بیابیم. هم‌چنین درباره‌ی وضع نسبی این اعداد می‌توان ثابت کرد که:

$$\frac{a}{b}<\frac{na+c}{nb+d}<\cdots<\frac{3a+c}{3d+d}<\frac{2a+c}{2b+d}<\frac{a+c}{b+d}<\frac{c}{d}$$

به این منظور فرض کنیم: $n'<n''$. ثابت می‌کنیم: $\frac{n''a+c}{n''b+d}<\frac{n'a+c}{n'b+d}$ که با توجه به مثبت بودن مخرج‌ها خواهیم داشت:

$$n''n'ab+n''ab+n'bc+cd<n''n'ab+n''bc+n'ab+cd$$

$$\Leftrightarrow (n''-n')ad<(n''-n)bc \Leftrightarrow ac<bc \Leftrightarrow \frac{a}{b}<\frac{c}{d}$$

۲. نوشتن عدد اعشاری دوره‌ای نامتناهی به صورت متعارفی

نشان دهید که هر عدد اعشاری دوره‌ای نامتناهی را می‌توان به‌صورت متعارفی نوشت.

حل: هر عدد اعشاری متناوب را می‌توانیم به این صورت بنویسیم:

$x=0/a_1a_2\cdots a_s\overline{b_1b_2\cdots b_t}$

که در آن: a_1، a_2، ... و a_s، تعداد s رقم متوالی در قسمت غیرتکراری، و b_1، b_2، ... و b_t، تعداد t رقم در قسمت تکراری را نشان می‌دهند. اگر ابتدا x را در 10^s و سپس در 10^{s+t} ضرب کنیم و بعد عمل تفریق را انجام دهیم، به‌دست می‌آوریم:

$$10^s\times x=a_1a_2\cdots a_s+0/\overline{b_1b_2\cdots b_t}$$

$$10^{s+t}\times x=a_1a_2\cdots a_sb_1b_2\cdots b_t+0/\overline{b_1b_2\cdots b_t}$$

و:

$$(10^{s+t}-10^s)x=a_1a_2\cdots a_sb_1b_2\cdots b_t-a_1a_2\cdots a_s$$

بنابراین:

$$x=\frac{a_1a_2\cdots a_sb_1b_2\cdots b_t-a_1a_2\cdots a_s}{10^{s+t}-10^s}$$

۳. عددهای گویای دارای دو نمایش اعشاری متفاوت

بین عددهای گویا مانند $\frac{a}{b}$، کدام یک دارای دو نمایش اعشاری اساساً متفاوت هستند؟

حل: پاسخ این است که: عددهای گویای $\frac{a}{b}$ (به ساده‌ترین صورت) با این ویژگی که b بر هیچ عدد اول دیگری غیر از ۲ و ۵ بخش‌پذیر نباشد و $a\neq 0$. این حقیقت از آن‌جا ناشی می‌شود که بین اعداد اعشاری پایان‌دار ۱ و عدد اعشاری بی‌پایان ...۰/۹۹۹۹، تساوی برقرار است. اگر هر دو طرف تساوی $0/3333...=\frac{1}{3}$ را در ۳ضرب کنیم، نتیجه‌ی به‌ظاهر عجیب ۱=...۰/۹۹۹۹ را به‌دست می‌آوریم. از دید دیگری نیز می‌توان به تساوی اخیر رسید.

فرض کنیم: $x=0/9999...$، پس: $10x=9/9999...$. بنابراین:

$$10x-x=9/9999...-0/9999...$$

در نتیجه: $9x=9$ و $x=1$.

از این نتیجه می‌توان برای برگرداندن هر عدد اعشاری پایان‌دار به صورت بی‌پایان استفاده کرد. مثلاً:

$21/1=21/09999...$ $\quad 6/81=6/80\overline{9}$ $\quad 0/43=0/42\overline{9}$

تذکر این مطلب ضروری است که علاوه بر نوشتن مثلاً ۰/۴۳ به‌صورت ...۰/۴۲۹۹۹۹، می‌توانیم این عدد را به صورت‌های زیر نیز بنویسیم:

$0/430\ ,\ 0/4300\ ,\ 0/43000\ ,\ 0/430000...$

با وجود این، تفاوت این‌ها با خود ۰/۴۳ آن‌قدر جزئی است که ما آن‌ها را در ردیف نمایش‌های اساساً متفاوت نمی‌گذاریم. وقتی به‌صورت اعشاری و بی‌پایان عددی مانند ۰/۴۳ اشاره می‌کنیم، مقصودمان ...۰/۴۲۹۹۹ است و نه ...۰/۴۳۰۰۰.

گذری به تاریخ!

کارل فردریک گاوس، کسرهای اعشاری متناوب را مورد مطالعه قرار داد. او علی‌رغم نبوغ سرشار برای جست‌وجوهای آزمایشی خود، از سنگینی محاسبه‌ها و کار عظیم با عددها روی‌گردان نشد و مثلاً جدول کاملی از نمایش اعشاری هزار عدد گویای ۱ و $\frac{1}{2}$ و $\frac{1}{3}$ و... و $\frac{1}{1000}$ را تشکیل داد. (بعضی از این اعداد دوره‌ی گردشی به طول چند صد رقم دارند!) و بالاخره نظریه‌ی نسبتاً کاملی در مورد کسرهای اعشاری متناوب ارائه داد.

۴. ویژگی جالب بعضی از اعداد اعشاری دوره‌ای

به بسط اعشاری کسرهای زیر توجه کنید:

$\frac{1}{7}=0/\overline{142857}$ $\qquad 1+4+2+8+5+7=27$

$\frac{1}{11}=0/\overline{09}$ $\qquad 0+9=9$

$\frac{1}{271}=0/\overline{00369}$ $\qquad 0+0+3+6+9=18$

$\frac{1}{37}=0/\overline{027}$ $\qquad 0+2+7=9$

همان‌طور که دیده می‌شود، مجموع ارقام دوره‌ی تناوب در هر حالت بر ۹ بخش‌پذیر است. این مطلب اتفاقی نیست! ثابت می‌کنیم اگر n بر ۲، ۳ و ۵ بخش‌پذیر نباشد، مجموع ارقام دوره‌ی تناوب

کسر $\frac{1}{n}$ بر ۹ بخش‌پذیر خواهد بود.

خواهیم داشت:

$$\frac{1}{n} = 0/\overline{a_1a_2\cdots a_t}$$

$$\Rightarrow 10^t \times \frac{1}{n} = a_1a_2\cdots a_t + 0/\overline{a_1a_2\cdots a_t}$$

$$\Rightarrow \frac{10^t}{n} - \frac{1}{n} = a_1a_2\cdots a_t \Rightarrow (10^t - 1) = n(a_1a_2\cdots a_t)$$

اما $10^t - 1$ عددی مضرب ۹ است، پس: $n(a_1a_2\cdots a_t) = 9k$. چون n بر ۳ بخش‌پذیر نیست، پس n بر ۹ بخش‌پذیر نخواهد بود و در نتیجه: $a_1a_2\cdots a_t = 9k'$. اما عددی بر ۹ بخش‌پذیر است که مجموع ارقامش بر ۹ بخش‌پذیر باشد. لذا: $a_1 + a_2 + \cdots + a_t$. یعنی مجموع ارقام دوره‌ی تناوب بر ۹ بخش‌پذیر است.

۵. یک ویژگی جالب دیگر بعضی از اعداد اعشاری دوره‌ای

این مطلب از کتاب «ابتکارهایی در ریاضیات»، تألیف راس هانسبرگر انتخاب شده است. اعداد گویایی با مخرج اول را بررسی می‌کنیم که طول دوره‌ی بسط‌های اعشاری آن‌ها زوج است. چند مثال از این گونه اعداد عبارت‌اند از:

$$\frac{1}{7} = 0/\overline{142857}$$

$$\frac{1}{13} = 0/\overline{076923}$$

$$\frac{1}{17} = 0/\overline{0588235294117647}$$

$$\frac{1}{19} = 0/\overline{052631578947368421}$$

در اولین نگاه، دوره‌هایی که در سمت راست دیده می‌شوند، چندان جالب به‌نظر نمی‌رسند. ولی با نگاه دقیق‌تر معلوم می‌شود، همه از این ویژگی برخوردارند که مجموع هر دو رقم از آن‌ها که به اندازه‌ی نصف طول دوره از هم فاصله دارند، ۹ است. اگر در این مثال‌ها کوتاه‌ترین دوره‌ها را در نظر بگیریم و به دو قسمت تقسیم کنیم و این دو قسمت را، به صورت دو عدد معمولی، با هم جمع کنیم، در $\frac{1}{7}$ داریم: $\frac{142+857}{999}$ ، در $\frac{1}{13}$ داریم: $\frac{076+923}{999}$ ، در $\frac{1}{17}$ داریم: $\frac{05882352+94117647}{99999999}$ و در $\frac{1}{19}$ داریم: $\frac{052631578+947368421}{999999999}$

آیا این مثال‌ها از الگویی کلی پیروی می‌کنند؟ جواب «مثبت» است. اگر بسط اعشاری عدد گویای $\frac{n}{p}$ که در آن p عدد اولی مخالف ۲ و ۵ است، یک عدد اعشاری دوره‌ای، دارای کوتاه‌ترین دوره با تعداد زوجی از ارقام باشد، آن‌گاه همه‌ی رقم‌های مجموع دو نیمه‌ی آن دوره، که به صورت اعداد معمولی در نظر گرفته شوند، ۹ است. اثبات این مطلب از حوصله‌ی مقاله‌ی حاضر خارج است و علاقه‌مندان را به مرجع ذکر شده ارجاع می‌دهیم.

۶. کسرهای تحویل‌ناپذیر (ساده‌نشدنی)

ثابت کنید کسر $\frac{5n+2}{3n+1}$ به‌ازای همه‌ی مقادیر صحیح n، یک کسر تحویل‌ناپذیر (ساده‌نشدنی) است.

حل: باید نشان دهیم بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک صورت و مخرج کسر برابر یک است، یعنی نشان دهیم:

$$(5n+2, 3n+1) = 1$$

یکی از روش‌های یافتن ب.م.م روش نردبانی (روش تقسیمات متوالی) است. در این روش آخرین باقی‌مانده‌ی غیرصفر، همان ب.م.م است.

$$5n+2 = (1)(3n+1) + (2n+1)$$
$$3n+1 = (1)(2n+1) + (n)$$
$$2n+1 = (2)(n) + 1$$
$$n = n(1) + 0$$

لذا $5n+2$ و $3n+1$ نسبت به‌هم اول‌اند.

روش دوم استفاده از این قضیه است که $(a,b) = 1$ اگر و تنها اگر عددهای صحیح r و s به گونه‌ای یافت شوند که $ra + sb = 1$. در این مسئله داریم:

$$3(5n+2) + (-5)(3n+1) = 1$$

۷. کسرهای اعشاری تحقیقی

ثابت کنید کسر $\frac{1}{7a+1}$ به‌ازای بی‌شمار عدد طبیعی a، کسر اعشاری تحقیقی است.

حل: با توجه به اتحاد زیر داریم:

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + b^{n-1})$$
$$8^k - 1 = (8-1)(8^{k-1} + 8^{k-2} + \cdots + 1)$$

پس:

$$8^k - 1 = 7t$$

یعنی: $7t + 1 = 8^k$ و یا $7t + 1 = 2^{3k}$.

بنابراین، کسر $\frac{1}{7a+1}$ به‌ازای بی‌شمار عدد طبیعی a که تساوی $7a + 1 = 2^{3k}$ برقرار شود، یک کسر اعشاری تحقیقی است (چون $k \in N$ ، پس بی‌شمار a با این ویژگی می‌توان یافت).

گذری به تاریخ!

$\sqrt{2}$ گویا نیست. این واقعیت عملاً در حدود ۵۰۰ سال قبل از میلاد مسیح و احتمالاً توسط خود فیثاغورس اثبات شده است. در

تاریخ آمده است که فیثاغورس گنگ بودن $\sqrt{2}$ را به عنوان ناخوشایندترین واقعیت در اعتقادات فلسفی تلقی می کرد. زیرا نشان می داد، جهان به آن سادگی و هماهنگی که او می خواهد، نیست. گمان می رود او مقرر کرده بود که این واقعیت بین اعضای گروه فلسفی وی مخفی بماند و روایت است که دست کم یکی از دانشجویانش به علت پخش این خبر ناخوشایند کشته شد!

۸. گنگ بودن $\sqrt{6}$

فرض کنیم $\frac{a}{b}=\sqrt{6}$ که در آن $(a,b)=1$. با مجذور کردن به دست می آوریم:

$$6=\frac{a^2}{b^2}\Rightarrow a^2=6b^2$$

$6b^2$ زوج است، بنابراین a^2 زوج است، پس a زوج است. فرض کنیم $a=2k$، پس:

$$a^2=4k^2\Rightarrow 4k^2=6b^2\Rightarrow 2k^2=3b^2$$

از این تساوی برمی آید که $3b^2$ زوج است. پس b^2 زوج است و در نتیجه b زوج است. ولی فرض شده بود که a و b هر دو زوج نباشند، بنابراین $\sqrt{6}$ گنگ است.

۹. گنگ بودن $\sqrt{3}+\sqrt{2}$

روش اول: در این روش از گنگ بودن $\sqrt{6}$ استفاده می کنیم. فرض کنیم $\sqrt{3}+\sqrt{2}$ گویا، مثلاً r باشد. بنابراین:

$$\sqrt{2}+\sqrt{3}=r$$

در این صورت خواهیم داشت:

$$(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2=r^2\Rightarrow 2\sqrt{6}=r^2-5\Rightarrow \sqrt{6}=\frac{r^2-5}{2}$$

اما عددهای گویا نسبت به چهار عمل جمع، تفریق، ضرب و تقسیم (به جز تقسیم بر صفر) بسته هستند و لذا $\frac{(r^2-5)}{2}$ یک عدد گویاست. ولی $\sqrt{6}$ گنگ است و به تناقض می رسیم.

روش دوم: اگر $\sqrt{3}+\sqrt{2}$ گویا باشد، با توجه به معادله ی $\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=\sqrt{2}+\sqrt{3}$، باید $\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ گویا باشد. معکوس هر عدد گویای غیرصفر عددی است گویا، بنابراین $\sqrt{3}-\sqrt{2}$ گویا خواهد شد. اعداد گویا نسبت به جمع بسته هستند، لذا $2\sqrt{3}=(\sqrt{2}+\sqrt{3})+(\sqrt{2}-\sqrt{3})$ باید گویا باشد. اما $\sqrt{3}$ گویا نیست و این یک تناقض است. بنابراین می توانیم نتیجه بگیریم که $\sqrt{3}+\sqrt{2}$ گنگ است.



تفریح اندیشه

● حسین نامی ساعی

ارثیه ی مرد عرب*

مرد عربی به سه فرزندش وصیت کرده بود که پس از مرگ او، ۱۷ شترش را میان خودشان طوری تقسیم کنند که به اولی $\frac{1}{2}$، به دومی $\frac{1}{3}$ و به سومی $\frac{1}{9}$ شترها برسد. چه طور این کار ممکن است؟ آیا به نظر شما این محال نیست؟!؛ چرا که نصف یا $\frac{1}{2}$ هفده شتر می شود ۸/۵ شتر، و نصف یک شتر هم که جان ندارد و به درد نمی خورد! شما برای تقسیم این ارثیه چه راه حلی به فکرتان می رسد؟

پاسخ

حل این معما بسیار آسان است. یک شتر از دوست مرد عرب قرض می کنیم تا حاصل جمع شترها به هجده برسد. به این ترتیب، $\frac{1}{2}$ هجده شتر می شود نُه شتر که به پسر اولی می دهیم. $\frac{1}{3}$ هجده شتر می شود ۶ شتر که به پسر دومی می دهیم. $\frac{1}{9}$ هجده شتر هم می شود ۲ شتر که به پسر سومی می دهیم. بنابراین، حاصل جمع ۹ و ۶ و ۲ می شود ۱۷. یک شتر باقی مانده را هم به صاحب آن پس می دهیم!

* این معما و حل آن منسوب به حضرت علی(ع) است.

ادب ریاضی

درباره ی «ابوریحان» آمده است که: آن گاه که بیرونی کتاب «قانون مسعودی» را تصنیف کرد، سلطان، او را پیلواری سیم جایزه فرستاد و وی آن مال را به خزانه بازگردانید و گفت: «من از آن بی نیازم؛ چه عمری را در قناعت گذارده ام و دیگر بار مرا ترک خوی و عادت سزاوار نیست...» دست و چشم و فکر او هیچ گاه از عمل بازنماند و دائم در کار بود، مگر به نوروز و مهرگان یا برای تهیه ی احتیاجات معاش...

یک اتحاد و کاربردهای آن



• حسین کریمی

این اتحاد را ثابت کنید:

برای هر سه بردار دلخواه a، b و c داریم:

$$(a\times b).(a\times c)+(a.b)(a.c)=|a|^2(b.c)$$

حل: با توجه به $|u+v|^2-|u-v|^2=4u.v$ داریم:

$$(a\times b).(a\times c)=\frac{1}{4}\Big[|(a\times b)+(a\times c)|^2-|(a\times b)-(a\times c)|^2\Big]$$

$$=\frac{1}{4}\Big[|a\times(b+c)|^2-|a\times(b-c)|^2\Big]$$

با توجه به $|u\times v|^2=|u|^2|v|^2-(u.v)^2$ داریم:

$$=\frac{1}{4}\Big[|a|^2|b+c|^2-(a.(b+c))^2-|a|^2|b-c|^2+(a.(b-c))^2\Big]$$

$$=\frac{1}{4}\Big[|a|^2(|b+c|^2-|b-c|^2)-((a.b)+(a.c))^2+((a.b)-(a.c))^2\Big]$$

$$=\frac{1}{4}\Big[|a|^2(4b.c)-4(a.b)(a.c)\Big]=|a|^2(b.c)-(a.b)(a.c)$$

$$\Rightarrow (a\times b).(a\times c)+(a.b)(a.c)=|a|^2(b.c)$$

مسئله‌ی۱: با فرض $|a|=|b|=|c|=1$ و $\angle(a,b)=\angle(a,c)=60^\circ$ و $b\perp c$ ، مطلوب است، حاصل:

$$(a\times b).(a\times c)$$

حل:

$$a.b=1\times1\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2} \text{ و } a.c=1\times1\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2} \text{ و } b.c=0$$

$$\Rightarrow (a\times b).(a\times c)=|a|^2(b.c)-(a.b)(a.c)$$

$$=(1\times0)-(\frac{1}{2})(\frac{1}{2})=-\frac{1}{4}$$

مسئله‌ی۲: با فرض $|a|=2$ و $|b|=3$ و $|c|=4$ و $\angle(a,b)=30^\circ$ و $\angle(a,c)=45^\circ$ و $\angle(b,c)=60^\circ$ ، مطلوب است $(a\times b).(a\times c)$.

حل:

$$a.b=2\times3\times\frac{\sqrt{3}}{2}=3\sqrt{3} \text{ و } a.c=2\times4\times\frac{\sqrt{2}}{2}=4\sqrt{2} \text{ و}$$

$$b.c=3\times4\times\frac{1}{2}=6$$

$$\Rightarrow (a\times b).(a\times c)=|a|^2(b.c)-(a.b)(a.c)$$

$$=(4\times6)-(3\sqrt{3})(4\sqrt{2})=12(2-\sqrt{6})$$

مسئله‌ی۳: با فرض آن‌که بردار b بر هر دو بردار غیرموازی a و c عمود باشد، ثابت کنید دو بردار $(a\times b)$ و $(a\times c)$ بر هم عمودند.

حل:

$$a.b=0\ ,\ \ b.c=0$$

$$\Rightarrow (a\times b).(a\times c)=|a|^2(b.c)-(a.b)(a.c)$$

$$=(|a|^2\times0)-(0)(a.c)$$

$$\Rightarrow (a\times b).(a\times c)=0\Rightarrow (a\times b)\perp(a\times c)$$

مسئله‌ی۴: با فرض $\angle(a,b)=\alpha$ ، $\angle(a,c)=\beta$ ، $\angle(b,c)=\gamma$ و $\angle((a\times b),(a\times c))=\theta$ ثابت کنید $\sin\alpha\sin\beta\cos\theta+\cos\alpha\cos\beta=\cos\gamma$.

حل:

$$(a\times b).(a\times c)+(a.b)(a.c)=|a|^{۲}(b.c)$$
$$\Rightarrow |a\times b||a\times c|\cos\theta+(|a||b|\cos\alpha)(|a||c|\cos\beta)$$
$$=|a|^{۲}(|b||c|\cos\gamma)$$
$$\Rightarrow |a|^{۲}|b||c|\sin\alpha\sin\beta\cos\theta+|a|^{۲}|b||c|\cos\alpha\cos\beta$$
$$=|a|^{۲}|b||c|\cos\gamma$$
$$\Rightarrow \sin\alpha\sin\beta\cos\theta+\cos\alpha\cos\beta=\cos\gamma$$

مسئله‌ی۵: با فرض $\angle(a,b)=۳۰^\circ$ ، $\angle(a,c)=۴۵^\circ$ و $\angle(b,c)=۶۰^\circ$ ، اندازه‌ی زاویه‌ی بین دو بردار $(a\times b)$ و $(a\times c)$ را تعیین کنید.

حل: فرض کنیم زاویه‌ی بین دو بردار $(a\times b)$ و $(a\times c)$ به اندازه‌ی θ باشد، پس داریم:

$$\sin\frac{\pi}{۶}\times\sin\frac{\pi}{۴}\times\cos\theta+\cos\frac{\pi}{۶}\times\cos\frac{\pi}{۴}=\cos\frac{\pi}{۳}$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{۲}\times\frac{\sqrt{۲}}{۲}\times\cos\theta+\frac{\sqrt{۳}}{۲}\times\frac{\sqrt{۲}}{۲}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow \cos\theta=\sqrt{۲}-\sqrt{۳}$$

$$\Rightarrow \theta=\mathrm{Arc}\cos(\sqrt{۲}-\sqrt{۳})$$

مسئله‌ی۶: با فرض این‌که دو بردار b و c عمود بر هم باشند و بردار a با آن دو بردار زوایای α و β را ساخته باشد. ثابت کنید $\cos\theta=-\cot g\alpha\times\cot g\beta$ که در آن θ اندازه‌ی زاویه بین دو بردار $(a\times b)$ و $(a\times c)$ است.

حل:

$$\sin\alpha\sin\beta\cos\theta+\cos\alpha\cos\beta=\cos\gamma$$

$$\Rightarrow \sin\alpha\times\sin\beta\cos\theta+\cos\alpha\cos\beta=۰\Rightarrow \cos\theta=-\frac{\cos\alpha\cos\beta}{\sin\alpha\sin\beta}$$

$$\Rightarrow \cos\theta=-\cot g\alpha\cot g\beta$$

مسئله‌ی۷: با فرض این‌که دو بردار b و c عمود بر هم باشند و بردار a با آن دو بردار زوایای حاده‌ی α و β را ساخته باشد، ثابت کنید $\alpha+\beta\geq\frac{\pi}{۲}$.

حل: فرض کنیم چنین نباشد، یعنی $\alpha+\beta<\frac{\pi}{۲}$. پس $\alpha<\frac{\pi}{۲}-\beta$ و درنتیجه داریم: $tg\alpha<\cot g\beta$

$$\Rightarrow -tg\alpha>-\cot g\beta\Rightarrow -tg\alpha\cot g\alpha>-\cot g\alpha\cot g\beta$$
$$\Rightarrow -۱>\cos\theta$$

و این غیرممکن است. پس فرض خلف، باطل است و داریم $\alpha+\beta\geq\frac{\pi}{۲}$.

تفریح اندیشه

حمید بهادری
دبیر ریاضی خمین

کاربرد دنباله‌ی فیبوناتچی

اگر $f(x)=\frac{۱}{x+۱}$ ، آن‌گاه $f^n(x)$ را محاسبه کنید در این جا منظور از $f^n(x)$ عبارت است از n مرتبه ترکیب f با خودش. آیا $\lim_{n\to\infty}f^n(x)$ وجود دارد این حد را در صورت وجود محاسبه کنید.

$$f^{۲}(x)=f(f(x))=f(\frac{۱}{x+۱})=\frac{۱}{\frac{۱}{x+۱}+۱}=\frac{x+۱}{x+۲}$$

$$f^{۳}(x)=f(f^{۲}(x))=f(\frac{x+۱}{x+۲})=\frac{۱}{\frac{x+۱}{x+۲}+۱}=\frac{x+۲}{۲x+۳}$$

$$f^{۴}(x)=f(f^{۳}(x))=f(\frac{x+۲}{۲x+۳})=\frac{۱}{\frac{x+۲}{۲x+۳}+۱}=\frac{۲x+۳}{۳x+۵}$$

با استقراء روی n ثابت می‌شود $f^n(x)=\frac{u_{n-۱}x+u_n}{u_nx+u_{n+۱}}$ که $\{un\}_{n=۰}^{n=\infty}$ دنباله فیبوناتچی است.

یعنی $۱,۱,۲,۳,۵,۸,۱۳,۲۱,۳۴,۵۵,\cdots$ که $u_۱=۱$ و $u_۲=۱$ و $u_{n+۱}=u_n+u_{n-۱}$ برای $n>۲$.

می‌دانیم که هرچه مرتبه جملات دنباله فیبوناتچی بالاتر می‌رود نسبت بین دو جمله دنباله به عدد $\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}$ نزدیک و نزدیک‌تر می‌شود.

یعنی: $\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+۱}}{u_n}=\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}=\alpha$ در این صورت می‌توان نوشت:

$$\lim_{n\to\infty}f^n(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{u_{n-۱}}{u_n}x+۱}{x+\frac{u_{n+۱}}{u_n}}=\frac{\frac{۱}{\alpha}x+۱}{x+\alpha}=\frac{۱}{\alpha}$$



استدلال های ریاضی

(قسمت ۲)

• میرشهرام صدر

mir_sadr@ yahoo.com

برای دانش‌آموزان پایه‌ی سوم متوسطه

اشاره

در شماره‌ی قبل راجع به درک شهودی، استدلال های استقرایی و قیاسی و محدودیت های آن‌ها صحبت کردیم، اینک در ادامه‌ی آن، استدلال های دیگر ریاضی را مطرح می‌کنیم.

استدلال استنتاجی

گزاره: جمله‌ای خبری است که ممکن است درست یا نادرست باشد؛ هرچند درستی یا نادرستی آن هنوز برای ما معلوم نشده باشد. یک گزاره نمی‌تواند هم درست و هم نادرست باشد.

مثال: «۷ عددی فرد است» و «$\sqrt{2}$ عددی گنگ است»، نمونه‌هایی از گزاره‌های درست هستند.

مثال: «۳- عددی طبیعی است» و «۱۴ عددی اول است»، نمونه‌هایی از گزاره‌های نادرست هستند.

گزاره‌ی شرطی: فرض کنیم p و q دو گزاره باشند. گزاره‌ی «اگر p آن‌گاه q» را یک گزاره‌ی شرطی می‌گوییم و آن را با نماد «$p \Rightarrow q$» نمایش می‌دهیم. در گزاره‌ی شرطی $p \Rightarrow q$ ، p را فرض و q را نتیجه یا حکم می‌گوییم.

مثال: گزاره‌ی «اگر x و y دو عدد طبیعی باشند، آن‌گاه $x+y$ عددی طبیعی است»، یک گزاره‌ی شرطی است و می‌توان آن را به زبان نمادهای ریاضی نوشت:

گزاره‌ی p: x و y دو عدد طبیعی هستند. $(p: x, y \in \mathbb{N})$

گزاره‌ی q: $x+y$ عددی طبیعی است. $(q: x+y \in \mathbb{N})$

گزاره‌ی $(p \Rightarrow q)$: $x, y \in \mathbb{N} \Rightarrow x+y \in \mathbb{N}$

مثال: گزاره‌ی «اگر باران ببارد، آن‌گاه زمین مرطوب می‌شود.» یک گزاره‌ی شرطی است و می‌توان آن را به زبان نمادهای ریاضی نوشت:

گزاره‌ی p: اگر باران ببارد.

گزاره‌ی q: زمین مرطوب می‌شود.

گزاره‌ی $(p \Rightarrow q)$: اگر باران ببارد (p)، آن‌گاه زمین مرطوب می‌شود (q).

مثال: گزاره‌ی «خطوط موازی هیچ‌گاه یکدیگر را قطع نمی‌کنند» معادل گزاره‌ی «اگر خطوطی موازی باشند، آن‌گاه یکدیگر را قطع نمی‌کنند» است و به زبان نمادهای ریاضی می‌توان نوشت:

گزاره‌ی $(p \Rightarrow q)$:

اگر خطوطی موازی باشند (p)، آن‌گاه یکدیگر را قطع نمی‌کنند (q).

تعریف استدلال استنتاجی: هرگاه گزاره‌ی q از درستی گزاره‌های p_1 و p_2 و... و p_n نتیجه شود. به این نوع نتیجه‌گیری از گزاره‌ها یا حقایقی که درستی آن‌ها را پذیرفته‌ایم، **استدلال استنتاجی** می‌گوییم. به بیان دیگر، روش نتیجه‌گیری گزاره‌ی q با استفاده از حقایق یا فرض‌های درست p_1 و p_2 و... و p_n را استدلال استنتاجی می‌نامیم. یکی از قانون‌های مهم استنتاج، قانون انتزاع است.

قانون انتزاع: اگر گزاره‌های $(p \Rightarrow q)$ و p درست باشند، آن‌گاه گزاره‌ی q درست است و به زبان نمادهای ریاضی می‌توان نوشت:

$$[(p \Rightarrow q) \text{ و } p] \Rightarrow q$$

مثال: نتیجه‌ی استنتاج زیر را بنویسید.

(اگر m عددی فرد باشد، آن‌گاه m مضرب ۲ نیست.) و (m عددی فرد است).

حل: با فرض این‌که p و q را به صورت زیر در نظر بگیریم:

p: m عددی فرد باشد. ; q: m مضرب ۲ نیست.

ملاحظه می‌کنیم که استنتاج به صورت p و $(p \Rightarrow q)$ است که طبق قانون انتزاع نتیجه q خواهد بود.

نتیجه: m مضرب ۲ نیست.

فعالیت: با استفاده از استدلال استنتاجی نتایج زیر را کامل کنید:

الف) خطوط موازی هیچ‌گاه یکدیگر را قطع نمی‌کنند. خطوط L_1 و L_2 موازی هستند.

نتیجه: ☐

ب) اگر مثلثی متساوی‌الساقین باشد، آن‌گاه دو زاویه‌ی مجاور به قاعده برابرند و مثلث ABC متساوی‌الساقین است.

نتیجه: ☐

مثال: آیا نتایج زیر، از عبارت‌های داده شده حاصل می‌شوند؟ جواب خود را توضیح دهید.

الف) تمام افرادی که در بانک کار می‌کنند، تحصیل کرده هستند. پدر محمد در بانک کار می‌کند.

نتیجه: پدر محمد تحصیل کرده است.

حل: درست است، زیرا می‌توان عبارت بالا را به صورت زیر نوشت:

(اگر فردی در بانک کار کند (p)، آن‌گاه تحصیل کرده است (q)) و (پدر محمد در بانک کار می‌کند (p))

با زبان ریاضی، عبارت بالا به صورت p و $(p \Rightarrow q)$ است که طبق قانون انتزاع، نتیجه‌ی q است؛ یعنی:

نتیجه: پدر محمد تحصیل کرده است.

توجه: در این مثال، پدر محمد یکی از افرادی است که در بانک کار می‌کند، به همین دلیل گزاره‌ی «پدر محمد در بانک کار می‌کند» را همان p در نظر گرفتیم.

ب) بعضی از کارمندان بانک دارای مدرک فوق‌لیسانس هستند. پدر حسن در بانک کار می‌کند.

نتیجه: پدر حسن دارای مدرک فوق‌لیسانس است.

حل: نادرست است، زیرا ممکن است پدر حسن جزو کارمندانی نباشد که دارای مدرک فوق‌لیسانس هستند.

تذکر: به کلمه‌های «هر» در قسمت الف و «بعضی» در قسمت ب این مثال توجه کنید.

مثال: ثابت کنید که اگر x و y دو عدد مخالف با صفر باشند و $x + y = 1$، آن‌گاه $(1-\frac{1}{x})(1-\frac{1}{y}) = 1$.

حل:

$$x + y = 1 \Rightarrow y = 1 - x$$

$$(1-\frac{1}{x})(1-\frac{1}{y}) = (1-\frac{1}{x})(1-\frac{1}{1-x})$$

$$= (\frac{x-1}{x})(\frac{1-x-1}{1-x}) = 1$$

مثال: ثابت کنید که عدد چهار رقمی $\overline{abcd}$ بر ۳ بخش‌پذیر است، هرگاه $(a+b+c+d)$ بر ۳ بخش‌پذیر باشد.

حل: ابتدا عدد $\overline{abcd}$ را به صورت گسترده می‌نویسیم. در این عدد d رقم یکان، c رقم دهگان، b رقم صدگان و a رقم هزارگان است. بنابراین داریم:

$$\begin{aligned}\overline{abcd} &= 1000a + 100b + 10c + d\\ &= (999a + a) + (99b + b) + (9c + c) + d\\ &= (999a + 99b + 9c) + (a + b + c + d)\\ &= 3(333a + 33b + 3c) + (a + b + c + d)\end{aligned}$$

چون عبارت $3(333a + 33b + 3c)$، مضرب ۳ است، پس بر ۳ بخش‌پذیر خواهد بود. بنابراین، برای آن‌که $\overline{abcd}$ بر ۳ بخش‌پذیر باشد، باید $(a+b+c+d)$ بر ۳ بخش‌پذیر باشد.

مثال: ثابت کنید عدد پنج رقمی $\overline{abcde}$ بر ۴ بخش‌پذیر است، هرگاه عدد دو رقمی $\overline{de}$ بر ۴ بخش‌پذیر باشد.

حل: ابتدا عدد $\overline{abcde}$ را به صورت گسترده می‌نویسیم:

$$\overline{abcde} = 10000a + 1000b + 100c + 10d + e$$
$$= 4\times 2500a + 4\times 250b + 4\times 25c + (10d + e)$$
$$= 4(2500a + 250b + 25c) + \overline{de}$$

چون عبارت $4(2500a + 250b + 25c)$، مضرب ۴ است، پس بر ۴ بخش‌پذیر است. بنابراین برای آن‌که $\overline{abcde}$ بر ۴ بخش‌پذیر باشد، باید $\overline{de}$ یا $(10d + e)$ بر ۴ بخش‌پذیر باشد.

مثال: در «پاپیروس رایند» آمده است: یک عدد دلخواه انتخاب کنید. آن را در ۳ضرب کنید، به حاصل آن ۶ را بیفزایید و حاصل را بر ۳ تقسیم کنید. سپس عددی را که از ابتدا انتخاب کرده بودید، از این نتیجه‌ی تقسیم کم کنید. چه عددی به‌دست می‌آید؟ آیا همیشه همین عدد به‌دست می‌آید؟ با چه نوع استدلالی به این نتیجه رسیدید؟

حل: فرض کنیم n عدد دلخواهی باشد که انتخاب کرده‌ایم. آن را در ۳ ضرب می‌کنیم که $3n$ به دست می‌آید. اکنون به $3n$، ۶ واحد اضافه می‌کنیم که $3n + 6$ حاصل می‌شود. سپس مقدار به‌دست آمده را بر ۳ تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{3n + 6}{3} = \frac{3(n + 2)}{3} = n + 2$$

در مرحله‌ی آخر، از $n + 2$ عددی را که اول انتخاب کرده بودیم (یعنی n)، کم می‌کنیم:

$$(n + 2) - n = 2$$

عدد ۲ به‌دست می‌آید. هر عددی را انتخاب کنیم و عملیاتی را که در پاپیروس رایند آمده است درباره‌ی آن تکرار کنیم، دوباره عدد ۲ به‌دست می‌آید. در این‌جا به کمک استدلال استنتاجی به این نتیجه رسیدیم، زیرا براساس درستی عملیات جمع، تفریق، ضرب و تقسیم عبارت‌های جبری به این نتیجه رسیدیم.

مثال: یک عدد سه رقمی انتخاب کنید و آن را دوباره بنویسید تا یک عدد شش‌رقمی تشکیل بدهد.

الف) نشان دهید که عدد شش‌رقمی حاصل بر ۱۳ بخش‌پذیر است.

ب) نشان دهید، هر عدد شش‌رقمی که از تکرار یک عدد سه‌رقمی حاصل می‌شود، همیشه بر ۱۳ بخش‌پذیر است.

حل:

الف) برای مثال عدد ۳۴۵ را انتخاب می‌کنیم و آن را دوبار می‌نویسیم تا عدد ۳۴۵۳۴۵ تشکیل شود. اکنون داریم:

$$345345 = \underline{3\times 10^5} + \underline{\underline{4\times 10^4}} + \underline{\underline{\underline{5\times 10^3}}} + \underline{3\times 10^2} + \underline{\underline{4\times 10}} + \underline{\underline{\underline{5}}}$$

با دسته‌بندی و فاکتورگیری داریم:

$$345345 = (3\times 10^5 + 3\times 10^2)$$
$$+ (4\times 10^4 + 4\times 10) + (5\times 10^3 + 5)$$
$$= 3\times 10^2(10^3 + 1) + 4\times 10(10^3 + 1) + 5(10^3 + 1)$$

با فاکتورگیری از پرانتز مشترک $(10^3 + 1)$ داریم:

$$345345 = (10^3 + 1)(3\times 10^2 + 4\times 10 + 5) = 1001\times 345$$

عدد ۱۰۰۱ بر ۱۳ بخش‌پذیر است. زیرا $1001 = 13\times 77$. پس ۳۴۵۳۴۵ بر ۱۳ بخش‌پذیر است.

ب) عدد شش‌رقمی دلخواه $\overline{abcabc}$ را که از تکرار عدد سه‌رقمی $\overline{abc}$ به‌دست آمده است، در نظر می‌گیریم و صورت گسترده‌ی آن را می‌نویسیم:

$$\overline{abcabc} = \underline{a\times 10^5} + \underline{\underline{b\times 10^4}} + \underline{\underline{\underline{c\times 10^3}}} + \underline{a\times 10^2} + \underline{\underline{b\times 10}} + \underline{\underline{\underline{c}}}$$

پس از دسته‌بندی و فاکتورگیری داریم:

$$\overline{abcabc} = (a\times 10^5 + a\times 10^2) + (b\times 10^4 + b\times 10) + (c\times 10^3 + c)$$
$$= a\times 10^2(10^3 + 1) + b\times 10(10^3 + 1) + c(10^3 + 1)$$
$$= (10^3 + 1)(a\times 10^2 + b\times 10 + c) = 1001\times \overline{abc}$$

چون $1001 = 13\times 77$، پس ۱۰۰۱ بر ۱۳ بخش‌پذیر است. در نتیجه عدد دلخواه $\overline{abcabc}$ بر ۱۳ بخش‌پذیر است.

مثال: ثابت کنید که حاصل‌ضرب هر دو عدد صحیح متوالی، مضرب ۲ است.

حل: دو عدد صحیح متوالی به صورت n و $n + 1$ هستند. حاصل‌ضرب آن‌ها $n(n + 1)$ است. برای n دو حالت وجود دارد: یکی این‌که ممکن است n عددی فرد باشد، یعنی: $n = 2k + 1\ ;\ k \in Z$. دیگر این‌که ممکن است n عددی زوج باشد، یعنی: $n = 2k\ ;\ k \in Z$. بنابراین دو حالت زیر را داریم:

حالت اول: اگر $n = 2k + 1$، خواهیم داشت:

$$n(n + 1) = (2k + 1)(2k + 1 + 1) = (2k + 1)(2k + 2)$$

$$= (2k + 1)\times 2(k + 1) = 2\left[\underbrace{(2k + 1)(k + 1)}_{k''\in Z}\right] = 2k''$$ (عددی زوج است.)

حالت دوم: اگر $n = 2k$، خواهیم داشت:

$$n(n + 1) = 2k(2k + 1) = 2\left[\underbrace{k(k + 1)}_{k''\in Z}\right] = 2k''$$ (عددی زوج است.)

مثال: ثابت کنید مربع هر عدد فرد به شکل $8q + 1$ است.

حل: عدد فرد $n = 2k + 1$ که $k \in Z$ را در نظر می‌گیریم. برای محاسبه‌ی مربع آن، کافی است که آن را به توان ۲ برسانیم:

$$n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = (4k^2 + 4k) + 1$$
$$= 4\underbrace{k(k + 1)}_{2q} + 1 = 8q + 1$$

چون $k(k + 1)$ حاصل‌ضرب دو عدد صحیح متوالی است، پس طبق مثال قبل، حاصل آن عددی زوج است که ما آن را $2q$ در نظر گرفتیم.

مثال: با استفاده از استدلال استنتاجی نشان دهید که مجموع سه

عدد زوج متوالی، مضرب ۳ است.

حل: سه عدد زوج متوالی به صورت $2k$ ، $2k+2$ ، $2k+4$ که $k \in Z$ هستند. اکنون آن‌ها را با یکدیگر جمع می‌کنیم:

$$2k+(2k+2)+(2k+4)=6k+6=3\underbrace{(2k+2)}_{k'\in Z}=3k' \quad \text{(مضرب ۳ است.)}$$

قضیه‌ی کلی

حکم‌هایی که همیشه و بدون محدودیت برقرارند، قضیه‌ی کلی هستند. برای مثال، همه‌ی اتحادهای جبری قضیه‌ی کلی هستند، زیرا به ازای همه‌ی مقادیری که جایگزین متغیرهای اتحاد می‌شوند، همواره برقرارند.

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2;(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$

$$(a-b)(a+b)=a^2-b^2;(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$$

همچنین قضیه‌های هندسه، قضایای کلی هستند و همواره برقرارند، مانند قضیه‌های زیر:

قضیه: اگر در مثلث ΔABC داشته باشیم $MN \parallel BC$ ، آن‌گاه داریم:

$$\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}=\frac{MN}{BC}$$

قضیه: در هر مثلث، ضلع مقابل به زاویه‌ی بزرگ‌تر، از ضلع مقابل به زاویه‌ی کوچک‌تر، بزرگ‌تر است.

$$\hat{B}>\hat{C}\Rightarrow AC>AB$$

قضیه‌ی فیثاغورس: در هر مثلث قائم‌الزاویه، مربع وتر برابر است با مجموع مربعات دو ضلع دیگر.

$$BC^2=AB^2+AC^2$$

مثال نقض

به مثالی که کلیّت یک مطلب یا حدس را باطل می‌کند، مثال نقض گوییم. وقتی از مثال نقض استفاده می‌کنیم، در جست‌وجوی یک مثال هستیم که درستی حدس را باطل کند؛ یعنی با آوردن یک مثال نقض، ثابت می‌کنیم که حدس یا حکم مسئله درست نیست.

مثال: آیا به ازای هر عدد طبیعی n، عدد 2^n+3 عددی اول است؟

حل: برای باطل کردن این حکم، کافی است یک عدد طبیعی به جای n قرار دهیم و حاصل 2^n+3 ، عددی اول نباشد. بنابراین در این فرمول، چند عدد طبیعی به جای n قرار می‌دهیم:

$n=1\ ;\ 2^1+3=5$

$n=2\ ;\ 2^2+3=7$

$n=3\ ;\ 2^3+3=11$

$n=4\ ;\ 2^4+3=19$

$n=5\ ;\ 2^5+3=35$

در حالتی که $n=5$ ، ملاحظه می‌کنیم که ۳۵ عددی اول نیست. پس $n=5$ یک مثال نقض برای باطل کردن این حکم است.

مثال: آیا ضرب دو عدد گنگ، عددی گنگ است؟

حل: در صورتی که $x=\sqrt{2}$ و $y=3\sqrt{2}$ داریم:

$$xy=\sqrt{2}\times3\sqrt{2}=3\sqrt{4}=6\notin Q^c$$

بنابراین $x=\sqrt{2}$ و $y=3\sqrt{2}$ ، مثال نقض برای باطل کردن این حکم است.

مثال: آیا برای هر $x\geq 0$ ، می‌توان نتیجه گرفت $\sqrt{x}\leq x$ ؟

حل: در صورتی که $x=\frac{1}{4}$ انتخاب کنیم:

$$\sqrt{\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}\nleq\frac{1}{4}$$

بنابراین $x=\frac{1}{4}$ ، مثال نقض برای باطل کردن این حکم است.

مثال: بسیاری از دانش‌آموزانی که با اتحادها کار می‌کنند و هنوز در به کار بردن اتحادها کم‌دقتی دارند، موارد زیر را به اشتباه، جای اتحاد به کار می‌برند:

الف) $a+2a^3=3a^4$ ب) $\sqrt{a}+\sqrt{b}=\sqrt{a+b}$

ج) $(a+b)^2=a^2+b^2$ د) $\frac{x+y}{x^2}=\frac{y}{x}$

با آوردن مثال نقض، به راحتی می‌توان درستی برابری‌های بالا را باطل کرد.

مثال: آیا مجموع دو عدد گنگ، عددی گنگ است؟ چرا؟

حل: خیر، دو عدد گنگ به صورت $a=\sqrt{2}$ و $b=1-\sqrt{2}$ را درنظر می‌گیریم و ملاحظه می‌کنیم که:

$$a+b=\sqrt{2}+1-\sqrt{2}=1\in Q \quad \text{(عددی گویاست)}$$

تمرین: برای نقض هریک از گزاره‌های زیر، از مثال نقض استفاده کنید.

الف) اگر p عددی اول باشد، آن‌گاه $p+1$ عددی اول است.

ب) اگر p عددی اول باشد، آن‌گاه p^2+1 عددی اول است.

ج) اگر $a\leq b$ و $c\leq d$ ، آن‌گاه $ac\leq bd$.

د) اگر عددهای x و y هر دو مثبت باشند، آن‌گاه $\log xy=\log x\times\log y$.

هـ) برای دو عدد حقیقی x و y داریم: $|x+y|=|x|+|y|$.

و) برای دو عدد حقیقی x و y داریم: $[x+y]=[x]+[y]$.

ادامه دارد...

نخبه پروری نکنیم!

قسمت دوم



اشاره

در شماره ی قبل قسمت اول مصاحبه با استاد محمدهاشم رستمی را ملاحظه کردید، ایشان عضو هیأت تحریریه مجله ی برهان متوسطه و مؤلف کتاب درسی دوره ی متوسطه و عضو شورای برنامه ریزی درسی گروه ریاضی دفتر تألیف و برنامه ریزی درسی و مؤلف دایرةالمعارف هندسه ۱۷ جلد و... هستند که ۴۵ سال سابقه ی تدریس دارند. اینک در پی ادامه ی مصاحبه با ایشان را می آوریم.

■ **نقش هندسه در درک جهان چیست؟ چون شما به نقش هندسه در ماهواره‌ها اشاره کردید، پس هندسه از داخل و دور و بر کره‌ی زمین بیرون آمده است. آیا معتقدید که در درک جهان هم نقشی دارد؟**

○ درحقیقت آن‌چه که ما در زندگی با آن سر و کار داریم، به‌خصوص در دو بعد یا سه بعد، به نحوی با هندسه مربوط است؛ از نظر شکل هندسی و ویژگی‌هایی که دارد. هنگامی که در خیابان راه می‌روید، تابلوهای متفاوتی می‌بینید که نشانگر اشکال هندسی هستند. ساختمان‌هایی می‌بینید که احجام هندسی را نشان می‌دهند. در بازی فوتبال، توپ به شکل کره است که یک شکل هندسی است. می‌توانیم بگوییم که ما هم از نظر شهود، یعنی آن‌چه که در زندگی روزمره می‌بینیم با اشکال هندسی سروکار داریم و هم از نظر قوانین حاکم بر جهان، هندسه مهم است. در استانداردهای موضوعی هندسه آمده است: «هندسه ابزاری تقدیم می‌کند که به‌وسیله‌ی آن می‌توان جهان را توصیف، تجزیه، تحلیل و درک کرد؛ ابزاری برای دیدن و فهمیدن زیبایی موجود در ساختارها...»

■ **سؤال بعدی به وضع آموزش ریاضی در سال‌های قبل از انقلاب اسلامی برمی‌گردد؛ یعنی در واقع از همان زمانی که شما شروع کردید به تدریس یا تحصیل ریاضی، تا دوره‌ی قبل از انقلاب.**

○ از سال ۱۲۳۱ هجری شمسی، یعنی سال تأسیس دارالفنون، تا سال ۱۲۹۷، کتاب‌های درسی ایران، ترجمه‌ی کتاب‌های کشورهای غربی، به‌ویژه کشورهای اروپایی بود. در سال ۱۲۹۰ شمسی، شورای وزارت معارف، تدوین ریز مواد برنامه‌های درسی شش ساله‌ی دبستان را که در شهر، مکتب شهری و در روستاها، مکتب دهکده می‌نامیدند، آغاز کرد. در متن این ریز مواد، هدف‌هایی از آموزش و پرورش نیز گنجانده شده بود. این ریز مواد درسی در سال ۱۲۹۷ شمسی به تصویب مجلس شورای آن زمان رسید و پس از آن، ریز مواد برنامه‌ی درسی سیکل اول دبیرستان و دانش‌سراهای مقدماتی و دبیرستان‌های پسرانه و دخترانه تهیه شد. کتاب‌های تألیف شده در این دوره تا سال ۱۳۳۴ مورد استفاده قرار گرفتند.

در سال ۱۳۳۴، براساس اصل چهار ترومن (کمک به کشورهای در حال توسعه)، اهداف و ریز مواد برنامه‌های درسی برای دوره‌ی دبیرستان توسط هیئتی آمریکایی تهیه و کتاب‌های درسی بر این اساس نوشته شدند. یکی از ویژگی‌های این دوره، چندتألیفی بودن کتاب‌های درسی بود. یعنی برای هر درس در هر کلاس، دو یا سه کتاب وجود داشت و معلمین به انتخاب خود یکی از آن‌ها را برای تدریس انتخاب می‌کردند. چندتألیفی بودن کتاب‌ها در آن دوره، بیشتر از مفید بودن، معایبی داشت که رقابت‌های ناسالم مؤلفان کتاب‌ها برای انتخاب کتابشان توسط دبیران، و نقص محتوای بسیاری از این کتاب‌ها، دو نمونه از آن‌هاست.

در سال ۱۳۴۴، نظام آموزشی ایران و درنتیجه اهداف آموزشی و ریز مواد برنامه‌ی درسی تغییر کرد و دوره‌ی راهنمایی برای اولین‌بار جزو دوره‌های تحصیلی ایران قرار گرفت و دوره‌ی ابتدایی پنج سال تعیین شد. این برنامه‌ها نیز در سال ۱۳۵۴ مورد بازنگری

قرار گرفت. نکته‌ی مهمی که در ارتباط با اهداف آموزشی و ریز مواد کتاب‌های درسی ایران در این دوره‌ها می‌توان گفت این است که کتاب‌های درسی ایران، ترجمه یا اقتباسی از کتاب‌های کشورهای خارجی بودند. به بیان دیگر، دو نکته‌ی اساسی که در استانداردهای جهانی نیز آمده‌اند، یعنی این که برنامه‌های درسی کشور هنگامی موفق‌اند که هم به یافته‌های دانشی روز، و هم به سنت‌های خوب آموزشی کشور توجه کرده باشند، در برنامه‌های درسی ایران از سال ۱۲۳۱ شمسی تا سال ۱۳۵۷ مورد توجه قرار نداشتند. در مواردی هم، اگر به یافته‌های جدید دانش توجه شده، این توجه ناقص و یا افراطی بوده است. به بیان دیگر، ما تا قبل از انقلاب اسلامی، دانش و برنامه‌ی درسی را مونتاژ می‌کردیم و نه تولید.

بعد از انقلاب اسلامی، بهترین دوره‌ی برنامه‌ریزی و تألیف کتاب‌ها مربوط به سال ۱۳۵۹ است که کتاب‌های ابتدایی و راهنمایی تغییر کردند. در این دوره، ریز مواد درسی را خود «دفتر برنامه‌ریزی و تألیف» تهیه کرد و اهداف نیز به‌وسیله‌ی وزارت آموزش و پرورش و شورای عالی آموزش و پرورش مشخص شدند. آن‌گاه هدف‌های کلی آموزش ریاضی در دوره‌ی عمومی و سپس هدف‌های خاص آموزش ریاضی در ابتدایی و راهنمایی برای هر سال تحصیلی مشخص گردید و بر این اساس، ریز مواد درسی تهیه و کتاب‌ها تألیف شدند. آن‌گاه کتاب‌ها یک‌سال در تعدادی از مدارس تهران که به صورت تصادفی انتخاب شده بودند، آزمایش شدند و بعد به اجرای سراسری رسیدند. برای هر کتابی هم راهنمای معلم تألیف شد.

■ یعنی کتاب‌های این دوره دیگر نه مونتاژ بودند نه ترجمه.

○ بله، درحقیقت این بخش دیگر نه مونتاژ بود و نه ترجمه. البته در مواردی باز هم در تألیف کتاب‌های دبیرستانی نظام جدید، از ترجمه‌ی کتاب‌های خارجی استفاده شد، و بعضی جاها نوآوری‌هایی انجام گرفت که ناقص ماند و شاید برخی از مشکلات اخیر نظام جدید در متوسطه هم به همین مسائل برمی‌گردد.

■ شما سؤال بعدی را هم جواب دادید؛ یعنی وضع آموزش ریاضی در حال حاضر. نظرتان درباره‌ی المپیادها چیست؟ آیا واقعاً تأثیر مثبتی دارند؟ اگر دارند چه قدر است؟

○ در تکمیل سؤال قبلی مختصری عرض کنم، در برنامه‌ریزی دوره‌ی متوسطه در نظام جدید آموزشی، همان‌طوری که اشاره کردیم، یا به سنت‌های آموزشی خودمان توجه نشده، یا به یافته‌های جدید، و یا اگر شده، هر دو کم‌رنگ بوده‌اند. درحقیقت، دلیل بروز مشکلات هم در نظام جدید آموزشی همین است. اما لازم است بگویم که با سعی و تلاش، می‌توانیم آموزش ریاضی را در کشورمان به بهترین و بالاترین سطح مطلوب برسانیم. برای نیل به این هدف لازم است به تولید دانش بپردازیم. در این راستا، کاری که در حال حاضر در گروه ریاضی دفتر برنامه‌ریزی و تألیف کتب درسی در حال انجام است، تهیه‌ی راهنمای برنامه‌ی درسی ملی ریاضی ایران است.

■ در آینده؟

○ در آینده. همان طور که گفتم، کاری که الان دارد انجام می‌شود، کاری است که به طرف تولید دانش پیش می‌رود. برنامه‌ی شورای ریاضی دفتر برنامه‌ریزی و تألیف که من هم عضو آن هستم، این است که به جای تألیف کتاب‌های درسی، راهنمای تألیف کتاب‌ها را تهیه کنیم. نخست راهنمای برنامه‌ی درسی ملی ریاضی برای ایران تهیه شود و پس از بررسی آن در دوره‌های سراسری کشوری، برای هر کتاب، راهنمای تألیف تدارک ببینیم. این راهنماها در سراسر کشور در کلاس‌های سراسری به نظرخواهی گذاشته شوند. در مرحله‌ی تألیف هم، هر فرد یا گروهی که می‌توانند کتاب درسی بنویسد، مجاز است به صورت فردی یا گروهی، در تألیف کتاب‌ها مشارکت کند.

■ یعنی چند تألیف داشته باشیم؟

○ بله. البته از بین کتاب‌های یک موضوع درسی، شاید یک کتاب به عنوان تألیف برتر و به عنوان کتاب درسی انتخاب شود؛ این مطلب بعداً مشخص خواهد شد. ولی به هر حال، مؤلفین با توجه به راهنمای برنامه‌ی درسی، مجاز به تألیف کتاب می‌شوند.

■ نظرتان را درباره‌ی المپیادها و این که تأثیرشان مثبت است یا منفی، می‌فرمایید؟

○ طبیعتاً من نمی‌توانم بگویم نقش منفی دارند. المپیادها قشر خاصی از دانش‌آموزان را دربرمی‌گیرند و به نظر من در پیشرفت دانش ریاضی و به‌طور کلی سایر شاخه‌ها، مثل فیزیک و شیمی، مؤثرند. آن‌چه که قبول ندارم این است که نخبه‌پروری کنیم. مخاطب ما، مخاطب عام است.

■ یعنی قهرمان‌پروری را قبول ندارید؛ حداقل در ریاضیات.

○ ولی می‌پذیرم که باعث پیشرفت دانش ریاضی می‌شود و در این زمینه مؤثر است.

■ نقش کتاب‌های کمک‌آموزشی در آموزش ریاضی چیست؟ امروزه کتاب‌های کمک‌آموزشی خیلی زیاد شده‌اند، قدیم‌ها خیلی کم بودند. در دوره‌ی شما، مثلاً شاید فقط همین کتاب‌های صفاری قربانی در زمینه‌ی هندسه یا جبر وجود داشتند. ولی الان ده‌ها، شاید صدها کتاب در هر رشته‌ای موجود است. آیا تعدادشان زیاد نیست؟ یا نه کم هم هستند؟ نقششان در پیشبرد ریاضی و کمک به دبیر یا معلم ریاضی چیست؟

○ من وجود این همه کتاب را زائد می‌بینم. ما قبول داریم که کتاب درسی بسته است و به عبارت دیگر، تعداد صفحات محدودی دارد. از طرف دیگر، ساعت‌های تدریس این کتاب در دبیرستان یا مدارس نیز به‌طور کلی محدود است. بنابراین شاید ما نتوانیم آن‌چه را که لازم باشد، در کتاب درسی بیاوریم. درواقع ما ایده‌های مهم ریاضی را در کتاب درسی می‌آوریم. بنابراین لازم است، جاهایی که کتاب درسی محدودیت دارد، دست مؤلفان کتاب‌های کمک‌آموزشی باز باشد. اما به نظر من باز هم باید در کتاب راهنمای معلم و کتاب کار دانش‌آموز و از طریق مجلات ریاضی این محدودیت‌ها برطرف شوند.

■ مجله‌ی ریاضی برای این کار؟

○ در استانداردهای جدید آموزشی پیشنهاد شده است، یک بسته‌ی آموزشی شامل سه کتاب برای هر درس موجود باشد: یک کتاب، کتاب درسی دانش‌آموز است. دیگری کتاب کار دانش‌آموز است که هرجا کتب درسی بسته‌اند و به کار بیشتر یا تعریف بیشتری نیاز است، یا مطلب گفته شده محتاج مقدمه‌ای است که سال‌های قبل گفته شده، در این کتاب می‌آید. سومی هم کتاب راهنمای معلم است که بسیار فراتر از آن‌چه در کتاب درسی و کتاب کار آمده، به تعمیق مطالب می‌پردازد. این کتاب از بخش‌های متفاوتی تشکیل شده که یکی دانش‌افزایی است. در این کتاب در ارتباط با روش‌های یادگیری، ارزش‌یابی و سایر مسائل مربوط به آموزش ریاضی بحث می‌شود و چگونگی تدریس هر صفحه‌ی کتاب درسی به طور کامل، از شروع تا پایان، آموزش داده می‌شود. یعنی در راهنمای معلم، صفحه‌ی کتاب درسی عیناً می‌آید و گفته می‌شود که هدف از ارائه‌ی این مفهوم ریاضی یا این صفحه‌ی کتاب چیست؟ برای آن صفحه، تمرین‌هایی برای شاگردان قوی‌تر، تمرین‌هایی برای شاگردان متوسط و تمرین‌هایی برای شاگردان ضعیف وجود دارد. بنابراین، معلم با در دست داشتن کتاب راهنما با این شیوه، به راحتی قادر به تدریس موفق کتاب‌های درسی است.

■ آیا خودتان در این زمینه کارها یا نمونه‌هایی تألیف کرده‌اید یا نه؟

○ کتاب‌هایی که من نوشته‌ام، کتاب‌های درسی، کمک‌درسی و کمک‌آموزشی هستند.

■ نه، در این زمینه‌ای که فرمودید سه قسمت است و یک بسته‌ی آموزشی، آیا در این زمینه کار کرده‌اید؟

○ بخشی از آن را انجام داده‌ام. مثلاً کتاب کار هندسه(۱) و کتاب کار هندسه(۲) را نوشته‌ام و چاپ هم شده است. هم‌اکنون نیز در دفتر برنامه‌ریزی و تألیف کتب درسی وزارت آموزش و پرورش، کتاب راهنمای معلم هندسه را در دست تألیف داریم. تقریباً ۹۰ درصد مقاله‌هایش آماده است. درحقیقت این کتاب، اولین کتاب راهنمای معلم است که برای هندسه نوشته می‌شود. امیدوارم که ان‌شاءالله در آینده، سمت‌وسوی تألیف کتاب‌ها به این سمت برود که بسته‌ی آموزشی کامل باشد.

■ سؤال بعدی ما درباره‌ی کار اصلی شما در تألیف کتاب‌های هندسه، یعنی دایرةالمعارف هندسه است که ظاهراً ۱۵ جلد است و چاپ هم شده. از کی به این فکر افتادید که ما به چنین دایرةالمعارفی نیاز داریم و این دایرةالمعارف در چه سطحی است؟ به درد شاگردان می‌خورد یا دانشجویان رشته‌ی ریاضی یا محققین؟ یا به درد همه؟

○ دایرةالمعارف هندسه ۲۰ جلد پیش‌بینی شده است.

■ یعنی بقیه دارد؟

○ بله، ۱۵ جلد آن چاپ شده و ۲ جلد هم در چاپ‌خانه‌ی انتشارات مدرسه منتظر نوبت چاپ است. این ۲ جلد، جلدهای ۱۶ و ۱۷، مربوط به هندسه‌ی فضایی هستند. امیدوارم که هرچه زودتر چاپ شوند. جلد ۱۸ هندسه‌ی تحلیلی است و جلد ۱۹ مقاطع مخروطی. جلد ۲۰ هم هندسه‌های نااقلیدسی است.

■ به هندسه‌ی تصویری نپرداخته‌اید؟

○ هندسه‌ی تصویری را در دو بخش در تبدیلات هندسی در جلدهای ۸ و ۹ آورده‌ام. منتها از هندسه‌ای که در قدیم به اسم هندسه‌ی ترسیمی رقومی یا هندسه‌ی ترسیمی و رسم فنی بود، گرچه علاقه داشتم که جزو دایرةالمعارف هندسه باشد، ولی برای این که تعداد جلدها بیشتر نشود و ۲۰ جلد باشد، فعلاً صرف‌نظر کردم.

■ هندسه‌ی رقومی ممکن است قابل صرف‌نظر کردن باشد، ولی هندسه‌ی ترسیمی نه.

○ من اعتقاد دارم که هر شاخه‌ای از هندسه در جایگاه خودش اهمیت دارد و لازم است. من دایرةالمعارف هندسه را حدود ۲۵ جلد در نظر گرفته بودم که اگر توفیقی باشد، شاید جلدهای دیگری هم به نحوی تألیف شوند. علاوه بر هندسه‌های رقومی و ترسیمی، بخش دیگری از هندسه، مثلثات است که در این ۲۰ جلد نیست.

اما این که فرمودید از کجا این نیاز را حس کردید. من از شروع معلمی، یعنی از سال ۱۳۴۱، وقتی تدریس هندسه را شروع کردم، می‌خواستم در هر جلسه‌ی درس، چند مسئله غیر از مسئله‌های کتاب درسی به دانش‌آموزان بدهم. هرجا که جست‌وجو می‌کردم، می‌دیدم غیر از یکی دو کتاب که تألیف آقای **دکتر حسن صفاری و استاد ابوالقاسم قربانی** بودند، کتاب هندسه‌ی دیگری وجود ندارد. آن‌ها هم در واقع حل‌المسائل هندسه بودند. بنابراین نیاز به **تألیف مجموعه‌ی کاملی از هندسه، شامل تعریف‌ها، قضیه‌ها، مسئله‌ها و تاریخ هندسه را از همان شروع شغل معلمی‌ای احساس** کردم تا علاقه‌مندان به این شاخه از ریاضی، با دست‌رسی به تمام مطالب مربوط به مباحث گوناگون هندسه و بررسی آن‌ها، به احاطه‌ای کامل بر هر مبحث دست پیدا کنند.

به همین دلیل، از حدود ۴۵ سال قبل به جمع‌آوری تعریف‌ها، قضیه‌ها، مسئله‌ها و تاریخ هندسه‌ی موجود در کتاب‌های ریاضی به زبان فارسی، ترجمه شده به فارسی و کتاب‌های خارجی که در اختیار و یا در دست‌رس من بودند، پرداختم تا دایرةالمعارف هندسه را تألیف کنم. برای این کار تمام مطالب هندسه را براساس موضوع‌های زیر دسته‌بندی کردم:

- ویژگی‌های توصیفی شکل‌های هندسی در هندسه‌ی مسطحه؛
- رابطه‌های متری در هندسه‌ی مسطحه؛
- تبدیل‌های هندسی (انتقال، بازتاب، دوران، تجانس، انعکاس و...) در هندسه‌ی مسطحه؛
- مکان‌های هندسی در هندسه‌ی مسطحه؛
- رسم شکل‌های هندسی در هندسه‌ی مسطحه؛
- هندسه‌ی فضایی؛
- هندسه‌ی تحلیلی؛
- مقاطع مخروطی (دایره، بیضی، هذلولی

و سهمی)؛

● هندسه‌های نااقلیدسی.

هریک از این موضوع‌ها، با توجه به حجم مطالب، یک یا چند جلد از دایرةالمعارف هندسه را شامل می‌شود: برای مثال، رابطه‌های متری در هندسه‌ی مسطحه پنج جلد است و از جلد سوم شروع می‌شود که عبارت‌اند از:

جلد ۳. نسبت پاره‌خط‌ها در هندسه‌ی مسطحه (نسبت و تناسب، قضیه‌ی تالس، تشابه و...)

جلد ۴. رابطه‌های متری در دایره

جلد ۵. رابطه‌های متری در مثلث، و مثلث و دایره‌های محیطی و محاطی

جلد ۶. رابطه‌های متری در مثلث‌های ویژه (متساوی‌الساقین، قائم‌الزاویه، متساوی‌الاضلاع، مثلث با زاویه‌های حاده و مثلث با زاویه‌ی منفرجه)

جلد ۷. رابطه‌های متری در چندضلعی‌ها

در تمام جلدهای دایرةالمعارف هندسه:

● مطالب با نظم خاص آمده‌اند. مثلاً در هر بخش از هر جلد، ابتدا تعریف‌ها و قضیه‌های مربوط به آن بخش آمده‌اند.

● صورت مسئله‌ها جدا از حل مسئله‌ها آورده شده است تا دانشجویان قبل از مراجعه به حل یا راهنمایی قضیه‌ها و مسئله‌ها، خود به حل آن‌ها بپردازند و آن‌گاه راه‌حل خود را با راه‌حل موجود در دایرةالمعارف مقایسه کنند.

● مسئله‌ها از ساده به مشکل تنظیم شده‌اند.

● مسئله‌های المپیادهای ریاضی کشورهای گوناگون و المپیادهای بین‌المللی ریاضی، هر کدام در مبحث مربوط به خود آمده‌اند.

● قضیه‌ها و مسئله‌های مشهور و تاریخی هندسه، مانند قضیه‌ی پروانه، قضیه‌ی پاپوس، قضیه‌ی تالس، قضیه‌ی فیثاغورس، قضیه‌ی سوا، و... هر کدام با ذکر تاریخچه‌ای از زمان ارائه و راه‌حل آن‌ها، در جای مربوط به خود آمده‌اند.

● اکثر قضیه‌ها و مسئله‌ها حل شده‌اند و یا راهنمای حل دارند.

■ گروه مخاطبان را نفرمودید.

○ با توجه به این‌که ۱۳۰ منبع فارسی و لاتین جزو منابع دایرةالمعارف هندسه هستند و با توجه به این‌که تمام تعاریف، قضیه‌ها، مسئله‌ها و مسئله‌های المپیادهای ریاضی کشورهای گوناگون در این مجموعه آمده‌اند، مخاطبین آن شامل طیف وسیعی از دانش‌آموزان، دانشجویان رشته‌ی ریاضی دانشگاه‌ها و مراکز تربیت معلم، معلمان ریاضی، داوطلبان المپیادهای ریاضی و هر فرد علاقه‌مند به هندسه در ایران و دیگر کشورهای جهان است.

■ آیا تا به حال در جشنواره‌های کشوری، شما یا کتاب‌هایتان رتبه‌ای کسب کرده‌اید؟

○ بله:

- در دومین جشنواره‌ی کشوری معلمان مؤلف در اردیبهشت ماه سال ۱۳۸۱، دایرةالمعارف هندسه بین کتاب‌های علوم پایه حائز رتبه‌ی اول شد و لوح تقدیر و تندیس جشنواره را دریافت کردم.

- در سومین جشنواره‌ی رشد وزارت آموزش و پرورش در آذر ماه سال ۱۳۸۱، دایرةالمعارف هندسه بین کتاب‌های علوم پایه حائز رتبه‌ی اول شد و لوح تقدیر و تندیس جشنواره را دریافت کردم.

- در چهارمین جشنواره‌ی کشوری معلمان مؤلف در اردیبهشت ماه سال ۱۳۸۱، جلد اول کتاب مکان هندسی بین کتاب‌های علوم پایه به رتبه‌ی اول دست یافت و علاوه بر دریافت لوح تقدیر و تندیس جشنواره، به افتخار سفر حج عمره به اتفاق همسرم نائل آمدم.

- در اولین جشنواره‌ی تقدیر از مؤلفان کتاب‌های درسی ایران که توسط وزارت آموزش و پرورش در دی ماه سال ۱۳۸۴ برگزار شد، به‌عنوان یکی از سه نفر مؤلف برگزیده‌ی کتاب‌های درسی ریاضی انتخاب شدم و لوح تقدیر و تندیس جشنواره را دریافت داشتم.

■ خب، سؤالات ما تمام شد. اگر خود شما نکته‌ای به نظرتان می‌رسد که تکمیل کنید، بفرمایید. تشکر می‌کنم. شما واقعاً دینتان را به جامعه ادا کرده‌اید؛ با سه دکتری که از فرزندانتان به جامعه داده‌اید و فرزندان معنویتان، به‌خصوص این دایرةالمعارف ۲۰ جلدی که صحبتش بود. با تشکر از وقتی که در اختیار مجله‌ی برهان، مجله‌ی خودتان درواقع، گذاشتید، اگر نکته‌ای به نظرتان می‌رسد که بحثمان را تکمیل می‌کند، بفرمایید.

○ می‌خواستم بار دیگر از دوستان بسیار گران‌قدر و بزرگوارم که نسبت به من لطف و محبت دارند، یعنی هیئت تحریریه‌ی مجله برهان که استاد شهریاری، استاد قندهاری، استاد یاسی‌پور، استاد حمیدرضا امیری، استاد صدر و استاد شرقی، استاد هاشمی موسوی هستند و من در خدمتشان بوده‌ام، تشکر و سپاس‌گزاری کنم. تشکر ویژه‌ای هم داشته باشم از آقای حمیدرضا امیری، سردبیر مجله‌ی برهان، و آقای میرشهرام صدر، مدیر داخلی مجله‌ی برهان که دو عامل تداوم انتشار مجله‌ی برهان و ایجاد همدلی میان اعضای هیئت تحریریه‌ی این مجله هستند که امیدوارم این همدلی ادامه داشته باشد.

من فکر می‌کنم بعد از مجله‌ی یکان که در جای خودش خدمت بزرگی به دانش‌آموزان و دانش ریاضی این مملکت کرد، مجله‌ی ریاضی برهان یکی از مجلاتی است که شاید هنوز بخشی از خدمت‌هایش ناشناخته مانده‌اند و جزو مجلاتی است که خدمات گران‌قدری به جامعه‌ی دانش‌آموزی ایران کرده است. آن‌چه من انجام داده‌ام، وظیفه‌ام بوده است و اکنون هم خودم را معلم کوچکی می‌دانم از دریای بیکران معلمین این مملکت و این سرزمین. کاری که انجام داده‌ام، کار کوچکی بوده است. از خدا توفیق همه‌ی همکاران و دوستان هیئت تحریریه‌ی مجله را خواستارم و امیدوارم این کار ناقابلی که انجام داده‌ام، مورد قبول جامعه‌ی دانش‌آموزی و معلمین کشورمان قرار گرفته باشد.

■ با تشکر مجدد از جناب‌عالی و آرزوی سلامت و تندرستی و عمر دراز برای شما و برای کارهای آینده‌تان، شما را به خدا می‌سپارم.

کشف فرمول اعداد اول و نتایج آن

(حل مسئله‌های لاینحل ۲۳۰۰ ساله)

قسمت ۵

● سید محمدرضا هاشمی موسوی
hashemi – moosavi@yahoo.com

اشاره

در قسمت اول تا چهارم مقاله، با سیر تکاملی کشف فرمول اعداد اول و نتایج آن که از اساسی‌ترین آن‌ها حل معادله‌های سیال مرتبه‌ی nام است، آشنا شدید. اکنون آخرین قسمت مقاله، از کتاب مرجع[۱] به‌صورت چکیده ارائه می‌شود. برای اطلاع بیش‌تر از عناوین و موضوعات کتاب مذکور به سایت کاشف فرمول اعداد اول[۲] مراجعه کنید.

حل معادله‌های سیال با قوای غیرمتشابه (برابری‌های چندگانه)

در معادله‌ی عمومی زیر، اگر p_1، p_2، ... و p_k عددهایی متمایز باشند، برای معادله می‌توان یک سلسله جواب عمومی با k پارامتر ارائه داد:

$$(p_1 \neq p_2 \neq p_3 \neq \cdots \neq p_k)$$

$$X_1^{p_1} + X_2^{p_1} + \cdots + X_k^{p_1} = Y_1^{p_2} + Y_2^{p_2} + \cdots + Y_k^{p_2} \qquad (1)$$

$$= \cdots = Z_1^{p_k} + Z_2^{p_k} + \cdots + Z_k^{p_k}$$

برای تعیین یک سلسلهٔ جواب عمومی برای معادله‌ی ۱ کافی است، آن را با اتحاد زیر مقایسه کنیم:

(۲)

$$(a_1^{p_2 p_3 \cdots p_k})^{p_1} + (a_2^{p_2 p_3 \cdots p_k})^{p_1} + \cdots + (a_k^{p_2 p_3 \cdots p_k})^{p_1} =$$

$$(a_1^{p_1 p_3 \cdots p_k})^{p_2} + (a_2^{p_1 p_3 \cdots p_k})^{p_2} + \cdots + (a_k^{p_1 p_3 \cdots p_k})^{p_2} = \cdots$$

$$(a_1^{p_1 p_2 \cdots p_{k-1}})^{p_k} + (a_2^{p_1 p_2 \cdots p_{k-1}})^{p_k} + \cdots + (a_k^{p_1 p_2 \cdots p_{k-1}})^{p_k}$$

از مقایسه‌ی معادله‌ی ۱ با اتحاد ۲، یک سلسله جواب عمومی با k پارامتر دل‌خواه برای معادله‌ی ۱ حاصل می‌شود:

$$(3)\quad \begin{cases} X_1 = a_1^{p_1p_2\cdots p_k}, X_2 = a_2^{p_1p_2\cdots p_k}, \dots, X_k = a_k^{p_1p_2\cdots p_k} \\ Y_1 = a_1^{p_1p_2\cdots p_k}, Y_2 = a_2^{p_1p_2\cdots p_k}, \dots, Y_k = a_k^{p_1p_2\cdots p_k} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ Z_1 = a_1^{p_1p_2\cdots p_{k-1}}, Z_2 = a_2^{p_1p_2\cdots p_{k-1}}, \dots, Z_k = a_k^{p_1p_2\cdots p_{k-1}} \end{cases}$$

مثال: یک سلسله جواب عمومی معادله‌ی زیر را بیابید ($m \neq n \neq p \neq q$):

$$X_1^m + X_2^m = Y_1^n + Y_2^n = Z_1^p + Z_2^p = T_1^q + T_2^q \qquad (3)$$

حل: برای تعیین یک سلسله جواب عمومی معادله‌ی ۳ کافی است آن را با اتحاد زیر مقایسه کنیم:

$$\left(a^{npq}\right)^m + \left(b^{npq}\right)^m = \left(a^{mpq}\right)^n + \left(b^{mpq}\right)^n \qquad (4)$$

$$= \left(a^{mnq}\right)^p + \left(b^{mnq}\right)^p = \left(a^{mnp}\right)^q + \left(b^{mnp}\right)^q$$

از مقایسه‌ی معادله‌ی ۳ با اتحاد ۴، بلافاصله یک سلسله از جواب‌های معادله‌ی ۳ نتیجه می‌شود:

$$X_1 = a^{npq},\ X_2 = b^{npq},\ Y_1 = a^{mpq},\ Y_2 = b^{mpq},$$
$$Z_1 = a^{mnq},\ Z_2 = b^{mnq},\ T_1 = a^{mnp},\ T_2 = b^{mnp}$$

مثال: با شرط $m \neq n$، یک سلسله از جواب‌های عمومی معادله‌ی زیر را تعیین کنید:

$$X_1^m + X_2^m + X_3^m = Y_1^n + Y_2^n + Y_3^n \qquad (5)$$

حل: کافی است معادله‌ی ۵ را با اتحاد زیر مقایسه کنیم:

$$m \neq n:\ (a^n)^m + (b^n)^m + (c^n)^m \qquad (6)$$
$$= (a^m)^n + (b^m)^n + (c^m)^n$$

از مقایسه‌ی معادله‌ی ۵ با اتحاد ۶، یک سلسله از جواب‌های عمومی معادله حاصل می‌شود:

$$X_1 = a^n,\ X_2 = b^n,\ X_3 = c^n,\ Y_1 = a^m,$$
$$Y_2 = b^m,\ Y_3 = c^m$$

مثال: با شرط $m \neq n \neq p$، یک سلسله از جواب‌های عمومی معادله‌ی زیر را بیابید:

$$X_1^m + X_2^m + X_3^m + X_4^m = Y_1^n + Y_2^n + Y_3^n + Y_4^n \qquad (7)$$
$$= Z_1^p + Z_2^p + Z_3^p + Z_4^p$$

حل: کافی است معادله‌ی ۷ را با اتحاد زیر مقایسه کنیم:

$$(a^{np})^m + (b^{np})^m + (c^{np})^m + (d^{np})^m \qquad (8)$$
$$= (a^{mp})^n + (b^{mp})^n + (c^{mp})^n + (d^{mp})^n$$
$$= (a^{mn})^p + (b^{mn})^p + (c^{mn})^p + (d^{mn})^p$$

از مقایسه‌ی معادله‌ی ۷ با اتحاد ۸، یک سلسله از جواب‌های عمومی معادله حاصل می‌شود:

$$X_1 = a^{np},\ X_2 = b^{np},\ X_3 = c^{np},\ X_4 = d^{np},$$
$$Y_1 = a^{mp},\ Y_2 = b^{mp},\ Y_3 = c^{mp},\ Y_4 = d^{mp},$$
$$Z_1 = a^{mn},\ Z_2 = b^{mn},\ Z_3 = c^{mn},\ Z_4 = d^{mn}$$

مثال: معادله‌ی زیر را از نظر داشتن یا نداشتن جواب بررسی کنید:

$$X_1^{1384} + X_2^{1384} = Y_1^{173} + Y_2^{173} \qquad (9)$$
$$= Z_1^8 + Z_2^8 = T_1^4 + T_2^4 = U_1^2 + U_2^2$$

حل: ابتدا کوچک‌ترین مضرب مشترک بین قوای معادله را تعیین می‌کنیم:

$$1384 = 2^3 \times 173 = 4 \times 346 = 2 \times 692$$
$$[1384, 173] = 1384,\ [1384, 8] = 1384$$

با توجه به این‌که کوچک‌ترین مضرب مشترک بین قوای معادله، عدد ۱۳۸۴ است، اتحاد زیر را می‌توان نوشت:

$$(a)^{1384} + (b)^{1384} = (a^8)^{173} + (b^8)^{173} \qquad (10)$$
$$= (a^{173})^8 + (b^{173})^8 = (a^{346})^4 + (b^{346})^4$$
$$= (a^{692})^2 + (b^{692})^2$$

از مقایسه‌ی معادله‌ی ۹ با اتحاد ۱۰، یک سلسله جواب عمومی با دو پارامتر دل‌خواه برای معادله‌ی ۹ حاصل می‌شود:

$$X_1 = a,\ X_2 = b,\ Y_1 = a^8,\ Y_2 = b^8,\ Z_1 = a^{173},$$
$$Z_2 = b^{173},\ T_1 = a^{346},\ T_2 = b^{346},\ U_1 = a^{692},$$
$$U_2 = b^{692}$$

مثال: معادله‌ی زیر را از نظر داشتن یا نداشتن جواب بررسی کنید:

$$X_1^{30!+1} + X_2^{30!+1} = Y_1^{31} + Y_2^{31} \qquad (13)$$

حل: با توجه به قضیه‌ی ویلسن و اتحاد H.M، می‌توان نوشت ([ ] : قسمت درست عدد):

$$p = 31:\ (p-1)! + 1 = p\left(1 + 2\left[\frac{(p-1)! + 1}{2p}\right]\right)$$
$$= 31\left(1 + 2\left[\frac{30! + 1}{62}\right]\right)$$

بنابراین:

$$[30! + 1, 31] = 30! + 1$$

پس این اتحاد برقرار است:

(۱۴)

$$(a)^{30!+1}+(b)^{30!+1}=\left(a^{1+2\left[\frac{30!+1}{62}\right]}\right)^{31}+\left(b^{1+2\left[\frac{30!+1}{62}\right]}\right)^{31}$$

از مقایسه‌ی معادله‌ی ۱۳ با اتحاد ۱۴، یک سلسله جواب عمومی معادله حاصل می‌شود:

$$X_1=a\ ,\ X_2=b\ ,\ Y_1=a^{1+2\left[\frac{30!+1}{62}\right]}\ ,\ Y_2=b^{1+2\left[\frac{30!+1}{62}\right]}$$

در این جا، قضیه‌ی اساسی H.M را در رابطه با حل معادله‌های سیال با قوای غیرمتشابه (برابری‌های چندگانه) ارائه می‌دهیم.

قضیه‌ی H.M: معادله‌ی عمومی زیر، با فرض این‌که p_1، p_2، ...، p_k عددهایی متمایز باشند، همیشه دارای جواب است ($p_1 \neq p_2 \neq p_3 \neq \cdots p_k$):

$$X_1^{p_1}+X_2^{p_1}+\cdots+X_k^{p_1}=Y_1^{p_2}+Y_2^{p_2}+\cdots+Y_k^{p_2}$$
$$=\cdots=Z_1^{p_k}+Z_2^{p_k}+\cdots+Z_k^{p_k}$$

قانون تحویل‌پذیری H.M برای معادله‌های سیال قوای متشابه

معادله‌ی سیال با قوای متشابه به‌صورت عمومی با اندیس k را در نظر می‌گیریم:

$$X_1^n+X_2^n+\cdots+X_k^n=X_{k+1}^n \qquad (1)$$

این معادله به معادله‌هایی با اندیس $(k-1)N+k$ قابل تحویل است و از نظر داشتن یا نداشتن جواب، به این‌گونه معادله‌ها وابسته است و هیچ‌گونه استقلالی ندارد. در صورتی که یکی از معادله‌ها با اندیس $(k-1)N+k$ جواب نداشته باشد، معادله‌ی ۱ نیز جواب ندارد.

برای مثال، معادله‌ی زیر با اندیس $k=2$ را در نظر می‌گیریم:

$$X^n+Y^n=Z^n \qquad (2)$$

نشان می‌دهیم که معادله‌ی ۲ در حالت عمومی به معادله‌های ۱ قابل تحویل است و از نظر داشتن یا نداشتن جواب به این معادله‌ها وابسته است.

برای اثبات این مطلب کافی است معادله‌ی ۲ را به‌صورت $Y^n=Z^n-X^n$ بنویسیم، دو طرف این معادله را در عبارت زیر ضرب کنیم و سپس آن را به‌صورت ۱ بنویسیم:

$$(Z^{k-2})^n+(Z^{k-3}X)^n+\cdots+(ZX^{k-3})^n+(X^{k-2})^n$$

پس از انجام عملیات لازم به برابری زیر می‌رسیم:

$$(X^{k-1})^n+(X^{k-2}Y)^n+(X^{k-3}YZ)^n+(X^{k-4}YZ^2)^n+\cdots+(YZ^{k-2})^n=(Z^{k-1})^n \qquad (3)$$

از برابری ۳، حکم مسلم زیر که حکمی اصلی و اساسی در رابطه با تحویل‌پذیری معادله‌ی ۲ است، نتیجه می‌شود.

حکم اساسی H.M: معادله‌ی ۲ در حالت عمومی، خاصیت تحویل‌پذیری به حالت خاص هر معادله از معادله‌های ۱ را دارد.

تبصره: حکم اساسی H.M قابل تعمیم است و به سادگی، حکم زیر نیز نتیجه می‌شود.

حکم اساسی تعمیم یافته‌ی H.M: معادله‌ی ۲ در حالت عمومی، خاصیت تحویل‌پذیری به حالت خاص هریک از معادله‌های عمومی زیر را دارد:

$$X_1^n+X_2^n+X_3^n+\cdots+X_k^n=Y_1^n+Y_2^n+\cdots+Y_s^n \qquad (4)$$

توجه: معادله‌ی ۴ در واقع شامل همه‌ی معادله‌های قوای متشابه می‌شود و بدیهی است که معادله‌ی ۲ از نظر داشتن یا نداشتن جواب، به معادله‌های عمومی ۴ وابسته است و این واقعیت به قضایای زیر نیز منجر می‌شود.

قضیه‌ی اساسی اول H.M: اگر معادله‌ی ۲ به ازای هر n طبیعی جواب داشته باشد، آن‌گاه همه‌ی معادله‌ی قوای متشابه ۴ برای همان n دارای جواب هستند.

قضیه‌ی اساسی دوم H.M: اگر یکی از معادله‌های عمومی ۴ به ازای هر n طبیعی جواب نداشته باشد، معادله‌ی ۲ نیز برای همان n دارای جواب نیست.

نکته: می‌دانیم معادله‌ی ۲ برای هر $n \geq 3$ جوابی به جز صفر ندارد (قضیه یا در اصل حکم بزرگ فرما). بدیهی است که اگر معادله‌ی ۲ برای هر n طبیعی لااقل یک جواب خاص داشته باشد، همه‌ی معادلات قوای متشابه ۴ نیز برای همان توان دارای جواب هستند. از آن‌جا که معادله‌ی ۲ به ازای $n=2$ دارای جواب عمومی است، معادله‌های ۴ نیز به ازای $n=2$ دارای جواب‌اند. در این جا معلوم می‌شود که برای حل معادله‌ی ۲ بی‌نهایت شرایط لازم وجود دارد، یعنی همه‌ی معادله‌های قوای متشابه ۴ باید دارای جواب باشند. همین واقعیت امکان وجود جواب برای معادله‌ی ۲ را در حالت $n \geq 3$ به صفر می‌رساند.

در این جا برای نشان دادن کاربرد قانون تحویل‌پذیری H.M در حل معادله‌های قوای متشابه کافی است به بررسی معادله‌های زیر بپردازیم:

I) $X_1^2+X_2^2+\cdots+X_k^2=X_{k+1}^2$

II) $X_1^3+X_2^3+\cdots+X_{2k+1}^3=X_{2k+2}^3$

III) $X_1^3+X_2^3+\cdots+X_{3k+1}=X_{3k+2}^3$

IV) $X_1^4+X_2^4+\cdots+X_{2s+1}^4=X_{2s+2}^4$

V) $X_1^5+X_2^5+\cdots+X_{3l+1}^5=X_{3l+2}^5$

برای بررسی معادله‌های فوق از نظر وجود یا نبود جواب، کافی است یک جواب خاص برای هریک از معادله‌ها ارائه دهیم:

I) $a_1^2+b_1^2=c_1^2\ ;\ a_1=3\ ,\ b_1=4\ ,\ c_1=5\ :\ 3^2+4^2=5^2$

$b_1^2=c_1^2-a_1^2\ ;$

$b_1^2\left((c_1^2)^{k-1}+(c_1^2)^{k-2}a_1^2+\cdots(a_1^2)^{k-1}\right)=(c_1^2)^k-(a_1^2)^k$

با توجه به قانون تحویل‌پذیری H.M، معادله‌ی $a_1^2+b_1^2=c_1^2$ به معادله‌ی زیر تحویل می‌شود:

(۱)
$$(a_1^k)^2+(b_1c_1^{k-1})^2+(a_1b_1c_1^{k-2})^2+\dots+(b_1a_1^{k-1})^2=(c_1^k)^2$$

از مقایسه‌ی معادله‌ی I با اتحاد ۱، یک دسته جواب عمومی برای آن حاصل می‌شود:

$$X_1=a_1^k,\ X_2=b_1c_1^{k-1},\ X_3=a_1b_1c_1^{k-2},\ \dots,\ X_k=b_1a_1^{k-1},\ X_{k+1}=c_1^k$$

در صورتی که $a_1=u^2-v^2$، $b_1=2uv$ و $c_1=u^2+v^2$ اختیار شوند، یک سلسله جواب عمومی معادله‌ی I حاصل می‌شود:

$$\left((u^2-v^2)^k\right)^2+\left((2uv)(u^2+v^2)^{k-1}\right)^2+\dots+\left((2uv)(u^2-v^2)^{k-1}\right)^2=\left((u^2+v^2)^k\right)^2$$

$$X_1=(u^2-v^2)^k,\ X_2=(2uv)(u^2+v^2)^{k-1},\dots,\ X_k=(2uv)(u^2-v^2)^{k-1},\ X_{k+1}=(u^2+v^2)^k$$

یک جواب عددی خاص معادله‌ی I نیز چنین است:

$$X_1=3^k,\ X_2=4\times5^{k-1},\ X_3=3\times4\times5^{k-2},\dots,\ X_k=4\times3^{k-1},\ X_{k+1}=5^k$$

II) $a_2^3+b_2^3+c_2^3=d_2^3$; $a_2=3$, $b_2=4$, $c_2=5$, $d_2=6$: $3^3+4^3+5^3=6^3$

$$b_2^3+c_2^3=d_2^3-a_2^3,$$

$$(b_2^3+c_2^3)\left((d_2^3)^{k-1}+(d_2^3)^{k-2}(a_2^3)+\dots+(a_2^3)^{k-1}\right)=(d_2^3)^k-(a_2^3)^k$$

با توجه به قانون تحویل‌پذیری H.M معادله‌ی $a_2^3+b_2^3+c_2^3=d_2^3$ به معادله‌ی زیر تحویل می‌شود:

$$(a_2^k)^3+(b_2d_2^{k-1})^3+(c_2d_2^{k-1})^3+(b_2a_2d_2^{k-2})^3+(c_2a_2d_2^{k-2})^3+\dots+(c_2a_2^{k-1})^3=(d_2^k)^3 \qquad (۲)$$

از مقایسه‌ی معادله‌ی II و اتحاد ۲، یک دسته جواب عمومی برای آن حاصل می‌شود:

$$X_1=a_2^k,\ X_2=b_2d_2^{k-1},\ X_3=c_2d_2^{k-1},\dots,\ X_{2k+1}=c_2a_2^{k-1},\ X_{2k+2}=d_2^k$$

یک جواب عددی برای معادله‌ی II نیز چنین است:

$$X_1=3^k,\ X_2=4\times6^{k-1},\ X_3=5\times6^{k-1},\dots,$$

$$X_{2k+1}=5\times3^{k-1},\ X_{2k+2}=6^k$$

در صورتی که a_2، b_2، c_2 و d_2 را برحسب دو پارامتر دل‌خواه در نظر بگیریم:

$$\begin{cases}a_2=20u^2+10uv-3v^2\\ b_2=12u^2-10uv-5v^2\\ c_2=16u^2+8uv+6v^2\\ d_2=42u^2+7uv+4v^2\end{cases}$$

یک سلسله جواب عمومی معادله‌ی II حاصل می‌شود:

$$X_1=(20u^2+10uv-3v^2)^k$$
$$X_2=(12u^2-10uv-5v^2)(42u^2+7uv+4v^2)^{k-1},$$
$$\dots,\ X_{2k+1}=(16u^2+8uv+6v^2)(20u^2+10uv-3v^2)^{k-1},$$
$$X_{2k+2}=(42u^2+7uv+4v^2)^k$$

توجه: با تعویض متغیرها می‌توان به دسته جواب‌های جدیدتری رسید.

III) $a_3^3+b_3^3+c_3^3+d_3^3=h_3^3$;

$a_3=1$, $b_3=5$, $c_3=4$, $d_3=12$, $h_3=13$:

$$1^3+5^3+4^3+12^3=13^3$$

$$b_3^3+c_3^3+d_3^3=h_3^3-a_3^3\ ;$$

$$(b_3^3+c_3^3+d_3^3)\left((h_3^3)^{k-1}+(h_3^3)^{k-2}(a_3^3)+\dots+(a_3^3)^{k-1}\right)=(h_3^3)^k-(a_3^3)^k$$

با توجه به قانون تحویل‌پذیری H.M، معادله‌ی $a_3^3+b_3^3+c_3^3+d_3^3=h_3^3$ به معادله‌ی زیر تحویل می‌شود:

$$(a_3^k)^3+(b_3h_3^{k-1})^3+(c_3h_3^{k-1})^3+(d_3h_3^{k-1})^3+\dots+(d_3a_3^{k-1})^3=(h_3^k)^3 \qquad (۳)$$

از مقایسه‌ی معادله‌ی III و اتحاد ۳، یک دسته جواب عمومی برای آن حاصل می‌شود:

$$X_1=a_3^k,\ X_2=b_3h_3^{k-1},\ X_3=c_3h_3^{k-1},$$
$$X_4=d_3h_3^{k-1},\dots,\ X_{3k+1}=d_3a_3^{k-1},\ X_{3k+2}=h_3^k$$

یک جواب عددی برای معادله‌ی III نیز چنین است:

$$X_1=1,\ X_2=5\times13^{k-1},\ X_3=4\times13^{k-1},$$
$$X_4=12\times13^{k-1},\dots,\ X_{3k+1}=12\ ;\ X_{3k+2}=13^k$$

IV) $a_4^4+b_4^4+c_4^4=d_4^4$; $a_4=95800$, $b_4=217519$, $c_4=414560$, $d_4=422481$:

$$(95800)^4+(217519)^4+(414560)^4=(422481)^4$$

$$b_4^4+c_4^4=d_4^4-a_4^4,$$

$$(b_4^4 + c_4^4)\left((d_4^4)^{k-1} + (d_4^4)^{k-2}(a_4^4)+\cdots+(a_4^4)^{k-1}\right)$$
$$= (d_4^4)^k - (a_4^4)^k$$

با توجه به قانون تحویل پذیری H.M، معادله‌ی $a_4^4 + b_4^4 + c_4^4 = d_4^4$ به معادله‌ی زیر تحویل می‌شود:

(۴)

$$(a_4^k)^4 + (b_4 d_4^{k-1})^4 + (c_4 d_4^{k-1})^4 + \cdots + (c_4 a_4^{k-1})^4 = (d_4^k)^4$$

از مقایسه‌ی معادله‌ی IV و اتحاد۴، یک دسته جواب عمومی برای آن حاصل می‌شود:

$$X_1 = a_4^k \;,\; X_2 = b_4 d_4^{k-1} \;,\; X_3 = c_4 d_4^{k-1}, \ldots,$$
$$X_{2s+1} = c_4 a_4^{k-1} \;,\; X_{2s+2} = d_4^k$$

یک جواب عددی برای معادله‌ی IV نیز چنین است:

$$X_1 = (95800)^k \;,\; X_2 = (217519)(422481)^{k-1} \;,$$
$$X_3 = (414560)(422481)^{k-1} \;, \ldots,$$
$$X_{2s+1} = (414560)(95800)^{k-1} \;,\; X_{2s+2} = (422481)^k$$

V) $a_5^5 + b_5^5 + c_5^5 + d_5^5 = h_5^5$; $a_5 = 27$, $b_5 = 84$, $c_5 = 110$, $d_5 = 133$, $h_5 = 144$:

$$(27)^5 + (84)^5 + (110)^5 + (133)^5 = (144)^5$$
$$b_5^5 + c_5^5 + d_5^5 = h_5^5 - a_5^5 \;,$$
$$(b_5^5 + c_5^5 + d_5^5)\left((h_5^5)^{k-1} + (h_5^5)^{k-2}(a_5^5)+\cdots+(a_5^5)^{k-1}\right)$$
$$= (h_5^5)^k - (a_5^5)^k$$

با توجه به قانون تحویل پذیری H.M، معادله‌ی $a_5^5 + b_5^5 + c_5^5 + d_5^5 = h_5^5$ به معادله‌ی زیر تحویل می‌شود:

(۵)

$$(a_5^k)^5 + (b_5 h_5^{k-1})^5 + (c_5 h_5^{k-1})^5 + \cdots + (d_5 a_5^{k-1})^5 = (h_5^k)^5$$

از مقایسه‌ی معادله‌ی V و اتحاد۵، یک دسته جواب خاص برای آن حاصل می‌شود:

$$X_1 = (27)^k \;,\; X_2 = (84)(144)^{k-1} \;,\; X_3 = (110)(144)^{k-1},$$
$$\ldots,\; X_{3t+1} = (133)(27)^{k-1} \;,\; X_{3t+2} = (144)^k$$

قضیه‌ی نهایی H.M: اگر معادله‌ی زیر دارای یک جواب خاص یا عمومی باشد:

$$x_1^n + x_2^n + x_3^n + \cdots + x_k^n = x_{k+1}^n \qquad (1)$$

آن‌گاه معادله‌ی زیر (با توجه به قانون تحویل پذیری H.M) دارای دسته جواب‌های خاص یا عمومی است $(k, N \in \mathbb{N} \;,\; k \geq 2)$:

$$X_1^n + X_2^n + X_3^n + \cdots + X_{(k-1)N+1}^n = X_{(k-1)N+2}^n \qquad (2)$$

برهان: اثبات این قضیه را با استفاده از قانون تحویل پذیری انجام می‌دهیم.

در صورتی که یک دسته جواب معادله‌ی ۱ را خصوصی یا عمومی بدانیم، با در دست داشتن جواب و جای‌گزینی آن در معادله، به این برابری بدیهی می‌رسیم:

$$a_1^n + a_2^n + a_3^n + \cdots + a_k^n = a_{k+1}^n \qquad (3)$$
$$a_2^n + a_3^n + \cdots + a_k^n = a_{k+1}^n - a_1^n$$
$$(a_2^n + a_3^n + \cdots + a_k^n)\left((a_{k+1}^n)^{k-1} + (a_{k+1}^n)^{k-2}(a_1^n)+\cdots+(a_1^n)^{k-1}\right)$$
$$= (a_{k+1}^n)^k - (a_1^n)^k$$

با توجه به قانون تحویل پذیری H.M، معادله‌ی ۳ به معادله‌ی زیر تحویل می‌شود:

(۴)

$$(a_1^k)^n + (a_2 a_{k+1}^{k-1})^n + (a_3 a_{k+1}^{k-1})^n + \cdots + (a_k a_1^{k-1})^n = (a_{k+1}^k)^n$$

از مقایسه‌ی معادله‌ی ۲ با اتحاد۴، یک دسته جواب خاص برای آن حاصل می‌شود:

$$X_1 = a_1^k \;,\; X_2 = a_2 a_{k+1}^{k-1} \;, \ldots,\; X_{(k-1)N+1} = a_k a_1^{k-1} \;,$$
$$X_{(k-1)N+2} = a_{k+1}^k$$

در این جا با دسته جواب فوق، برهان قضیه‌ی نهایی H.M کامل می‌شود.

تمرین:

با قانون تحویل پذیری H.M نشان دهید، معادله های زیر به ازای «n = ۲, ۳, ۴, ۵» دارای جواب هستند:

$$X_1^n + X_2^n + X_3^n + X_4^n + X_5^n + X_6^n + X_7^n = X_8^n \qquad (1)$$
$$X_1^n + X_2^n + \cdots + X_7^n = Y_1^n + Y_2^n + Y_3^n + \cdots + Y_7^n \qquad (2)$$

راهنمایی: برای تعیین جوابی برای معادله‌ی۱ کافی است با قانون تحویل پذیری H.M، اتحادهای عددی زیر را به حالت خاص معادله‌ی۱ تحویل دهیم. (برای تعیین جوابی برای معادله‌ی۲ کافی است از تعویض نقش اعداد استفاده کنیم):

$$2^2 + 3^2 + 6^2 = 7^2 \;,\; 3^3 + 4^3 + 5^3 = 6^3 \quad \text{و}$$
$$(95800)^4 + (217519)^4 + (414560)^4 = (422481)^4$$
$$(27)^5 + (84)^5 + (110)^5 + (133)^5 = (144)^5$$

برای مثال، پس از تحویل، به اتحاد عددی زیر می‌رسیم:

$$(729)^5 + (12096)^5 + (15840)^5$$
$$+ (19152)^5 + (2268)^5 + (2970)^5 + (3591)^5 = (20736)^5$$

منابع

1. The discovery of prime numbers formula and its results & other top researches (Author: S.M.R.Hashemi Moosavi).

توضیح: این کتاب به زبان انگلیسی و فارسی در دست چاپ است.

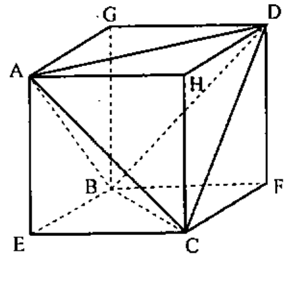
۲. سایت کاشف فرمول: www.primenumbersformula.com

با راهیان المپیادهای ریاضی (۸)

● دکتر غلامرضا یاسی‌پور

۱. چهاروجهی‌های محاط در متوازی السطوح‌ها

در صفحه، مثلث متساوی‌الاضلاعی با رأس‌هایی به مختصات صحیح موجود نیست، در حالی که در فضا، چهاروجهی با رأس‌های (۰،۰،۱) ، (۰،۱،۰) ، (۱،۰،۰) و (۱، ۱، ۱) منتظم است. بنابراین، همان‌گونه که در شکل ۱ می‌بینید، چهاروجهی منتظم محاط در مکعب واحد موجود است.



شکل ۱

به عنوان پیامد این گزاره، راهی کوتاه برای محاسبه‌ی حجم چهاروجهی منتظمی وجود دارد که یالش برابر a است. در این مورد، تمام کاری که باید انجام دهیم این است که حجم‌های چهار چهاروجهی‌ای را که می‌بُریم، از حجم مکعبی با یال برابر $a\sqrt{۲}/۲$ کم کنیم. بنابراین، حجم چهاروجهی منتظم مورد بحث عبارت است از:

$$a^{۳}\sqrt{۲}/۴-۴\times a^{۳}\sqrt{۲}/۲۴=a^{۳}\sqrt{۲}/۱۲$$

با تغییر صورت شکل ۱ ملاحظه می‌کنیم، هر چهاروجهی را می‌توان به این طریق، در یک متوازی‌السطوح محاط کرد. در این بحث، به روابط بین ویژگی‌های چهاروجهی و متوازی‌السطوح وابسته به آن علاقه‌مندیم و در این مورد به بررسی دو حالت می‌پردازیم: یکی حالت چهاروجهی متعامد و دیگری حالت

چهاروجهی متساوی‌الساقین.

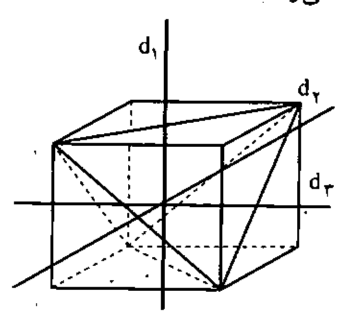
چهاروجهی را «متعامد»[1] می‌نامیم، اگر یال‌های مقابل آن متعامد باشند. درنتیجه، چهاروجهی وقتی متعامد است که اگر و تنها اگر متوازی‌السطوح وابسته به آن «لوزوی»[2] باشد؛ یعنی؛ جمیع وجه‌های آن لوزی باشد. در واقع، چهاروجهی متعامد است، اگر و تنها اگر دو قطر هر وجه متوازی‌السطوح مربوطه متعامد باشند. از طرف دیگر، متوازی‌الاضلاعی که قطرهای آن متعامد باشند، لوزی است و به این ترتیب نتیجه به‌دست می‌آید.

اما چهاروجهی متساوی‌الساقین[3] نوعی چهاروجهی است که در آن یال‌های مقابل برابر باشند. این چهاروجهی را گاهی «متساوی‌الوجوه»[4] نیز می‌نامند، زیرا وجه‌های آن، مثلث‌های هم‌نهشت‌اند. چهاروجهی متساوی‌الساقین است، اگر و تنها اگر قطرهای هر وجه متوازی‌السطوح وابسته به آن برابر باشند، و درنتیجه، اگر و تنها اگر متوازی‌السطوح وابسته، قائم[5] باشد.

اکنون نشان می‌دهیم که چگونه ملاحظات فوق در حل مسئله‌ی زیر به کار می‌روند؛ مسئله‌ای که در سال ۱۹۸۴، در تست انتخابی رومانیایی مربوط به المپیاد ریاضی بالکان داده شده است.

فرض می‌کنیم ABCD یک چهاروجهی و d_1، d_2 و d_3 به ترتیب، عمود مشترک AB و CD، AC و BD، و AD و BC باشند. ثابت کنید چهارضلعی متساوی‌الساقین است، اگر و تنها اگر d_1، d_2 و d_3 دو به دو متعامد باشند.

برای حل مسئله، توجه داریم که اگر چهاروجهی را چنان‌که در شکل ۲ می‌بینید، در یک متوازی‌السطوح محاط کنیم، آن‌گاه d_1، d_2 و d_3، به ترتیب، به قطرهای سه جفت وجه آن عمودند و درنتیجه بر خود این وجوه عمود می‌شوند. متوازی‌السطوح مورد بحث قائم است، اگر و تنها اگر هر دو وجه مشترک در یک یال آن متعامد باشند. از طرف دیگر، دو صفحه متعامدند، اگر و تنها اگر عمودهای وارد بر آن دو، متعامد باشند. درنتیجه، متوازی‌السطوح قائم است، اگر و تنها اگر d_1، d_2 و d_3 دوبه‌دو متعامد باشند که به این ترتیب، ادعا به اثبات می‌رسد.



شکل ۲

مسائل زیر، ویژگی‌هایی از چهاروجهی‌های متعامد و متساوی‌الساقین را توصیف می‌کنند که می‌توانند با استفاده از همین روش اثبات شوند:

۱. حجم یک چهاروجهی متساوی‌الساقین را بر حسب یال‌های آن بیان کنید.

۲. شعاع کره‌ی محیطی چهاروجهی متساوی‌الساقین را بر حسب یال‌های آن بیان کنید.

۳. فرض می‌کنیم ABCD یک چهاروجهی و M، N، P، Q، R و S، به ترتیب، وسط‌های AB، CD، AC، BD، AD و BC باشند. ثابت کنید قطعه‌های MN، PQ و RS متقاطع‌اند.

۴. ثابت کنید، اگر دو جفت یال‌های یک چهاروجهی متعامد باشند، چهاروجهی متعامد است.

۵. ثابت کنید در متوازی‌السطوح لوزوی $A_1B_1C_1D_1A_2B_2C_2D_2$، عمود مشترک‌های جفت خطوط A_1C_1 و B_2D_2، A_1B_2 و C_1D_2، A_1D_2 و B_2C_1، متقاطع‌اند.

۶. ثابت کنید در یک چهاروجهی متعامد، ارتفاعات متقاطع‌اند.

۷. فرض می‌کنیم ABCD یک چهاروجهی متعامد باشد، ثابت کنید:

$$AB^2 + CD^2 = AC^2 + BD^2 = AD^2 + BC^2$$

۸. حجم یک چهاروجهی متعامد را بر حسب یال‌های آن بیان کنید.

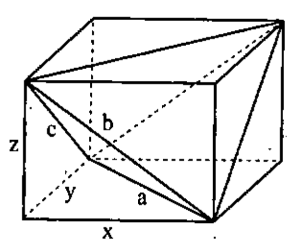
۹. ثابت کنید اگر جمیع چهار وجه یک چهاروجهی سطحی یکسان داشته باشند، آن‌گاه چهاروجهی، متساوی‌الساقین است.

۱۰. در یک چهاروجهی، جمیع ارتفاعات برابرند و یک رأس متعامداً بر محل تلاقی ارتفاعات وجه مقابل تصویر شده است. ثابت کنید چهاروجهی منتظم است.

❁ ❁ ❁

حل

چهاروجهی‌های محاط در متوازی‌السطوح‌ها



شکل ۱

۱. در شکل ۱، چهاروجهی را در متوازی‌السطوحی محاط می‌کنیم. اگر x، y و z یال‌های متوازی‌السطوح و a، b و c یال‌های چهاروجهی باشند، از آن‌جا که متوازی‌السطوح قائم است، براساس قضیه‌ی فیثاغورس داریم:

$$x^2 + y^2 = a^2$$

$$y^2 + z^2 = c^2$$

$$x^2 + z^2 = b^2$$

درنتیجه:

$$x=\sqrt{\frac{a^2+b^2-c^2}{2}}\ ;\ y=\sqrt{\frac{a^2+c^2-b^2}{2}}\ ;\ z=\sqrt{\frac{b^2+c^2-a^2}{2}}$$

حجم متوازی‌السطوح xyz، و حجم چهاروجهی یک‌سوم آن و برابر است با:

$$\frac{1}{6\sqrt{2}}\sqrt{(a^2+b^2-c^2)(a^2+c^2-b^2)(b^2+c^2-a^2)}$$

(H. Steinhaus, one hundred problems in elementary mathematics, Dover Publ. Inc., New York, 1979.)

۲. در صورتی که توجه کنیم، کره‌ی محیطی چهاروجهی، کره‌ی محیطی متوازی‌السطوح قائمی نیز هست که در آن محاط شده است، پاسخ بلافاصله به دست می‌آید.

شعاع محیطی متوازی‌السطوح قائم، نصف قطر اصلی آن است. اگر a، b و c طول‌های یال‌های چهاروجهی باشند، آن‌گاه یال‌های ycx و z متوازی‌السطوح در روابط زیر صدق می‌کنند:

$$x^2+y^2=a^2$$

$$y^2+z^2=b^2$$

$$x^2+z^2=c^2$$

طول قطر متوازی‌السطوح عبارت است از:

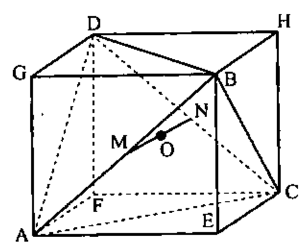
$$\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{2}}$$

بنابراین شعاع کره‌ی محیطی برابر است با:

$$\sqrt{(a^2+b^2+c^2)/8}$$

۳. چون در شکل ۲، چهاروجهی را در متوازی‌السطوح AECFGBHD محاط می‌کنیم، در این صورت M و N مراکز وجه‌های AEBG و CHDF هستند. بنابراین، O مرکز ثقل متوازی‌السطوح بر MN است. با تکرار این استدلال درمی‌یابیم که O در تقاطع MN، PQ و RS است. توجه داشته باشید که O مرکز ثقل ABCD نیز هست.

۴. چهاروجهی را در یک متوازی‌السطوح محاط می‌کنیم. از آن‌جا که یکی از قطرهای وجه AEBG قطر AB و دیگری موازی CD است، نتیجه می‌گیریم که AEBG متوازی‌الاضلاعی با اقطار متعامد، و درنتیجه لوزی است.



شکل ۲

استدلالی مشابه نشان می‌دهد که AECF نیز لوزی است. به این ترتیب:

$$BH=BG=BE$$

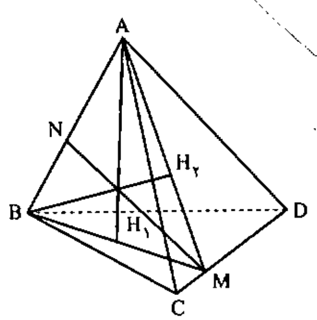
که نشان می‌دهد وجه BHCE نیز لوزی است و درنتیجه: $AD\perp BC$.

۵. این مسئله کاربردی از این قضیه است:

با مفروض بودن نقطه‌ی A و صفحه‌ای ناشامل A، فرض می‌کنیم L خطی در این صفحه، B تصویر A بر این صفحه و C نقطه‌ای در این صفحه باشد. BC بر L عمود است، اگر و تنها اگر AC بر L عمود باشد.

برای اثبات این نتیجه توجه داشته باشید که AB بر صفحه، و درنتیجه بر L عمود است. در این صورت، هریک از دو تعامد مستلزم این است که L بر صفحه‌ی ABC عمود باشد، و درنتیجه مستلزم تعامد دیگر است.

اکنون فرض می‌کنیم ABCD یک چهاروجهی باشد. اگر $AH_1\perp(BCD)$، که در آن $H_1\in(BCD)$ (شکل ۳ را ملاحظه کنید)، در این صورت، H_1 محل تلاقی ارتفاعات مثلث BCD است. در واقع، از آن‌جا که $AH_1\perp(BCD)$ و $AB\perp CD$، آن‌گاه بنابر قضیه‌ی فوق، $BH_1\perp CD$ و به همین ترتیب: $CH_1\perp BD$ و $DH_1\perp BC$.



شکل ۳

فرض می‌کنیم: $BH_1\cap CD=\{M\}$ و $H_2\in AM$ با $BH_2\perp AM$. از آن‌جا که $CD\perp AH_1$ و $CD\perp AB$، داریم: $CD\perp(ABM)$ و درنتیجه: $CD\perp BH_2$. این مطلب نشان می‌دهد که $BH_2\perp(ACD)$ و درنتیجه H_2 محل تلاقی ارتفاعات مثلث ACD است. بنابر نتیجه‌ای از این ساختار، AH_1 و BH_2 متقاطع می‌شوند و بنابر تقارن، اگر CH_3 و DH_4 ارتفاع‌های دیگر باشند، هر دو مورد با خطوط AH_1، BH_2، CH_3 و DH_4 تقاطع می‌کنند. از آن‌جا که هیچ سه مورد از این خط‌ها در یک صفحه قرار ندارند، نتیجه می‌گیریم که جمیع آن‌ها در یک نقطه متقاطع می‌شوند. نقطه‌ی تقاطع آن‌ها را معمولاً نقطه‌ی ارتفاعیه‌ی[۶] چهاروجهی می‌نامند.

۶. راه‌حل مسئله‌ی قبل را به‌خاطر می‌آوریم. اگر فرض کنیم N بر AB چنان باشد که $MN\perp AB$، آن‌گاه MN شامل نقطه‌ی ارتفاعیه‌ی چهاروجهی و عمود مشترک خطوط AB و CD است. چهاروجهی $A_1B_2C_1D_2$ متعامد است، درنتیجه عمود مشترک‌های

جفت‌های خطوط صورت مسئله، شامل نقطه‌ی ارتفاعیه‌ی چهاروجهی‌اند و درنتیجه متقاطع می‌شوند.

۷. اتحاد متوازی‌الاضلاع را به‌خاطر می‌آوریم که طبق آن، در متوازی‌الاضلاع MNPQ، چنین رابطه‌ای برقرار است:

$$MP^2 + NQ^2 = MN^2 + NP^2 + PQ^2 + QM^2$$

چهاروجهی را در متوازی‌السطوح لوزی‌القاعده[7] ای با طول یال a محاط می‌کنیم. با نوشتن اتحاد متوازی‌الاضلاع در مورد هر وجه، به دست می‌آوریم:

$$AB^2 + CD^2 = 4a^2 = BC^2 + AD^2 = AD^2 + BC^2$$

و مسئله به این ترتیب حل می‌شود.

۸. فرض می‌کنیم، ABCD چهاروجهی مفروض، محاط در متوازی‌السطوح لوزی‌القاعده‌ی AHDGECFB باشد. حجم چهاروجهی، یک‌سوم حجم متوازی‌السطوح است. از طرف دیگر، حجم متوازی‌السطوح شش برابر حجم چهاروجهی EABC است. بنابراین مورد اخیر را محاسبه می‌کنیم.

قرار می‌دهیم:

$AB = a$ و $BC = b$ و $AC = c$ و $EH = d$

همان‌گونه که در مسئله‌ی قبل ملاحظه می‌شود، این چهار یال به طور کامل دو یال باقی‌مانده را معین می‌کنند. سطح وجه ABC، بنابر فرمول هرو[8] برابر است با:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

که در آن: $p = (a+b+c)/2$.

از طرف دیگر، از آن‌جا که یال‌های EA، EB و EC برابرند، رأس E در O، مرکز محیطی وجه ABC تصویر می‌شود. برای محاسبه‌ی ارتفاع EO، توجه داشته باشید، از آن‌جا که وجه AECH لوزی است:

$$AE = 1/2\sqrt{c^2 + d^2}$$

و در مثلث ABC داریم:

$$AO = abc/(4s) = abc/(4\sqrt{p(p-a)(p-c)(p-c)}$$

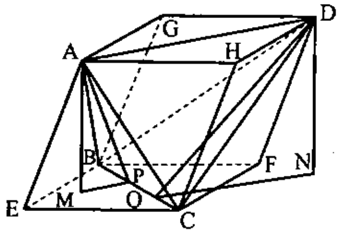
قضیه‌ی فیثاغورس مستلزم این است که:

$$EO = \sqrt{EA^2 - AO^2} = \frac{1}{2}\sqrt{c^2 + d^2 - \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4p(p-a)(p-b)(p-c)}}$$

درنتیجه، حجم چهاروجهی ABCD عبارت است از:

$$\frac{2}{3}EO.s = \frac{1}{6}\sqrt{4(c^2 + d^2)p(p-a)(p-b)(p-c) - a^2b^2c^2}$$

۹. فرض می‌کنیم ABCD مانند قبل، چهاروجهی محاط در متوازی‌السطوح AHDGECFB باشد. نیز فرض می‌کنیم M و N تصاویر A و D بر صفحه‌ی "ECFB" باشند، و $MP \perp BC$ و $NQ \perp BC$ و $Q \in BC$ و P (شکل۴).



شکل۴

بنابر نتیجه‌ی مذکور در راه‌حل مسئله‌ی ۵، $AP \perp BC$ و $DQ \perp BC$ و از آن‌جا که مثلث‌های ABC و DBC دارای سطح یکسان‌اند، به‌دست می‌آوریم: $AP = DQ$. و این مستلزم آن است که مثلث‌های AMP و DNQ هم‌نهشت باشند. بنابراین $MP = NQ$.

به این ترتیب، M و N از BC به یک فاصله‌اند و از آن‌جا که A و D نیز به یک فاصله از GH قرار دارند، نتیجه می‌شود که BC تصویر GH روی صفحه‌ی "ECFB" است. درنتیجه صفحات "GBCH" و "ECFB" متعامدند.

این مطلب نشان می‌دهد که CH هم بر EC و هم بر CF عمود است. استدلالی مشابه، $CE \perp CF$ را به دست می‌دهد. به این ترتیب، متوازی‌السطوح AHDGECFB قائم است و درنتیجه چهاروجهی مورد بحث متساوی‌الساقین.

۱۰. فرض می‌کنیم ABCD چهاروجهی باشد و A در H، نقطه‌ی ارتفاعیه‌ی مثلث BCD تصویر شود. نیز فرض می‌کنیم، CM ارتفاع این مثلث باشد. از آن‌جا که بنابر قضیه‌ی مذکور در راه‌حل مسئله‌ی ۵، AH عمود بر صفحه‌ی "BCD" است و $CM \perp BD$، نتیجه می‌شود که: $AC \perp BD$.

به همین ترتیب، $AD \perp BC$ و $AB \perp CD$. بنابراین، چهاروجهی مورد بحث متعامد است و این مستلزم آن است که متوازی‌السطوح وابسته لوزی‌القاعده باشد.

از طرف دیگر، فرمول حجم و برابری ارتفاع‌ها مستلزم برابری سطوح چهار وجه است و مسئله‌ی ۹ مستلزم آن است که چهاروجهی مزبور متساوی‌الساقین باشد. به این ترتیب، متوازی‌السطوح وابسته، قائم است. اما متوازی‌السطوح قائم لوزی‌القاعده‌ی مورد بحث، مکعب، و چهاروجهی وابسته‌اش منتظم است (المپیاد ریاضی رومانی، ۱۹۷۵؛ طرح از: N. Popescu).

زیرنویس

1. orthogonal
2. rhomboidal
3. isosceles
4. equifacial
5. right
6. orthocenter
7. rhomboidal parallelepiped
8. Hero

ریاضی را یاد بگیریم!

گفت و گو: انیس خوش لهجه صدق

اشاره

نوید نادری علیزاده متولد سال ۱۳۶۹،
در شهر قائم‌شهر از توابع استان مازندران، در خانواده‌ای ۴ نفره زندگی می‌کند. گرچه آقای علیزاده بیشتر مجذوب درس و تحصیل است، اما در بین علاقه‌های او می‌شود به فوتبال و رایانه هم اشاره کرد. وی رتبه‌ی یک کنکور ریاضی در سال ۱۳۸۶ است. به این بهانه، گفت‌وگویی را با ایشان ترتیب دادیم.

از این که اهل قائم‌شهر هستید و رتبه‌ی یک ریاضی را از آن خود کرده‌اید، چه احساسی دارید؟

بسیار خوش‌حالم از این که توانستم نام قائم‌شهر را پس از سال‌ها احیا کنم و بار دیگر افتخاری برای شهرم و هم‌چنین استان مازندران کسب کنم.

چه کسی خبر قبولی را به شما داد؟

آقای ابراهیم خدایی، معاون سازمان سنجش، هشتم مرداد طی تماسی تلفنی این خبر را به من داد.

چه امکاناتی برای قبولی داشتید؟

محیط آرام خانواده، دبیران و مدرسه‌ی عالی، کتاب‌های کمک‌درسی و...

خواندن هم‌زمان برای کنکور و دوره‌ی پیش‌دانشگاهی را چه‌طور هماهنگ کردید؟

در سال‌های اول تا سوم سعی کردم تسلط خوبی بر درس‌های پایه پیدا کنم و در تابستان ۸۵ هم آن‌ها را به طور کامل مرور کردم. ضمن این که دوره‌ی پیش‌دانشگاهی مدرسه هم از تابستان شروع شده بود و من در تابستان، درس‌های پیش را هم مطالعه می‌کردم. ولی به‌طور جدی‌تر، از مهرماه با یک برنامه‌ریزی منسجم، به مطالعه‌ی درس‌های پیش (در کنار دروس پایه) پرداختم.

مطالعه‌ی آزاد هم داشتید؟

در طول یک سال آخر بیشتر روی درس تمرکز داشتم، ولی برخی مجلات و روزنامه‌ها را هم برای تنوع و رفع خستگی می‌خواندم.

برای رتبه درس می‌خواندید؟

نمی‌توانم بگویم نه، ولی از اول دبیرستان سعی کردم هر درسی را که می‌خوانم، به بهترین نحو مطالعه کنم. یعنی تمام نمرات من در طول دوران تحصیلم خوب بود، ولی به هرحال یکی از هدف‌های من از همان ابتدا، کسب رتبه‌ای خوب در کنکور سراسری بود.

نسبت به ریاضی چه احساسی دارید؟

یکی از زیباترین و شیرین‌ترین درس‌هایی است که از ابتدای دوران تحصیل تا انتها، همواره جزو درس‌های اصلی بوده و خواهد بود.

تعریف شما از این علم چیست؟ آیا ریاضی فقط علم اعداد و ارقام است؟

ریاضی علمی فهمیدنی است. علمی زیبا که تلاش سخت و پشتکار فراوان می‌خواهد. علمی نیست که در حفظ کردن چند عدد و رقم خلاصه شده باشد. علمی است که اگر آن را خوب بفهمیم، آن را یکی از زیباترین درس‌ها می‌یابیم. شاید بتوانیم بگوییم که ریاضی بازتابی از طبیعت و جهان اطراف ماست و احتمالاً بسیاری از پدیده‌های دنیا را می‌توان به زبان ریاضی توصیف کرد.

رویداد و یا جمله‌ای را که در زندگی شما تأثیر عمیقی بر جای گذاشته باشد به یاد دارید؟

در جایی جمله‌ای را دیدم که در خاطرم مانده و برایم جالب است: «اگر صخره‌ای در مسیر رود نبود، رود هیچ آوازی از خود سر نمی‌داد.»

از کدام مبحث ریاضی بیشتر لذت می‌برید؟

همه‌ی مباحث ریاضی، به‌خصوص مباحث هندسه.

ریاضی را چه‌طور مطالعه کردید؟



ریاضی بازتابی از طبیعت و جهان اطراف ماست، زیبا و فهمیدنی است

ریاضی را فقط با تمرین و تکرار و حل تست‌های گوناگون یاد بگیرم، نه با حفظ کردن فرمول‌ها و روابط. یعنی من ریاضی را حفظ نکردم، توانستم یاد گرفتم.

○ در این زمینه هم مطالعه‌ی آزاد داشتید؟

مطالعات من در درس ریاضی در چند سال اخیر: تقریباً حول مطالب کتاب درسی یا کمی فراتر از آن بود. فقط در سال‌های دوم و سوم، زمانی که در کلاس‌های المپیاد ریاضی شرکت می‌کردم، با مباحثی خارج از کتاب‌های درسی آشنا شدم.

○ در المپیاد مقامی هم کسب کردید؟

مقامی کسب نکردم. در سال دوم و سوم دوره‌ی متوسطه در آزمون مرحله‌ی اول المپیاد پذیرفته شدم. مطالعه برای المپیاد با کنکور متفاوت است و چون هدف من کنکور بود، بیشتر روی آن سرمایه گذاری کردم.

○ برای کنکور چه طور تست ریاضی زدید؟

در سال‌های اول و دوم بیشتر تشریحی کار می‌کردم. ولی از سال سوم، با توجه به گسترش مطالب ریاضی و نزدیک شدن به کنکور، از کتاب‌های کمک‌درسی متنوعی برای تست زدن استفاده کردم و در ابتدای دوره‌ی پیش‌دانشگاهی، بدون وقت گرفتن و صرفاً برای یادگیری مطالب، تست زدم. ولی در انتهای سال، برای تست‌ها زمان مشخصی درنظر می‌گرفتم تا خودم را به شرایط کنکور نزدیک کنم. در کنکور توانستم ریاضی را ۱۰۰ درصد بزنم.

○ شما در حل مسائل و تمرین‌ها از روش‌های ابتکاری نیز استفاده می‌کنید؟

بله. شاید روش‌های آسان‌تری مثل عددگذاری، مثال زدن، استفاده از گزینه‌ها برای رسیدن به جواب و... برای حل برخی تست‌ها وجود داشته باشد. ولی از همه‌ی این‌ها مهم‌تر: راه‌حل اصلی و تشریحی مسئله، و فراگیری آن راه است.

○ در جهت آموزش بهتر در زمینه‌ی ریاضی: چه پیشنهادی برای دبیران دارید؟

این که با عشق و علاقه، و با صبر و حوصله و نیز با اطلاعات کافی، در کلاس‌های درس به امر آموزش بپردازند و با حل مثال‌های متعدد و متنوع، این درس جذاب را به دانش‌آموزان علاقه‌مند بیاموزند. به نظر من بهتر است پس از ارائه‌ی مثال‌های گوناگون و طبق قاعده‌ی استدلال استقرایی؛ دانش‌آموزان را به پیدا کردن روابط و فرمول‌ها وادارند، نه این که ابتدا فرمول را بگویند و بعد از آن، مثال‌ها را مطرح کنند. در واقع دانش‌آموزان را هم برای پیدا کردن روابط دخالت دهند و در حل مسائل، آن‌ها را نیز درگیر کنند.

○ عامل موفقیت خودتان را چه می‌دانید؟

در مرتبه‌ی اول ایمان و اتکا به خدا، در مرتبه‌ی دوم حمایت خانواده، در مرتبه‌ی سوم محیط مدرسه و تلاش دبیران، و در انتها پشتکار و برنامه‌ریزی.

○ در دانشگاه، در کدام رشته تحصیل خواهید کرد؟ به چه انگیزه‌ای؟

به امید خدا، در رشته‌ی مهندسی برق دانشگاه صنعتی شریف تحصیل خواهم کرد و تا مدارج عالی پیش خواهم رفت تا در آینده بتوانم به این مرز و بوم، خدمت کنم.

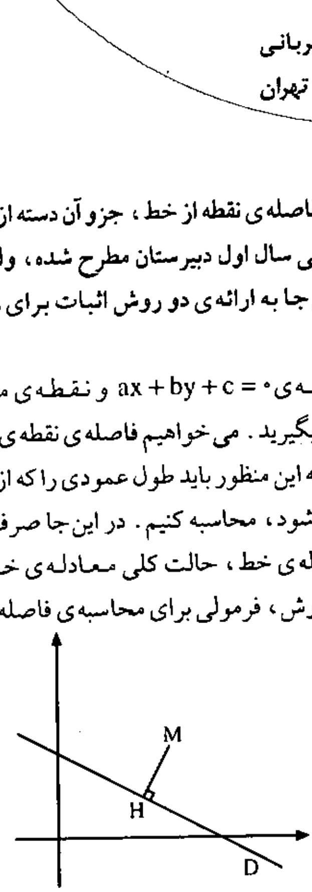
فاصله‌ی نقطه

● مهدی قربانی
دبیر ریاضی منطقه‌ی ۹ تهران

اشاره

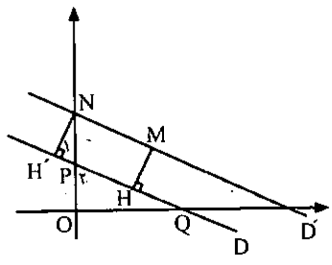
دستور محاسبه‌ی فاصله‌ی نقطه از خط، جزو آن دسته از روابطی است که در کتاب درسی سال اول دبیرستان مطرح شده، ولی اثبات آن نیامده است. در این جا به ارائه‌ی دو روش اثبات برای رابطه‌ی ذکر شده می‌پردازیم.

خط D به معادله‌ی $ax+by+c=0$ و نقطه‌ی معلوم $M(x_0,y_0)$ را در نظر بگیرید. می‌خواهیم فاصله‌ی نقطه‌ی M را از خط D محاسبه کنیم. به این منظور باید طول عمودی را که از نقطه‌ی M بر خط D رسم می‌شود، محاسبه کنیم. در این جا صرف‌نظر از حالت‌های خاص معادله‌ی خط، حالت کلی معادله‌ی خط را در نظر می‌گیریم و به دو روش، فرمولی برای محاسبه‌ی فاصله‌ی نقطه از خط می‌یابیم.



روش اول

در شکل(۲)، از نقطه‌ی M خط D' را به موازات D رسم کرده‌ایم. فاصله‌ی این دو خط موازی، جواب مسئله خواهد بود. به منظور یافتن این فاصله، معادله‌ی خط D' را می‌نویسیم. این کار به سهولت انجام‌پذیر است، زیرا مختصات یک نقطه از آن، یعنی M معلوم و شیب آن نیز مساوی با شیب خط D است. پس می‌توان نوشت:



$$\left.\begin{array}{l} M(x_0,y_0) \\ m_D = m_{D'} = -\dfrac{a}{b} \end{array}\right\} \Rightarrow y - y_0 = m_{D'}(x - x_0)$$

$$\Rightarrow y = \frac{-a}{b}x + \frac{a}{b}x_0 + y_0$$

خط D' محور عرض‌ها را در N قطع کرده که مختصات آن به صورت زیر است:

$$x = 0 \Rightarrow y = \frac{a}{b}x_0 + y_0 = \frac{ax_0 + by_0}{b} \Rightarrow N(0, \frac{ax_0 + by_0}{b})$$

اکنون کافی است، طول پاره‌خط NH' را که برابر MH است، حساب کنیم. این محاسبه با استفاده از تشابه دو مثلث OPQ و $NH'P$ امکان‌پذیر است:

(۱)

$$\left.\begin{array}{l} \hat{P}_1 = \hat{P}_2 \\ \hat{H} = \hat{O} = 90^\circ \end{array}\right\} \Rightarrow O\overset{\Delta}{P}Q = N\overset{\Delta}{H'}P \Rightarrow \frac{PQ}{NP} = \frac{OQ}{NH'}$$

هریک از مقادیر PQ، NP و OQ را به صورت زیر محاسبه می‌کنیم:

$$OQ = \left|\frac{-c}{a}\right|$$

$$PQ = \sqrt{OP^2 + OQ^2} = \sqrt{(\frac{-c}{a})^2 + (-\frac{c}{b})^2}$$

$$= \sqrt{\frac{c^2}{a^2.b^2}(a^2+b^2)} = \frac{|c|}{|ab|}.\sqrt{a^2+b^2}$$

$$NP = ON - OP = \left|\frac{ax_0 + by_0}{b} - \frac{-c}{b}\right| = \left|\frac{ax_0 + by_0 + c}{b}\right|$$

با قرار دادن این مقادیر در تساوی ۱ خواهیم داشت:

از خط

$$\frac{\frac{|c|}{|a|.|b|}\sqrt{a^2+b^2}}{\frac{|ax_0+by_0+c|}{|b|}} = \frac{\frac{|c|}{|a|}}{MH} \Rightarrow \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{|ax_0+by_0+c|}$$

$$= \frac{1}{MH} \Rightarrow MH = \frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

این رابطه نشان می‌دهد، برای محاسبه‌ی فاصله‌ی نقطه از خط، ابتدا معادله‌ی خط داده شده را به صورت $ax+by+c=0$ می‌نویسیم. سپس به جای x و y، مقادیر x_0 و y_0 را جای‌گزین می‌کنیم و قدر مطلق حاصل را بر $\sqrt{a^2+b^2}$ تقسیم می‌کنیم.

مثال: فاصله‌ی نقطه‌ی $A(-2,3)$ از خط به معادله‌ی $y=\frac{3}{4}x-\frac{1}{2}$ را به دست آورید.

حل:

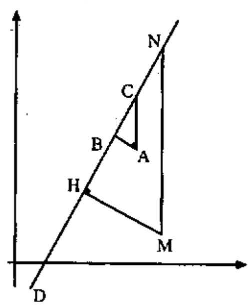
$$y=\frac{3}{4}x-\frac{1}{2} \Rightarrow -3x+4y+2=0$$

$$d=\frac{|-3\times(-2)+4\times 3+2|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{20}{5}=4$$

روش دوم

ابتدا از M خطی بر D عمود می‌کنیم تا آن را در نقطه‌ی H قطع کند. اندازه‌ی پاره‌خط MH، همان فاصله‌ی M از خط D است. سپس از نقطه‌ی M خطی به موازات محور عرض‌ها رسم می‌کنیم تا خط D را در نقطه‌ی N قطع کند (شکل ۳). مختصات نقطه‌ی N عبارت است از: $N(x_0, -\frac{ax_0+c}{b})$ (چرا؟) و طول MN چنین خواهد شد:

$$MN=|y_M-y_N|=\left|y_0+\frac{ax_0+c}{b}\right|=\frac{|ax_0+by_0+c|}{|b|}$$



اکنون مثلث ABC با اضلاع: $BC=\sqrt{a^2+b^2}$، $AC=|b|$ و $AB=|a|$ را چنان در نظر می‌گیریم که وتر BC بر NH منطبق و $AC \parallel MN$ باشد. دو مثلث قائم‌الزاویه‌ی MHN و ABC متشابه‌اند (چرا؟) و می‌توان نوشت:

$$\frac{MH}{AC}=\frac{MN}{BC}$$

با جای‌گذاری مقادیر معلوم در تساوی اخیر خواهیم داشت:

$$\frac{MH}{|b|}=\frac{\frac{|ax_0+by_0+c|}{|b|}}{\sqrt{a^2+b^2}} \Rightarrow MH=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

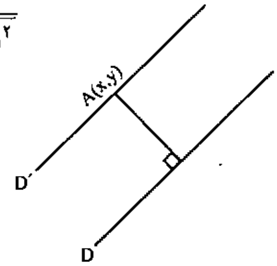
اثبات مطلب اخیر به همین دو روش ختم نمی‌شود. شما می‌توانید با به‌کارگیری استعداد و خلاقیت خود، روش‌های دیگری را ابداع کنید. پس قلم و کاغذ به‌دست بگیرید و شروع کنید. موفق باشید.

نتیجه‌ی ۱: فاصله‌ی خط $ax+by+c=0$ از مبدأ مختصات برابر است با: $\frac{|c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

نتیجه‌ی ۲: فاصله‌ی دو خط موازی به معادلات

برابر است با: $\begin{cases} D: ax+by+c=0 \\ D': ax+by+c'=0 \end{cases}$

$$\frac{|c-c'|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$



زیرا فاصله‌ی نقطه‌ی دلخواه $(x,y)\in D'$ از خط D برابر است با:

$$d=\frac{|ax+by+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

اما $ax+by=-c'$ و بنابراین:

$$d=\frac{|c-c'|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

مثال: فاصله‌ی دو خط موازی $2x+y+3=0$ و $4x+2y+4=0$ برابر است با:

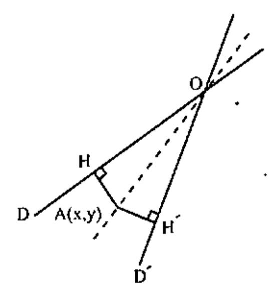
$$d=\frac{|3-2|}{\sqrt{4+1}}=\frac{1}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$$

نتیجه‌ی ۳: می‌دانیم نیم‌ساز زاویه، مکان هندسی نقاطی از صفحه است که هر نقطه‌ی واقع بر آن، به فاصله‌های مساوی از اضلاع زاویه قرار دارد. با توجه به این مطلب، اگر دو خط به معادلات:

$$ax+by+c=0 \quad \text{و} \quad a'x+b'y+c'=0$$

متقاطع باشند، معادله‌ی خط نیم‌ساز زاویه‌ی بین آن‌ها به صورت زیر خواهد شد:

$$AH=AH' \Rightarrow \frac{|ax+by+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{|a'x+b'y+c'|}{\sqrt{a'^2+b'^2}}$$



مثال: معادله‌ی نیم‌ساز بین دو خط $x+y+2=0$ و $-x+y-4=0$ را بیابید.

حل:

$$\frac{|x+y+2|}{\sqrt{1+1}}=\frac{|-x+y-4|}{\sqrt{1+1}} \Rightarrow x+y+2=\pm(-x+y-4)$$

$$\Rightarrow x=-3 \quad , \quad y=1$$

Math2.org
معرفی سایت‌های ریاضی جهان

● احسان یارمحمدی

آدرس اینترنتی سایت: **http://math2.org**

این سایت را می‌توان بر روی CD و... ذخیره کرد. و در صفحه اصلی خود دارای فهرست‌های موضوعی زیر است.

الف. فهرست پیام ریاضی (The Math Message Board)

ب. آیا سؤال ریاضی دارید؟ (Have a Math Question)

پ. همکاری سایت ریاضی (Web Math Collaboration مخفف WMC)

ت. پیوست‌ها (Links)

ث. منابع در دسترس دیگر (Other on-site Resources)

ج. فهرست‌های مرجع ریاضی (Math Reference Table)

این قسمت از سایت دارای عنوان‌های زیر است.

I. عمومی (General)

۱. نمادگذاری عدد (Number Notation)

۲. جدول ضرب (Multiplication Table)

۳. تبدیل کسر دهدهی (Fraction-Decimal Conversion)

۴. تبدیل واحد و اندازه (Units & Measurment Conversion)

II. جبر (Algebra)

III. هندسه (Geometry)

VI. مثلثات (Trigonometry)

V. ریاضیات گسسته / جبر خطی (Discrete Math/ Linear Algebra)

VI. آمار (Statistics)

VII. حساب دیفرانسیل و انتگرال (Calculus)

VIII. پیشرفته (Advanced)

مسائل برای حل

ریاضیات ۱

میر شهرام صدر

۱. مجموع سه عدد فرد طبیعی متوالی برابر با ۳۱۵ است، آن عددها را بیابید.

۲. اگر $M=\{x\in \mathbb{N} | x<10\}$ مجموعه مرجع و $A=\{x\in M | x$ عدد اول است$\}$ و $B=\{x\in M | x=2k, k\in \mathbb{N}\}$ و $C=\{x\in M | x$ عدد فرد است$\}$، در این صورت:

الف) آیا مجموعه‌های A' و $(B\cap C)$ جدا از هم هستند.

ب) نشان دهید دو مجموعه $(A\cap C)'$ و $(A'\cup C')$ برابرند.

۳. فرض کنید $An=\{3n+2, 3n+1\}$ مطلوب است محاسبه‌ی $\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i$.

راهنمایی: $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$

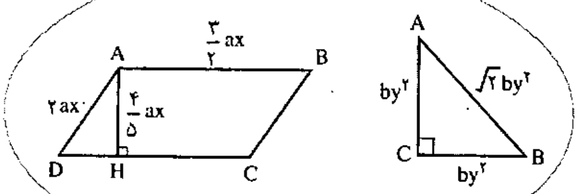
۴. اگر عدد $2^x \times 3^y$ مجذور کامل باشد، به‌ازای کدام مقادیر k عدد $2^{(x+2)} \times 3^{(3y+k)}$ نیز مجذور کامل است؟ چرا؟

۵. مقدار x را از برابری زیر به‌دست آورید:

$$\frac{3^{2x}+3^{2x-1}}{2\times 8^x + 8\times 2^{3x}} = \frac{3}{20}$$

۶. به‌ازای کدام مقدار α کسر $\frac{5}{5a+1}$ مولد کسر ۰/۴۵ است؟

۷. محیط و مساحت هریک از شکل‌های زیر را بیابید.



۸. اگر به ازای هر x برابری زیر برقرار باشد، مقدار $a+b$ را پیدا کنید.

$$x^3 - x^2 - 4x + 5 = (x-1)^3 + a(x-1)^2 + b(x-1) + 1$$

۹. اگر $a+b-c=1$ آن‌گاه حاصل $a^2+b^2-c^2-1$ را بیابید.

۱۰. اگر $\frac{1}{7}=\frac{x}{x^2+x+1}$ آن‌گاه مقدار $\frac{x^2}{x^4+x^2+1}$ را بیابید.

۱۱. عبارت‌های زیر را تجزیه کنید.

الف) $x^2 - 2xy - 3y^2 - x + 7y - 2$

ب) $x^4 + 4$

۱۲. تساوی $\frac{a}{x-1}+\frac{b}{x-2}=\frac{8x+11}{(x-1)(x-2)}$ $(x\neq 1,2)$ به ازای جمیع مقادیر x برقرار است، حاصل $a\times b$ را بیابید.

---

۱. ریشه‌های حقیقی معادله‌های زیر را به‌دست آورید:

الف) $\frac{x-3}{x-2}+\frac{x-3}{x-1}=\frac{2x-3}{x+2}$

ب) $\sqrt{x-1}+\sqrt{x}=\sqrt{2x-1}$

۲. مجموعه جواب نامعادله‌ی زیر را به‌دست آورید:

$$\frac{1}{x+2}+\frac{7}{x^2-4x}>\frac{2}{x^2-2x}$$

۳. حدود a را طوری بیابید که برای همه‌ی مقادیر x داشته باشیم:

$$(a-1)x^2+ax+a>0$$

۴. نمودار تابع f با ضابطه‌ی $f(x)=\frac{x-[x]}{[x]+1}$ را در بازه‌ی $[-2,2)$ رسم کنید.

۵. نمودار تابع f با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases} x+1 & x>1 \\ -x & -1\le x\le 1 \\ x^2 & x<-1 \end{cases}$ را رسم کنید و از روی این نمودار، یک به یک و پوشایی f را بررسی کنید. هم‌چنین، مقدار عددی $f(f(f(-2)))$ را به‌دست آورید.

۶. نمودار تابع با ضابطه‌ی $y=\left|2\sin(x-\frac{\pi}{3})-1\right|$ را رسم کنید.

۷. ماتریس $A=\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ مفروض است. ماتریس 2×2 X را چنان بیابید که داشته باشیم:

$$A^2 - A^1 = 5AX$$

۸. مقدار x را از معادله‌ی زیر به دست آورید:

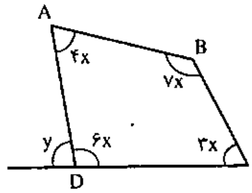
$$\log_4^x + \log_2^x = \log_8^x + 1$$

ریاضیات ۲

هوشنگ شرقی

هندسه‌ی ۱

۱. مقدار x و y را در شکل ۱ تعیین کنید (ABCD چهارضلعی محدب است).

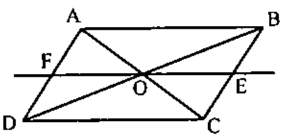


(شکل۱)

۲. با استفاده از سه پاره‌خط داده شده، خمی رسم کنید که:
الف) ساده و بسته باشد. ب) ساده باشد، ولی بسته نباشد.

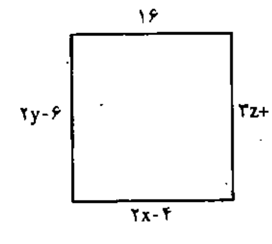
۳. تعداد قطرهای یک nضلعی محدب ۴۴ است. n را تعیین کنید.

۴. چهارضلعی ABCD متوازی‌الاضلاع و O نقطه‌ی برخورد قطرهای آن است (شکل۲). از نقطه‌ی O خطی رسم کرده‌ایم که دو ضلع BC و AD را در نقطه‌های E و F قطع کرده است. ثابت کنید که OE=OF است.



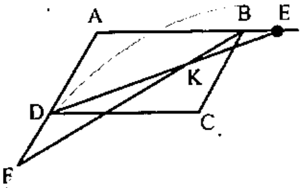
(شکل۲)

۵. چهارضلعی ABCD مربع است (شکل۳). اندازه‌های x، y و z را تعیین کنید.



(شکل۳)

۶. در متوازی‌الاضلاع ABC (شکل۴)، نقطه‌ی E را روی خط AB (B بین A و E) و نقطه‌ی F را روی خط AD (D بین A و F) رسم می‌کنیم و نقطه‌ی برخورد DE و BF را K می‌نامیم. ثابت کنید که مساحت دو چهارضلعی ABKD و CEKF با هم برابرند.



(شکل۴)

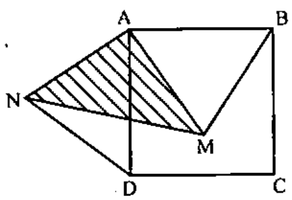
۷. قطر مستطیلی ۲۶ سانتی‌متر و دو ضلع آن به نسبت $\frac{۲}{۴}$ هستند. اندازه‌های مساحت این مستطیل را تعیین کنید.

۸. نسبت مساحت‌های دو مثلث مفروض را بیابید که ضلع‌های یکی، با میانه‌های مثلث دیگر برابر باشد.

۹. اندازه‌ی ارتفاع وارد بر قاعده‌ی مثلث متساوی‌الساقینی ۱۰ و محیط آن ۱۰۰ است. اندازه‌ی قاعده و ساق این مثلث را تعیین کنید.

۱۰. مساحت یک لوزی ۲۵۲ سانتی‌متر مربع و طول یک قطر آن ۱۸ سانتی‌متر است. اندازه‌ی ضلع این لوزی را تعیین کنید.

۱۱. چهارضلعی ABCD مربعی به ضلع ۱۲ سانتی‌متر و مثلث‌های ABM و ADN متساوی‌الاضلاع‌اند (شکل۵). اندازه‌ی مساحت مثلث AMN را تعیین کنید.



(شکل۵)

۱۲. اگر $۴(x+۲y)=۳(۲x-y)$ باشد، نسبت x به y را تعیین کنید.

---

۱. فرض کنید دامنه‌ی تابع f مجموعه‌ی $[۰,۱)$ باشد. دامنه‌ی تابع $g(x)=f\left(\frac{[x]}{x}\right)$ را بیابید.

۲. اگر داشته باشیم $af(x)+bf(-x)=cg(x)$ و $g(x)$ فرد باشد، در این صورت تابع $f(x)$ زوج است یا فرد؟

۳. ثابت کنید تابع $f(x)=x+[x]$ معکوس‌پذیر است و معکوس آن را به‌دست آورید.

۴. باقی‌مانده‌ی تقسیم $x^{۲۹}+۲$ بر $x^۲+x+۱$ را بیابید.

۵. اگر $x_۱$ و $x_۲$ ریشه‌های معادله‌ی درجه دوم $x^۲+x-۱=۰$ باشند، نشان دهید:

$$۵x_۱^۲+۳x_۲^۲=۸-۵x_۱-۳x_۲$$

۶. ثابت کنید: $\cos\frac{\pi}{۵}+\cos\frac{۳\pi}{۵}=\frac{۱}{۲}$

۷. مطلوب است محاسبه‌ی: $\lim_{x\to۲}\frac{۲^x+۲^{۳-x}-۶}{\sqrt{۲^{-x}}-۲^{۱-x}}$

۸. مقادیر a و b را چنان بیابید که:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(ax+۱+\sqrt{x^۲+bx+۱}\right)=۲$$

۹. اگر خطوط $x=۲$ و $x=۴$ مجانب‌های قائم منحنی تابع $y=\frac{x^۲+a}{x^۲+(m+۲n)x+m}$ باشند، $m+n$ را به‌دست آورید.

۱۰. اگر $f(x)=\left[\sqrt{۵}x\right]$ باشد، تعداد نقاط ناپیوستگی این تابع را در بازه‌ی $[-۲,۲]$ به‌دست آورید.

حسابان ۱

جبر و احتمال

○ شهرنگ شرفی

۱ . به کمک قضیه‌ی استقرای ریاضی ثابت کنید :

الف) $\frac{1}{2^1}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\dots+\frac{n}{2^n}=\frac{2^{n+1}-n-2}{2^n}$

ب) $n\ge 2:\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\dots+\frac{1}{n+n}>\frac{13}{24}$

ج) $n^3-n=6r(r\in Z)$

۲ . اولاً با استدلال استنتاجی ثابت کنید حاصلضرب هر دو عدد گویا عددی است گویا . ثانیاً نشان دهید حاصلضرب هر عدد گویا غیر صفر در هر عدد گنگ عددی است گنگ . ثالثاً بررسی کنید که آیا حاصلضرب هر دو عدد گنگ ، عددی است گنگ یا خیر؟

۳ . به کمک استدلال برگشتی ثابت کنید : $(a^4+b^4)(a^5+b^5)\le 2(a^9+b^9)$ (a و b عددهای حقیقی و مثبت هستند) .

۴ . فرض کنیم S زیر مجموعه‌ای از مجموعه اعداد طبیعی با ۱۵ عضو باشد . ثابت کنید تفاضل دو عضو از اعضای S مضرب ۱۴ می‌باشد .

۵ . x و y را طوری پیدا کنید که داشته باشیم :

$\{x+y,x-y,3\}=\{2,3\}$

۶ . مجموعه‌ی زیر را با استفاده از نمادهای ریاضی نمایش دهید :

$A=\left\{\frac{1}{2},\frac{-1}{4},\frac{1}{8},\frac{-1}{16},\dots\right\}$

هندسه ی ۲

○ محمدهاشم رستمی

۱ . با استفاده از استدلال استقرایی ، رابطه‌ای که تعداد قطرهای یک nضلعی محدب را بیان می‌کند ، حدس بزنید و مراحل انجام کار را نیز شرح دهید .

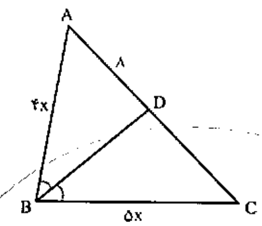
۲ . در مثلث ABC ، نقطه‌ی D ضلع AB و نقطه‌ی E ضلع AC را به نسبت K تقسیم کرده‌اند . آیا همواره DE موازی BC است؟

۳ . در مثلث متساوی‌الساقین ABC(AB=AC) ، اندازه‌ی ارتفاع AH برابر ۱۲ سانتی‌متر و اندازه‌ی قاعده‌ی BC مساوی ۱۰ سانتی‌متر است . مجموع فاصله‌های نقطه‌ی M واقع بر قاعده‌ی این مثلث از دو ساق آن را تعیین کنید .

۴ . در شکل ۱ ، BD نیم‌ساز زاویه‌ی درونی B از مثلث ABC است .

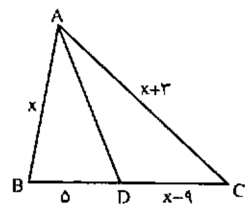
الف) اندازه‌ی ضلع AC را تعیین کنید .

ب) آیا اندازه‌ی ضلع‌های AB و BC را می‌توان تعیین کرد؟



(شکل۱)

۵ . در شکل ۲ ، AD نیم‌ساز زاویه‌ی درونی A از مثلث ABC است . اندازه‌ی x و آن‌گاه اندازه‌ی محیط مثلث ABC را تعیین کنید .



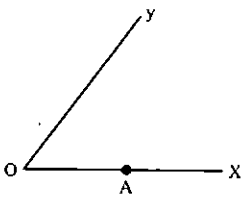
(شکل۲)

۶ . با استفاده از برهان خلف ثابت کنید که در هر مثلث ، هر دو میانه متقاطع هستند .

۷ . یک ضلع از مثلثی ۶ سانتی‌متر و مجموع اندازه‌های دو ضلع دیگر که عددهایی صحیح هستند ، کوچک‌تر از ۱۰ و قدرمطلق تفاضل آن دو ضلع ۱ سانتی‌متر است . اندازه‌ی این دو ضلع را تعیین کنید .

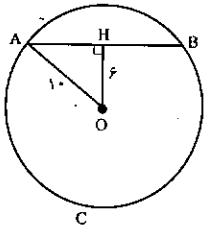
۸ . اندازه‌های سه میانه‌ی مثلثی (m_c, m_b, m_a) داده شده‌اند . مثلث را رسم کنید .

۹ . زاویه‌ی xoy و نقطه‌ی A روی ضلع ox داده شده است (شکل۳) . نقطه‌ای از صفحه‌ی xoy را تعیین کنید که از نقطه‌ی A به فاصله‌ی معلوم R و از ضلع oy به فاصله‌ی معلوم l باشد .



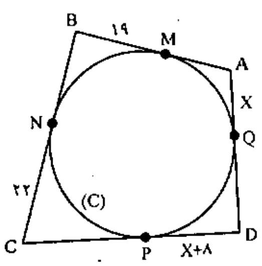
(شکل۲)

۱۰ . دایره‌ی "C" به مرکز O داده شده است (شکل۴) . AB وتر دایره و OH فاصله‌ی مرکز دایره از این وتر است . با توجه به شکل ، اندازه‌ی وتر AB را به دست آورید .



(شکل۴)

۱۱ . چهارضلعی ABCD در نقطه‌های M ، N ، P و Q بر دایره‌ی C مماس است (شکل۵) . اگر محیط این چهارضلعی ۱۴۲ باشد ، اندازه‌ی x را تعیین کنید .

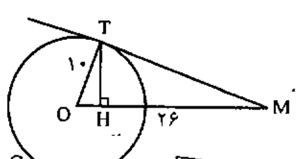


(شکل۵)

۱۲ . از نقطه‌ی M واقع در خارج دایره‌ی (۱۰ و C(O که به فاصله‌ی ۲۶ از مرکز دایره قرار دارد ، مماس MT را بر دایره رسم کرده‌ایم (شکل۶) :

الف) اندازه‌های مماس MT را تعیین کنید .

ب) اگر H تصویر T روی OM باشد ، اندازه‌ی پاره‌خط‌های OH و TH را به دست آورید .



(شکل۶)

پاسخ تشریحی مسائل

ریاضیات ۱

۱. در حالت کلی سه عدد فرد متوالی عبارتند از:

$2k+1\ ,\ 2k+3\ ,\ 2k+5$

چون مجموع آن‌ها برابر با ۳۱۵ است، بنابراین داریم:

$(2k+1)+(2k+3)+(2k+5)=315$

$\Rightarrow 6k=306 \Rightarrow k=51$

سه عدد فرد متوالی عبارتند از:

۱۰۳و۱۰۵و۱۰۷

۲. الف)

$M=\{1,2,3,\cdots,9\}\ ;\ A=\{2,3,5,7\}$

$B=\{3,6,9\}\ ;\ C=\{1,3,5,7,9\}$

$A'=\{1,4,6,8,9\}\ ;\ B\cap C=\{3,9\}$

$A'\cap(B\cap C)=\{9\}\neq\varnothing$

چون A' و $(B\cap C)$ عضو مشترک دارند، پس این دو مجموعه جدا از هم نیستند.

ب)

$A\cap C=\{3,5,7\}\ ;\ (A\cap C)'=\{1,2,4,6,8,9\}$ (۱)

$A'\cup C'=\{1,4,6,8,9\}\cup\{2,4,6,8\}$

$=\{1,2,4,6,8,9\}$ (۲)

از برابری (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم که،

$(A\cap C)'=A'\cup C'$

۳. هرگاه هر عدد طبیعی را بر ۳ تقسیم کنیم، باقی‌مانده‌ی آن یکی از عددهای ۰، ۱، ۲ خواهد بود، یعنی هر عدد طبیعی به یکی از صورت‌های زیر است:

$3n, 3n+1, 3n+2$

در مجموعه‌ی $A_n=\{3n+2, 3n+1\}$ عضو $3n$ نوشته شده است، پس در $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ عضوهای $3n$ یا به‌عبارت دیگر مضرب‌های عدد ۳ وجود ندارد، در نتیجه داریم:

$\bigcup_{i=1}^{n} A_i=\{1,2\}\cup\{4,5\}\cup\{7,8\}\cup\cdots\cup\{3n-2,3n-1\}$

$=\{n|n\neq 3k, n\in N\}$

۴. چون $3^y\times 2^x$ مجذور کامل است، پس x و y هر دو زوج هستند، از طرفی برای این‌که $3^{(3y+k)}\times 2^{(x+2)}$ مجذور کامل باشد، باید $(x+2)$ عددی زوج و عدد $(3y+k)$ نیز باید زوج باشد.

$x=2k \Rightarrow x+2=2k+2=2(\underbrace{k+1}_{k'\in Z})=2k'$ زوج است

$y=2k_1 \Rightarrow 3y+k=6k_1+k$

برای این‌که $6k_1+k$ عددی زوج باشد، باید k زوج باشد.

۵.

$$\frac{3^{2x}+\frac{3^{2x}}{3}}{2\times(2^3)^x+8\times 2^{3x}}=\frac{3}{20}$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{3\times 3^{2x}+3^{2x}}{3}}{2\times 2^{3x}+8\times 2^{3x}}=\frac{3}{20}$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{4}{3}\times(3^{2x})}{10\times(2^{3x})}=\frac{3}{20}$$

$$\Rightarrow (\frac{3^2}{2^3})^x=\frac{9}{8}\Rightarrow(\frac{9}{8})^x=\frac{9}{8}\Rightarrow x=1$$

۶.

$x=0/454545...$

$100x=45/454545...$

$99x=45\Rightarrow x=\frac{45}{99}=\frac{5}{11}$

$\frac{5}{5a+1}=\frac{5}{11}\Rightarrow 5a+1=11$

$\Rightarrow a=2$

۷. الف)

مجموع سه ضلع = محیط مثلث

$=by^2+by^2+\sqrt{2}by^2=(2+\sqrt{2})by^2$

ارتفاع × قاعده = مساحت مثلث

$=by^2\times by^2=b^2y^4$

ب)

۲ × (مجموع دو ضلع مجاور) = محیط متوازی‌الاضلاع

$=(2ax+\frac{3}{2}ax)\times 2$

$=4ax+3ax=7ax$

ارتفاع × قاعده = مساحت متوازی‌الاضلاع

$=\frac{3}{2}ax\times\frac{4}{5}ax=\frac{6}{5}a^2x^2$

۸.

$(x-1)^3+a(x-1)^2+b(x-1)+1$

$=x^3-3x^2+3x-1+ax^2-2ax+a$

$+bx-b+1$

$=x^3+(-3+a)x^2+(3-2a+b)x+a-b$ (۱)

اکنون برای این‌که عبارت زیر با عبارت (۱) برابر باشد، باید ضرایب جملات متناظر، با هم برابر باشند؛ یعنی ضرایب x^3 باهم، ضرایب x^2 با هم، ضرایب x با هم و عددهای ثابت با هم برابر باشند:

x^3-x^2-4x+5

بنابراین داریم:

$$\begin{cases}-3+a=-1\\ 3-2a+b=-4\Rightarrow b=-3\ ,\ a=2\\ a-b=5\end{cases}$$

$\Rightarrow a+b=-1$

۹.

$a+b-c=1\Rightarrow a+b=1+c$

$\Rightarrow(a+b)^2=(1+c)^2$

$\Rightarrow a^2+2ab+b^2=1+c^2+2c$

$\Rightarrow a^2+b^2-c^2-1=2c-2ab$

۱۰. $\frac{x}{x^2+x+1}=\frac{1}{7}\Rightarrow x^2+x+1=7x\Rightarrow x^2+1=6x$

$\Rightarrow\frac{x^2}{x}+\frac{1}{x}=6\Rightarrow x+\frac{1}{x}=6$

$\Rightarrow(x+\frac{1}{x})^2=36\Rightarrow x^2+\frac{1}{x^2}+2=36$

$\Rightarrow x^2+\frac{1}{x^2}+1=35\Rightarrow\frac{x^4+1+x^2}{x^2}=35$

$\Rightarrow\frac{x^2}{x^4+x^2+1}=\frac{1}{35}$

۱۱ . الف)

$$x^2+(-2xy-x)+(-3y^2+7y-2)$$
$$=x^2+(-2y-1)x+(-3y+1)(y-2)$$
$$=(x-3y+1)(x+y-2)$$

ب)

$$x^4+4=x^4+4+4x^2-4x^2$$
$$=(x^4+4x^2+4)-4x^2$$
$$=(x^2+2)^2-4x^2$$
$$=(x^2+2-2x)(x^2+2+2x)$$

۱۲ .

$$\frac{a(x-2)+b(x-1)}{(x-1)(x-2)}=\frac{8x+11}{(x-1)(x-2)}$$
$$\Rightarrow\frac{(a+b)x+(-2a-b)}{(x-1)(x-2)}=\frac{8x+11}{(x-1)(x-2)}$$
$$\Rightarrow\begin{cases}a+b=8\\-2a-b=11\end{cases}\Rightarrow a=-19\ ,\ b=27$$
$$\Rightarrow a\times b=-19\times 27=-513$$

ریاضیات ۲

۱ .

الف)
$$\frac{(x^2-4x+3)+(x^2-5x+6)}{(x-2)(x-1)}=\frac{2x-3}{x+2}$$
$$\Rightarrow\frac{2x^2-9x+9}{x^2-3x+2}=\frac{2x-3}{x+2}\Rightarrow (2x^2-9x+9)(x+2)=(x^2-3x+2)(2x-3)$$
$$\Rightarrow 2x^3+4x^2-9x^2-18x+9x+18$$
$$=2x^3-6x^2+4x-3x^2+9x-6$$
$$\Rightarrow 4x^2-22x+24=0\Rightarrow(2x-8)(2x-3)=0$$
$$\Rightarrow 2x-8=0\Rightarrow x=4\ ,\ 2x-3=0\Rightarrow x=\frac{3}{2}$$

با توجه به دامنه‌ی معادله، یعنی: $D=\mathbb{R}-\{2,1,-2\}$، هر دو جواب قابل قبول هستند.

ب) طرفین معادله را مربع می‌کنیم:

$$(\sqrt{x-1}+\sqrt{x})^2=2x-1\Rightarrow x+x-1+2\sqrt{x^2-x}=2x-1$$
$$\Rightarrow 2\sqrt{x^2-x}=0\Rightarrow x^2-x=0\Rightarrow x(x-1)=0$$
$$\Rightarrow x=0 \text{ یا } x=1$$

و با امتحان کردن جواب‌ها در معادله نتیجه می‌گیریم، جواب $x=0$ در دامنه‌ی معادله صدق نمی‌کند و غیرقابل قبول است و تنها جواب قابل قبول معادله، $x=1$ است.

۲ .
$$\frac{1}{x+2}+\frac{7}{x(x-2)(x+2)}-\frac{2}{x(x-2)}>0$$
$$\Rightarrow\frac{x(x-2)+7-2(x+2)}{x(x-2)(x+2)}>0$$
$$\Rightarrow\frac{x^2-4x+3}{x(x-2)(x+2)}>0$$

x	$-\infty$	-2	0	1	2	3	$+\infty$
x^2-4x+3	+	+	+	−	−	+	
x	−	−	+	+	+	+	
x−2	−	−	−	−	+	+	
x+2	−	+	+	+	+	+	
p	−	+	−	+	−	+	

و با توجه به جدول بالا، مجموعه جواب نامعادله عبارت است از:

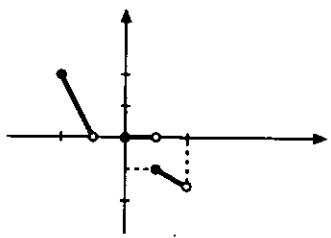
$-2<x<0$ یا $1<x<2$ یا $x>3$

۳ .
$$\Delta=a^2-4a(a-1)<0\ ,\ a-1>0$$
$$\Rightarrow -3a^2+4a<0\Rightarrow a(-3a+4)<0\Rightarrow a>\frac{4}{3} \text{ یا } a<0$$

$$a>1\Rightarrow\boxed{a>\frac{4}{3}}$$

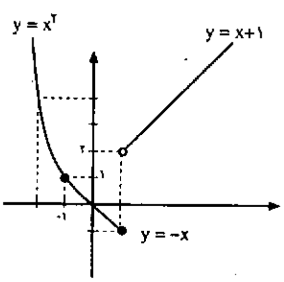
۴ .

$$-2\le x<-1\Rightarrow[x]=-2\Rightarrow y=\frac{x+2}{-1}-x\Rightarrow y=-2x-2$$
$$-1\le x<0\ \ \Rightarrow[x]=-1\Rightarrow[x]+1=0\Rightarrow y\notin\mathbb{R}$$
$$0\le x<1\ \ \Rightarrow[x]=0\ \Rightarrow y=\frac{x-0}{0+1}-x\Rightarrow y=0$$
$$1\le x<2\ \ \Rightarrow[x]=1\ \Rightarrow y=\frac{x-1}{1+1}-x\Rightarrow y=-\frac{x+1}{2}$$



۵ . با توجه به نمودار، تابع f نه یک‌به‌یک است و نه پوشا.

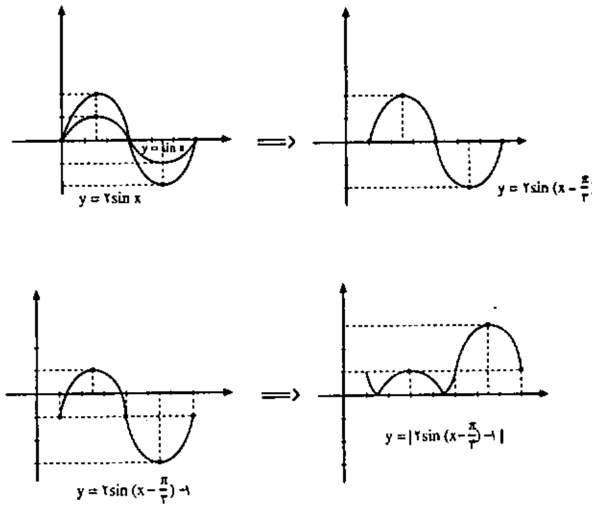
$$f(-2)=(-2)^2=4\Rightarrow f(f(-2))=f(4)=4+1=5$$
$$\Rightarrow f(f(f(-2)))=f(5)=5+1=6$$



۶ . از نمودار $y=\sin x$ شروع می‌کنیم:

$y=2\sin x$ $y=2\sin(x-\frac{\pi}{3})$

$y=2\sin(x-\frac{\pi}{3})-1$ $y=\left|2\sin(x-\frac{\pi}{3})-1\right|$



۷. $A^2=\begin{bmatrix}2&3\\1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&3\\1&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7&12\\4&7\end{bmatrix}\quad |A|=4-3=1$

$$\Rightarrow A^{-1}=\begin{bmatrix}2&-3\\-1&2\end{bmatrix}\Rightarrow A^2-A^{-1}=\begin{bmatrix}5&15\\5&5\end{bmatrix}=5\begin{bmatrix}1&3\\1&1\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow AX=\begin{bmatrix}1&3\\1&1\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}2&3\\1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&3\\1&1\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}2a+3c=1\\a+2c=1\end{cases}\quad\begin{cases}2b+3d=3\\b+2d=1\end{cases}\Rightarrow\begin{matrix}a=-1\ ,\ c=1\ ,\ b=3\\d=-1\end{matrix}\Rightarrow X=\begin{bmatrix}-1&3\\1&-1\end{bmatrix}$$

۸. $\log_{2^2}^{x}+\log_{2}^{x}=\log_{2^3}^{x}+\log_{2}^{2}$

$$\Rightarrow\frac{1}{2}\log_2^x+\log_2^x=\frac{1}{3}\log_2^x+\log_2^2$$

$$\Rightarrow\frac{7}{6}\log_2^x=\log_2^2\Rightarrow\log_2^{x^{\frac{7}{6}}}=\log_2^2\Rightarrow x^{\frac{7}{6}}=2$$

$$\Rightarrow x=2^{\frac{6}{7}}\Rightarrow\boxed{x=\sqrt[7]{64}}$$

هندسه ۱

۱. می‌دانیم که مجموع زاویه‌های درونی هر چهارضلعی محدب مساوی 360° است. بنابراین داریم:

$$\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}+C\hat{D}A=360^\circ\Rightarrow 4x+7x+3x+6x=360^\circ$$

$$\Rightarrow 20x=360^\circ\Rightarrow x=18^\circ$$

اما $A\hat{D}C+A\hat{D}E=180^\circ$ است، پس داریم:

$$6x+y=180^\circ\Rightarrow 6(18^\circ)+y=180^\circ$$

$$\Rightarrow 108^\circ+y=180^\circ\Rightarrow y=180^\circ-108^\circ\Rightarrow y=72^\circ$$

۲. الف) شکل حاصل یک مثلث است.



(شکل۱)

ب) نمونه‌های متفاوتی را می‌توان رسم کرد. یک نمونه در زیر رسم شده است.



(شکل۲)

۳. می‌دانیم که تعداد قطرهای هر n ضلعی محدب مساوی $\frac{n(n-3)}{2}$ است.

بنابراین داریم:

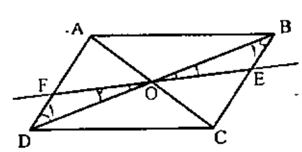
$$\frac{n(n-3)}{2}=44\Rightarrow n^2-3n=88\Rightarrow n^2-3n-88=0$$

$(n-11)(n+8)=0\Rightarrow n=11$ جواب، $n=-8$ غیرقابل قبول

جواب قابل قبول $n=11$ است.

۴. دو مثلث OBE و ODF به حالت (زض‌ز) همنهشت هستند (شکل۳)، زیرا:

$OB=OD$ و $\hat{O}_1=\hat{O}_2$ و $\hat{B}_1=\hat{D}_1$



(شکل۳)

از همنهشت بودن این دو مثلث نتیجه می‌شود که $OE=OF$ است.

۵. چهار ضلع مربع با هم مساوی‌اند، بنابراین داریم:

$$\begin{cases}2x-4=16\\2y-6=16\\3z+1=16\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2x=20\\2y=22\\3z=15\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=10\\y=11\\z=5\end{cases}$$

۶. اگر S مساحت متوازی‌الاضلاع باشد، آن‌گاه داریم:

$$S_{ABK}+S_{KCD}=\frac{1}{2}S$$

از طرف دیگر: $S_{DBC}=S_{EKC}+S_{KCD}=\frac{1}{2}S$

بنابراین: $S_{ABK}=S_{EKC}$

به همین ترتیب ثابت می‌شود که $S_{AKD}=S_{KCF}$ است.

با جمع کردن عضوهای متناظر دو تساوی اخیر با یکدیگر، نتیجه می‌شود:

$$S_{ABKD}=S_{CEKF}$$

۷. دو ضلع مستطیل را a و b می‌نامیم. داریم:

$$a:b=2/4\Rightarrow\frac{a}{b}=\frac{12}{5}\qquad(1)$$

$$d=\sqrt{a^2+b^2}\Rightarrow 26=\sqrt{a^2+b^2}\qquad(2)$$

$$\begin{cases}\frac{a}{b}=\frac{12}{5}\\\sqrt{a^2+b^2}=26\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=\frac{12}{5}b\\a^2+b^2=676\end{cases}\Rightarrow(\frac{12}{5}b)^2+b^2=676$$

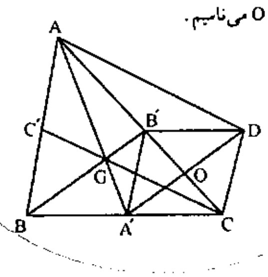
$$\Rightarrow\frac{169}{25}b^2=676\Rightarrow b^2=100\Rightarrow b=10\text{cm}$$

$$\Rightarrow a=\frac{12}{5}\times10=24\text{cm}$$

$\Rightarrow$ مساحت مستطیل $=s=a.b=24\times10=240\text{cm}^2$

۸. مثلث ABC را درنظر می‌گیریم و میانه‌های AA'، BB' و CC' را رسم می‌کنیم (شکل۴).

از A'، پاره‌خط $A'D$ را موازی و مساوی میانه‌ی BB' رسم می‌کنیم و نقطه‌ی برخورد آن با AC را O می‌نامیم.



(شکل۴)

از D به A، B′ و C، و از B′ به B وصل می‌کنیم. چهارضلعی‌های A′CDB′، BA′DB′ و CDAC′ متوازی‌الاضلاع هستند، زیرا:

$A'D \parallel BB' \ , \ AD = BB'$

$\Rightarrow A'DB'B$ متوازی‌الاضلاع است $\Rightarrow B'D \parallel A'B \ , \ B$

$B'D = A'B \Rightarrow B'D \parallel A'C \ , \ B'D = A'C$

$\Rightarrow A'B'DC$ متوازی‌الاضلاع است

$A'CDB' \Rightarrow CD \parallel A'B' \ , \ CD = A'B'$ متوازی‌الاضلاع است

اما AC′ با $A'B' \parallel AB$ و $A'B' = \frac{AB}{2} = AC'$. پس داریم:

$CD \parallel A'B' \parallel AC'$ و $CD = A'B' = AC'$

$\Rightarrow CDAC'$ متوازی‌الاضلاع است

از آن‌جا نتیجه می‌شود که $AD = CC'$ است. پس مثلث AA′D مثلثی است که سه ضلع آن میانه‌های مثلث ABC است؛ یعنی: $AA' = m_a$، $AD = CC' = m_c$ و $A'D = BB' = m_b$. بنابراین، با توجه به این که O نقطه‌ی برخورد قطرهای متوازی‌الاضلاع A′CDB′ است، داریم:

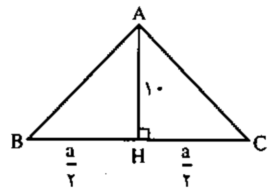
$$\frac{S_{ABC}}{S_{AA'D}} = \frac{S_{AA'C}}{S_{AA'O}} = \frac{AC}{OA} = \frac{4}{3}$$

۹. قاعده‌ی مثلث متساوی‌الساقین ABC (AB=AC) را a می‌نامیم (شکل۵). با توجه به این که $AH = 10$ است، داریم:

$$AB = \sqrt{AH^2 + BH^2} = \sqrt{10^2 + (\frac{a}{2})^2} = \sqrt{100 + \frac{a^2}{4}}$$

$$\Rightarrow \text{محیط مثلث} = 100 = BC + 2AB = a + 2\sqrt{100 + \frac{a^2}{4}}$$

$$\Rightarrow a = 48 \Rightarrow 2AB = 100 - 48 = 52 \Rightarrow AB = AC = 26$$



(شکل۵)

۱۰. لوزی ABCD را در شکل ۶ درنظر می‌گیریم و نقطه‌ی برخورد قطرهای آن را O می‌نامیم. داریم:

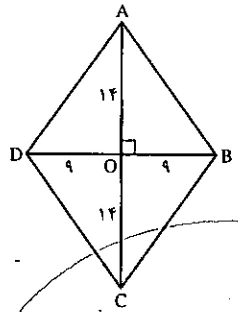
$$S = \frac{1}{2} AC.BD \Rightarrow 252 = \frac{1}{2} \times AC \times 18$$

$\Rightarrow AC = 28$ قطر دیگر لوزی

$$\Rightarrow AO = \frac{AC}{2} = \frac{28}{2} = 14 \ , \ BO = \frac{18}{2} = 9$$

$$\Rightarrow AB^2 = OA^2 + OB^2 \Rightarrow AB^2 = 14^2 + 9^2 = 256 + 81 = 337$$

$\Rightarrow AB = \sqrt{337}$ اندازه‌ی ضلع لوزی



(شکل۶)

۱۱. مثلث AMN قائم‌الزاویه‌ی متساوی‌الساقین است، زیرا:

$$AM = AB = AD = AN \Rightarrow AM = AN = AB = 12cm$$

$M\hat{A}B = D\hat{A}N = 60°$ و

$$M\hat{A}D = D\hat{A}B - M\hat{A}B = 90° - 60° = 30°$$

$$\Rightarrow M\hat{A}N = M\hat{A}D + D\hat{A}N = 30° + 60° = 90°$$

از آن‌جا داریم:

$$S_{AMN} = \frac{1}{2} AM.AN = \frac{1}{2} \times 12 \times 12 = 72cm^2$$

۱۲. داریم:

$$4(x+2y) = 3(2x-y) \Rightarrow 4x + 8y = 6x - 3y$$

$$\Rightarrow 8y + 3y = 6x - 4x \Rightarrow 11y = 2x \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{11}{2}$$

حسابان

۱. می‌دانیم $0 \le \frac{[x]}{x} \le 1$. در این صورت داریم:

الف) اگر $x \ge 1 \Rightarrow 0 \le \frac{[x]}{x} \le 1 \Rightarrow$

مجموعه‌ی $[1,+\infty)$ جزء جواب است.

ب) اگر $0 < x < 1 \Rightarrow [x] = 0 \Rightarrow$ غیر قابل قبول

ج) اگر $x < 0$ و $x \notin Z \Rightarrow \frac{[x]}{x} > 1 \Rightarrow$ غیر قابل قبول

مجموعه‌ی Z^- جزء جواب است.

د) اگر $x \in Z^- \Rightarrow \frac{[x]}{x} = 1 \Rightarrow$ مجموعه‌ی Z^- جزء جواب است.

درنتیجه: $D_f = [1+\infty) \cup Z^-$

۲. f(x) تابعی فرد است، زیرا:

$$\begin{cases} g(x) = \frac{a}{c} f(x) + \frac{b}{c} f(-x) \\ g(-x) = \frac{a}{c} f(-x) + \frac{b}{c} f(x) \end{cases}$$

g فرد است. $\Rightarrow g(x) + g(-x) = 0$

$$\Rightarrow \frac{a}{c} f(x) + \frac{b}{c} f(-x) + \frac{a}{c} f(-x) + \frac{b}{c} f(x) = 0$$

$$f(x)(\frac{a}{c} + \frac{b}{c}) + f(-x)(\frac{b}{c} + \frac{a}{c}) = 0$$

$$\Rightarrow (\frac{a}{c} + \frac{b}{c})(f(x) + f(-x)) = 0$$

$$\Rightarrow f(x) + f(-x) = 0$$

۳.

$$\left.\begin{array}{r} f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 + [x_1] = x_2 + [x_2] \Rightarrow x_1 - x_2 = [x_2] - [x_1] \\ [x_2] - [x_1] = k \in Z \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow x_1 - x_2 = k$$

$$\Rightarrow x_1 = x_2 + k \Rightarrow x_2 + k + [x_2 + k] = x_2 + [x_2]$$

$$\Rightarrow x_2 + [x_2] + 2k = x_2 + [x_2] \Rightarrow k = 0$$

$\Rightarrow x_1 - x_2 = 0 \Rightarrow \Rightarrow x_1 = x_2$. تابع f یک به یک است.

$$\left.\begin{array}{r} y = x + [x] \Rightarrow [y] = [x + [x]] = 2[x] \Rightarrow [x] = \frac{[y]}{2} \\ \left.\begin{array}{r} y = x + [x] \\ [y] = 2[x] \end{array}\right\} \Rightarrow y - [y] = x - [x] \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow (x - [x]) + [x] = y - [y] + \frac{[y]}{2}$$

$$\Rightarrow x = y - \frac{[y]}{2} \Rightarrow f^{-1}(x) = x - \frac{[x]}{2}$$

.۴

$$x^2 + x + 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases}(x-1)(x^2+x+1)=0\\ x^3=-x-1\end{cases}$$

$$R=(x^3)^4 \times x^2 + 2 = (1)^4 \times (-x-1)+2 \Rightarrow R=-x+1$$

.۵ x_1 و x_2 دو ریشه‌ی معادله هستند. بنابراین، در معادله صدق می‌کنند و داریم:
$x_1^2 = 1 - x_1$ و $x_2^2 = 1 - x_2$.

بنابراین با توجه به: $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -1$:

$$5x_1^2 + 3x_2^2 = 5(1-x_1) + 3(1-x_2)$$
$$= 8 - 3(x_1+x_2) - 2x_1 = 8 - 5x_1 - 3x_2$$

.۶

$$\cos\frac{\pi}{5} + \cos\frac{3\pi}{5} = \frac{2\sin\frac{\pi}{5}\cos\frac{\pi}{5} + 2\sin\frac{\pi}{5}\cos\frac{3\pi}{5}}{2\sin\frac{\pi}{5}}$$
$$= \frac{\sin\frac{2\pi}{5} + \sin\frac{4\pi}{5} - \sin\frac{2\pi}{5}}{\sin\frac{\pi}{5}}$$
$$= \frac{\sin\left(\pi - \frac{\pi}{5}\right)}{\sin\frac{\pi}{5}} = \frac{\sin\frac{\pi}{5}}{\sin\frac{\pi}{5}} = 1$$

.۷

$$\lim_{x\to 2}\frac{2^x + 2^{3-x} - 6}{\sqrt{2^{-x} - 2^{1-x}}} \overset{2^x=t}{=} \lim_{t\to 4}\frac{t + \frac{8}{t} - 6}{\sqrt{\frac{1}{t} - \frac{2}{t}}} = \lim_{t\to 4}\frac{t^2 - 6t + 8}{\sqrt{t} - 2}$$
$$= \lim_{t\to 4}\frac{(\sqrt{t}-2)(\sqrt{t}+2)(t-2)}{(\sqrt{t}-2)} = 8$$

.۸

$$\lim_{x\to+\infty}\left(ax + 1 + \sqrt{\left(x+\frac{b}{2}\right)^2 - \frac{b^2}{4} + 1}\right)$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\left(ax + 1 + \sqrt{\left(x+\frac{b}{2}\right)^2 + 1 - \frac{b^2}{4}}\right)$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(ax + 1 + \left|x+\frac{b}{2}\right|\sqrt{1 + \frac{1-\frac{b^2}{4}}{\left(x+\frac{b}{2}\right)^2}}\right)$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\left(ax + 1 + \left|x+\frac{b}{2}\right|\sqrt{1 + \frac{1-\frac{b^2}{4}}{\left(x+\frac{b}{2}\right)^2}}\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty} ax + 1 + \left(x + \frac{b}{2}\right) = 2 \Rightarrow \lim_{x\to+\infty}(a+1)x + 1 + \frac{b}{2} = 2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a+1=0 \Rightarrow a=-1 \\ 1+\frac{b}{2}=2 \Rightarrow b=2 \end{cases}$$

.۹ چون $x = 2$ و $x = 4$ مجانب‌های تابع هستند، بنابراین نمی‌توانند ریشه‌های صورت باشند. پس:

$$x=2 \Rightarrow \begin{cases} \text{صورت} \quad x=2 \Rightarrow (2)^2 + a \neq 0 \Rightarrow a \neq -4 \\ \text{مخرج} \quad x=2 \Rightarrow (2)^2 + (m+2n)(2) + m = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 3m + 4n = -4$$

$$x=4 \Rightarrow \begin{cases} \text{صورت} \quad x=4 \Rightarrow (4)^2 + a \neq 0 \Rightarrow a \neq -16 \\ \text{مخرج} \quad x=4 \Rightarrow (4)^2 + (m+2n)(4) + m = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 5m + 8n = -16$$

با شرط $\begin{cases} x \neq -4 \\ x \neq -16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3m+4n=-4 \\ 5m+8n=-16 \end{cases} \Rightarrow m=8,$

$$n=-7 \Rightarrow m+n=1$$

.۱۰

$$\sqrt{5}x = k, k \in Z \Rightarrow x = \frac{k}{\sqrt{5}}, x \in [-2,2]$$
$$\Rightarrow -2 \le \frac{k}{\sqrt{5}} \le 2 \Rightarrow -2\sqrt{5} \le k \le 2\sqrt{5} \Rightarrow -6 < k < 6$$
$$x = \frac{-5}{\sqrt{5}}, \frac{-4}{\sqrt{5}}, \dots, \frac{4}{\sqrt{5}}, \frac{5}{\sqrt{5}}$$

بنابراین، تابع در ۱۱ نقطه ناپیوستگی دارد.

جبر و احتمال

۱. (الف)

$$n=1: \frac{1}{2^1} = \frac{2^2-1-2}{2^1} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

(فرض استقراء) $n=k: \frac{1}{2^1} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \dots + \frac{k}{2^k} = \frac{2^{k+1}-k-2}{2^k}$

(حکم استقراء)

$$n=k+1: \frac{1}{2^1} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \dots + \frac{k}{2^k} + \frac{k+1}{2^{k+1}} = \frac{2^{k+2}-(k+1)-2}{2^{k+1}}$$

به کمک فرض استقراء مجموع k جمله‌ی نخست را در حکم جایگذاری می‌کنیم:

$$\frac{2^{k+1}-k-2}{2^k} + \frac{k+1}{2^{k+1}} = \frac{2(2^{k+1}-k-2)+(k+1)}{2^{k+1}}$$
$$= \frac{2^{k+2}-2k-4+k+1}{2^{k+1}} = \frac{2^{k+2}-(k+1)-2}{2^{k+1}}$$

(ب)

$$n=2: \frac{1}{2+1} + \frac{1}{2+2} > \frac{13}{24} \Leftrightarrow \frac{7}{12} > \frac{13}{24} \Leftrightarrow \frac{14}{24} > \frac{13}{24}$$

(فرض استقراء) $n=k: \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \dots + \frac{1}{k+k} > \frac{13}{24}$

$$n=k+1: \frac{1}{(k+1)+1} + \frac{1}{(k+1)+2} + \dots + \frac{1}{(k+1)+(k-1)}$$

(حکم استقراء) $+\frac{1}{(k+1)+k} + \frac{1}{(k+1)+(k+1)} > \frac{13}{24}$

به دو طرف فرض کسرهای $\frac{1}{2k+1}$ و $\frac{1}{2k+2}$ را می‌افزاییم:

$$\frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \dots + \frac{1}{k+k} + \frac{1}{(k+1)+k} + \frac{1}{(k+1)(k+1)}$$

$$> \frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2k+2} + \frac{13}{24}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{k+2} + \frac{1}{k+3} + \cdots + \frac{1}{(k+1)+k} + \frac{1}{(k+1)+(k+1)}$$

$$> \frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2(k+1)} - \frac{1}{k+1} + \frac{13}{24}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{k+2} + \frac{1}{k+3} + \cdots + \frac{1}{(k+1)+(k+1)} > \frac{2k+2+2k+1-4k-2}{2(k+1)(2k+1)} + \frac{13}{24}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(k+1)+1} + \frac{1}{(k+1)+2} + \cdots + \frac{1}{(k+1)+(k+1)} > \frac{1}{2(k+1)(2k+1)} + \frac{13}{24}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(k+1)+1} + \frac{1}{(k+1)+2} + \cdots + \frac{1}{(k+1)+(k+1)} > \frac{13}{24}$$

(ج)

$n=1 :\ 1-1 = 6r \Leftrightarrow 0 = 6r\ (r=0)$

$n=k :\ k^3 - k = 6r'$ (فرض استقراء)

$n=k+1 :\ (k+1)^3 - (k+1) = 6r''$ (حکم استقراء)

$$(k+1)^3-(k+1) = k^3+3k^2+3k+1-k-1$$
$$= \underbrace{(k^3-k)}_{6r'} + \underbrace{3k(k+1)}_{2m}$$

چون عددهای k و k + 1 عددهای طبیعی متوالی هستند، لذا یکی از آن‌ها زوج و درنتیجه حاصلضرب آن‌ها عددی زوج است و با توجه به فرض استقراء می‌توان نوشت:

$$(k+1)^3-(k+1) = 6r' + 6m = 6\underbrace{(r'+m)}_{r''} = 6r''$$

۲. اولاً:

$a = \frac{p}{q}\quad p,q \in Z\ ,\ q \neq 0\ ,\ b = \frac{p'}{q'}\ ,\ p',q' \in Z\ ,\ q' \neq 0$

$\Rightarrow a.b = \frac{p}{q}.\frac{p'}{q'} = \frac{pp'}{qq'} = \frac{p''}{q''}\ ,\ p'',q'' \in Z\ ,\ q'' \neq 0$

$\Rightarrow a.b \in Q$

ثانیاً: فرض می‌کنیم a عددی گویا و غیرصفر و b عددی گنگ باشد:

$a = \frac{m}{n}\ ,\ m,n \in Z\ ,\ m \neq 0\ ,\ n \neq 0$

حال فرض می‌کنیم ab گنگ نباشد (برهان خلف):

$ab \in Q \Rightarrow ab = \frac{p}{q}\ ,\ p,q \in Z\ ,\ q \neq 0$

$\Rightarrow \frac{m}{n}.b = \frac{p}{q} \Rightarrow b = \frac{p}{q} \times \frac{n}{m} = \frac{np}{mq} = \frac{m'}{n'}\ ,$

$m',n' \in Z\ ,\ n' \neq 0 \Rightarrow b \in Q$

ثالثاً: با یک مثال نقض می‌توان نادرستی این حکم را نشان داد:

$a = \sqrt{2} \notin Q\ ,\ b = \sqrt{8} \notin Q\ ,\ ab = \sqrt{16} = 4 \in Q$

۳. $(a^4+b^4)(a^5+b^5) \le 2(a^9+b^9) \Leftrightarrow$

$a^9 + a^4b^5 + b^4a^5 + b^9 \le 2a^9 + 2b^9 \Leftrightarrow$

$a^9 + b^9 - a^4b^5 - b^4a^5 \ge 0 \Leftrightarrow a^4(a^5-b^5) - b^4(a^5-b^5) \ge 0$

$\Leftrightarrow (a^5-b^5)(a^4-b^4) \ge 0 \Leftrightarrow$

$(a-b)(a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4)(a-b)(a^3+a^2b+ab^2+b^3) \ge 0$

$\Leftrightarrow (a-b)^2(a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4)(a^3+a^2b+ab^2+b^3) \ge 0$

و با توجه به مثبت بودن a و b درستی نابرابری اخیر واضح بوده و همه‌ی مراحل نیز برگشت‌پذیر می‌باشند.

۴. اعضای S (و هر عدد طبیعی دیگر) در تقسیم بر ۱۴، ۱۴ نوع باقی‌مانده مختلف می‌توانند داشته باشند: $r = 0,1,2,\cdots,13$

و چون S، ۱۵ عضو دارد، بنابراین طبق اصل لانه کبوتر لااقل دو عضو از اعضای S در تقسیم بر ۱۴ یک باقی‌مانده دارند، اگر این دو عضو را a و b بنامیم خواهیم داشت:

$a,b \in S, a = 14q + r, b = 14q' + r \Rightarrow a - b = 14(q-q')$

$\Rightarrow a - b = 14k$

۵. با توجه به برابری اعضا، حالت‌های زیر قابل تصور می‌باشد:

$$\begin{cases}x+y=2\\x-y=2\end{cases}\qquad \begin{cases}x+y=2\\x-y=3\end{cases}\qquad \begin{cases}x+y=3\\x-y=2\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}x=2\\y=0\end{cases} \text{ یا } \begin{cases}x=\frac{5}{2}\\y=-\frac{1}{2}\end{cases} \text{ یا } \begin{cases}x=\frac{5}{2}\\y=\frac{1}{2}\end{cases}$$

۶. $$A = \left\{\frac{(-1)^{n+1}}{2^n} \middle| n \in \mathbb{N}\right\}$$

هندسه‌ی ۲

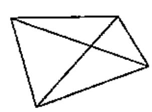
۱. یک سه‌ضلعی، یک چهارضلعی، یک پنج‌ضلعی، یک شش‌ضلعی و یک هفت‌ضلعی رسم می‌کنیم (شکل‌های۱) و قطرهای آن‌ها را رسم می‌کنیم.

به‌طوری که دیده می‌شود،

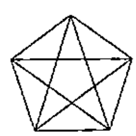
- سه‌ضلعی (مثلث) قطر ندارد.



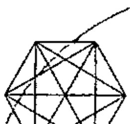
- چهارضلعی ۲ قطر دارد.



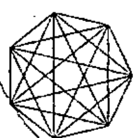
- پنج‌ضلعی ۵ قطر دارد.



- شش‌ضلعی ۹ قطر دارد.



- هفت‌ضلعی ۱۴ قطر دارد.



(شکل‌های۱)

بنابراین جدول زیر را داریم:

تعداد ضلع‌ها	۳	۴	۵	۶	۷
تعداد قطرها	۰	۲	۵	۹	۱۴

حال بررسی می‌کنیم که تعداد ضلع‌های چندضلعی، چه رابطه‌ای با تعداد قطرهای آن دارد. برای این منظور، تعداد قطرهایی را که از هر رأس یک چندضلعی رسم می‌شوند، بررسی می‌کنیم. جدول زیر را خواهیم داشت:

تعداد ضلع های چند ضلعی	۳	۴	۵	۶	۷
تعدادقطرهای رسم شده از هر رأس	۰	۱	۲	۳	۴

تعداد قطرهای رسم‌شده از هر رأس چندضلعی‌های بالا را به صورت زیر می‌توان نوشت:

- تعداد قطرهای رسم شده از هر رأس سه‌ضلعی مساوی است با: $0 = 3 - 3$
- تعداد قطرهای رسم شده از هر رأس چهارضلعی مساوی است با: $1 = 4 - 3$
- تعداد قطرهای رسم‌شده از هر رأس پنج‌ضلعی مساوی است با: $2 = 5 - 3$
- تعداد قطرهای رسم‌شده از هر رأس شش‌ضلعی مساوی است با: $3 = 6 - 3$
- تعداد قطرهای رسم شده از هر رأس هفت‌ضلعی مساوی است با: $4 = 7 - 3$

اکنون با توجه به تعداد رأس‌های یک چندضلعی، تعداد قطرهای رسم‌شده از تمام رأس‌های چندضلعی‌های فوق را به صورت زیر می‌توان نوشت:

- قطرهای رسم‌شده از تمام رأس‌های سه‌ضلعی مساوی است با:

$3\times(3-3)=0$

- قطرهای رسم‌شده از تمام رأس‌های چهارضلعی مساوی است با:

$4\times(4-3)=4$

- قطرهای رسم‌شده از تمام رأس‌های پنج‌ضلعی مساوی است با:

$5\times(5-3)=10$

- قطرهای رسم‌شده از تمام رأس‌های شش‌ضلعی مساوی است با:

$6\times(6-3)=18$

- قطرهای رسم‌شده از تمام رأس‌های هفت‌ضلعی مساوی است با:

$7\times(7-3)=28$

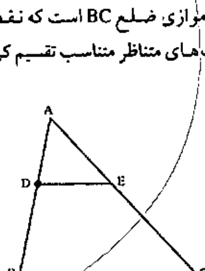
اما:

- تعداد قطرهای سه‌ضلعی (مثلث) برابر است با: $0=\frac{3(3-3)}{2}$
- تعداد قطرهای چهارضلعی برابر است با: $2=\frac{4(4-3)}{2}$
- تعداد قطرهای پنج‌ضلعی برابر است با: $5=\frac{5(5-3)}{2}$
- تعداد قطرهای شش‌ضلعی برابر است با: $9=\frac{6(6-3)}{2}$
- تعداد قطرهای هفت‌ضلعی برابر است با: $14=\frac{7(7-3)}{2}$

با توجه به نتایج به دست آمده، حدس می‌زنیم که تعداد قطرهای هر n ضلعی محدب مساوی $\frac{n(n-3)}{2}$ است.

۲. خیر، در صورتی DE موازی ضلع BC است که نقطه‌های D و E ترتیب ضلع‌های AB و AC را به نسبت‌های متناظر متناسب تقسیم کرده باشند (شکل ۲). یعنی داشته باشیم:

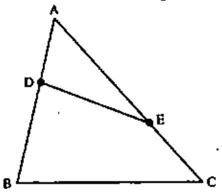
$$\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}=K$$



(شکل ۲)

در صورتی که $\frac{AD}{DB}=\frac{CE}{EA}=K$ باشد (شکل ۳)، در این حالت DE موازی BC نیست، مگر آن‌که $K=1$ باشد.

بدیهی است که در حالت اخیر، در دو نسبت $\frac{AD}{DB}$ و $\frac{CE}{EA}$، پاره‌خط‌ها متناظر (نظیر هم) نیستند. پس باید توجه داشته باشیم که اگر: دو نقطه‌ی واقع بر دو ضلع یک مثلث، آن ضلع‌ها را به نسبت‌های متناظر متناسب تقسیم کنند، پاره‌خط واصل بین آن دو نقطه، با ضلع سوم مثلث موازی است.



(شکل ۳)

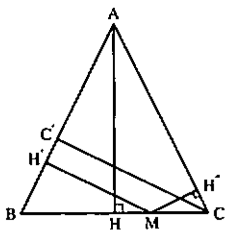
۳. مثلث متساوی‌الساقین ABC‏(AB = AC) را در نظر می‌گیریم. ارتفاع AH و یک ارتفاع وارد بر ساق، مثلاً ارتفاع CC' را رسم می‌کنیم (شکل ۴). می‌دانیم که مجموع فاصله‌های هر نقطه‌ی واقع بر قاعده‌ی یک مثلث متساوی‌الساقین از دو ساق آن، مساوی اندازه‌ی ارتفاع وارد بر ساق مثلث است، یعنی اگر M نقطه‌ای از قاعده‌ی BC باشد، $MH'+MH''=CC'=h_c$ است. بنابراین کافی است ارتفاع CC' را تعیین کنیم. داریم:

$$AB^2=AH^2+HB^2,\ AH=12cm,\ HB=\frac{BC}{2}=\frac{10}{2}=5cm$$

$$\Rightarrow AB^2=12^2+5^2=169\Rightarrow AB=13cm$$

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}BC\times AH=\frac{1}{2}AB\times CC'\Rightarrow BC\times AH=AB\times CC'$$

$$\Rightarrow 10\times12=13\times CC'\Rightarrow CC'=\frac{120}{13}\Rightarrow CC'=9\frac{3}{13}cm=h_C$$



(شکل ۴)

۴.

الف) بنا به ویژگی نیم‌ساز زاویه‌ی درونی مثلث داریم:

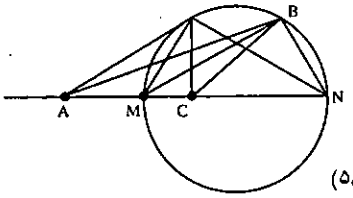
$$\frac{DA}{DC}=\frac{AB}{BC}\Rightarrow\frac{8}{DC}=\frac{4x}{5x}\Rightarrow\frac{8}{DC}=\frac{4}{5}\Rightarrow DC=10$$

از آن‌جا:

$$AC=AD+DC=8+10=18$$

ب) خیر، اندازه‌ی ضلع‌های AB و BC را نمی‌توان به دست آورد، زیرا تنها نسبت این دو ضلع معلوم است: $\frac{BA}{BC}=\frac{4x}{5x}=\frac{4}{5}$ و می‌دانیم که نسبت بین دو مقدار، فقط مشخص می‌کند که یک پاره‌خط چند برابر پاره‌خط دیگر است.

نکته. مکان هندسی نقطه‌ای از یک صفحه که نسبت فاصله‌اش از دو نقطه‌ی ثابت واقع در آن صفحه مقدار ثابت k است، دایره‌ای است که قطرش آن پاره‌خط ثابت را به نسبت k تقسیم می‌کند: $\frac{BA}{BC}=\frac{MA}{MC}=\frac{NA}{NC}=k$ (شکل ۵).



(شکل۵)

این مکان هندسی نشان می‌دهد که بی‌شمار نقطه در صفحه وجود دارد، به قسمی که نسبت فاصله‌شان از دو نقطه‌ی ثابت واقع در آن صفحه مقدار ثابتی مانند k باشد.

۵. بنا به ویژگی نیم‌ساز زاویه‌ی درونی مثلث داریم:

$$\frac{DB}{DC}=\frac{AB}{AC}\Rightarrow\frac{5}{x-9}=\frac{x}{x+3}\Rightarrow x^2-9x=5x+15$$

$\Rightarrow x^2-14x-15=0 \Rightarrow x=15$ و $x=-1$ غیر قابل قبول

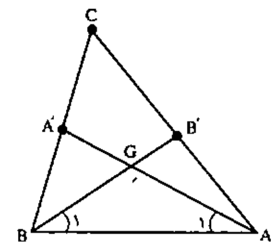
$\Rightarrow DC = x-9 = 15-9 = 6 \Rightarrow BC = BD+DC = 5+6 = 11$

$AB = x = 15$ و $AC = x+3 = 15+3 = 18$

$\Rightarrow$ محیط مثلث $= AB+BC+AC = 15+11+18 = 44$

۶. مثلث ABC را در نظر می‌گیریم و دو میانه از این مثلث، مثلاً میانه‌های AA' و BB' را رسم می‌کنیم. اگر این دو میانه متقاطع باشند، حکم مسئله درست است. در این صورت، میانه‌های AA' و BB' مطابق شکل ۶ درون مثلث قرار می‌گیرند و داریم:

$$\hat{A}_1 < \hat{A} \text{ و } \hat{B}_1 < \hat{B} \Rightarrow \hat{A}_1 + \hat{B}_1 < \hat{A} + \hat{B} \qquad (1)$$



(شکل ۶)

اما در صورتی که دو میانه‌ی AA' و BB' یکدیگر را قطع نکنند، چون در یک صفحه قرار دارند، با هم موازی خواهند بود. در این حالت خواهیم داشت:

$$\hat{A}_1 + \hat{B}_1 = 180^\circ \qquad (2)$$

در این صورت رابطه‌ی ۱ به این صورت در خواهد آمد:

$180^\circ < \hat{A}+\hat{B}$ یا $\hat{A}+\hat{B} > 180^\circ$

این رابطه خلاف فرض مثلث بودن مثلث ABC است، زیرا در هر مثلث، مجموع سه زاویه مساوی 180° است. پس مجموع دو زاویه نمی‌تواند بیشتر از 180° باشد. بنابراین دو میانه‌ی AA' و BB' نمی‌توانند موازی باشند و درنتیجه متقاطع‌اند.

به همین دلیل، هر دو میانه‌ی دیگر مثلث نیز متقاطع هستند.

۷. ضلع‌های مثلث را a، b و c می‌گیریم و فرض می‌کنیم $a=6$، b و c اعداد صحیح هستند و $b+c<10$ و با فرض $b>c$، $b-c=1$ باشد.

می‌دانیم که $b-c<a<b+c$ است، پس:

$1<6<b+c$

شرط $6>1$ برقرار است، پس باید شرط $6<b+c$ نیز برقرار باشد. درنتیجه b و c جواب دستگاه نامعادله‌ی زیر هستند.

$$\begin{cases} b+c<10 \\ b+c>6 \end{cases}$$

بنابراین، با توجه به فرض مسئله که b و c عددهای صحیح هستند، داریم:

$b+c=9$ یا $b+c=8$ یا $b+c=7$

با توجه به این که $b-c=1$ است، خواهیم داشت:

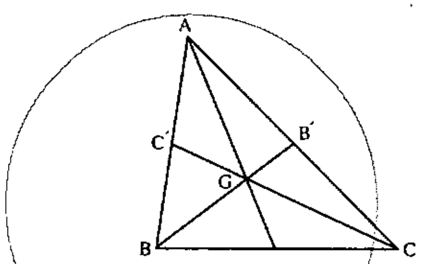
$\begin{cases} b+c=9 \\ b-c=1 \end{cases} \Rightarrow b=5$ و $c=4$ قابل قبول

$\begin{cases} b+c=8 \\ b-c=1 \end{cases} \Rightarrow b=4/5$ غیر قابل قبول

$\begin{cases} b+c=7 \\ b-c=1 \end{cases} \Rightarrow b=4$ و $c=3$ قابل قبول

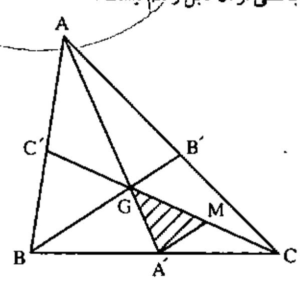
پس ضلع‌های مثلث جواب مسئله، $a=6$، $b=5$، $c=4$ و یا $a=6$، $b=4$ و $c=3$ است. یعنی مسئله دو دسته جواب دارد.

۸. فرض می‌کنیم مسئله حل شده و مثلث ABC با میانه‌های $AA'=m_a$، $BB'=m_b$ و $CC'=m_c$ جواب آن باشد. می‌دانیم که میانه‌های مثلث در یک نقطه مانند G همرسند و در این نقطه یکدیگر را به نسبت $\frac{1}{2}$ تقسیم می‌کنند؛ یعنی $GA=2GA'$، $GB=2GB'$ و $GC=2GC'$ (شکل ۷).



(شکل ۷)

طوری که دیده می‌شود، با معلوم بودن طول سه میانه‌ی AA'، BB' و CC'، خود مثلث ABC و یا بخشی از آن قابل رسم نیست.



(شکل ۸)

بنابراین باید تغییرات مناسبی در مسئله ایجاد کنیم تا مثلاً مثلثی قابل رسم به دست آید. برای این کار، در این مسئله از نقطه‌ی A' وسط ضلع BC به نقطه‌ی M وسط پاره‌خط GC وصل می‌کنیم (شکل ۸).

در مثلث BCG، پاره‌خط $A'M$ وسط‌های دو ضلع BC و GC را به هم وصل کرده است (A' وسط BC و M وسط GC). بنابراین $A'M$ موازی BG و مساوی نصف آن است، یعنی:

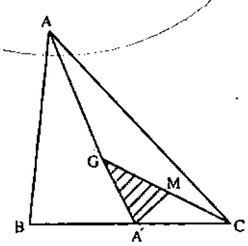
$$A'M = \frac{BG}{۲} = \frac{\frac{۲}{۳}BB'}{۲} = \frac{۱}{۳}BB' = \frac{۱}{۳}m_b$$

از طرف دیگر داریم:

$$GM = \frac{۱}{۲}GC = \frac{۱}{۲} \times \frac{۲}{۳}BB' = \frac{۱}{۳}BB' = \frac{۱}{۳}m_b \text{ و } GA' = \frac{۱}{۳}AA' = \frac{۱}{۳}m_a$$

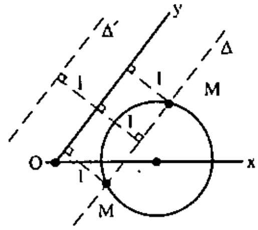
بنابراین اندازه‌ی سه ضلع مثلث $GA'M$ معلوم است. پس، این مثلث به دلیل معلوم بودن اندازه‌ی سه ضلعش قابل رسم است. بنابراین برای حل مسئله‌ی داده شده، یعنی برای رسم مثلث ABC، چنین عمل می‌کنیم:

مثلث $GA'M$ را چنان رسم می‌کنیم که اندازه‌ی سه ضلعش $GA' = \frac{۱}{۳}m_b$، $A'M = \frac{۱}{۳}m_b$ و $GM = \frac{۱}{۳}m_c$ باشد (رسم مثلثی با معلوم بودن اندازه‌ی سه ضلعش را در کتاب درسی هندسه‌ی ۲ دیده‌ایم). آن‌گاه $A'G$ را از طرف G به اندازه‌ی دو برابر خودش امتداد می‌دهیم تا نقطه‌ی A به‌دست آید. (می‌دانیم که $GA = ۲GA'$ است). GM را از طرف M به اندازه‌ی خودش امتداد می‌دهیم تا رأس C به‌دست آید. از C به A' وصل می‌کنیم و CA' را به اندازه‌ی خودش امتداد می‌دهیم تا رأس B حاصل شود. از A به B و C وصل می‌کنیم. مثلث ABC جواب مسئله است (شکل ۹).



(شکل ۹)

نکته‌ی مهم: روش بالا، یعنی این‌که «مسئله را حل شده بگیریم»، یکی از راهبردهای بسیار مهم در حل مسئله‌هاست. در بسیاری از مسئله‌ها، تنها با استفاده از داده‌ها، نمی‌توانیم مسئله را حل کنیم (مثل مسئله ۴۹) و نیازمند اطلاعات جدیدی از آن هستیم. برای دست‌یابی به اطلاعات جدید، مسئله را حل شده می‌گیریم و به کاوش در ویژگی‌ها و رابطه‌های بین اجزای آن می‌پردازیم تا اطلاعات لازم و کافی برای حل مسئله را از میان آن‌ها استخراج کنیم. آن‌گاه به کمک داده‌های قبلی و یافته‌های جدید، مسئله را حل می‌کنیم.



(شکل ۱۰)

۹. می‌دانیم مکان هندسی نقطه‌ای که از نقطه‌ی معلوم A به فاصله‌ی R است، دایره‌ای به مرکز A و به شعاع R است. این دایره را رسم می‌کنیم و آن را «C» می‌نامیم (شکل ۱۰). از طرف دیگر، مکان هندسی نقطه‌ای از صفحه که از خط ثابت oy به فاصله‌ی ثابت l قرار دارد، دو خط موازی oy، در دو طرف آن و به فاصله‌ی l از آن هستند. این مکان هندسی را نیز رسم می‌کنیم و آن‌ها را خط‌های Δ و $Δ'$ می‌نامیم. نقطه‌های برخورد Δ و $Δ'$ با دایره‌ی C جواب مسئله‌اند و به تعداد نقطه‌های برخورد، مسئله جواب دارد. پس مسئله حداکثر ۴ جواب دارد.

۱۰. می‌دانیم که قطر عمود بر هر وتر در یک دایره، عمودمنصف آن وتر است. بنابراین داریم:

$$AH = \frac{AB}{۲} \text{ و } A\hat{H}O = ۹۰^\circ \text{ و } OA = ۱۰ \text{ و } OH = ۶$$

$$OH^۲ + AH^۲ = OA^۲ \Rightarrow ۶^۲ + AH^۲ = ۱۰^۲$$

$$\Rightarrow AH^۲ = ۱۰۰ - ۳۶$$

$$\Rightarrow AH^۲ = ۶۴ \Rightarrow AH = ۸ \Rightarrow AB = ۲AH = ۱۶$$

۱۱. با توجه به این‌که مماس‌های رسم‌شده از هر نقطه بر یک دایره مساوی‌اند، داریم:

$$\text{محیط چهارضلعی} = ۲(AQ + BM + CN + DP)$$

از آن‌جا:

$$۱۴۲ = ۲(x + ۱۹ + ۲۲ + x + ۸)$$

$$۷۱ = ۲x + ۴۹ \Rightarrow ۲x = ۲۲ \Rightarrow x = ۱۱$$

۱۲. مثلث OMT در رأس T قائم‌الزاویه است و TH ارتفاع وارد بر وتر این مثلث است و داریم:

الف) $MT^۲ = OM^۲ - OT^۲$ و $OT = R = ۱۰$ و $OM = ۲۶$

$$\Rightarrow MT^۲ = ۲۶^۲ - ۱۰^۲ = ۶۷۶ - ۱۰۰ = ۵۷۶ \Rightarrow MT = ۲۴$$

ب) $OM^۲ = OH.OM \Rightarrow ۱۰^۲ = OH.۲۶ \Rightarrow OH = \frac{۱۰۰}{۲۶}$

$$\Rightarrow OH = \frac{۵۰}{۱۳} \text{ و}$$

$$TH.OM = OT \times TM = ۲S_{OMT} \Rightarrow TH \times ۲۶ = ۱۰ \times \frac{۵۰}{۱۳}$$

$$\Rightarrow TH = \frac{۲۵۰}{۱۶۹}$$

ریاضیات و صنعت

همان‌طور که از بررسی تاریخ برمی‌آید، آغاز حساب و هندسه‌ی مقدماتی، به‌طور کامل زیر تأثیر خواست‌های مستقیم زندگی و عمل بود. اندیشه‌ها و روش‌های تازه‌ی بعدی ریاضی هم، با توجه به خواست‌های عملی دانش‌های طبیعی (اخترشناسی، مکانیک، فیزیک و غیره) که پیوسته در حال پیشرفت بودند، شکل می‌گرفت. بستگی مستقیم ریاضیات با صنعت، غالباً به صورت به کار گرفتن نظریه‌های موجود ریاضی در مسئله‌های صنعتی جلوه می‌کند. با وجود این، از نمونه‌هایی یاد می‌کنیم که بر اثر خواست مستقیم صنعت نظریه‌های کلی ریاضی به وجود آمده‌اند. روش «کمترین مربع‌ها»، به دلیل نیازهای نقشه‌برداری پدید آمد. بسیاری از حالت‌های تازه‌ی معادله‌های دیفرانسیلی، برای نخستین بار برای حل مسئله‌های مربوط به صنعت، طرح و بررسی شد. روش‌های اپراتوری حل معادله‌های دیفرانسیلی، در رابطه با الکترونیک تکامل یافت و....

به خاطر نیازهای ارتباطی، شاخه‌ی تازه‌ای به نام «انفورماسیون»، در نظریه‌ی احتمال به وجود آمد. مسئله‌های مربوط به ترکیب دستگاه‌های مدیریت، به پیشرفت شاخه‌های تازه‌ای از منطق ریاضی منجر شدند. برای پیشرفت روش‌های تقریبی حل معادله‌های دیفرانسیل، به جز نیازهای اخترشناسی، مسئله‌های مربوط به صنعت هم نقش اساسی داشته‌اند. بسیاری از این روش‌ها، به‌طور کامل با تکیه بر زمینه‌های صنعتی و مهندسی پدید آمدند.

با پیچیده‌تر شدن صنعت و دشواری‌های ناشی از آن، موضوع به دست آوردن سریع جواب‌های عددی، اهمیت زیادی پیدا می‌کند. با امکان‌هایی که در نتیجه‌ی کشف ماشین‌های محاسبه برای حل عملی مسئله‌ها به وجود آمد، روش‌های محاسبه‌ای باز هم اهمیت بیشتری پیدا کردند. ریاضیات محاسبه‌ای، برای حل بسیاری از مسئله‌های عملی و از جمله مسئله‌های مربوط به انرژی اتمی و بررسی‌های فضایی، نقشی جدی به عهده دارد.

منبع

فرهنگ ریاضیات. گروه ریاضیات انتشارات مدرسه. ناشر: مدرسه‌ی برهان.

وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش وبرنامه ریزی آموزشی
دفتر انتشارات کمک آموزشی

۵۷

رشد برهان

مجله ی ریاضی

فصلنامه ی آموزشی، تحلیلی و اطلاع رسانی

دوره ی متوسطه

• دوره‌ی هفدهم • شماره‌ی ۳ • بهار ۱۳۸۷ • بها: ۳۵۰۰ ریال

نسوی



ابوالحسن علی‌بن احمد نسوی
ریاضی‌دان و منجم مسلمان ایرانی
(۳۹۳- در حدود ۴۷۳)

نسوی ریاضی‌دان و منجم بود و به خصوص به هندسه می‌پرداخت و در منطق و فلسفه و پزشکی نیز دست داشت. اصل وی از نسای خراسان بود و به سال ۳۷۱ یزدگردی مطابق با ۳۹۳ هجری قمری در شهر ری متولد شد و بخش مهمی از عمر خویش را در آن شهر گذرانید. بنا به قول بیهقی مدت عمر وی نزدیک به صد سال رسید و تا اواخر عمر قوای او در حال اعتدال بود. تاریخ درگذشت او معلوم نیست و آن‌چه مسلم است این است که وی تا سال ۴۴۹ یزدگری مطابق با ۴۷۳ هجری قمری که سال تألیف کتاب بازنامه توسط اوست زنده بوده و در آن تاریخ تقریباً هفتاد و نه سال داشته و از ده سال پیش از آن تاریخ خانه‌نشینی اختیار کرده بوده است. در هر صورت نسوی از ریاضی‌دانان قرن پنجم است.

ظاهراً به سبب مهارتی که نسوی در ریاضیات و نجوم داشته دانشمندان وی را استاد مختص نامیده‌اند. مثلاً نصیرالدین طوسی در آغاز تحریر تفسیر نسوی بر کتاب مأخوذات ارشمیدس می‌نویسد: «قال الاستاد المختص» و نیز هر جا در آن کتاب می‌خواهد از نسوی یاد کند او را «استاد مختص» یا «استاد می‌نامد». همچنین شهمردان رازی که از شاگردان نسوی بوده در کتاب نزهت‌نامه‌ی علایی نوشته است: «در حداثت سن مشغوف (= شیفته) بودمی بر خواندن علوم ریاضیات و کتاب اقلیدس و حل اعمال زیج و فصول فرغانی در هیأت افلاک بر استاد مختص علی نسوی همی خواندم.»

نسوی خود در مقدمه‌ی کتاب بازنامه نوشته است که به شغل سپاهیگری و خدمت پادشاهان اشتغال داشته و از هشت سالگی به نگاه‌داری مرغان شکاری می‌پرداخته است. وی کتاب المقنع فی الحساب الهندی را ابتدا به زبان فارسی برای مجدالدوله (ابوطالب رستم‌بن فخرالدوله) نوشت و سپس آن را به خواهش شخص دیگری به زبان عربی برگردانید. وی، چنان‌که خواهیم دید، چند جلد از تألیفات خود را به نام ابوالحسن مطهربن ابوالقاسم از نقبای علویان ری نوشت.

بروکلمان به پیروی از بیهقی نوشته است که کوشیارگیلی استاد نسوی بوده است ولی این به نظر درست نمی‌آید چه تاریخ تولد نسوی سال ۳۹۳ و تاریخ وفات کوشیار به احتمال قوی در حدود ۴۰۰ بوده و بنابراین نسوی در موقع درگذشت کوشیار فقط هشت سال داشته است.

صدیقی در مقاله‌ی مذکور نوشته است: «نسوی چنان‌که از تألیفاتش، و از آن‌چه دیگران درباره‌ی وی نوشته‌اند، برمی‌آید سیرت نیکو داشت و به علم و هنر عشق می‌ورزید و مردی کریم و مهمان‌نواز و خوان‌گشاده و عالم‌دوست و دانش‌گستر بود و به گفته‌ی یکی از شاگردانش که به ابوالحسن بیهقی حکایت کرده می‌گفت: «مرد با همت بلند و عزیمت راست به مطلوب تواند رسید نه با رنج و تعب» وی طرفدار تخصص در علوم بود و به هر که برای استفاده به محضر وی حاضر می‌شد می‌گفت: «بکوش تا در صناعت خویش کامل شوی و متذوق مباش چه متذوق را سیری نیست.»

ناصرخسرو در سفرنامه‌ی خود نوشته است که در سال ۴۳۷ نسوی را در سمنان دیده که جوان بوده و گروهی نزد وی اقلیدس و گروهی طب و گروهی حساب می‌خوانده‌اند و در اثنای سخن می‌گفته که «من بر استاد ابوعلی سینا رحمة الله علیه چنین خواندم و از وی چنین شنیدم».
و نیز می‌گفته که «من سیاق ندانم و هوس دارم که چیزی از حساب سیاق بخوانم».

آثار ریاضی موجود نسوی

۱. المقنع فی الحساب الهندی

این کتاب را نسوی ابتدا به زبان فارسی برای مجدالدوله دیلمی نوشته و بعداً آن را برای شخصی ملقب به شرف‌الملوک با تغییراتی به زبان عربی

بقیه در صفحه‌ی ۳ جلد

بسم الله الرحمن الرحیم

وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه ریزی آموزشی
دفتر انتشارات کمک آموزشی

◆ مدیر مسئول: علیرضا حاجیان زاده
◆ سردبیر: حمیدرضا امیری
◆ مدیر داخلی: میرشهرام صدر
◆ طراح گرافیک: آزیتا کوثری
◆ ویراستار ادبی: کبری محمودی
◆ اعضای هیأت تحریریه: حمیدرضا امیری
محمد هاشم رستمی، احمد قندهاری،
میرشهرام صدر، هوشنگ شرقی،
سید محمدرضا هاشمی موسوی،
غلامرضا یاسی پور
و با تشکر از همکاری ارزنده‌ی
استاد پرویز شهریاری
صندوق الکترونیکی سردبیر:
Borhanm@roshdmag.ir
پیام گیر نشریات رشد: ۸۸۸۳۹۲۳۲-۸۸۳۰۱۴۸۲
◆ چاپ و صحافی: شرکت افست (سهامی عام)
◆ نشانی دفتر مجلّه: تهران، صندوق پستی ۱۵۸۷۵/۶۵۸۵
تلفن دفتر مجله: ۹-۸۸۸۳۱۱۶۰ داخلی ۳۹۷
تلفن امور مشترکین: ۷۷۳۳۶۶۵۶-۷۷۳۳۵۱۱۰
www.roshdmag.ir
ISSN 1735 - 4951

رشد برهان ۵۷
مجله ی ریاضی
دوره ی متوسطه
فصلنامه ی آموزشی، تحلیلی و اطلاع رسانی
دوره‌ی هفدهم /شماره‌ی ۳/ بهار ۱۳۸۷/شمارگان: ۱۵۰۰۰ نسخه

رشد برهان متوسطه، تمامی دبیران محترم و دانش‌آموزان عزیز را در زمینه های زیر به همکاری دعوت می کند:

■ نگارش مقاله‌های کمک درسی (شرح و بسط و رفع مشکلات مبحث درسی کتاب‌های ریاضی دوره‌ی متوسطه و پیش‌دانشگاهی)
■ طرح مسائل کلیدی به همراه حل آن‌ها (برای دانش‌آموزان)
■ طرح مسائل مسابقه‌ای به همراه حل آن‌ها (برای دانش‌آموزان)
■ طرح معماهای ریاضی
■ نگارش یا ترجمه‌ی مقاله‌های عمومی ریاضی (مانند تاریخ ریاضیات، زندگینامه‌ی علمی و اجتماعی ریاضیدانان، نکته‌های تازه و لطیف ریاضیات، آموزش ریاضیات، آموزش کامپیوتر و ...)

رشد برهان متوسطه هر سه ماه، یکبار منتشر می شود.
مجلّه در حک، اصلاح، حذف و اضافه ی مقاله ها آزاد است.
مقاله های وارده ،باید خوانا و حتی‌الامکان کوتاه باشد.
مقاله های رسیده مسترد نمی شود.
استفاده از مطالب مجلّه در کتاب ها یا مجله های دیگر با ذکر دقیق مأخذ بلامانع است.

مثبت یا منفی

وقتی دانش‌آموز دبیرستان بودم، با بستن پیچ رادیو یا تلویزیون، ارتباط ما با دنیای خارج از منزل قطع می‌شد. تلویزیون هم فقط دو کانال داشت. نه این همه کانال‌های تلویزیونی وجود داشت، نه ماهواره‌ای در کار بود، نه از اینترنت خبری بود، و نه تلفن همراه و Blutooth و sms و...

این موضوع از یک طرف می‌توانست باعث عقب‌افتادگی و دور بودن از اطلاعات به‌روز و مفید شود که مسئولان رژیم ستم‌شاهی نهایت سوءاستفاده را از آن می‌کردند. مردم و به‌خصوص جوان‌ها را در بی‌خبری و خاموشی نگه می‌داشتند و اجازه نمی‌دادند، به راحتی به اطلاعات و اخبار دست پیدا کنند. از طرف دیگر، این شرایط به پدران و مادران و مربیان امکان می‌داد، جوانان خود را در جهتی که به صلاح آن‌ها می‌دیدند، هدایت و راهنمایی کنند (این جهت می‌توانست مثبت یا منفی باشد).

اما در حال حاضر، اگر شما دانش‌آموزان عزیز از محیط اطراف خود شناخت کافی نداشته باشید و از شدت و حجم بالای خطراتی که شما را تهدید می‌کنند، آگاه نباشید، به‌راحتی حتی در کنار پدر و مادر یا در محیط آموزشی مورد حمله قرار می‌گیرید و ممکن است از جنبه‌های گوناگون، آینده‌ی شما تباه شده و از نظر روحی و روانی آسیب ببینید.

عزیزان دانش‌آموز، راه‌های ورودی اطلاعاتی که می‌توانند به وجود ما انسان‌ها نفوذ کنند و ما را مورد تهاجم قرار دهند، دو راه است: اول عقل و دوم دل. درست است. فقط از همین دو راه است که دیگران می‌توانند در ما نفوذ کنند و ما را به بیراهه بکشانند.

باید زرنگ باشیم. به‌هر چیزی نمی‌توان و نباید نگاه کرد. هر عکسی یا فیلمی یا حتی نوشته‌ای را نمی‌توان دید. کتاب‌هایی خریده‌ام که پس از دو سال نگه‌داری در کتاب‌خانه‌ام و پس از آن که مطمئن شدم، درباره‌ی موضوع مورد بحث آن‌ها اطلاعات کافی و وافی پیدا کرده‌ام، به مطالعه‌ی آن‌ها مبادرت کردم.

به‌هر چیزی نمی‌توان و نباید گوش داد و در هر بحثی نباید شرکت کرد. اگر مطلبی را شنیدیم، تا درباره‌ی آن اطلاعات خودمان را کامل نکرده‌ایم، نباید نتیجه گیری کنیم یا نتیجه گیری دیگران را دربست بپذیریم.

و آخر آن که به هرچیزی نمی‌توان و نباید دل بدهیم. دل که عرض و طول آن به بی‌نهایت میل می‌کند، و دل که عرش خداوند تبارک و تعالی است، جای هرکس و هرچیزی نیست.

با شناخت دقیق و اصولی اسلام عزیز، خودتان را بیمه کنید و در مقابل همه‌ی تهاجم‌هایی که از هر طرف شما را تهدید می‌کنند، در امان بمانید. بیایید از همه‌ی امکانات و پیشرفت‌های علمی، در جهت بالا بردن معرفت و شناخت خودمان از اسلام استفاده کنیم.

ان شاءالله.

یادداشت سردبیر

H66Amiri@yahoo.com



یادهای آموزشی (۱۰)

از گذشته‌های دور

پرویز شهریاری

۱. به یاد دارم، در دبیرستان فیروزبهرام هندسه درس می‌دادم. مدیر مدرسه، در کار مدیریت آدم کارکشته‌ای بود. گمانم آخرهای سال‌های ۳۰ یا نخستین سال‌های ۱۳۴۰ خورشیدی، برادر کوچکم سهراب هم شاگرد همان دبیرستان بود. برادر دیگرم هرمز، در دانشکده‌ی افسری در رشته‌ی مهندسی دانشکده‌ی فنی را به پایان رسانده بود و اینک افسر ارتش بود و در آذربایجان خدمت می‌کرد. من که برادر بزرگ‌تر بودم، در دبیرستان‌ها و از جمله در دبیرستان فیروزبهرام درس می‌دادم. کلاس‌های متعددی داشتم؛ از جمله هندسه‌ی کلاس هشتم و کلاس دهم.

نیمی از وقت خود یا بیشتر را به درس هندسه می‌پرداختم و بقیه را با دانش‌آموزان صحبت می‌کردم. بدون این‌که از قبل تصمیمی گرفته باشم، صحبت‌های من در این‌باره بودند: ریشه‌های هندسه و این‌که یونانی‌های قبل از میلاد تا سال چهارم میلادی، تا چه اندازه روی هندسه کار کرده بودند. یونان با نظام بردگی اداره می‌شد و همه‌ی کارهای عملی و کاربردی به عهده‌ی برده‌ها بود که چندان اطلاعی از آن‌ها نداریم. ولی هندسه را که شامل همه‌ی انواع ریاضی می‌شد، به‌خوبی پیش می‌بردند. افلاطون، بر سر در آکادمی خود نوشته بود: «هرکس هندسه نمی‌داند وارد نشود.» یونانیان باستان هندسه را تا درون هندسه‌ی عالی پیش برده بودند.

ارشمیدس که در حدود ۳ سده پیش از میلاد زندگی می‌کرد، یکی از استثناها به‌شمار می‌رود. او هم برده‌ای آزاد شده بود، ولی به‌جز ریاضیات، به‌کارهای دیگر هم می‌پرداخت. از او یاد می‌کنند که می‌گفت: «یک جایی به من بدهید که از آن‌جا بتوانم زمین را تکان بدهم.» ارشمیدس خیلی کارها انجام داد. او قایق‌ها و کشتی‌های رومی را با هدایت سنگ‌ها به سمت آن‌ها فراری داد. کتاب‌های زیادی هم درباره‌ی ریاضیات و فیزیک نوشت و سر آخر به‌دست یک سرباز رومی کشته شد.

هم‌چنین می‌توانیم از **اقلیدس** نام ببریم که کار مزبوط به هندسه و حساب را، که البته ناتمام ماند، بررسی و در آن اصل موضوع‌ها و قضیه‌ها را تنظیم کرد. جواب **بطلمیوس** که فرمانده مصر بود و پرسیده بود: آیا راه ساده‌تری برای بیان هندسه نیست، پاسخ داده بود: «هیچ راه دیگری وجود ندارد.» هندسه‌ی اقلیدسی تا زمان گوس، بویوی لباچوفسکی که هندسه‌ی تازه‌ای را بنیان گذاشتند، به‌صورت خود باقی بود.

□

به دبیرستان فیروزبهرام برگردیم و آن‌چه را که در کلاس انجام دادم، پی بگیریم. کلاس هشتم گوشه‌ی حیاط قرار داشت. روزها برق نداشت و گرما هم با یک بخاری چوبی بود. این بخاری دود می‌کرد و تمام هوای اتاق را دود می‌گرفت. بچه‌ها هم که تعدادشان زیاد بود نمی‌توانستند مطالب روی

تخته سیاه را ببینند، من تلاش می‌کردم با صحبت‌های خود و یاری گرفتن از سایر شاگردان، آن‌چه را که لازم بود، به آن‌ها بفهمانم که ناگهان در اتاق باز شد و شاگردی به داخل آمد. کُتش را روی دوش انداخته بود و پاهایش را به زمین می‌کشید. من به جلوی او رفتم و گفتم: آقازاده حالا تشریف می‌آورند؟ او بی‌معطلی رویش را برگرداند و گفت: اگر نمی‌خواهید برمی‌گردم. از کلاس بیرون رفت و ما را هم‌چنان به حال خود گذاشت.

زنگ تفریح یک‌ربع ساعت بود. من از کلاس بیرون آمدم. در حیاط مدرسه، مدتی این طرف و آن طرف گشتم تا سرانجام پیدایش کردم پیش او رفتم و گفتم: نمره‌ی اخلاقت که صفر است. البته من به نمره‌ی اخلاقت کار ندارم، چون دست من نیست، ولی تلاش کن هندسه را یاد بگیری، نمره‌ی هندسه‌ات را می‌دهم. این شاگرد به طور کلی درس‌خوان نبود. من هم امید نداشتم او به درس خواندن رو آورد.

امتحان آخر سال رسید. چون کلاس هشتم داشتم، طرح پرسش‌های امتحان را به دیگران واگذاشتم تا تحت تأثیر آن‌چه در کلاس گفته‌ام، قرار نگیرم. امتحان تمام شد و من ورقه‌ها را جمع کردم و به منزل رفتم. بعد از تصحیح ورقه‌ها، آن‌ها را به مدرسه سپردم. بعد از امتحان، شورای معلم‌ها بود. من در شورا شرکت کردم. بحث بر سر کسانی بود که نمره کم داشتند. جلسه تمام شد، ولی هیچ صحبتی درباره‌ی فرد مورد نظر من نشد. وضع او را پرسیدم، گفتند رفوزه شده است. خواستم نمره‌هایش را به من نشان دهند. معلوم شد هم معدلش از ۱۰ کم‌تر و هم تعداد تجدیدی‌هایش از حد معمول بیش‌تر شده است. یکی از درس‌ها را با نیم نمره کم‌تر، تجدید شده بود و نمره‌ی هندسه‌اش هم ۳/۵ بود. از معلم مربوط به آن درس خواستم، این ۰/۵ نمره را به او بدهد تا تعداد تجدیدی‌هایش به روال مطلوب برسد. ولی او هم قبول نکرد و گفت: شاگرد خوبی نیست و من هیچ کمکی به او نمی‌کنم.

من ورقه هندسه‌ی او را خواستم. ورقه را آوردند. نمره‌اش ۳/۵ بود. حساب کردم چه قدر می‌خواهد تا هم یک تجدیدی او کم شود و هم معدلش از ۱۰ بالاتر برود. نمره را به حد لازم رساندم و بالای نمره هم نوشتم: با مسئولیت خودم. معلم‌ها در آن زمان این اختیار را داشتند و این در بسیاری موارد می‌توانست به شاگردان کمک برساند. می‌خواستم به خانه برگردم، دیدم این جوان در راهروی پشت دفتر، ایستاده و نگران سرنوشت خود است. با من کاری نداشت. گمان می‌کرد اگر من ضرری به او نرسانده باشم، بی‌تردید هوادارش هم نیستم.

من به منزل رفتم منزل ما در خیابان ویلا و اجاره‌ای بود. همان جایی که مأموران شهربانی آمدند با به‌هم ریختن وسیله‌ها، مرا هم بردند... نهاری را که مادرم آماده کرده بود، خوردم و با تکیه به رخت‌خوابی که مادرم جمع کرده بود، به استراحت پرداختم. ناگهان زنگ در به صدا درآمد. مادرم رفت در را باز کند. برگشت و به من گفت: پسری در حال گریه منتظر توست. گفتم می‌تواند بیاید تو. اتاق مهمان‌خانه را باز کردم و منتظر او ماندم. دیدم همان پسر است. در حال گریه، تنها یک جمله به من گفت: آقا، من حاضرم همه‌ی درس‌های تجدیدی‌ام را بخوانم. حتی هندسه را. به او پاسخ دادم من یاری‌ات می‌کنم، بیا این جا و پیش من درس بخوان.

معلوم شد دفتردار مدرسه همه‌ی آن‌چه را که پیش آمده بود، برایش تعریف کرده است. این پسر فهمیده بود، تنها من توانسته‌ام او را از وضع ناهنجاری که گرفتار شده بود، نجات دهم هفته‌ای ۳روز و بعدازظهرها با او کار می‌کردم هم هندسه و هم همه‌ی درس‌های تجدیدی او را. راستش این است که در بعضی درس‌ها مثل ادبیات و زبان عربی، خودم هم چیزهایی یاد گرفتم.

این جوان در امتحان شهریور قبول شد و به کلاس بالاتر رفت. من تا کلاس دهم مراقب او بودم که هرسال قبول شود. از آن به بعد، دیگر نمی‌دانم چه شد و به کجا رفت. تا امروز از او خبری ندارم.

▢

۲. در همان دوران که از برادرانم هرمز و سهراب هم صحبت کردم، حادثه‌هایی پیش آمد که مرا نسبت به این دو برادرم شرمنده کرد. ممکن است اندکی تفاوت زمانی باشد، ولی به‌هرحال مایلم این دو حادثه را بیان کنم.

هرمز نزدیک ۳سال از من کوچک‌تر است. آدمی بسیار فهیم همیشه یار و یاور من بوده است. گمانم وقتی که در ارومیه بود، چند نفر از خانواده و از جمله من را به آن‌جا دعوت کرد. او تنها زندگی می‌کرد. از ما خواسته بود چند روزی به دیدارش برویم. پول رفت‌وبرگشت را هم برایمان فرستاده بود. آن‌روزها هواپیما نبود، یعنی برای رفتن به ارومیه، ناچار باید با اتوبوس می‌رفتیم. من نمی‌دانم چه پیش آمده بود که ناچار شدم رفتن خود را لغو کنم و پسرخواهرم را که در آن زمان کوچک بود، به‌جای خود بفرستم. گمانم آن روزها پنج شش سال داشت. اسمش داریوش بود. این‌ها به ارومیه رفتند و نزد برادرم بودند. برادرم در آن زمان و بعدها، بارها از من گله کرد که چرا خودم نرفتم و من خجلت‌زده شدم.

هرمز در همان‌جا بود که بازداشت شد. گمان می‌کنم در سال ۱۳۴۴او را به تهران آوردند و در زندان قزل‌قلعه، در انتهای خیابان امیرآباد که امروز خراب شده است، زندانی‌اش کردند. تمام خانواده به دیدار او رفتیم، ولی مسئول زندان به من اجازه نداد و گفت، تو خودت در این‌جا زندانی بوده‌ای و حالا نمی‌توانی برادرت را ببینی. بقیه رفتند و برگشتند و آن‌روز هم گذشت.

بعدها برادرم به چهارسال زندان محکوم شد و از وقتی که بیرون آمد، مدتی این جا و آن‌جا کار می‌کرد، بدون سابقه یا نیاز به داشتن وسیله‌های کاری. او از دستمزد خود به‌طور دائم به ما یعنی خانواده‌اش کمک می‌کرد، بی‌آن‌که یادداشت کند و یا حساب نگه دارد.

اکنون هم که تنها زندگی می‌کند، همان روحیه‌ی بخشندگی را نگه داشته است و همیشه به برادر دیگرمان سهراب و پسرخواهرمان داریوش یاری می‌رساند.

مفهوم حد تابع در یک نقطه

احمد قندهاری

برای دانش‌آموزان سال سوم

۱. میل کردن x به سمت یک عدد

فرض کنید می‌خواهیم x را از سمت چپ عدد ۲ به ۲ نزدیک کنیم، ولی به ۲ نرسد؛ به این شکل:

$$x = 1, \ldots, 1/4, \ldots, 1/7, \ldots 1/9, 1/99, 1/999, 1/9999, 1/9\ldots9\ldots9\ldots9$$

ملاحظه می‌کنید که هرچه تعداد ۹های سمت راست مُمیز را زیاد کنیم، عدد حاصل مرتباً به عدد ۲ نزدیک و نزدیک‌تر می‌شود، ولی به آن نمی‌رسد. چون x از طرف اعداد کمتر از ۲ به ۲ نزدیک شده است، می‌نویسیم:

$$x \to 2^-$$

حال x را از طرف اعداد بزرگ‌تر از ۲ به عدد ۲ نزدیک می‌کنیم؛ به این شکل:

$$x = 3, \ldots, 2/7, \ldots, 2/3, \ldots, 2/1, 2/01, 2/001, 2/0001, 2/0\ldots01$$

باز هم ملاحظه می‌کنیم، هرچه تعداد ۰ های بین ممیز و عدد ۱ را زیاد کنیم، عدد حاصل مرتباً به ۲ نزدیک و نزدیک‌تر می‌شود، ولی به آن نمی‌رسد.

چون x از طرف اعداد بزرگ‌تر از ۲ به ۲ نزدیک شده است، می‌نویسیم:

$$x \to 2^+$$

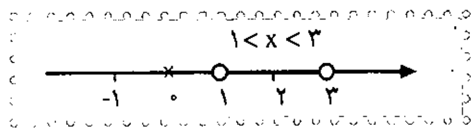
همسایگی

نامساوی $|x - 2| < 1$ را درنظر می‌گیریم و آن را حل می‌کنیم؛ به این صورت:

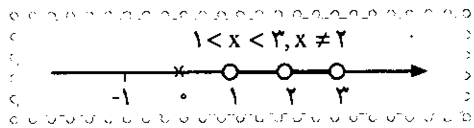
$$|x - 2| < 1 \Rightarrow -1 < x - 2 < 1 \Rightarrow 1 < x < 3$$

عدد میانی، بازه‌ی (۳ و ۱)، عدد (۲) است. فرض می‌کنیم $x=۲$، اگر x را مرکز قرار دهیم، آن‌گاه بازه‌ی (۳ و ۱) را یک همسایگی متقارن به مرکز $x=۲$ به شعاع ۱ گوییم.

چنان‌چه از بازه‌ی (۳و۱)، مرکز همسایگی را برداریم، یعنی $(۱,۳)-\{۲\}$، آن‌گاه این همسایگی را یک همسایگی متقارن محذوف (مرکز حذف شده) عدد ۲ به شعاع ۱ می‌گوییم



همسایگی متقارن عدد ۲ به شعاع ۱



همسایگی متقارن محذوف عدد ۲ به شعاع ۱

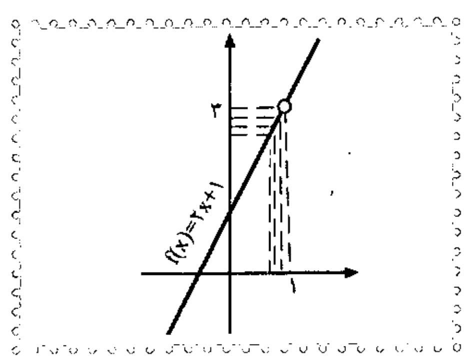
توجه: در حالت کلی، نامساوی $|x-a|<r$ یا $a-r<x<a+r$ را یک همسایگی متقارن به مرکز a و شعاع r می‌گوییم.

حد چپ

بررسی حد چپ تابع را با یک مثال شروع می‌کنیم. فرض کنید تابع f با ضابطه‌ی $f(x)=۲x+۱$ باشد. می‌خواهیم در این تابع x را از طرف اعداد کوچک‌تر از ۱ به ۱ نزدیک و رفتار تابع f را در این فرایند بررسی کنیم. برای درک بهتر، جدول زیر را تشکیل می‌دهیم.

x	۰/۹	۰/۹۹	۰/۹۹۹	۰/۹۹۹۹	۰/۹۹۹۹۹
f(x)	۲/۸	۲/۹۸	۲/۹۹۸	۲/۹۹۹۸	۲/۹۹۹۹۸

ملاحظه می‌کنیم، وقتی x از طرف اعداد کوچکتر از ۱ به ۱ نزدیک و نزدیک‌تر می‌شود، رفتار تابع نشان می‌دهد که f(x) به عدد ۳ نزدیک و نزدیک‌تر می‌شود. به نظر می‌رسد، وقتی $x\to ۱^-$، آن‌گاه حد f(x) برابر ۳ است. از جدول بالا، این نتایج به‌دست می‌آید:



$۰<۱-x<۰/۱ \Rightarrow |f(x)-۳|<۰/۲$

$۰<۱-x<۰/۰۱ \Rightarrow |f(x)-۳|<۰/۰۲$

$۰<۱-x<۰/۰۰۱ \Rightarrow |f(x)-۳|<۰/۰۰۲$

$۰<۱-x<۰/۰۰۰۱ \Rightarrow |f(x)-۳|<۰/۰۰۰۲$

$۰<۱-x<۰/۰۰۰۰۱ \Rightarrow |f(x)-۳|<۰/۰۰۰۰۲$

این نتایج را به صورت زیر هم می‌توان نشان داد:

اگر بخواهیم $|f(x)-۳|<۰/۲$، باید $۰<۱-x<۰/۱$

اگر بخواهیم $|f(x)-۳|<۰/۰۲$، باید $۰<۱-x<۰/۰۱$

اگر بخواهیم $|f(x)-۳|<۰/۰۰۲$، باید $۰<۱-x<۰/۰۰۱$

اگر بخواهیم $|f(x)-۳|<۰/۰۰۰۲$، باید

$۰<۱-x<۰/۰۰۰۱$

اگر بخواهیم $|f(x)-۳|<۰/۰۰۰۰۲$، باید

$۰<۱-x<۰/۰۰۰۰۱$

می‌توان گفت، f(x) را به حد خودش به هر اندازه که بخواهیم می‌توانیم نزدیک کنیم، به شرطی که x را به اندازه‌ی کافی به عدد ۱ نزدیک کنیم.

مثال: تابع با ضابطه‌ی $f(x)=۲x+۱$ را در نظر می‌گیریم و $x\to ۱^-$. می‌خواهیم $|f(x)-۳|<\frac{۱}{۲۵۰}$. تعیین کنید x را چه‌قدر باید به عدد ۱ نزدیک کنیم.

حل: چنین عمل می‌کنیم:

$$|f(x)-۳|<\frac{۱}{۲۵۰} \Rightarrow |(۲x+۱)-۳|<\frac{۱}{۲۵۰} \Rightarrow |۲x-۲|<\frac{۱}{۲۵۰}$$

$$\Rightarrow ۲|x-۱|<\frac{۱}{۲۵۰} \Rightarrow \underset{x\to ۱^-}{|x-۱|}<\frac{۱}{۵۰۰} \Rightarrow ۰<۱-x<\frac{۱}{۵۰۰}$$

یعنی x باید از سمت چپ عدد ۱ به عدد ۱ آن‌قدر نزدیک شود تا فاصله‌اش با آن، کمتر از $\frac{۱}{۵۰۰}$ شود.

پس اگر بخواهیم f(x) به عدد ۳ به حدی نزدیک شود که فاصله‌ی f(x) از عدد ۳ کمتر از $\frac{۱}{۲۵۰}$ باشد، باید x را از سمت چپ به عدد ۱ آن‌قدر نزدیک کنیم تا فاصله‌ی ۱ تا عدد x، کمتر از $\frac{۱}{۵۰۰}$ شود.

تمرین: اگر در مثال بالا بخواهیم $|f(x)-۳|<\frac{۱}{۷۲۰}$ باشد، تعیین کنید x را از سمت چپ چه‌قدر باید به عدد ۱ نزدیک کنیم.

جواب: $۰<۱-x<\frac{۱}{۱۴۴۰}$

تعریف حد چپ تابع

فرض می‌کنیم تابع f در بازه‌ی (a,x_0) تعریف شده باشد. می‌گوییم حد چپ تابع f وقتی $x \to x_0^-$، عدد حقیقی L است، اگر بتوانیم f(x) را به هر اندازه‌ی دلخواه به L نزدیک کنیم، به شرطی که $x<x_0$ را به اندازه‌ی کافی به x_0 نزدیک کنیم. در این صورت می‌نویسیم:

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x)=L$$

تمرین: می‌دانیم $\lim_{x\to ۲^-}(۴x+۳)=۱۱$. می‌خواهیم $|(۴x+۳)-۱۱|<\frac{۱}{۴۰۰}$. تعیین کنید x را چه قدر از سمت چپ ۲ به عدد ۲ نزدیک کنیم.

جواب: $۰<۲-x<\frac{۱}{۱۶۰۰}$

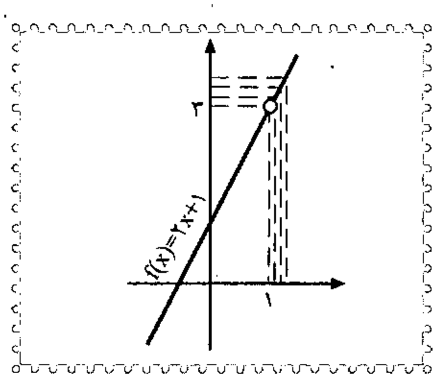
حد راست تابع

دوباره تابع با ضابطه‌ی $f(x)=۲x+۱$ را درنظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم x از طرف اعداد بزرگ‌تر از ۱ به عدد ۱ نزدیک شود: یعنی $x\to ۱^+$. می‌خواهیم رفتار تابع f را بررسی کنیم. به همین علت، جدول زیر را تشکیل می‌دهیم:

x	۱/۱	۱/۰۱	۱/۰۰۱	۱/۰۰۰۱	۱/۰۰۰۰۱
f(x)	۳/۲	۳/۰۲	۳/۰۰۲	۳/۰۰۰۲	۳/۰۰۰۰۲

ملاحظه می‌کنیم، وقتی $x>۱$ و به عدد ۱ نزدیک و نزدیک‌تر می‌شود، رفتار تابع نشان می‌دهد که مقدار تابع (f(x)) به عدد ۳ نزدیک و نزدیک‌تر می‌شود. به نظر می‌رسد، وقتی $x\to ۱^+$، آن‌گاه حدّ f(x) برابر ۳ است.

از این جدول، نتایج زیر به‌دست می‌آیند.



$۰<x-۱<۰/۱ \Rightarrow |f(x)-۳|<۰/۲$

$۰<x-۱<۰/۰۱ \Rightarrow |f(x)-۳|<۰/۰۲$

$۰<x-۱<۰/۰۰۱ \Rightarrow |f(x)-۳|<۰/۰۰۲$

$۰<x-۱<۰/۰۰۰۱ \Rightarrow |f(x)-۳|<۰/۰۰۰۲$

$۰<x-۱<۰/۰۰۰۰۱ \Rightarrow |f(x)-۳|<۰/۰۰۰۰۲$

این نتایج را به صورت زیر نیز می‌توان بیان کرد:

اگر بخواهیم $|f(x)-۳|<۰/۲$، باید $۰<x-۱<۰/۱$

اگر بخواهیم $|f(x)-۳|<۰/۰۲$، باید $۰<x-۱<۰/۰۱$

اگر بخواهیم $|f(x)-۳|<۰/۰۰۲$، باید $۰<x-۱<۰/۰۰۱$

اگر بخواهیم $|f(x)-۳|<۰/۰۰۰۲$، باید
$۰<x-۱<۰/۰۰۰۱$

اگر بخواهیم $|f(x)-۳|<۰/۰۰۰۰۲$، باید
$۰<x-۱<۰/۰۰۰۰۱$

می‌توان گفت، می‌توانیم $|f(x)-۳|$ را به هر اندازه که بخواهیم، کوچک کنیم، به شرطی که x را از سمت راست به عدد ۱ به اندازه‌ی کافی نزدیک کنیم.

مثال: تابع با ضابطه‌ی $f(x)=۲x+۱$ را درنظر می‌گیریم و $x\to ۱^+$. می‌خواهیم $|f(x)-۳|<\frac{۱}{۷۵۰}$. تعیین کنید x را چه‌قدر باید به عدد ۱ نزدیک کنیم.

حل:

$$|f(x)-۳|<\frac{۱}{۷۵۰} \Rightarrow |۲x+۱-۳|<\frac{۱}{۷۵۰} \Rightarrow |۲(x-۱)|<\frac{۱}{۷۵۰}$$

$$\Rightarrow ۲|x-۱|<\frac{۱}{۷۵۰} \Rightarrow \underset{x\to ۱^+}{|x-۱|}<\frac{۱}{۱۵۰۰} \Rightarrow ۰<x-۱<\frac{۱}{۱۵۰۰}$$

پس x را از طرف اعداد بزرگ‌تر از ۱ به عدد ۱ آن‌قدر باید نزدیک کنیم تا $x-۱$ کمتر از $\frac{۱}{۱۵۰۰}$ شود.

تعریف حد راست تابع

فرض می‌کنیم تابع f در بازه‌ی (x_0,b) تعریف شده باشد. می‌گوییم حد راست تابع f وقتی $x\to x_0^+$، عدد حقیقی L است، اگر بتوانیم f(x) را به هر اندازه‌ی دلخواه به L نزدیک کنیم، به شرطی که x را از طرف اعداد بزرگ‌تر از x_0 به اندازه‌ی کافی به x_0 نزدیک کنیم. در این صورت می‌نویسیم:

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x)=L$$

مثال: داریم $\lim_{x\to ۱^+}(-۴x+۳)=-۱$. می‌خواهیم $|(-۴x+۳)+۱|<\frac{۱}{۳۰۰}$.

آن‌گاه x را از طرف اعداد بزرگ‌تر از ۱ چه‌قدر باید به عدد ۱

نزدیک کنیم؟

حل:

$$|(-۴x+۳)+۱| < \frac{۱}{۳۰۰} \Rightarrow |-۴x+۴| < \frac{۱}{۳۰۰} \Rightarrow |-۴(x-۱)| < \frac{۱}{۳۰۰}$$

$$\Rightarrow ۴|x-۱| < \frac{۱}{۳۰۰} \Rightarrow \underset{x\to ۱^+}{|x-۱|} < \frac{۱}{۱۲۰۰} \Rightarrow ۰ < x-۱ < \frac{۱}{۱۲۰۰}$$

پس x را از طرف اعداد بزرگ‌تر از ۱ به عدد ۱ آن‌قدر باید نزدیک کنیم تا $x-۱$ کمتر از $\frac{۱}{۱۲۰۰}$ باشد.

تعریف حد تابع در $x_۰$

فرض می‌کنیم تابع f در یک همسایگی $x_۰$ تعریف شده باشد (ممکن است تابع در خود $x_۰$ تعریف نشده باشد).

می‌گوییم حد f(x) وقتی $x \to x_۰$، برابر عدد حقیقی L است، اگر بتوانیم f(x) را به هر اندازه‌ی دلخواه به L نزدیک کنیم، به شرطی که x را به اندازه‌ی کافی به $x_۰$ نزدیک کنیم. در این صورت می‌نویسیم:

$$\lim_{x\to x_۰} f(x) = L$$

به عبارت دیگر، حد f(x) وقتی $x \to x_۰$، برابر عدد حقیقی L است، اگر بتوانیم $|f(x)-L|$ را هر اندازه که بخواهیم کوچک کنیم، به شرطی که $|x-x_۰|$ را به اندازه‌ی کافی کوچک کنیم.

مثال: تابع با ضابطه‌ی $f(x) = ۳x-۵$ را در نظر می‌گیریم. اگر $x \to ۱$، آن‌گاه حد f(x) برابر (۲-) است. می‌خواهیم $|f(x)+۲| < \frac{۱}{۱۰۰}$. آن‌گاه x را چه قدر باید به عدد ۱ نزدیک کنیم؟

حل:

$$|f(x)+۲| < \frac{۱}{۱۰۰} \Rightarrow |۳x-۵+۲| < \frac{۱}{۱۰۰} \Rightarrow |۳x-۳| < \frac{۱}{۱۰۰}$$

$$\Rightarrow |۳(x-۱)| < \frac{۱}{۱۰۰} \Rightarrow ۳|x-۱| < \frac{۱}{۱۰۰} \Rightarrow |x-۱| < \frac{۱}{۳۰۰}$$

یا $۰ < |x-۱| < \frac{۱}{۳۰۰}$

پس x را آن‌قدر باید به عدد ۱ نزدیک کنیم تا $|x-۱|$ (که مثبت است) کوچک‌تر از $\frac{۱}{۳۰۰}$ باشد.

توجه: اگر $\lim_{x\to x_۰^+} f(x) = L$ و $\lim_{x\to x_۰^-} f(x) = L$، آن‌گاه می‌گوییم تابع f در $x_۰$ حد دارد و حد آن برابر عدد حقیقی L است.

قضایای حد

۱. فرض می‌کنیم a و b اعداد حقیقی و $n \in N$:

الف) $\lim_{x\to a} b = b$

ب) $\lim_{x\to a} x = a$

ج) $\lim_{x\to a} x^n = a^n$

۲. فرض می‌کنیم a و b و L اعداد حقیقی و $n \in N$ و $\lim_{x\to a} f(x) = L_۱$ و $\lim_{x\to a} f(x) = L_۲$. آن‌گاه داریم:

الف) $\lim_{x\to a}(f(x) \pm g(x)) = L_۱ \pm L_۲$

ب) $\lim_{x\to a} b\, f(x) = bL_۱$

ج) $\lim_{x\to a} f(x).g(x) = L_۱.L_۲$

د) $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L_۱}{L_۲} \qquad L_۲ \neq ۰$

۳. اگر $\lim_{x\to a} f(x) = L \in \mathbb{R}$ و $\lim_{x\to a} g(x) = ۰$، آن‌گاه

$$\lim_{x\to a} f(x).g(x) = L(۰) = ۰$$

۴. اگر $f(x) = m_۰x^n + m_۱x^{n-۱} + \cdots + m_n$ یک چندجمله‌ای از درجه‌ی n باشد، آن‌گاه

$$\lim_{x\to a} f(x) = m_۰a^n + m_۱a^{n-۱} + \cdots + m_n$$

۵. اگر $\lim_{x\to a} f(x) = L$، آن‌گاه $\lim_{x\to a}|f(x)| = |L|$

۶. اگر $\lim_{x\to a} f(x) = L$ و $L \geq ۰$ و $n \in N$، آن‌گاه $\lim \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{L}$. اگر n فرد باشد، شرط $L \geq ۰$ لازم نیست.

۷. اگر برای هر $x \in \mathbb{R}$ داشته باشیم $f(x) \leq g(x)$ و f و g در a حد داشته باشند، آن‌گاه $\lim_{x\to a} f(x) \leq \lim_{x\to a} g(x)$.

۸. حد یک تابع در $x = a$، در صورت وجود، یکتاست.

مثال: به کمک قضیه‌های حد، مقدار حدهای زیر را محاسبه کنید:

الف) $\lim_{x\to ۱} \frac{x^۲ - ۸x}{x^۳ + ۴x - ۱}$

$$= \frac{\lim\limits_{x\to 1}(x^{2} - 8x)}{\lim\limits_{x\to 1}(x^{3} + 4x - 1)} = \frac{\lim\limits_{x\to 1} x^{2} - \lim\limits_{x\to 1} 8x}{\lim\limits_{x\to 1} x^{3} + \lim\limits_{x\to 1} 4x - \lim\limits_{x\to 1} 1}$$

$$= \frac{1-8}{1+4-1} = \frac{-7}{4}$$

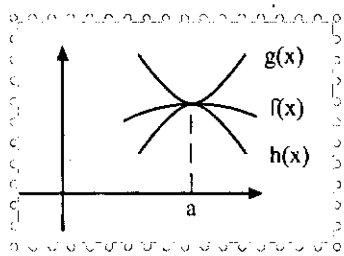
ب) $\lim\limits_{x\to 1}\sqrt[3]{\frac{x^{2} - x + 4}{3x^{2} + x + 4}} = \sqrt[3]{\frac{\lim\limits_{x\to 1}(x^{2} - x + 4)}{\lim\limits_{x\to 1}(3x^{2} + x + 4)}}$

$$= \sqrt[3]{\frac{\lim\limits_{x\to 1} x^{2} - \lim\limits_{x\to 1} x + \lim\limits_{x\to 1} 4}{\lim\limits_{x\to 1}(3x^{2}) + \lim\limits_{x\to 1} x + \lim\limits_{x\to 1} 4}} = \sqrt[3]{\frac{1-1+4}{3+1+4}} = \sqrt[3]{\frac{4}{8}} = \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$$

قضیه‌ی فشردگی

فرض می‌کنیم به ازای هر x در یک همسایگی a، $f(x)$ بین $g(x)$ و $h(x)$ باشد. هرگاه $g(x)$ و $h(x)$، وقتی $x \to a$ دارای حد $L \in \mathbb{R}$ باشند، آن‌گاه

$$\lim_{x\to a} f(x) = L$$



مثال: اگر $f(x) = x\sin\frac{1}{x}$، می‌دانیم $-1 \le \sin\frac{1}{x} \le 1$ (با فرض $x > 0$)

داریم: $-x \le x\sin\frac{1}{x} \le x$

آن‌گاه $\lim\limits_{x\to 0^{+}}(-x) \le \lim\limits_{x\to 0^{+}} x\sin\frac{1}{x} \le \lim\limits_{x\to 0^{+}}(x)$

$$0 \le \lim_{x\to 0^{+}} x\sin\frac{1}{x} \le 0 \Rightarrow \lim_{x\to 0^{+}} x\sin\frac{1}{x} = 0$$

چنان‌چه $x < 0$ باشد، داریم $x \le x\sin\frac{1}{x} \le -x$ و

$$\lim_{x\to 0^{-}}(x) \le \lim_{x\to 0^{-}} x\sin\frac{1}{x} \le \lim_{x\to 0^{-}}(-x) \Rightarrow 0 \le \lim_{x\to 0^{-}} x\sin\frac{1}{x} \le 0$$

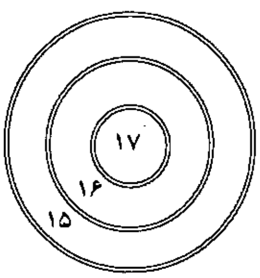
$$\Rightarrow \lim_{x\to 0^{-}} \sin\frac{1}{x} = 0$$

پس: $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x} = 0$

تفریح اندیشه

۱. مجموع سه عدد ۱، ۲، ۳ برابر حاصل‌ضربشان است. آیا سه‌تایی‌های دیگری از این‌گونه در بین اعداد صحیح موجودند؟

۲. چند مرتبه باید به هدف واقع در شکل زیر تیراندازی کرد و به کدام دایره‌ها اصابت کند، تا به‌طور دقیق ۱۰۰ امتیاز به‌دست آید.



حل هندسی چند معادله (۱)

اشاره

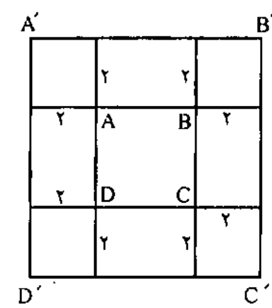
مطالعه‌ی این مقاله می‌تواند سرگرمی آموزنده‌ای برای دانش‌آموزان باشد. در این جا، چند معادله را به کمک هندسه حل می‌کنیم. در بعضی موارد، حل‌های هندسی جذاب‌اند و موضوع را محسوس و ملموس می‌کنند.

حل معادله‌ی درجه دوم به کمک هندسه

الف) حل خوارزمی: با یک مثال، راه‌حل خوارزمی را بیان می‌کنیم:

می‌خواهیم معادله‌ی درجه دوم زیر را حل کنیم:

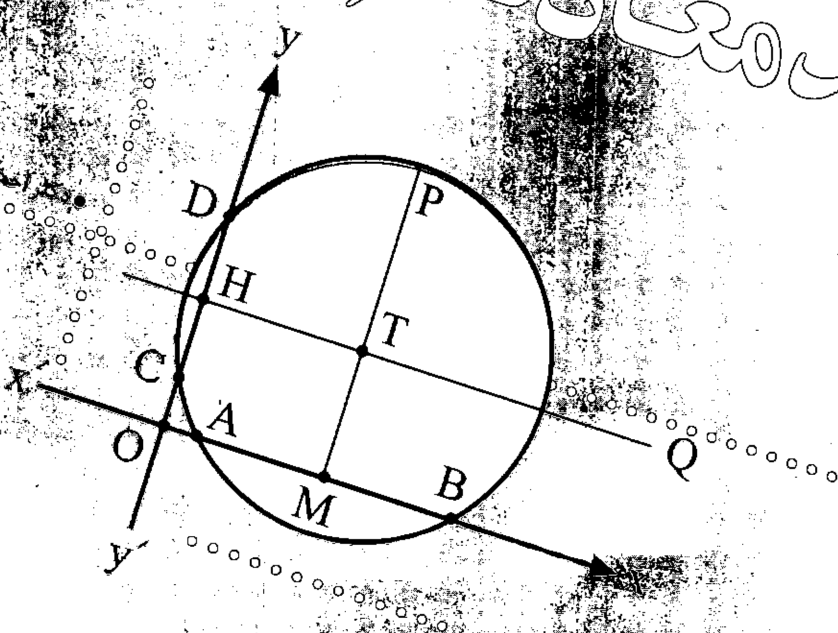
$$x^۲ + ۸x = ۳۳ \qquad (۱)$$



مربع ABCD را در نظر می‌گیریم و طول ضلع آن را x می‌نامیم. هر ضلع مربع را از دو طرف آن به اندازه‌ی ۲ واحد امتداد می‌دهیم و سپس مربع A′B′C′D′ را می‌سازیم. طول ضلع مربع A′B′C′D′ برابر است با: x + ۴. مساحت مربع ABCD برابر $x^۲$ است. مجموع مساحت‌های مربع ABCD و چهار مستطیل اطراف آن برابر است با: $x^۲ + ۸x$. مساحت مربع A′B′C′D′ از مجموع مساحت‌های چهار مربع با ضلع ۲ واحد، مجموع مساحت‌های چهار مستطیل اطراف مربع ABCD و مساحت مربع ABCD به دست می‌آید. پس مساحت مربع A′B′C′D′ برابر است با:

$$x^۲ + ۸x + ۱۶ \qquad (۲)$$

با ملاحظه‌ی شکل معلوم می‌شود که مساحت مربع A′B′C′D′ چنین است:



(۳) $(x+4)^2$

و نیز:

(۴) $(x+4)^2 = x^2+8x+16$

برای حل معادله‌ی ۱، معادله‌ی زیر را حل می‌کنیم:

$x^2+8x+16=33+16$

و یا:

(۵) $x^2+8x+16=49$

معادله‌ی ۵ با رعایت تساوی ۴ به صورت زیر نوشته می‌شود:

(۶) $(x+4)^2=49$

از معادله‌ی ۶ معادله‌ی زیر به‌دست می‌آید:

(۷) $x+4=7$

خوارزمی اعداد منفی به کار نمی‌برده است. از معادله‌ی ۷ نتیجه می‌شود: $x=3$

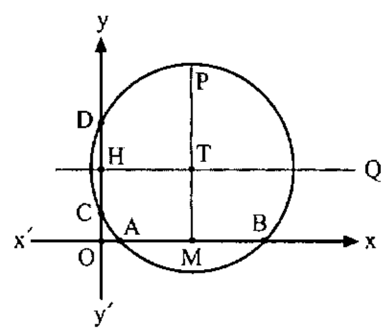
ب) حل هندسی معادله‌ی درجه دوم با به کارگیری عددهای جبری: معادله‌ی درجه دوم زیر را که ضریب‌های آن اعداد جبری هستند، درنظر می‌گیریم:

(۱) $x^2+px+q=0$

اگر x_1 و x_2 جواب‌های معادله‌ی ۱ باشند، چنین داریم:

(۲) $$\begin{cases}\frac{1}{2}(x_1+x_2)=-\frac{p}{2}\\ x_1x_2=q\end{cases}$$

دو محور عمود بر هم $x'ox$ و $y'oy$ را در نظر می‌گیریم.



روی محور $x'x$ نقطه‌ی M را طوری اختیار می‌کنیم که اندازه‌ی جبری $\overline{OM}$ برابر $-\frac{p}{2}$ باشد. روی محور $y'y$ نقطه‌های C و D را طوری اختیار می‌کنیم که اندازه‌های جبری $\overline{OC}$ و $\overline{OD}$ به ترتیب برابر ۱ و q باشند. خط HQ عمودمنصف پاره‌خط CD را رسم می‌کنیم. از نقطه‌ی M خط MP را بر خط $x'x$ عمود می‌کنیم. نقطه‌ی برخورد دو خط HQ و MP را T می‌نامیم.

دایره‌ای به مرکز T و شعاع TC رسم می‌کنیم. نقاط برخورد این دایره با خط $x'x$ را A و B می‌نامیم. نقطه‌ی M وسط پاره‌خط AB است، زیرا در دایره‌ی به مرکز T خط TM بر وتر AB عمود است. پس:

(۳) $$\frac{\overline{OA}+\overline{OB}}{2}=\overline{OM}$$

چون $\overline{OC}=1$ و $\overline{OD}=q$، پس:

(۴) $\overline{OC}.\overline{OD}=q$

بنابر قضیه‌ی «قوت نقطه»، چنین داریم:

(۵) $\overline{OA}.\overline{OB}=\overline{OC}.\overline{OD}$

از دو رابطه‌ی ۴ و ۵ نتیجه می‌شود:

(۶) $\overline{OA}.\overline{OB}=q$

چون نقطه‌ی M وسط پاره‌خط AB است، پس:

(۷) $\overline{OA}+\overline{OB}=-\frac{p}{2}$

از دو رابطه‌ی ۶ و ۷ نتیجه می‌شود که اندازه‌های $\overline{OA}$ و $\overline{OB}$ جواب‌های معادله‌ی درجه دوم ۱ هستند.

بحث: شرط وجود جواب آن است که دایره‌ی به مرکز T و شعاع TC خط $x'x$ را قطع کند یا بر آن مماس باشد. یعنی باید شرط زیر برقرار باشد:

(۸) $\overline{TC}\geq\overline{TM}$

چنین داریم:

$$\overline{TC}^2=\overline{HC}^2+\overline{HT}^2=\overline{HC}^2+\overline{OM}^2$$

(۹) $$\overline{TC}^2=\left(\frac{q-1}{2}\right)^2+\left(-\frac{p}{2}\right)^2$$

$$\overline{TM}=\overline{OH}=\frac{\overline{OC}+\overline{OD}}{2}$$

(۱۰) $$\overline{TM}=\frac{1+q}{2}$$

با توجه به تساوی‌های ۹ و ۱۰، رابطه‌ی ۸ را می‌توان به صورت زیر نوشت:

(۱۱) $$\left(\frac{q-1}{2}\right)^2+\left(\frac{-p}{2}\right)^2\geq\left(\frac{1+q}{2}\right)^2$$

از رابطه‌ی ۱۱، رابطه‌ی زیر نتیجه می‌شود که شرط وجود جواب است:

$p^2-4q\geq 0$

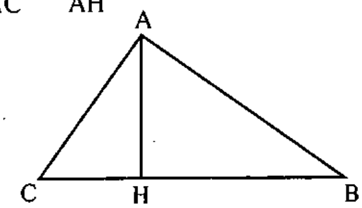
مسئله: دستگاه معادلات زیر را با روش هندسی حل کنید.

(۱) $$\begin{cases}\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}=\frac{1}{a^2}\\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{b}\end{cases}\qquad (b>0)$$

برای حل این دستگاه معادلات، دو حکم هندسی زیر را به کار می‌گیریم:

حکم۱. در مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABC که A رأس زاویه‌ی قائمه و AH ارتفاع است، رابطه‌ی زیر برقرار است:

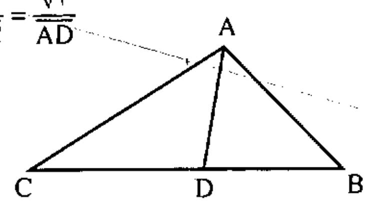
$$\frac{1}{\overline{AB}^2}+\frac{1}{\overline{AC}^2}=\frac{1}{\overline{AH}^2}$$



حکم۲.

الف) در مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABC که A رأس زاویه‌ی قائمه است و AD نیم‌ساز زاویه‌ی A، رابطه‌ی زیر برقرار است:

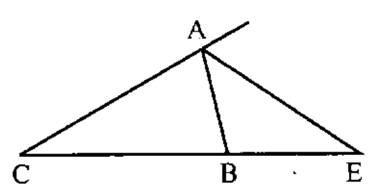
$$\frac{1}{\overline{AB}}+\frac{1}{\overline{AC}}=\frac{\sqrt{2}}{\overline{AD}}$$



ب) در مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABC که A رأس زاویه‌ی قائمه و AE نیم‌ساز خارجی است، رابطه‌ی زیر برقرار است:

اگر: $\overline{AB}<\overline{AC}$

$$\frac{1}{\overline{AB}}-\frac{1}{\overline{AC}}=\frac{\sqrt{2}}{\overline{AE}}$$



برهان حکم۱. در مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABC دو رابطه‌ی زیر برقرار است:

$$\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=\overline{BC}^2 \qquad (2)$$

$$\overline{AB}.\overline{AC}=\overline{BC}.\overline{AH} \qquad (3)$$

دو طرف تساوی ۲ را بر دو طرف تساوی ذیل بخش می‌کنیم، رابطه‌ی مطلوب به دست می‌آید.

$$\overline{AB}^2.\overline{AC}^2=\overline{BC}^2.\overline{AH}^2$$

برهان حکم۲.

الف) برهان در مورد نیم‌ساز داخلی مثلث: می‌خواهیم ثابت کنیم، اگر در مثلث ABC، l طول نیم‌ساز داخلی باشد، رابطه‌ی زیر محقق است:

$$\frac{1}{\overline{AB}}+\frac{1}{\overline{AC}}=\frac{2\cos\frac{A}{2}}{l} \qquad (4)$$

برای اثبات، حکم زیر را که مساحت مثلث را بر حسب طول دو ضلع و سینوس زاویه‌ی بین آن دو ضلع به‌دست می‌دهد، به‌کار می‌گیریم:

$$S=\frac{1}{2}\overline{AB}.\overline{AC}.\sin A$$

مساحت‌های مثلث‌های ABC، ADB و ADC را به ترتیب S، S_1 و S_2 می‌نامیم و چنین داریم:

$$S=\frac{1}{2}\overline{AB}.\overline{AC}.\sin A$$

$$S_1=\frac{1}{2}\overline{AB}.\overline{AD}.\sin\frac{A}{2}$$

$$S_2=\frac{1}{2}\overline{AC}.\overline{AD}.\sin\frac{A}{2}$$

و چون $S=S_1+S_2$، پس:

$$\frac{1}{2}\overline{AB}.\overline{AC}.\sin A=\frac{1}{2}\overline{AB}.\overline{AD}.\sin\frac{A}{2}+\frac{1}{2}\overline{AC}.\overline{AD}.\sin\frac{A}{2}$$

از رابطه‌ی اخیر، با توجه به دستور مثلثاتی $\sin A=2\sin\frac{A}{2}.\cos\frac{A}{2}$، رابطه‌ی ۴ حاصل می‌شود.

حالت خاص: اگر زاویه‌ی A قائمه باشد، چنین داریم:

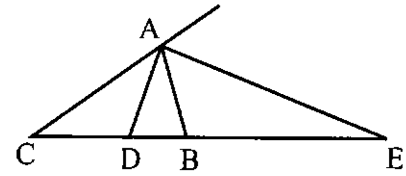
$$\cos\frac{A}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

در این صورت رابطه‌ی ۴ به صورت زیر درمی‌آید:

$$\frac{1}{\overline{AB}}+\frac{1}{\overline{AC}}=\frac{\sqrt{2}}{l}$$

ب) برهان حکم ۲ در مورد نیم‌ساز خارجی مثلث: می‌خواهیم ثابت کنیم، اگر در مثلث ABC، l طول نیم‌ساز خارجی باشد، رابطه‌ی زیر مسلم است:

$$\frac{1}{\overline{AB}}-\frac{1}{\overline{AC}}=\frac{2\cos\frac{A}{2}}{l} \qquad (\overline{AB}<\overline{AC})$$



مساحت‌های مثلث‌های ABC ، ABE و ACE را به ترتیب به S ، S_1 و S_2 نشان می‌دهیم و می‌نویسیم :

$$S = \frac{1}{2}\overline{AB}.\overline{AC}.\sin A$$

$$S_1 = \frac{1}{2}\overline{AB}.\overline{AE}.\sin BAE$$

و چون $BAE = \frac{1}{2}(\pi - A)$ پس :

$$S_1 = \frac{1}{2}\overline{AB}.\overline{AE}.\cos\frac{A}{2}$$

برای محاسبه‌ی S_2 ، توجه می‌کنیم که $DAE = \frac{\pi}{2}$ (نیم‌ساز داخلی و نیم‌ساز خارجی برهم عمودند) . پس $CAE = \frac{\pi}{2} + \frac{A}{2}$.

با رعایت رابطه‌ی اخیر چنین داریم :

$$S_2 = \frac{1}{2}\overline{AC}.\overline{AE}.\sin(\frac{\pi}{2} + \frac{A}{2})$$

$$= \frac{1}{2}\overline{AC}.\overline{AE}.\cos\frac{A}{2}$$

از طرف دیگر چنین داریم :

$$S = S_2 - S_1$$

بنابراین :

$$\frac{1}{2}\overline{AC}.\overline{AE}.\cos\frac{A}{2} - \frac{1}{2}\overline{AB}.\overline{AE}\cos\frac{A}{2} = \frac{1}{2}\overline{AB}.\overline{AC}\sin A$$

رابطه‌ی اخیر با رعایت رابطه‌ی مسلم $\sin A = 2\sin\frac{A}{2}.\cos\frac{A}{2}$ به صورت زیر درمی‌آید :

$$\frac{1}{\overline{AB}} - \frac{1}{\overline{AC}} = \frac{2\cos\frac{A}{2}}{1}$$

حالت خاص : اگر $A = \frac{\pi}{2}$ باشد ، چنین داریم :

$$\frac{1}{\overline{AB}} - \frac{1}{\overline{AC}} = \frac{\sqrt{2}}{1}$$

ادامه دارد...

ادب ریاضی

● به انتخاب: شهین بهنیا

. امیرالمؤمنین (علیه‌السلام) می‌فرماید : «از نفس خودتان حساب بکشید ، پیش از آن‌که شما را به حساب بکشند و خودتان را بسنجید ، پیش از آن‌که شما را تحت سنجش درآورند . »

«بعضی گمان می‌کنند که انسان حتماً به دست دیگری باید تربیت شود ، باید شخص دیگری باغبان ، مربی و سازنده‌ی او باشد . آری شک نیست که انسان نیاز به معلم ، مربی و راهنما دارد ، اما مربیان خارجی برای تربیت او کافی نیستند . هر کسی باید در خودش حالت (مربیگری) نسبت به خودش پیدا کند... درنهایت کار ، خودش باید درباره‌ی خودش بیندیشد ، با خود عهد و پیمان ببندد و از خود مراقبت کند... تا زمانی که خودش به این مراحل نرسد ، تصمیم دیگران درباره‌ی او کافی نخواهد بود . »

متفکر شهید استاد مرتضی مطهری - حکمت‌ها و اندرزها

همه چیز را خودتان بیاموزید . گمان مبرید که می‌توانید بدون کار و زحمت ، آگاهی‌هایی به‌دست آورید . کوشش کنید ، یاد گرفتنی‌ها را تنها به‌خاطر نسپارید ، بلکه ماهیت آن‌ها را بفهمید . این تنها راهی است که به کمک آن می‌توانید ، آن‌چه را که یاد گرفته‌اید ، تا مدت‌ها فراموش نکنید . تجربه بیندوزید ، بااراده باشید و از دلسردی نترسید . کاری را که آغاز کرده‌اید با سرسختی ، منظم و بدون توقف دنبال کنید .

نیکولایف از اعضای آکادمی ریاضیات روسیه

کاربردهایی

لاگرانژ (۱)

• ابراهیم دارابی

اشاره

مشتق و مطالب مربوط به آن، نقش مهمی در ریاضیات، دوره‌ی متوسطه ایفا می‌کند، اما کاربرد قضیه‌ی لاگرانژ و نتایج آن در حل مسائل ریاضیات مقدماتی، تقریباً نادیده انگاشته شده است. اثبات اتحادها، نامساوی‌ها و فرمول‌های مثلثاتی، هم‌چنین تبدیل عبارت‌های جبری به حاصل‌ضرب، حل معادله، حل نامعادله، حل دستگاه معادله‌ها، معادله‌های پارامتری و... با استفاده از این قضیه امکان‌پذیر است.

برای این منظور، روش کلی قابل قبولی درباره‌ی حل بعضی مسائل ارائه می‌شود که می‌توان آن‌ها را چه با این روش و چه با روش‌های دیگر حل کرد. در این جا با این گونه مسائل آشنا خواهید شد. ابتدا با قضیه‌ی لاگرانژ و نتایج آن آشنا می‌شویم:

قضیه‌ی لاگرانژ (میانگین)

اگر تابع f در بازه‌ی $[a,b]$ پیوسته و در تمام نقاط بازه‌ی (a,b) مشتق‌پذیر باشد، آن‌گاه در این بازه نقطه‌ای به طول c وجود دارد؛ به طوری که داشته باشیم:

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$$

نتیجه۱. (شرط ثابت بودن تابع) اگر تابع f در بازه‌ی $[a,b]$ پیوسته و مشتق آن در داخل این بازه صفر باشد، آن‌گاه تابع در بازه‌ی $[a,b]$ ثابت است.

نتیجه۲. اگر دو تابع f و g در بازه‌ی $[a,b]$ پیوسته باشند و در داخل این بازه مشتق‌های مساوی داشته باشند، اختلاف آن‌ها تنها در مقادیر ثابت خواهد بود.

نتیجه۳. (شرط یکنوا بودن تابع) اگر تابع f در بازه‌ای مانند I پیوسته و مشتق آن در آن بازه مثبت (منفی) باشد، آن‌گاه تابع f در این بازه صعودی (نزولی) است. با این مقدمه به حل مسائل می‌پردازیم.

همان‌طور که گفته شد، قضیه‌ی لاگرانژ در حل معادله‌ها، نامعادله‌ها، تعیین تعداد ریشه‌ها و... کاربرد دارد. برای این منظور، در روند حل مسائل، تابعی مانند f درنظر گرفته می‌شود که قضیه‌ی لاگرانژ در بازه‌ای مانند $[a,b]$ در آن صدق کند. پس با استفاده از فرمول لاگرانژ: $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$

که در آن $c\in(a,b)$ مقدار $f'(c)$ محاسبه می‌شود.

مثال۱. ثابت کنید اگر $x\geq 1$، آن‌گاه $e^x\geq ex$

اثبات: نامساوی به ازای $x=1$ برقرار است. تابع f را به صورت زیر درنظر می‌گیریم:

$$f(x)=e^x-ex$$

به ازای هر $b>1$ در بازه‌ی $[1,b]$، شرایط قضیه‌ی لاگرانژ در این تابع صدق می‌کند. پس در این بازه نقطه‌ای به طول c وجود دارد؛ طوری که

$$\frac{f(b)-f(1)}{b-1}=f'(c)$$

$$\Rightarrow\frac{e^b-eb}{b-1}=e^c-e$$

چون $c>1$ پس $e^c>e$ و بنابراین $e^c-e>0$ و از آن‌جا:

$$\frac{e^b-eb}{b-1}>0\Rightarrow e^b-eb>0$$

یعنی به ازای $b>1$ داریم:

$$e^b > eb$$

و از آن‌جا نتیجه می‌شود که به ازای $x \ge ۱$ داریم:

$$e^x \ge ex$$

در حالت خاص، به ازای $x = c+۱$ داریم:

$$e^{c+۱} \ge e(c+۱) \Rightarrow e^c \ge c+۱$$

که در آن c می‌تواند هر عدد دلخواه حقیقی باشد.

مثال۲. ثابت کنید به ازای $x \ge ۰$ داریم:

$$e^x \ge ۱+x+\frac{x^۲}{۲}$$

اثبات: فرض کنیم b عددی دلخواه و مثبت باشد: در بازه‌ی $[۰,b]$ تابع زیر را درنظر می‌گیریم:

$$f(x)=e^x-\frac{x^۲}{۲}$$

بنابر قضیه‌ی لاگرانژ داریم:

$$\frac{f(b)-f(۰)}{b-۰}=f'(c)$$

$$۰<c<b \Rightarrow \frac{e^b-\frac{b^۲}{۲}-۱}{b}=e^c-c$$

چون به ازای هر c داریم: $e^c \ge c+۱$ (مثال ۱ را نگاه کنید)، پس:

$$e^c-c\ge c+۱-c \Rightarrow e^c-c\ge ۱$$

$$\Rightarrow \frac{e^b-\frac{b^۲}{۲}-۱}{b}\ge ۱ \Rightarrow e^b-\frac{b^۲}{۲}-۱\ge b$$

یعنی به ازای هر $b>۰$ داریم:

$$e^b\ge ۱+b+\frac{b^۲}{۲}$$

پس به ازای هر $x>۰$ خواهیم داشت:

$$e^x \ge ۱+x+\frac{x^۲}{۲}$$

مثال۳. ثابت کنید:

$$\frac{۱}{۴}<\text{Arcsin}\,۰/۸-\text{Arcsin}\,۰/۶<\frac{۱}{۳}$$

اثبات: تابع $f(x)=\text{Arcsin}\,x$ را در بازه‌ی $[۰/۶,۰/۸]$ درنظر می‌گیریم. تابع در این بازه پیوسته و مشتق‌پذیر است. پس قضیه‌ی لاگرانژ در آن صدق می‌کند:

$$\frac{f(۰/۸)-f(۰/۶)}{۰/۸-۰/۶}=f'(c)\ ,\ ۰/۶<c<۰/۸$$

$$f'(x)=\frac{۱}{\sqrt{۱-x^۲}}$$

$$\Rightarrow \frac{\text{Arcsin}\,۰/۸-\text{Arcsin}\,۰/۶}{۰/۲}=\frac{۱}{\sqrt{۱-c^۲}}$$

مقدار $\frac{۱}{\sqrt{۱-c^۲}}$ را در بازه‌ی $۰/۶<c<۰/۸$ تعیین می‌کنیم:

$$۰/۳۶<۱-c^۲<۰/۶۴$$

$$۰/۶<\sqrt{۱-c^۲}<۰/۸$$

$$\frac{۵}{۴}<\frac{۱}{\sqrt{۱-c^۲}}<\frac{۵}{۳}$$

از آن‌جا نتیجه می‌شود:

$$\frac{۱}{۴}<\text{Arcsin}\,۰/۸-\text{Arcsin}\,۰/۶<\frac{۱}{۳}$$

مثال ۴. ثابت کنید به ازای هر $x_۱$ و $x_۲$ حقیقی، نامساوی زیر برقرار است:

$$|\cos x_۱-\cos x_۲|\le|x_۱-x_۲|$$

اثبات: به ازای $x_۱=x_۲$ نامساوی بالا برقرار است. فرض کنیم $x_۱\ne x_۲$ تابع $f(x)=\cos x$ را به ازای $x_۱<x_۲$ در بازه‌ی $[x_۱,x_۲]$ و به ازای $x_۱>x_۲$ در بازه‌ی $[x_۲,x_۱]$ درنظر می‌گیریم. شرایط قضیه‌ی لاگرانژ در این تابع صدق می‌کند؛ بنابراین نقطه‌ای به طول c در این بازه وجود دارد، طوری که داشته باشیم:

$$\frac{f(x_۱)-f(x_۲)}{x_۱-x_۲}=f'(c)$$

$$\frac{\cos x_۱-\cos x_۲}{x_۱-x_۲}=-\sin c$$

$$\Rightarrow|\cos x_۱-\cos x_۲|=|x_۱-x_۲|.|-\sin c|$$

چون $|-\sin c|\le ۱$، پس:

$$|\cos x_۱-\cos x_۲|\le|x_۱-x_۲|$$

مثال ۵. ثابت کنید معادله‌ی $\cos^۲\frac{x}{۲}+۲^{\cos x}=۲$ در بازه‌ی $(۰,۲\pi)$ بیش از دو ریشه‌ی حقیقی ندارد.

اثبات: فرض کنیم معادله در این بازه حداقل سه ریشه‌ی x_1 و x_2 و x_3 داشته باشد، طوری که $x_1 < x_2 < x_3$

بنابراین، x_1 و x_2 و x_3 صفرهای تابع زیر خواهند بود:

$$f(x)=2-\cos^2\frac{x}{2}-2^{\cos x}$$

یعنی:

$$f(x_1)=f(x_2)=f(x_3)=0$$

در هر یک از بازه‌های $[x_1,x_2]$ و $[x_2,x_3]$، شرایط لاگرانژ درباره‌ی تابع صدق می‌کند. پس c_1 و c_2 هایی به ترتیب از بازه‌های (x_1,x_2) و (x_2,x_3) وجود دارند؛ به طوری که داشته باشیم:

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=f'(c_1) \quad \text{و} \quad \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}=f'(c_2)$$

چون: $f(x_1)=f(x_2)=f(x_3)=0$ پس $f'(c_1)=0$ و $f'(c_2)=0$

مشتق تابع را پیدا می‌کنیم:

$$f'(x)=2\cos\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2}.\frac{1}{2}+2^{\cos x}.\sin x.\text{Ln}2$$

$$=\frac{1}{2}\sin x+\sin x.2^{\cos x}\text{Ln}2=\sin x(\frac{1}{2}+2^{\cos x}\text{Ln}2)$$

چون $\frac{1}{2}+2^{\cos x}\text{Ln}2>0$، پس از معادله‌ی $f'(x)=0$ نتیجه می‌شود:

$$\sin x=0\Rightarrow x=\pi$$

یعنی در بازه‌ی $(0,2\pi)$ تنها یک ریشه‌ی منحصر به فرد وجود دارد و این تناقض است، زیرا c_1 و c_2، $(c_1\neq c_2)$ باید ریشه‌های $f'(x)=0$ باشند.

از آن‌جا نتیجه می‌شود معادله $\cos^2\frac{x}{2}+2^{\cos x}=2$ در بازه‌ی $(0,2\pi)$ بیش از دو ریشه‌ی حقیقی ندارد.

مثال ۶. معادله‌ی $x^5-10x^3+50x-41=0$ را حل کنید.

حل: به آسانی می‌توان دید که $x_1=1$ ریشه‌ی معادله است. فرض کنیم معادله یک ریشه‌ی حقیقی دیگر مانند x_2 داشته باشد. در این صورت x_1 و x_2 صفرهای تابع زیر خواهند بود:

$$f(x)=x^5-10x^3+50x-41$$

از آن‌جا نتیجه می‌شود:

$$f(x_1)=f(x_2)=0$$

قضیه‌ی لاگرانژ به ازای $x_1 < x_2$ در بازه‌ی $[x_1,x_2]$ و به ازای $x_2 < x_1$ در بازه‌ی $[x_2,x_1]$ صدق می‌کند. پس در این بازه‌ها عددی مانند c موجود است، به طوری که:

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=f'(c)$$

چون $f(x_1)=f(x_2)=0$ پس: $f'(c)=0$. یعنی c ریشه‌ی معادله‌ی $f'(x)=0$ است. اما داریم:

$$f'(x)=5x^4-30x^2+50$$

دیده می‌شود که مشتق به ازای هر x، مثبت است (مبین $f'(x)=0$ نسبت به x^2 منفی و ضریب x^4 مثبت است $5>0$ و

$(x^2=y\Rightarrow 5y^2-30y+5=0$ و $\Delta=(30)^2-1000<0$

یعنی $f'(x)=0$ جواب ندارد و این یک تناقض است. بنابراین $x_1=1$ ریشه‌ی منحصر به فرد معادله‌ی مفروض است.

مثال ۷. تعداد نقاط بحرانی تابع با ضابطه‌ی زیر را پیدا کنید.

$$y=(x^3-x)(x-8)(x-9)$$

حل: چون تابع از درجه‌ی پنجم است، پس مشتق آن کثیرالجمله‌ای از درجه‌ی چهارم خواهد بود و بنابراین بیش از چهار ریشه‌ی حقیقی نخواهد داشت.

قضیه‌ی لاگرانژ را برای تابع:

$$f(x)=(x+1)(x)(x-1)(x-8)(x-9)$$

در بازه‌های $[-1,0]$ و $[0,1]$ و $[1,8]$ و $[8,9]$ به کار می‌بریم. داریم:

$$f(-1)=f(0)=f(8)=f(9)=0$$

در داخل هریک از این فواصل، به ترتیب x_1، x_2، x_3 و x_4 یافت می‌شوند، طوری که داشته باشیم:

$$\frac{f(-1)-f(0)}{-1-0}=f'(x_1) \quad \text{و} \quad \frac{f(0)-f(1)}{0-1}=f'(x_2)$$

$$\frac{f(1)-f(8)}{1-8}=f'(x_3) \quad \text{و} \quad \frac{f(8)-f(9)}{8-9}=f'(x_4)$$

دیده می‌شود:

$$f'(x_1)=0\ ,\ f'(x_2)=0\ ,\ f'(x_3)=0\ ,\ f'(x_4)=0$$

چون x_1، x_2، x_3 و x_4 ریشه‌های کثیرالجمله‌ی $f'(x)=0$ هستند که از درجه‌ی چهارم است، پس برای $f'(x)$ ریشه‌های متمایز دیگری وجود ندارد. بنابراین، تابع با ضابطه‌ی

$$y=(x^3-x)(x-8)(x-9)$$

چهار نقطه‌ی بحرانی دارد.

اکنون نتایج ۱ و ۲ قضیه‌ی لاگرانژ را در اثبات این مطالب به کار می‌بریم:

۱. اثبات اتحادها و در حالت خاص استنتاج فرمول‌های ریاضی مقدماتی؛

۲. ساده کردن عبارت‌های جبری؛

۳. تبدیل عبارت‌های جبری به صورت حاصل ضرب عوامل.

برای این منظور، بازه‌های تابع f را طوری انتخاب می‌کنیم که مشتق تابع در آن بازه‌ها صفر باشد و درنتیجه از تساوی $f'(x)=0$، ثابت بودن تابع را نتیجه می‌گیریم: $f(x)=c$

یا به جای یک تابع، دو تابع f(x) و g(x) را طوری انتخاب می‌کنیم که داشته باشیم: $f'(x)=g'(x)$

و از آن‌جا: $f(x)=g(x)+c$

که در آن c مقدار ثابتی است و برای تعیین آن به جای x، مقدار معینی مانند x_1 قرار می‌دهیم و c را به‌دست می‌آوریم (تساوی بالا به ازای هر x حقیقی برقرار است).

مثال ۸. بدون استفاده از اتحادهای مثلثاتی ثابت کنید:

$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$$

اثبات: تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\cos 2x - 2\cos^2 x$ را در نظر می‌گیریم. این تابع به ازای همه‌ی مقادیر x پیوسته و مشتق‌پذیر است. داریم:

$$f'(x) = -2\sin 2x + 4\cos x \sin x$$
$$-2\sin 2x + 4\cos x\sin x = -2\sin 2x + 2\sin 2x = 0$$
$$\Rightarrow f'(x)=0 \Rightarrow f(x)=c$$

برای تعیین c در تابع f(x)، به جای x قرار می‌دهیم $x=0$. از آن‌جا داریم:

$$f(0)=c=\cos 0 - 2\cos^2 0 \Rightarrow c=-1$$
$$\Rightarrow f(x)=-1 \Rightarrow \cos 2x - 2\cos^2 x = -1$$
$$\Rightarrow \cos 2x = 2\cos^2 x - 1$$

مثال ۹. اگر $-1 \le x \le 1$، آن‌گاه ثابت کنید:

$$\operatorname{Arc}\cos(-x) = \pi - \operatorname{Arc}\cos x$$

اثبات: تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\operatorname{Arc}\cos(-x)+\operatorname{Arc}\cos x$ را در بازه‌ی $[-1,1]$ درنظر می‌گیریم. تابع در این بازه پیوسته و مشتق آن صفر است:

$$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=0$$

پس به ازای هر x از این بازه داریم: $f(x)=c$

به ازای $x=0$ داریم:

$$f(0)=c=\operatorname{Arc}\cos 0+\operatorname{Arc}\cos 0$$
$$c=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}=\pi$$
$$\Rightarrow f(x)=\operatorname{Arc}\cos(-x)+\operatorname{Arc}\cos x=\pi$$

پس به ازای $-1 \le x \le 1$ داریم:

$$\operatorname{Arc}\cos(-x)=\pi-\operatorname{Arc}\cos x$$

مثال ۱۰. ثابت کنید به ازای $x<0$ تساوی زیر برقرار است:

$$\operatorname{Arc}\tan x = \operatorname{Arc}\sin\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}-\frac{\pi}{2}$$

اثبات: دو تابع با ضابطه‌ی زیر را در بازه‌ی $[-\infty,0]$ درنظر می‌گیریم.

$$f(x)=\operatorname{Arctg}x \quad \text{و} \quad g(x)=\operatorname{Arc}\sin\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

هر دو تابع در بازه‌ی $[b,0]$ پیوسته هستند. مشتق آن‌ها را تعیین می‌کنیم:

$$f'(x)=\frac{1}{1+x^2} \quad \text{و}$$

$$g'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{1+x^2}}}\cdot\frac{-x}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}=\frac{-x}{|x|(1+x^2)}$$

چون به فرض $x<0$، پس:

$$|x|=-x \ , \ g'(x)=\frac{1}{1+x^2}$$

یعنی در بازه‌ی $[b,0]$ مشتق این دو تابع مساوی‌اند:

$$f'(x)=g'(x)\Rightarrow f(x)=g(x)+c$$

برای تعیین c قرار می‌دهیم $x=-1$:

$$\operatorname{Arctg}(-1)=\operatorname{Arc}\sin\frac{1}{\sqrt{2}}+c\Rightarrow c=-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}=-\frac{\pi}{2}$$

پس به ازای $x<0$ داریم:

$$\operatorname{Arctg}x=\operatorname{Arc}\sin\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}-\frac{\pi}{2}$$

ادامه دارد...

تابع حسابی اویلر و قضیه‌ی اویلر و نتایج حاصل از آن‌ها

● حمیدرضا امیری

در کتاب ریاضیات گسسته‌ی پیش‌دانشگاهی، در بخش ترکیبات، با استفاده از اصل شمول و عدم شمول ثابت شده است که اگر m عددی طبیعی باشد و به‌صورت $m = p_1 \times p_2 \times p_3$ به‌حاصل‌ضرب سه عدد اول تجزیه شود، در این صورت تعداد اعداد طبیعی و کوچک‌تر از m که نسبت به m اول هستند، از رابطه‌ی $\varphi(m) = m(1-\frac{1}{p_1})(1-\frac{1}{p_2})(1-\frac{1}{p_3})$ به‌دست می‌آید. این رابطه در حالت کلی و برای هر عدد طبیعی مانند m که به‌صورت $m = p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times \cdots \times p_k^{\alpha_k}$ به حاصل‌ضرب عددهای اول تجزیه شود و به تابع حسابی اویلر معروف است؛ یعنی:

$$\varphi(m) = m(1-\frac{1}{p_1})(1-\frac{1}{p_2})\cdots(1-\frac{1}{p_k})$$

برای مثال، عدد $۵ \times ۳ \times ۲^۲ = ۶۰$ را درنظر می‌گیریم. در این صورت:

$$\varphi(۶۰) = ۶۰ \times (1-\frac{1}{۲})(1-\frac{1}{۳})(1-\frac{1}{۵}) = ۶۰ \times \frac{1}{۲} \times \frac{۲}{۳} \times \frac{۴}{۵}$$

$$\Rightarrow \varphi(۶۰) = ۱۶$$

قبل از هرچیز، برای تسریع در محاسبه‌ی $\varphi(m)$ در حالت‌های گوناگون، برای m چند قضیه را بیان می‌کنیم[1]:

قضیه‌ی۱. اگر p عددی اول و α عددی طبیعی باشد:

$$\varphi(p^\alpha) = p^\alpha - p^{\alpha-1} = p^\alpha(1-\frac{1}{p})$$

نتیجه: اگر p عددی اول باشد، همواره:

$$\varphi(p) = p(1-\frac{1}{p}) = (p-1)$$

قضیه‌ی۲. به ازای هر دو عدد طبیعی مانند m و n که $(m,n) = d$، همواره داریم:

$$\varphi(mn) = \varphi(m) \times \varphi(n) \times \frac{d}{\varphi(d)}$$

نتیجه (حالت خاص قضیه‌ی ۲): اگر m و n دو عدد طبیعی و $(m,n) = 1$ باشد، در این صورت:

$$\varphi(mn) = \varphi(m) \times \varphi(n)$$

(توجه داریم که: $\varphi(1) = 1$.)

قضیه‌ی۳. اگر $d_1, d_2, \cdots, d_k$ همه‌ی شمارنده‌های مثبت عدد طبیعی m باشند، در این صورت:

$$\sum_{i=1}^{k} \varphi(d_i) = m$$

مثال۱. مطلوب است محاسبه‌ی:

الف) $\varphi(۱۲۰)$

ب) $\varphi(1) + \varphi(۲) + \varphi(۳) + \varphi(۶) + \varphi(۹) + \varphi(۱۸)$

حل. الف)

$$\varphi(۱۲۰) = \varphi(۲۴ \times ۵) = \varphi(۲۴) \times \varphi(۵) = \varphi(۸ \times ۳) \times \varphi(۵)$$
$$= \varphi(۸) \times \varphi(۳) \times \varphi(۵) = \varphi(۲^۳) \times ۲ \times ۴$$
$$= ۲^۳ \times (1-\frac{1}{۲}) \times ۲ \times ۴ = ۴ \times ۲ \times ۴ = ۳۲$$

ب)

$\varphi(1) + \cdots + \varphi(۹) + \varphi(۱۸) = ۱۸$ (طبق قضیه‌ی۳)

(اعداد ۱ و ۲ و ۳ و ۶ و ۹ و ۱۸ شمارنده‌های مثبت عدد ۱۸ هستند.)

تمرین: ثابت کنید:

I) $\varphi(۱۰^n) = ۱۰^{n-1} \times ۴$

II) $\varphi(۲n) = \begin{cases} ۲\varphi(n) & \text{زوج } n \\ \varphi(n) & \text{فرد } n \end{cases}$

III) $\varphi(۳n) = ۳\varphi(n) \Leftrightarrow ۳|n$

IV) $\varphi(۳n) = ۲\varphi(n) \Leftrightarrow ۳\nmid n$

V) $\varphi(n) = \frac{n}{۲} \Leftrightarrow n = ۲^\alpha \quad (\alpha \geq 1)$

VI) $\varphi(n^۲) = n\varphi(n) \quad (\forall n \in N)$

اثبات:

I) $\varphi(۱۰^n) = \varphi(۲^n \times ۵^n) = ۱۰^n \times \frac{1}{۲} \times \frac{۴}{۵} = ۱۰^{n-1} \times ۴$

II) $\begin{cases} \text{زوج } n \Rightarrow (n,۲) = ۲ \Rightarrow \varphi(۲n) = \varphi(۲) \times \varphi(n) \times \frac{۲}{\varphi(۲)} = ۲\varphi(n) \\ \text{فرد } n \Rightarrow (n,۲) = 1 \Rightarrow \varphi(۲n) = \varphi(۲) \times \varphi(n) = 1 \times \varphi(n) = \varphi(n) \end{cases}$

$$IV, III)\ \ \varphi(3n)=\varphi(3)\times\varphi(n)\times\frac{(3,n)}{\varphi[(3,n)]}$$

حال اگر $3\nmid n$ باشد، پس: $\varphi[(3,n)]=\varphi(3)$ و $\varphi(3)=2$ و تمرین (III) ثابت می‌شود.

و اگر $3|n$ باشد، پس: $(3,n)=1$ ، $\varphi[(3,n)]=\varphi(1)$ و $\varphi(1)=1$ ، و تمرین (IV) اثبات می‌شود.

$$V)\ \ \varphi(n)=\varphi(2^\alpha)=2^\alpha\times(1-\frac{1}{2})=2^\alpha\times\frac{1}{2}=\frac{2^\alpha}{2}=\frac{n}{2}$$

$$VI)\ \ \varphi(n^2)=\varphi(n\times n)=\varphi(n)\times\varphi(n)\times\frac{(n,n)}{\varphi[(n,n)]}$$

$$=\varphi(n)\times\varphi(n)\times\frac{(n)}{\varphi(n)}=n\varphi(n)$$

قضیه‌ی ۴. اگر a و b دو عدد طبیعی و $d=(a,b)$ و $c=[a,b]$ باشند، در این صورت داریم:

$$\varphi(a)\varphi(b)=\varphi(d)\varphi(c)$$

تذکر: در قضیه‌ی (۴)، اگر $d=1$ باشد، خواهیم داشت $(c=ab)$:

$$\varphi(ab)=\varphi(a)\times\varphi(b)$$

که همان نتیجه‌ی قضیه‌ی ۲ است.

تمرین: ثابت کنید:

I) $\forall n\in N$ ، $\varphi(n)|n!$

II) اگر $d|n$ ، $k,n\in N$ ثابت کنید: $\varphi(nd^k)=d^k\varphi(n)$

(راه‌حل‌های خود را برای ما ارسال کنید. از بین بهترین‌ها، به دو نفر جایزه می‌دهیم!)

قضیه‌ی اویلر در هم‌نهشتی‌ها و کاربردهای آن

قضیه‌ی اویلر: اگر m عددی طبیعی و a عددی صحیح باشد و $(m,a)=1$ ، در این صورت:

$$a^{\varphi(m)}\overset{m}{\equiv}1$$

برای اثبات قضیه‌ی اویلر، به بیان یک تعریف و دو قضیه‌ی مربوط به آن نیاز داریم که شاید مفید باشد!

تعریف دستگاه مخفف مانده‌ها به پیمانه‌ی m (د.م.م)

مجموعه‌ی شاملِ $\varphi(m)$ عددِ $\{r_1, r_2, \dots, r_{\varphi(m)}\}$ را یک د.م.م به پیمانه‌ی m می‌نامیم، هرگاه هریک از کلاس‌های هم‌ارزی به پیمانه‌ی m و متباین با m، دقیقاً با یک عضو این مجموعه هم‌نهشت باشند:

برای مثال، مجموعه‌ی {۱، ۳، ۵، ۷} یک د.م.م به پیمانه‌ی ۸ است.

قضیه: شرط لازم و کافی برای آن‌که مجموعه‌ی شاملِ $\varphi(m)$ عدد صحیح یک د.م.م به پیمانه‌ی m باشد آن است که هریک از این اعداد با m متباین بوده و هردو تا از آن‌ها به پیمانه‌ی m، ناهم‌نهشت باشند.

اثبات: با توجه به تعریف، اثبات واضح و بدیهی است.

قضیه: اگر مجموعه‌ی $\varphi(m)$ عددِ $r_1, r_2, \dots, r_{\varphi(m)}$ ، یک د.م.م. به پیمانه‌ی m و $(a,m)=1$ باشد، در این صورت مجموعه‌ی $A=\{ar_1, ar_2, \cdots ar_{\varphi(m)}\}$ نیز یک د.م.م به پیمانه‌ی m است.

اثبات: تعداد اعضای A برابر است با $\varphi(m)$. از طرف دیگر برای هر r_i که $1\le i\le\varphi(m)$ باشد، همواره: $(r_i,m)=1$ (طبق تعریف د.م.م) و طبق فرض: $(a,m)=1$ و لذا: $(ar_i,m)=1$ و همواره: $ar_i\overset{m}{\not\equiv}ar_j$. زیرا اگر $ar_i\overset{m}{\equiv}ar_j$ باشد، چون: $(a,m)=1$ ، پس: $r_i\overset{m}{\equiv}r_j$ که با تعریف د.م.م تناقض دارد. بنابراین، مجموعه‌ی A یک د.م.م به پیمانه‌ی m است. حال به اثبات قضیه‌ی اویلر می‌پردازیم.

اثبات قضیه‌ی اویلر: فرض کنیم $k=(\varphi)m$ و $A=\{r_1, r_2, \dots, r_k\}$ یک د.م.م به پیمانه‌ی m باشد. بنابر قضیه‌ی قبل و این‌که: $(a,m)=1$ ، مجموعه‌ی $B=\{ar_1, ar_2, \dots, ar_k\}$ نیز یک د.م.م به پیمانه‌ی m است.

بنابراین، هر یک از اعضای A با یکی و فقط یکی از اعضای B به پیمانه‌ی m هم‌نهشت است که اگر طرفین این k هم‌نهشتی را درهم ضرب کنیم، خواهیم داشت:

(۱)

$$(ar_1)(ar_2)\cdots(ar_k)\overset{m}{\equiv}r_1r_2\dots r_k$$

$$\Rightarrow(r_1r_2\dots r_k)a^k\overset{m}{\equiv}(r_1r_2\dots r_k)$$

از طرف دیگر: $(r_1,m)=1$ و $(r_2,m)=1,\cdots,(r_k.m)=1$ (طبق تعریف د.م.م)، پس: $(r_1r_2\dots r_k,m)=1$. یعنی می‌توان طرفین رابطه‌ی (۱) را بر $(r_1r_2\dots r_k)$ تقسیم کرد که پس از تقسیم نتیجه می‌شود: $a^k\overset{m}{\equiv}1$ یا $a^{\varphi(m)}\overset{m}{\equiv}1$.

نتیجه‌ی ۱: (قضیه‌ی فرما) اگر p عددی اول و a عددی صحیح و $p\nmid a$ $((p,a)=1)$ باشد، در این صورت:

$$a^{p-1}\overset{p}{\equiv}1$$

اثبات: اگر p اول باشد، $\varphi(p)=p-1$ و طبق قضیه‌ی اویلر حکم ثابت می‌شود.

تذکر: فرما قضیه‌ی خود را حدود ۸۰ سال قبل از اویلر بیان کرد!

نتیجه‌ی ۲. اگر p عددی اول و a عددی صحیح باشند، در این صورت:

$$a^p\overset{p}{\equiv}a$$

اثبات. اگر $p\nmid a$ باشد، پس طبق نتیجه‌ی ۱ داریم: $a^{p-1}\overset{p}{\equiv}1$ و با ضرب طرفین هم‌نهشتی در a حکم به دست می‌آید. و اگر $p|a$ ،

پس: $p|a(a^{p-1}-1)$ و لذا: $p|a^p - a$.

در نتیجه: $a^p \overset{p}{\equiv} a$

نتیجه‌ی۳. اگر a عددی صحیح و فرد و k عددی طبیعی باشد، همواره داریم:

$$a^{2^{k-1}} \overset{2^k}{\equiv} 1$$

اثبات: چون a فرد است، پس: $(a,2)=1$ و لذا طبق قضیه‌ی اویلر داریم:

$$a^{\varphi(2^k)} \overset{2^k}{\equiv} 1 \xrightarrow{(\text{تمرین } V)} a^{\frac{2^k}{2}} \overset{2^k}{\equiv} 1 \Rightarrow a^{2^{k-1}} \overset{2^k}{\equiv} 1$$

نتیجه‌ی۴. اگر p و q دو عدد اول و متمایز باشند، همواره داریم:

$$p^{q-1} + q^{p-1} \overset{pq}{\equiv} 1$$

اثبات: می‌دانیم $(p,q)=1$ ، لذا طبق قضیه‌ی فرما داریم:

$$\left.\begin{array}{l} p^{q-1} \overset{q}{\equiv} 1 \\ q^{p-1} \overset{q}{\equiv} 0 \end{array}\right\} \Rightarrow p^{q-1} + q^{p-1} \overset{q}{\equiv} 1 + 0 = 1 \qquad (1)$$

$$\left.\begin{array}{l} q^{p-1} \overset{p}{\equiv} 1 \\ p^{q-1} \overset{p}{\equiv} 0 \end{array}\right\} \Rightarrow p^{q-1} + q^{p-1} \overset{p}{\equiv} 1 + 0 = 1 \qquad (2)$$

$$(p,q)=1 \xrightarrow{(2),(1)} p^{q-1} + q^{p-1} \overset{pq}{\equiv} 1$$

نتیجه‌ی۵. اگر p عددی اول و a و b اعدادی صحیح باشند، همواره داریم:

$$(a+b)^p \overset{p}{\equiv} a^p + b^p$$

اثبات: طبق نتیجه‌ی ۲ داریم:

$$\left.\begin{array}{l} a^p \overset{p}{\equiv} a \\ b^p \overset{p}{\equiv} b \end{array}\right\} \Rightarrow a^p + b^p \overset{p}{\equiv} a + b \qquad (1)$$

$(a+b)^p \overset{p}{\equiv} (a+b)$: از طرف دیگر $\qquad (2)$

$$(1),(2) \Rightarrow (a+b)^p \overset{p}{\equiv} a^p + b^p$$

نتیجه‌ی ۶: اگر p و q دو عدد اول و متمایز باشند و: $a^p \overset{q}{\equiv} a$ و $a^q \overset{p}{\equiv} a$ ، در این صورت: $a^{pq} \overset{pq}{\equiv} a$.

اثبات: p,q اول $\xrightarrow{\text{نتیجه‌ی ۲}} (a^p)^q \overset{q}{\equiv} a^p \;,\; (a^q)^p \overset{p}{\equiv} a^q$

از طرف دیگر طبق فرض: $a^p \overset{q}{\equiv} a$ و $a^q \overset{p}{\equiv} a$ و بنا به خاصیت تعدی داریم:

$$a^{pq} \overset{p}{\equiv} a \;,\; a^{pq} \overset{q}{\equiv} a \xrightarrow{(p,q)=1} a^{pq} \overset{pq}{\equiv} a$$

نتیجه‌ی۷. مجموعه‌ی اعداد اولی که به صورت $4k+1$ هستند، نامتناهی است.

اثبات: ثابت می‌کنیم به ازای هر عدد طبیعی مانند $n \neq 1$ ، عدد اولی چون p به صورت $p = 4k+1$ وجود دارد که: $p > n$. برای اثبات، فرض کنیم: $n > 1$ و $a = n!$.

چون $a = n!$ عددی زوج است، پس عدد a^2+1 فرد است. و چون $a^2+1>1$ عامل اولی چون p دارد که p به یکی از دو صورت $4k+1$ یا $4k+3$ است و واضح است که: $p > n$ (زیرا اگر $p \le n$ باشد، همواره: $p|n!$ یا $p|a$. پس $p|a^2$. و چون $p|a^2+1$ ، باید $p|1$ که تناقض است). حال کافی است ثابت کنیم p به صورت $(4k+1)$ است. فرض کنیم چنین نباشد (فرض خلف)، یعنی: $p = 4k+3$. طبق ویژگی‌ها و خواص رابطه‌ی عاد کردن داریم:

$$p|a^2+1,\;\; a^2+1|(a^2)^{2k+1}+1 \;\; \left((a^2)^{2k+1}+1 = (a^2+1)\times Q\right)$$

$$\Rightarrow p|(a^2)^{2k+1}+1 \Rightarrow p|a^{4k+2}+1 \xrightarrow{p=4k+3} p|a^{p-1}+1$$

$$\Rightarrow p|a(a^{p-1}+1) \Rightarrow p|a^p + a \qquad (1)$$

$a^p \overset{p}{\equiv} a \Rightarrow p|a^p - a$: از طرف دیگر، طبق نتیجه‌ی ۲ $\qquad (2)$

$$(1)\;,\;(2) \;\Rightarrow\; p|2a = 2\times n!$$

و چون p بزرگ‌تر از n و فرد است، عبارت $p|2\times n!$ یک تناقض است و لذا باید $p = 4k+1$ و حکم به اثبات می‌رسد.

نتیجه‌ی ۸ (تعمیم نتیجه‌ی ۴): اگر m و n اعدادی طبیعی باشند و $(m,n)=1$ ، در این صورت:

$$m^{\varphi(n)} + n^{\varphi(m)} \overset{mn}{\equiv} 1$$

(اثبات به عهده‌ی شما)

کاربرد قضیه‌های اویلر و فرما در حل مسائل عددی و غیرعددی و پیدا کردن باقی‌مانده‌ی تقسیم

۱. باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد $A = 3^{256}\times(-5)$ را بر ۱۰۰ بیابید.

$$(3,100)=1,\;\; \varphi(100)=\varphi(10^2)=10^{2-1}\times 4 = 40$$

درنتیجه بنابر قضیه‌ی اویلر داریم:

$$3^{40} \overset{100}{\equiv} 1 \Rightarrow (3^{40})^6 \times 3^{16} \overset{100}{\equiv} 3^{16}$$

$$3^{16} = (81)^4 \overset{100}{\equiv} (-19)^4 = (-19^2)^2 = (361)^2 \overset{100}{\equiv} 61^2 = 3721 \overset{100}{\equiv} 21$$

$$\Rightarrow 3^{256} \overset{100}{\equiv} 21 \Rightarrow 3^{256}\times(-5) \overset{100}{\equiv} -105 \overset{100}{\equiv} 95$$

پس باقی‌مانده‌ی عدد A بر ۱۰۰ عدد ۹۵ است، یا عدد A از سمت راست به ۹۵ ختم می‌شود.

۲. باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد $A = (12^{24} + 35^4)\times 12$ را بر ۴۲۰ بیابید.

می‌دانیم:

$$(12,35)=1,\;\; \varphi(12)=4,\;\; \varphi(35)=\varphi(7\times 5)=\varphi(7)\times\varphi(5)$$

$$\Rightarrow \varphi(35) = 6\times 4 = 24$$

از طرف دیگر، بنابر یکی از تمرین‌های قبل داریم:

$$(m,n)=1 \Rightarrow m^{\varphi(n)}+n^{\varphi(m)} \overset{mn}{\equiv} 1$$

$$\Rightarrow 12^{\varphi(35)}+35^{\varphi(12)} \overset{35\times 12}{\equiv} 1 \Rightarrow 12^{24}+35^{4} \overset{420}{\equiv} 1$$

$$\Rightarrow A=(12^{24}+35^{4})\times 12 \overset{420}{\equiv} 12 \Rightarrow r=12$$

۳. ثابت کنید، اگر: $(a,7)=(b,7)=1$ ، آن‌گاه: $49|a^{42}-b^{42}$.

اویلر

$$(a,7)=1 \Rightarrow (a,49)=1 \Rightarrow a^{\varphi(49)} \overset{49}{\equiv} 1 ,\ \varphi(49)=42$$

$$\Rightarrow a^{42} \overset{49}{\equiv} 1 ,\ b^{42} \overset{49}{\equiv} 1 \Rightarrow a^{42}-b^{42} \overset{49}{\equiv} 0 \Rightarrow 49|a^{42}-b^{42}$$

۴. باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد $A=\sum_{k=1}^{40} k^{16}$ را بر ۱۷ بیابید.

از بین اعداد ۱ تا ۴۰ فقط دو عدد ۱۷ و ۳۴ نسبت به ۱۷ اول نیستند و در مورد بقیه‌ی اعداد می‌توان از قضیه‌ی فرما استفاده کرد:

$$A=1^{16}+2^{16}+\cdots+17^{16}+18^{16}+\cdots+34^{16}+35^{16}+\cdots+40^{16}$$

$$\text{فرما} \Rightarrow A \overset{17}{\equiv} \underbrace{1+1+\cdots+1}_{\text{۱۶ تا}}+0+\underbrace{1+\cdots+1}_{\text{۱۶ تا}}+0+\underbrace{1+\cdots+1}_{\text{۶ تا}}$$

$$\Rightarrow A \overset{17}{\equiv} 16+16+6=38 \overset{17}{\equiv} 4 \Rightarrow r=4$$

۵. باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد $A=\sum_{k=1}^{40} k^{13}$ را بر عدد ۱۳ بیابید.

$$A=1^{13}+\cdots+12^{13}+13^{13}+\cdots+40^{13}$$

بنابر نتیجه ۲ داریم:

$$A \overset{13}{\equiv} 1+2+\cdots+40=\frac{40\times 41}{2}=20\times 41 \overset{13}{\equiv} 7\times 2=14 \overset{13}{\equiv} 1$$

$$\Rightarrow r=1$$

$$(20 \overset{13}{\equiv} 7 ,\ 41 \overset{13}{\equiv} 2)$$

۶. باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد $A=35^{2008}\times 50$ را بر ۲۴ بیابید.

$$(35 ,\ 24)=1 \overset{\text{اویلر}}{\Rightarrow} 35^{\varphi(24)} \overset{24}{\equiv} 1 \Rightarrow 35^{8} \overset{24}{\equiv} 1$$

$$2008=251\times 8 \Rightarrow (35^{8})^{251} \overset{24}{\equiv} 1 \Rightarrow 35^{2008}\times 50 \overset{24}{\equiv} 1\times 50 \overset{24}{\equiv} 2$$

۷. اگر عدد a نسبت به ۲، ۳، ۱۹ و ۳۷ اول باشد، ثابت کنید $a^{36}-1$ بر ۳۳۷۴۴ بخش‌پذیر است.

$$33744=2^{4}\times 3\times 19\times 37,$$
$$a^{36}-1=(a^{18}+1)(a^{9}+1)(a^{9}-1)$$

$$(a ,\ 37)=1 \overset{\text{فرما}}{\Rightarrow} a^{36} \overset{37}{\equiv} 1 \Rightarrow 37|a^{36}-1 \qquad (1)$$

از طرف دیگر، چون $(a,2)=1$ ، پس a فرد است و هریک از سه عدد $(a^{9}-1)$ ، $(a^{9}+1)$ و $(a^{18}+1)$ زوج هستند. و چون $(a^{9}-1)$ و $(a^{9}+1)$ دو عدد زوج متوالی هستند، پس یکی از آن‌ها بر ۴ بخش‌پذیر است. بنابراین:

$$(a^{36}-1)=(a^{18}+1)(a^{9}+1)(a^{9}-1)$$
$$=2k_1\times 2k_2\times 4k_3=16k \Rightarrow 2^{4}|a^{36}-1 \quad (2)$$

$$(a,19)=1 \overset{\text{فرما}}{\Rightarrow} a^{18} \overset{19}{\equiv} 1 \Rightarrow 19|a^{18}-1 \Rightarrow 19|a^{36}-1 \quad (3)$$

$$(a,3)=1 \overset{\text{فرما}}{\Rightarrow} a^{2} \overset{3}{\equiv} 1 \Rightarrow 3|a^{2}-1 \Rightarrow 3|a^{36}-1 \qquad (4)$$

$$[a^{36}-1=(a^{2})^{18}-1=(a^{2}-1)Q]$$

$$(1),(2),(3),(4) \Rightarrow [2^{4},3,19,37]|a^{36}-1$$

$$\Rightarrow 2^{4}\times 3\times 19\times 37|a^{36}-1 \Rightarrow 33744|a^{36}-1$$

۸. ثابت کنید: $11|5^{38}-4$.

$$(5,11)=1 \overset{\text{فرما}}{\Rightarrow} 5^{10} \overset{11}{\equiv} 1 \Rightarrow (5^{10})^{3}\times 5^{8} \overset{11}{\equiv} 5^{8}$$

$$5^{8}=25^{4}, 25 \overset{11}{\equiv} 3 \Rightarrow 25^{4} \overset{11}{\equiv} 3^{4}=81 \overset{11}{\equiv} 4$$

$$\Rightarrow 5^{8} \overset{11}{\equiv} 4 \Rightarrow 5^{38} \overset{11}{\equiv} 4 \Rightarrow 11|5^{38}-4$$

کاربرد قضیه‌های اویلر و فرما در حل معادلات سیاله‌ی خطی و هم‌نهشتی

می‌دانیم، هر معادله‌ی سیاله‌ی خطی و دو مجهولی به‌صورت $a'x+b'y=c'$ که $(a',b')|c'$ ، دارای بی‌شمار جواب صحیح است که با تقسیم طرفین تساوی بر (a',b') ، به معادله‌ی سیاله‌ی $ax+by=c$ می‌رسیم و همواره $(a,b)=1$ است. از طرف دیگر، شرط لازم و کافی برای آن‌که زوج مرتب (x,y) یک جواب معادله‌ی اخیر باشد، آن است که:

$y=\frac{c-ax}{b}\in Z$ ، یا $b|ax-c$ یا $ax \overset{b}{\equiv} c$. به‌علاوه، بنابر قضیه‌ی اویلر: $a^{\varphi(b)} \overset{b}{\equiv} 1$. بنابراین:

$$aa^{\varphi(b)-1} \overset{b}{\equiv} 1 \Rightarrow a(ca^{\varphi(b)-1}) \overset{b}{\equiv} c$$

یعنی، هر عدد مانند x که $x \overset{b}{\equiv} ca^{\varphi(b)-1}$ ، در معادله‌ی هم‌نهشتی $ax \overset{b}{\equiv} c$ و درنتیجه در معادله‌ی سیاله‌ی $ax+by=c$ صدق می‌کند (می‌توان x را مساوی با $ca^{\varphi(b)-1}$ فرض کرد).

برای مثال، معادله‌ی $13x+12y=17$ را حل می‌کنیم:

$$\varphi(12)=12\times\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}=4 \Rightarrow x \overset{12}{\equiv} 17\times 13^{4}$$

$17 \overset{12}{\equiv} 5 \ , \ 13 \overset{12}{\equiv} 1 \Rightarrow x \overset{12}{\equiv} 5 \times 1^4 = 5 \ , \ y = \frac{17-13x}{12}$

$\Rightarrow y = \frac{17-65}{12} \Rightarrow y = \frac{-48}{12} = -4$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = x_0 + \frac{b}{d}k \\ y = y_0 - \frac{a}{d}k \end{cases}, d=(a,b)=1 \Rightarrow \begin{cases} x = 5+12k \\ y = -4-13k \end{cases}$$

۹. جواب‌های عمومی معادله‌ی هم‌نهشتی $x^7 + x^6 + 5x \overset{7}{\equiv} 19$ را بیابید.

کلاس‌های هم‌ارزی رابطه‌ی هم‌نهشتی به پیمانه‌ی ۷ عبارت‌اند از: [۰] و [۱] و ... و [۶]. و چون این کلاس‌های هم‌ارزی یک افراز برای Z هستند، لذا جواب معادله‌ی هم‌نهشتی فوق، یعنی x، به یکی از این کلاس‌ها تعلق دارد. هم‌چنین، چون $x=0$ در معادله صدق نمی‌کند، پس x در یکی از کلاس‌های هم‌ارزی [۱] تا [۶] است و همواره $(x,7)=1$.

$(x,7)=1 \overset{\text{فرما}}{\Rightarrow} x^6 \overset{7}{\equiv} 1 \ , \ x^7 \overset{7}{\equiv} x$

$\Rightarrow x^7 + x^6 + 5x \overset{7}{\equiv} x+1+5x \Rightarrow x+1+5x \overset{7}{\equiv} 19 \ , \ 19 \overset{7}{\equiv} -2$

$\Rightarrow 6x \overset{7}{\equiv} -3 \Rightarrow 6x \overset{7}{\equiv} -3+21 \Rightarrow 6x \overset{7}{\equiv} 18 \Rightarrow x \overset{7}{\equiv} 3$

$\Rightarrow x = 7k+3$

(توجه دارید که اگر $a \overset{m}{\equiv} b$ باشد، آن‌گاه $a \overset{m}{\equiv} b+mk$ که $k \in Z$ و از این نکته استفاده شد.)

۱۰. جواب‌های عمومی معادله‌ی زیر را بیابید.

$x^{15} + 18x^4 + 9x^3 + 37x \overset{5}{\equiv} 17$

چون $x=0$ در معادله صدق نمی‌کند، مطابق آن‌چه در مسئله‌ی قبل بیان شد، باید: $(x,5)=1$.

$(x,5)=1 \overset{\text{فرما}}{\Rightarrow} x^4 \overset{5}{\equiv} 1 \ , \ x^5 \overset{5}{\equiv} x$

$\Rightarrow 18x^4 \overset{5}{\equiv} 18 \overset{5}{\equiv} 3 \ , \ (x^5)^3 \overset{5}{\equiv} x^3 \Rightarrow x^{15} \overset{5}{\equiv} x^3$

$9 \overset{5}{\equiv} -1 \Rightarrow 9x^3 \overset{5}{\equiv} -x^3 , \ 37 \overset{5}{\equiv} 2 \ , \ 17 \overset{5}{\equiv} 2$

$\Rightarrow x^{15} + 18x^4 + 9x^3 + 37x \overset{5}{\equiv} x^3 + 3 + (-x^3) + 2x \overset{5}{\equiv} 2$

$\Rightarrow 2x \overset{5}{\equiv} -1 \Rightarrow 2x \overset{5}{\equiv} -1+5 \Rightarrow 2x \overset{5}{\equiv} 4$

$\overset{(2,5)=1}{\Rightarrow} x \overset{5}{\equiv} 2 \Rightarrow x = 5k+2$

۱۱. اگر a عددی صحیح و دل‌خواه باشد، باقی‌مانده‌ی تقسیم a^{100} را بر ۱۲۵ بیابید.

$\varphi(125) = 100$

I) $5 \nmid a \Rightarrow (5,a)=1 \Rightarrow (5^3,a)=1 \overset{\text{اویلر}}{\Rightarrow} a^{100} \overset{125}{\equiv} 1$

II) $5 | a \Rightarrow 5^3 | a^3 \Rightarrow 5^3 | a^{100} \Rightarrow a^{100} \overset{125}{\equiv} 0$

۱۲. اگر $(a,10)=1$ باشد، ثابت کنید سه رقم سمت راست a^{101} و a باهم برابرند.

برای اثبات می‌باید نشان دهیم: $a^{101} \overset{1000}{\equiv} a$ که چون $\varphi(125)=100$ و $\varphi(8)=4$ طبق قضیه‌ی اویلر: $a^{100} \overset{125}{\equiv} 1$ و $\varphi(8)|125$. پس: $a^{100} \overset{8}{\equiv} 1$. و چون $(8,125)=1$، لذا: $a^{100} \overset{8\times125}{\equiv} 1$ یا $a^{100} \overset{1000}{\equiv} 1$. با ضرب طرفین در a داریم: $a^{101} \overset{1000}{\equiv} a$.

۱۳. اگر $(a,90)=1$ باشد، ثابت کنید: $a^{12} \overset{90}{\equiv} 1$.

$\varphi(9) = 6 \ , \ \varphi(10) = 4$

$$\left.\begin{array}{l} (a,10)=1 \overset{\text{اویلر}}{\Rightarrow} a^4 \overset{10}{\equiv} 1 \Rightarrow (a^4)^3 \overset{10}{\equiv} 1 \Rightarrow a^{12} \overset{10}{\equiv} 1 \\ (a,9)=1 \overset{\text{اویلر}}{\Rightarrow} a^6 \overset{9}{\equiv} 1 \Rightarrow (a^6)^2 \overset{9}{\equiv} 1 \Rightarrow a^{12} \overset{9}{\equiv} 1 \end{array}\right\} \overset{(9,10)=1}{\Rightarrow} a^{12} \overset{90}{\equiv} 1$$

۱۴. به کمک قضیه‌ی اویلر دو رقم سمت راست $A = 7^{4001} \times 9$ را بیابید.

$\varphi(100) = 40 \ , \ (7,100)=1 \Rightarrow 7^{\varphi(100)} \overset{100}{\equiv} 1$

$\Rightarrow 7^{40} \overset{100}{\equiv} 1 \Rightarrow (7^{40})^{100} \times 7 \overset{100}{\equiv} 7 \Rightarrow 7^{4001} \times 9 \overset{100}{\equiv} 7 \times 9$

$\Rightarrow 7^{4001} \times 9 \overset{100}{\equiv} 63 \Rightarrow$ دو رقم سمت راست عدد A، ۶۳ است.

۱۵. اگر p و q اعداد اول و متمایز باشند، به‌طوری که $(p-1)|(q-1)$، ثابت کنید:

$(a,pq)=1 \Rightarrow a^{q-1} \overset{pq}{\equiv} 1$

حل: $\big((a,pq)=1 \Rightarrow (a,p)=(a,q)=1\big)$

(۱) $(a,p)=1 \Rightarrow a^{p-1} \overset{p}{\equiv} 1$

(۲) $(a,q)=1 \Rightarrow a^{q-1} \overset{p}{\equiv} 1$

از طرف دیگر: $(p-1)|(q-1) \Rightarrow (q-1) = (p-1) \times k$

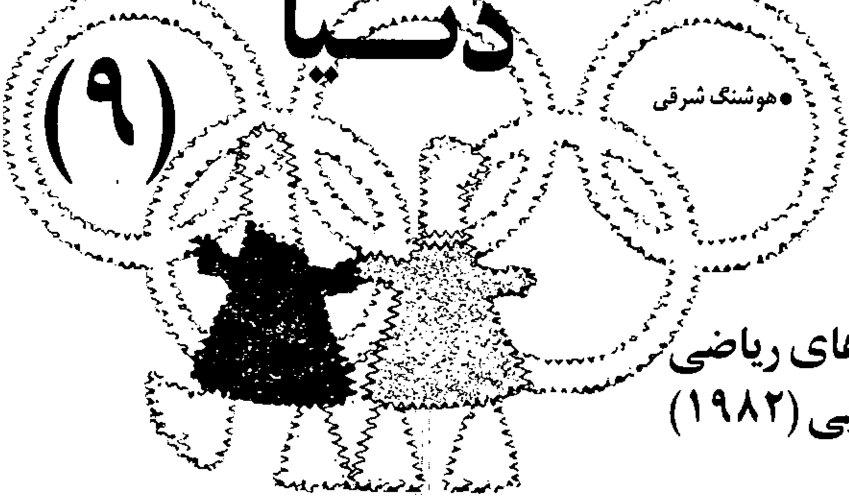
(۳) $(1) \Rightarrow a^{q-1} = (a^{p-1})^k \overset{p}{\equiv} 1^k \Rightarrow a^{q-1} \overset{p}{\equiv} 1$

$(2) \ , \ (3) \overset{(p,q)=1}{\Rightarrow} a^{q-1} \overset{pq}{\equiv} 1$

زیرنویس

۱. برای آشنایی با اثبات رابطه‌ی اویلر و قضایای بیان شده، به جلد دوم، قسمت اول کتاب تئوری مقدماتی اعداد، نوشته‌ی مرحوم دکتر غلامحسین مصاحب (انتشارات امیرکبیر) مراجعه فرمایید.

مسابقه‌های ریاضی در کشورهای دنیا (۹)



● هوشنگ شرقی

چند مسئله از المپیادهای ریاضی آلمان غربی (۱۹۸۲)

اشاره

پیش از اتحاد دو آلمان و تشکیل کشور آلمان واحد در سال ۱۹۹۰، دو کشور آلمان غربی و آلمان شرقی وجود داشتند و مسابقات ریاضی در هر دو کشور، با دو سبک جداگانه برگزار می‌شد. می‌توان گفت، سطح سؤالات در کشور آلمان شرقی مانند اکثر کشورهای بلوک شرق آن زمان (یعنی کشورهای متحد شوروی سابق هم‌چون رومانی، لهستان، مجارستان و چک و اسلواکی) بسیار قوی‌تر از سطح مسائل مسابقه‌های آلمان غربی بود و نتایج تیم‌های کشور آلمان شرقی نیز در المپیادهای بین‌المللی از آلمان غربی بهتر بود. در این جا کوشیده‌ایم، تعدادی از مسائل خوب المپیاد ریاضی آلمان غربی را بیاوریم. این مسائل همگی در زمینه‌ی تئوری اعداد (ریاضیات گسسته) هستند و از سطح قابل قبولی نیز برخوردارند.

مسائل

۱. مجموعه‌ای از اعداد را یک مجموعه‌ی «بدون جمع» می‌نامیم، هرگاه مجموع هیچ دو تای آن‌ها (یکسان یا متمایز) مساوی یکی از آن‌ها نباشد (هیچ عضو مجموعه، مساوی مجموع دو عضو دیگر نباشد).

بیشترین تعداد عضوهای یک زیر مجموعه‌ی بدون جمع A از مجموعه‌ی $\{۱,۲,۳,\cdots,۲n+۱\}$ چیست؟

۲. مجموع بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه‌های فرد اعداد $۱,۲,۳,\cdots,۲^n$ را بر حسب n به‌دست آورید.

۳. اگر n عددی طبیعی و $P = ۴^n + ۲^n + ۱$ عددی اول باشد، ثابت کنید که n باید توانی از ۳ باشد.

حل مسائل

۱. اگر بزرگ‌ترین عضو مجموعه‌ی A، عدد طبیعی و فرد $۲k+۱$ باشد، A زیرمجموعه‌ای از مجموعه‌ی $\{۱,۲,۳,\cdots,۲k+۱\}$ است. نخستین $۲k$ عضو این مجموعه را می‌توان به k جفت زیر با مجموع $۲k+۱$، تفکیک کرد.

$$(۱,۲k),(۲,۲k-۱),(۳,۲k-۲),\cdots,(k,k+۱)$$

برای آن‌که A بدون جمع باشد، باید از هیچ‌یک از جفت‌های بالا بیش از یک عضو در A نباشد (زیرا در غیر این صورت مجموع آن دو عضو مساوی $۲k+۱$ خواهد شد که عضو A است). پس ماکزیمم تعداد اعضای A از $k+۱$ تجاوز نمی‌کند (از هر جفت یک عضو به اضافه‌ی $(۲k+۱)$). چون k بزرگ‌تر از n نیست، پس A بیشتر از $n+۱$ عضو ندارد. از طرف دیگر، فرض می‌کنیم بزرگ‌ترین عضو A، عدد زوج $۲k$ باشد، از آن‌جا نتیجه می‌شود

که A زیرمجموعه‌ای از مجموعه‌ی $\{1,2,3,\cdots,2k\}$ است. درنتیجه، چون $2k = k + k$، k نمی‌تواند عضو A باشد و $2k-2$ عدد صحیح $\{1,2,\cdots,k-1,k+1,\cdots,2k-1\}$ را می‌توان به $k-1$ جفت زیر با مجموع $2k$ تبدیل کرد:

$(1,2k-1),(2,2k-2),\cdots,(k-1,k+1)$

درنتیجه، ماکزیمم تعداد اعضای A از $k = 1 + 1 - k$ تجاوز نمی‌کند و این نیز بزرگ‌تر از n نیست. بنابراین در هر دو حالت، تعداد اعضای A از $n+1$ تجاوز نمی‌کند. اما به سادگی می‌توان دید که یک زیرمجموعه‌ی بدون جمع با تعداد $n+1$ عضو وجود دارد:

الف) عددهای صحیح فرد $\{1,3,5,\cdots,2n+1\}$ را در نظر می‌گیریم. مجموع هر دو عضو این مجموعه عددی زوج است. لذا این مجموعه یک مجموعه‌ی بدون جمع است.

ب) $n+1$ عدد طبیعی متوالی $\{n+1,n+2,\cdots,2n+1\}$ را در نظر می‌گیریم. مجموع هر دو عضو متمایز یا یکسان از این مجموعه، از $2n+1$ (بزرگ‌ترین عضو آن) بیشتر است. بنابراین، مجموع هیچ دو عضو این مجموعه مساوی عضو دیگری از آن نیست و لذا یک مجموعه‌ی بدون جمع است. بنابراین نتیجه می‌شود که ماکزیمم تعداد اعضای A دقیقاً مساوی $n+1$ است.

۲. ملاحظه می‌شود که چون 2^n عددی زوج و شامل فقط عوامل ۲ است، پس بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه فرد آن، عدد ۱ است. درنتیجه، S برابر است با ۱ به اضافه‌ی مجموع بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه‌های فرد عددهای ۱ و ۲ و ۳ و... و $2^n - 1$.

اکنون توجه می‌کنیم که اگر بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه فرد عدد طبیعی k، عدد $2i - 1$ باشد، آن‌گاه $k = (2i-1)2^t$ (اگر k عددی فرد باشد، $t = 0$ و اگر k زوج باشد، تمام عوامل ۲ آن را جدا می‌کنیم و k به صورت حاصل‌ضرب توانی از ۲ در عددی فرد خواهد شد).

پس باید مجموعی به‌صورت $S = 1 + \sum_{k=1}^{2^n-1}(2i-1)$ را به‌دست آوریم. یک ایده‌ی هوش‌مندانه برای تعیین این مجموع آن است که ببینیم: «تا چند جمله از دنباله‌ی زیر را می‌توان نوشت تا اندازه‌ی آن‌ها از $2^n - 1$ تجاوز نکند؟»

1×2^t و 3×2^t و 5×2^t و... و $(2i-1)2^t$

بدیهی است که t نمی‌تواند به بزرگی n باشد و برای هر $t = 0$ و ۱ و... و $n-1$ داریم:

$$(2i-1)2^t \le 2^n - 1 \Rightarrow 2i - 1 \le 2^{n-t} - \frac{1}{2^t}$$

$$\Rightarrow 2i - 1 \le 2^{n-t} - 1$$

درنتیجه، مجموع بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه‌های فرد مضرب 2^t برابر است با:

$$\begin{aligned}S_t &= 1+3+5+\cdots+(2^{n-t}-1)\\ &= 1+3+5+\cdots+(2(2^{n-t-1})-1)\end{aligned}$$

اما می‌دانیم که مجموع عددهای فرد ۱ و ۲ و ۳ و... و $(2n-1)$ مساوی n^2 است (به کمک قضیه‌ی استقرای ریاضی و یا مجموع جملات تصاعد حسابی). بنابراین:

$$S_t = (2^{n-t-1})^2 = 4^{n-t-1}$$

(توجه می‌کنیم که مضرب‌های زوج 2^t نیز به مضرب‌های فرد آن‌ها تبدیل می‌شوند. به‌عنوان مثال: $6\times 2^t = 3\times 2^{t+1}$)

به این ترتیب، مجموع مورد نظر به دست می‌آید:

$$S = 1 + \sum_{t=0}^{n-1} S_t = 1 + \sum_{t=0}^{n-1} 4^{n-t-1} = 1 + (4^{n-1} + 4^{n-2} + \cdots + 4 + 1)$$

$$= 1 + \frac{4^n - 1}{4 - 1} = \frac{4^n + 2}{3}$$

۳. اگر n عدد طبیعی باشد و تمام عوامل ۳ آن را جدا کنیم، نتیجه می‌شود که: $n = 3^k t$ و $k \ge 0$ و $t \ge 1$ و $3 \nmid t$ و درنتیجه عددی طبیعی چون s داریم که: $t = 3s + r$ و $r = 1$ یا ۲. بنابراین:

$$P = 4^{(3^k t)} + 2^{(3^k t)} + 1 = (2^{(3^k)})^{2t} + (2^{(3^k)})^t + 1$$

پس ثابت می‌کنیم که عبارت فوق بر عبارت $F = (2^{(3^k)})^2 + (2^{(3^k)}) + 1$ بخش‌پذیر است و با پذیرش این موضوع، به‌راحتی نتیجه می‌شود که چون P عددی اول است و $F > 1$، لذا برابری فوق ممکن نیست، مگر این‌که P برابر با F باشد. یعنی:

$$P = (2^{(3^k)})^{2t} + (2^{(3^k)})^t + 1 = F = (2^{(3^k)})^2 + (2^{(3^k)}) + 1$$

و بنابراین: $2 = 2t$ و $t = 1$ و درنتیجه: $n = 3^k . t = 3^k$ و حکم ثابت می‌شود. تنها چیزی که باقی می‌ماند، اثبات این است که عبارت $Z = (2^{(3^k)})^{2t} + (2^{(3^k)})^t + 1$ بر عبارت $F = (2^{(3^k)})^2 + (2^{(3^k)}) + 1$ بخش‌پذیر است و $t = 3s + r$ و $r = 1$ یا ۲. با فرض $x = 2^{(3^k)}$ و در حالت $r = 1$ خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}Z &= x^{2t} + x^t + 1 = x^{6S+2} + x^{3S+1} + 1 \Rightarrow\\ (x-1)Z &= x^{6S+3} + x^{3S+2} + x - x^{6S+2} - x^{3S+1} - 1\\ &= (x^{6S+3} - 1) - (x^{6S+2} - x^{3S+2}) - (x^{3S+1} - x)\\ &= \left[(x^3)^{2S+1} - 1\right] - x^{3S+2}\left[(x^3)^S - 1\right] - x\left[(x^3)^S - 1\right]\end{aligned}$$

عبارت داخل هر کروشه شامل یک عامل به فرم $(x^3)^m - 1$ است و برای هر عدد طبیعی m داریم:

$$(x^3)^m - 1 = (x^3 - 1)\left[(x^3)^{m-1} + (x^3)^{m-2} + \cdots + x^3 + 1\right]$$

و درنتیجه، $(x^3 - 1)$ عاملی از $(x-1)z$ است و چون $x^3 - 1 = (x-1)(x^2+x+1)$، بنابراین $x^2 + x + 1$ عاملی از z است و اثبات تمام می‌شود.

❁❁❁

رویکرد هندسی- رویکرد جبری در آموزش هندسه



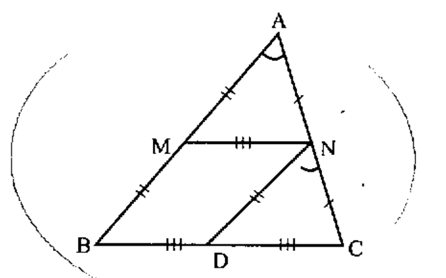
(قسمت ۲)

• محمدهاشم رستمی

اشاره

در شماره‌ی قبل راجع به رویکرد هندسی و رویکرد جبری در آموزش هندسه بحث شد و مسائلی با هر دو رویکرد حل شد. اینک در پی به مثال‌های دیگری از حل یک مسئله با دو رویکرد هندسی و جبری توجه کنید.

مثال ۱. ثابت کنید پاره‌خطی که وسط‌های دو ضلع مثلثی را به‌هم وصل می‌کند، با ضلع سوم مثلث موازی و مساوی نصف آن ضلع است.



اثبات

الف) روش هندسی: مثلث ABC را در نظر می‌گیریم و وسط ضلع‌های AB و AC را به ترتیب M و N می‌گیریم. می‌خواهیم ثابت کنیم که MN موازی BC است و: $MN = \frac{1}{2}BC$.

می‌دانیم که: $\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC} = 1$. پس بنابر عکس قضیه‌ی تالس، MN موازی ضلع BC است. برای این‌که ثابت کنیم: $MN = \frac{1}{2}BC$، از نقطه‌ی N خطی موازی ضلع AB رسم می‌کنیم تا ضلع BC را در نقطه‌ی D قطع کند. چهارضلعی MNDB متوازی‌الاضلاع است، زیرا ضلع‌هایش دوبه‌دو موازی‌اند؛ پس: ND = MB. اما MA = MB (نقطه‌ی M وسط ضلع AB

است)، بنابراین: $ND = AM$. از طرفی، $AN = NC$ و $\hat{A} = D\hat{N}C$ ، لذا دو مثلث AMN و NDC به حالت برابری دو ضلع و زاویه‌ی بین، همنهشت هستند. ($AM = ND$ ، $AN = NC$ و $\hat{A} = D\hat{N}C$). درنتیجه: $MN = DC$. از طرف دیگر: $MN = DB$ (MNDB متوازی‌الاضلاع است)، پس:

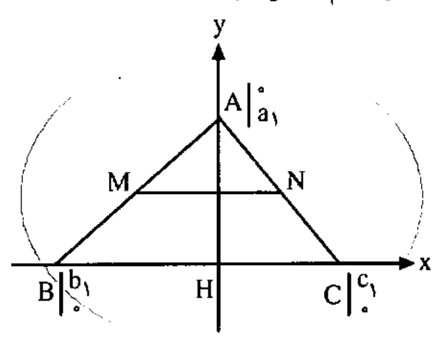
$MN = DC = DB$ و درنتیجه: $MN = \frac{1}{2}BC$.

نکته: پس از آن که ثابت کردیم، MN موازی BC است، می‌توانیم برای اثبات این که: $MN = \frac{1}{2}BC$ ، از نتیجه‌ی ۲ صفحه‌ی ۷۴ کتاب هندسه‌ی (۱) استفاده کنیم. این نتیجه می‌گوید: اگر MN موازی ضلع BC از مثلث ABC باشد، داریم:

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$$

اما در این مسئله، چون M وسط ضلع AB و N وسط ضلع AC است، پس: $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{1}{2}$. و بنابراین: $\frac{MN}{BC} = \frac{1}{2}$ یا: $MN = \frac{1}{2}BC$.

ب) راه جبری: ارتفاع AH از مثلث ABC را رسم می‌کنیم. H را مبدأ مختصات، محور xها را روی BC و محور yها را روی HA در نظر می‌گیریم (شکل زیر).



فرض می‌کنیم: $A = (0, a_1)$ ، $B = (b_1, 0)$ و $C = (c_1, 0)$. در این صورت، مختصات نقطه‌های M و N که به ترتیب وسط ضلع‌های AB و AC هستند، برابرند با:

$$M = (\frac{b_1}{2}, \frac{a_1}{2}) \text{ و } N = (\frac{c_1}{2}, \frac{a_1}{2})$$

از آن‌جا داریم:

$$m_{/MN} = \frac{\frac{a_1}{2} - \frac{a_1}{2}}{\frac{c_1}{2} - \frac{b_1}{2}} = \frac{0}{\frac{c_1 - b_1}{2}} = 0 = m_{/BC}$$

پس MN موازی ضلع BC است.

از طرف دیگر داریم:

$$BC = \sqrt{(c_1 - b_1)^2 + (0 - 0)^2} = |c_1 - b_1|$$

$$MN = \sqrt{(\frac{c_1}{2} - \frac{b_1}{2})^2 + (\frac{a_1}{2} - \frac{a_1}{2})^2} = \sqrt{(\frac{c_1 - b_1}{2})^2}$$

$$= \left|\frac{c_1 - b_1}{2}\right| = \frac{|c_1 - b_1|}{2}$$

$$MN = \frac{1}{2}|c_1 - b_1| \Rightarrow MN = \frac{1}{2}BC$$

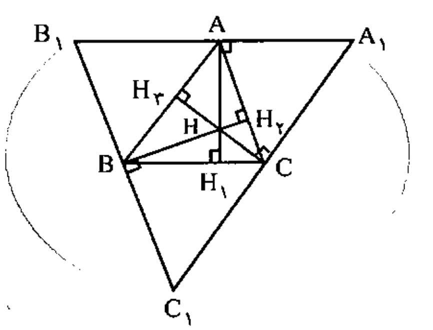
پس حکم مسئله ثابت شد.

نکته: به طوری که دیده می‌شود، راه‌حل جبری برای این مسئله، ساده‌تر از راه‌حل هندسی است.

مثال ۲. ثابت کنید که سه ارتفاع هر مثلث همرس‌اند.

اثبات

الف) روش هندسی: مثلث ABC را در نظر می‌گیریم و ارتفاع‌های AH_1 ، BH_2 و CH_3 را رسم می‌کنیم (شکل زیر). می‌خواهیم ثابت کنیم که این سه ارتفاع همرس‌اند.



ارتفاع‌های مثلث ویژگی خاصی ندارند و مانند نیمسازهای زاویه‌های مثلث و یا عمودمنصف ضلع‌های مثلث، مکان هندسی نیستند. پس به نظر می‌رسد که برای اثبات این قضیه باید تغییراتی در شکل مسئله ایجاد کنیم تا ارتفاع‌های AH_1 ، BH_2 و CH_3 به یکی از مکان‌های هندسی قبلی، مثلاً ارتفاعات یک مثلث و یا نیمسازهای زاویه‌های یک مثلث و یا عمودمنصف‌های ضلع‌های یک مثلث تبدیل شوند. به این منظور، از رأس‌های A ، B و C به ترتیب خط‌هایی موازی ضلع‌های BC ، AC و AB از مثلث ABC رسم می‌کنیم تا مثلث $A_1B_1C_1$ حاصل شود. چهارضلعی $ABCA_1$ متوازی‌الاضلاع است ($AA_1 \| BC$ و $AB \| CA_1$)، پس:

$$AA_1 = BC \qquad (1)$$

از طرف دیگر، چهارضلعی $ACBB_1$ نیز متوازی‌الاضلاع است

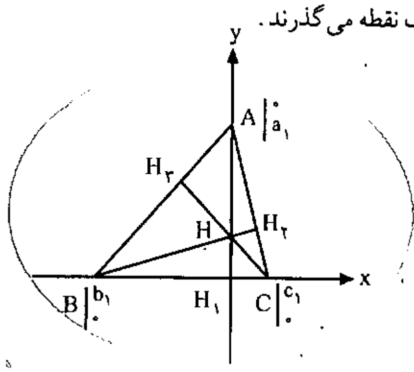
(AC‖BB₁ و AB₁‖BC). بنابراین:

$$AB_1 = BC \qquad (2)$$

از رابطه‌های ۱ و ۲ نتیجه می‌شود که: $AB_1 = AA_1$؛ یعنی ارتفاع AH_1 از وسط A_1B_1 می‌گذرد. از طرفی، چون AH_1 عمود بر BC و A_1B_1 موازی BC است، پس AH_1 بر A_1B_1 عمود نیز هست. درنتیجه ارتفاع AH_1، عمودمنصف ضلع A_1B_1 از مثلث $A_1B_1C_1$ است. با همین روش ثابت می‌شود که BH_2 عمودمنصف ضلع B_1C_1 و CH_3 عمودمنصف ضلع A_1C_1 از مثلث $A_1B_1C_1$ است.

اما می‌دانیم که سه عمودمنصف ضلع‌های هر مثلث همرس‌اند. درنتیجه، ارتفاع‌های AH_1، BH_2 و CH_3 از مثلث ABC که عمودمنصف‌های ضلع‌های مثلث $A_1B_1C_1$ هستند، همرس خواهند بود. نقطه‌ی همرسی ارتفاع‌های هر مثلث را که در شکل H نامیده‌ایم، مرکز ارتفاعی مثلث[1] می‌نامند. این نقطه ویژگی‌هایی دارد که در دایرةالمعارف هندسه به آن‌ها پرداخته‌ایم.

ب) راه حل جبری: مثلث ABC را در نظر می‌گیریم و ارتفاع‌های AH_1، BH_2 و CH_3 را رسم می‌کنیم. می‌خواهیم ثابت کنیم که این سه ارتفاع از یک نقطه می‌گذرند.



برای اثبات، نقطه‌ی H_1 را مبدأ مختصات، محور xها را روی BC و محور yها را روی AH_1 اختیار می‌کنیم (شکل بالا). فرض می‌کنیم: $A=(0,a_1)$، $B=(b_1,0)$ و $C=(c_1,0)$. برای این‌که ثابت کنیم سه ارتفاع AH_1، BH_2 و CH_3 همرس‌اند، معادله‌ی این سه ارتفاع را می‌نویسیم. آن‌گاه نقطه‌ی برخورد دو ارتفاع از این سه ارتفاع را به دست می‌آوریم و ثابت می‌کنیم که این نقطه‌ی برخورد روی ارتفاع سومی قرار دارد. داریم:

$$m_{/AC} = \frac{0-a_1}{c_1-0} = -\frac{a_1}{c_1} \Rightarrow m_{/BH_2} = \frac{c_1}{a_1} \quad \text{و} \quad B=(b_1,0)$$

$$\Rightarrow y-0 = \frac{c_1}{a_1}(x-b_1)$$

$$\Rightarrow y = \frac{c_1}{a_1}x - \frac{b_1c_1}{a_1} \quad \text{معادله‌ی ارتفاع } BH_2$$

$$m_{/AB} = \frac{0-a_1}{b_1-0} = -\frac{a_1}{b_1} \Rightarrow m_{/CH_3} = \frac{b_1}{a_1} \quad \text{و} \quad C=(c_1,0)$$

$$\Rightarrow CH_3 : y-0 = \frac{b_1}{a_1}(x-c_1)$$

$$\Rightarrow y = \frac{b_1}{a_1}x - \frac{b_1c_1}{a_1} \quad \text{معادله‌ی ارتفاع } CH_3$$

$$x = 0 : AH_1 \quad \text{معادله‌ی ارتفاع}$$

$$\begin{cases} AH_1: & x=0 \\ BH_2: & y = \frac{c_1}{a_1}x - \frac{b_1c_1}{a_1} \\ CH_3: & y = \frac{b_1}{a_1}x - \frac{b_1c_1}{a_1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} AH_1: & x=0 \\ BH_2: & y = \frac{c_1}{a_1}x - \frac{b_1c_1}{a_1} \end{cases}$$

$$\Rightarrow H = \left(0, \frac{-b_1c_1}{a_1}\right) \quad \text{مختصات نقطه‌ی برخورد } AH_1 \text{ و } BH_2$$

$$H = \left(0, \frac{-b_1c_1}{a_1}\right) \xrightarrow{\text{در معادله‌ی } CH_3} \frac{-b_1c_1}{a_1} = \frac{-b_1}{a_1}(0) - \frac{-b_1c_1}{a_1}$$

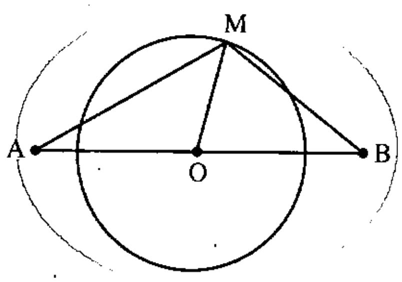
$$\Rightarrow \frac{-b_1c_1}{a_1} = \frac{-b_1c_1}{a_1}$$

پس مختصات نقطه‌ی H که محل برخورد دو ارتفاع AH_1 و BH_2 است، در معادله‌ی ارتفاع CH_3 صدق می‌کند. بنابراین، سه ارتفاع AH_1، BH_2 و CH_3 از یک نقطه می‌گذرند (همرس‌اند).

مثال ۳. مکان هندسی نقطه‌ای از یک صفحه را تعیین کنید که مجموع مربعات فاصله‌اش از دو نقطه‌ی ثابت واقع در آن صفحه، مقدار ثابتی باشد.

اثبات

الف) روش هندسی: دو نقطه‌ی ثابت A و B واقع در یک صفحه را در نظر می‌گیریم. می‌خواهیم مکان هندسی نقطه‌ی M از این صفحه را تعیین کنیم به قسمتی که: $MA^2 + MB^2 = K^2$ (K مقدار ثابتی است).



از A به B وصل می‌کنیم و وسط پاره‌خط AB را O می‌نامیم و از

M به O وصل می‌کنیم. بنابر رابطه‌ی میانه‌ها در هر مثلث، در مثلث MAB داریم:

$$MA^2 + MB^2 = 2MO^2 + \frac{AB^2}{2} \qquad (1)$$

اما بنا به فرض: $MA^2 + MB^2 = K^2$. پس از رابطه‌ی ۱ نتیجه می‌شود:

$$K^2 = 2MO^2 + \frac{AB^2}{2} \Rightarrow MO^2 = \frac{K^2}{2} - \frac{AB^2}{4} = \frac{2K^2 - AB^2}{4}$$

$$AB = a \Rightarrow MO = \frac{1}{2}\sqrt{2K^2 - a^2}$$ و

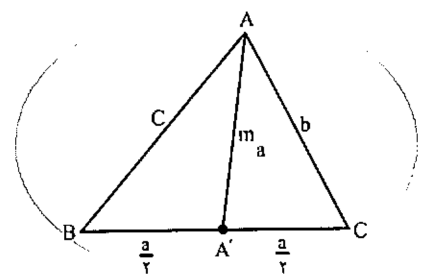
$$\Rightarrow MO = \frac{1}{2}\sqrt{2K^2 - AB^2}$$

چون پاره‌خط $AB = a$ مقدار ثابتی است، پس MO نیز مقدار ثابتی است. اما O نقطه‌ی ثابتی می‌باشد، بنابراین مکان هندسی نقطه‌ی M دایره‌ای به مرکز O و به شعاع $\frac{1}{2}\sqrt{2K^2 - a^2}$ است.

سؤال: در چه صورت دایره‌ی مکان هندسی نقطه‌ی M، از دو نقطه‌ی A و B می‌گذرد؟ در چه صورت این دو نقطه درون دایره‌اند و در چه صورت برون دایره؟ پاسخ خود را به نشانی مجله‌ی برهان ارسال کنید.

نکته: برای اثبات این مسئله از قضیه‌ی زیر استفاده کرده‌ایم.

قضیه: مجموع مربعات دو ضلع هر مثلث، برابر است با دو برابر مربع طول میانه‌ی وارد بر ضلع سوم، به اضافه‌ی نصف مربع ضلع سوم. یعنی در مثلث ABC، اگر میانه‌ی AA' را رسم کنیم، داریم:



$$AB^2 + AC^2 = 2AA'^2 + \frac{BC^2}{2}$$

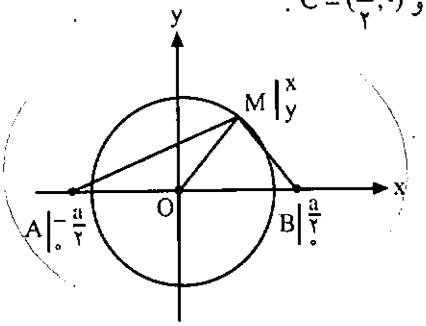
یا:

$$b^2 + c^2 = 2m_a^2 + \frac{a^2}{2}$$

اثبات این قضیه را می‌توانید در جلد پنجم دایرة‌المعارف هندسه ببینید.

ب) اثبات به روش جبری: دو نقطه‌ی ثابت A و B را در یک صفحه در نظر می‌گیریم. می‌خواهیم مکان هندسی نقطه‌ی M از این صفحه را تعیین کنیم، به قسمی که: $MA^2 + MB^2 = K^2$.

برای اثبات، دستگاه مختصات xOy را چنان در نظر می‌گیریم که O وسط پاره‌خط AB مبدأ مختصات، عمودمنصف پاره‌خط AB محور yها و AB روی محور xها باشد. در این صورت، با فرض $AB = a$ ، خواهیم داشت: $B = (-\frac{a}{2}, 0)$ و $C = (\frac{a}{2}, 0)$.



اکنون برای تعیین مکان هندسی نقطه‌ی M فرض می‌کنیم: $M = (x,y)$. بنابر فرض مسئله داریم:

$$MA^2 + MB^2 = K^2$$

اما با توجه به این‌که: $A = (\frac{-a}{2}, 0)$ ، $B = (\frac{a}{2}, 0)$ و $M = (x,y)$ ، داریم:

$$MA^2 = (-\frac{a}{2} - x)^2 + (0 - y)^2 = (\frac{a}{2} + x)^2 + y^2$$

$$MB^2 = (\frac{a}{2} - x)^2 + (0 - y)^2 = (\frac{a}{2} - x)^2 + y^2$$

از آن‌جا، از رابطه‌ی $MA^2 + MB^2 = K^2$ خواهیم داشت:

$$(\frac{a}{2} + x)^2 + y^2 + (\frac{a}{2} - x)^2 + y^2 = K^2$$

$$\Rightarrow \frac{a^2}{4} + x^2 + ax + 2y^2 + \frac{a^2}{4} + x^2 - ax = K^2$$

$$\Rightarrow 2x^2 + 2y^2 = K^2 - \frac{a^2}{2} \Rightarrow x^2 + y^2 = \frac{2K^2 - a^2}{4} = \text{مقدار ثابت}$$

این معادله، معادله‌ی دایره‌ای به مرکز O، وسط پاره‌خط AB و به شعاع مقدار ثابت $\frac{1}{2}\sqrt{2K^2 - a^2}$ است. بنابراین، مکان هندسی نقطه‌ی M دایره‌ای است که مرکزش نقطه‌ی ثابت O، وسط پاره‌خط AB و شعاعش $R = \frac{1}{2}\sqrt{2K^2 - a^2}$ است.

سؤال: به نظر شما، کدام راه‌حل برای این مسئله ساده‌تر است: راه‌حل هندسی یا راه‌حل جبری؟ نظر خود را با دلیل به نشانی مجله‌ی ریاضی برهان دبیرستان ارسال کنید.

ادامه دارد...

زیرنویس

1. orthocenter

سرگرمی

به منظور فرش کردن زمین با موزاییک

● ترجمه و تنظیم: محمدعلی شیخان

بند ۱. مقدمات

مسئله مربوط است به پوشاندن یک صفحه به‌وسیله‌ی چندضلعی‌های منتظم محدب، بدون جای خالی و بدون آن‌که اضلاع دو چندضلعی بر هم قرار گیرند یا سطحی از یکی روی دیگری بیفتد. در ارتباط با این موضوع می‌توان دو حالت را در نظر گرفت: ۱. جُفت و جور کردن‌ها و پوشاندن صفحه با چندضلعی‌های منتظم هم‌نوع؛ ۲. جفت و جور کردن‌ها و پوشاندن صفحه با انواع متفاوت چندضلعی‌های منتظم.

راه‌حل حالت اول به‌وسیله‌ی فیثاغوریان عنوان شده بود. بنا به روایت **پروکلوس**[1]، فیثاغورث نشان داده است، با جفت و جور کردن شش مثلث متساوی‌الاضلاع، یا چهار مربع، یا سه شش ضلعی (منتظم)، دقیقاً می‌توان فضای اطراف یک نقطه را در صفحه پوشاند. این نظریه نزد فیثاغورث شامل شناخت بعضی از خواص

چندضلعی‌های منتظم بود. حتی بنا به روایت دیگری از یک مؤلف یونانی به نام لوسین[۲] (قرن دوم)، و یک شارح و مفسر کتب قدیم به نام آریستوفان[۳]، پنج ضلعی منتظم ستاره‌ای، نشانه‌ی همبستگی فیثاغوریان تلقی می‌شد. چون تعیین ضلع این چندضلعی، به تقسیم شعاع دایره به نسبت ذات وسط و طرفین مربوط می‌شد، این تقسیم را (قدما) «تقسیم طلایی» می‌نامیدند. از آن نتیجه گرفته‌اند که فیثاغوریان باید مسئله‌ی اخیر را حل کرده باشند (موضوع تقسیم طلایی شعاع دایره را آخر این مقاله می‌توانید مطالعه کنید).

برای مطالعه‌ی حالت دوم، در اثری به‌جا مانده و جاوید از کپلر[۴] به نام دنیای متوازن و هم‌آهنگ (۱۶۱۹) اَشکالی طراحی شده که در این مقاله به اغلب آن‌ها برخورد می‌کنید. مسئله در این حالت به وسیله‌ی م. بادورو[۵] (۱۸۸۱) بررسی و حل شد، با فرض آن‌که جفت‌وجور کردن‌ها متساوی‌الساقین باشند و متساوی‌الساقین بودن هم به این معنی است که: زوایای چندضلعی‌های منتظمی که با آن‌ها صفحه را پوشش می‌دهیم، در همه‌ی نقاطی که رأس‌های مشترک دارند، یکسان باشند و درحالی‌که در وضع معینی یک چندضلعی را با برگرداندن روی چندضلعی مساوی دلخواهی قرار می‌دهیم، بتوان انطباق معکوس همه‌ی چندضلعی‌های مجموعه را به‌دست آورد.

در مورد جفت و جور کردن‌های غیرمتساوی‌الساقین به شیوه‌ی منظم، در این مقاله بحثی مطرح نشده است.

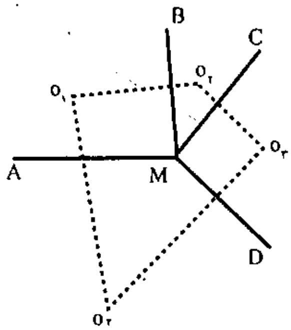
تعداد کثیر الاضلاع‌های منتظم حول یک نقطه

حول یک نقطه بیش از شش چندضلعی منتظم محدب نمی‌توان قرار داد. زیرا کوچک‌ترین زاویه‌ای که بتوان برای این جفت‌وجور کردن‌ها انتخاب کرد، زاویه‌ی ۶۰ درجه ($= \frac{۲}{۳}$ قائمه) است که به مثلث متساوی‌الاضلاع تعلق دارد. چون مجموع زوایای حول یک نقطه، مساوی چهار قائمه یا ۳۶۰ درجه است، لذا ملاحظه می‌شود که بیش از شش مثلث متساوی‌الاضلاع نمی‌توان حول نقطه‌ای چید. بدیهی است، نمی‌توان کمتر از سه چندضلعی منتظم محدب حول نقطه جای‌گزین کرد. زیرا می‌دانیم، مجموع زوایای داخلی یک n ضلعی محدب، مساوی $(۲n - ۴)$ قائمه است. درصورتی‌که n ضلعی منتظم باشد، هریک از زوایای رأس $\frac{۱۸۰(n-۲)}{n}$ درجه خواهد بود و برای شش ضلعی منتظم، این مقدار ۱۲۰ درجه است. پس طبعاً پوشاندن صفحه حول هر نقطه با چندضلعی‌های منتظم باید: سه به سه، چهار به چهار، پنج به پنج و یا شش به شش صورت پذیرد.

مجموع زوایای مرکزی

اگر $O_۱$ و $O_۲$ و $O_۳$ و... مراکز چندضلعی‌های منتظم جمع شده حول نقطه‌ی M باشند (شکل ۱)؛ اضلاع MA، MB و MC و... مشترک بین هر دو چندضلعی مجاور، لزوماً مساوی‌اند.

مراکز این چندضلعی‌ها یعنی



(شکل ۱)

$O_۱$ و $O_۲$ و $O_۳$ و... را به‌ترتیب متوالی به‌هم وصل می‌کنیم. چندضلعی $O_۱O_۲O_۳\cdots$ به‌دست می‌آید که زوایای رأس‌های آن، دقیقاً زوایای مرکزی چندضلعی‌های منتظم جفت‌وجور شده‌ها هستند.

برحسب آن‌که این جفت‌وجور کردن‌ها سه‌به‌سه، چهاربه‌چهار، پنج‌به‌پنج یا شش‌به‌شش صورت گرفته باشد، چندضلعی $O_۱O_۲O_۳\cdots$، مثلث، چهارضلعی، پنج‌ضلعی و یا یک شش‌ضلعی خواهد شد. و مجموع زوایای مرکزی $O_۱$ و $O_۲$ و $O_۳$ و... به حسب حالت ۲، ۴، ۶، و یا ۸ قائمه می‌شود.

بند ۲. جفت‌وجور کردن‌ها با چندضلعی‌های منتظم هم‌نوع

اگر n تعداد اضلاع یکی از این چندضلعی‌ها باشد، بدیهی است زاویه‌ی مرکزی ارزش $\frac{۴}{n}$ قائمه را دارد. پس از آن‌چه در بند ۱ گفته شد، خواهیم داشت:

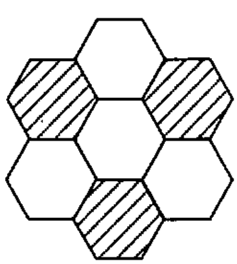
برای پوشش سه‌تایی $۲ = ۳ \times \frac{۴}{n}$ از آن‌جا $n = ۶$

برای پوشش چهارتایی $۴ = ۴ \times \frac{۴}{n}$ از آن‌جا $n = ۴$

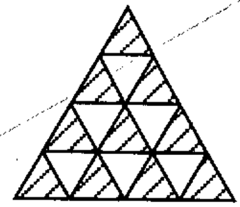
برای پوشش شش‌تایی $۸ = ۶ \times \frac{۴}{n}$ از آن‌جا $n = ۳$

کاربرد این رابطه برای وقتی که پوشش پنج‌تایی باشد، مقداری به‌صورت کسر برای n نتیجه می‌دهد. لذا در این حالت جوابی وجود ندارد.

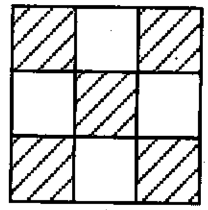
به‌طور خلاصه ممکن است، فرش کردن زمین یا پوشش صفحه با چندضلعی‌های منتظم هم‌نوع، فقط با شش مثلث متساوی‌الاضلاع، چهار مربع و یا سه شش‌ضلعی منتظم صورت گیرد. اشکال ۲ و ۳ و ۴ را ببینید.



(شکل ۲)



(شکل۳)



(شکل۴)

بند ۳. جفت‌وجور کردن‌ها با انواع متفاوت چندضلعی منتظم

فرض می‌کنیم n_1 و n_2 و n_3 و... ($n_1 \le n_2 \le n_3 \le \cdots$) تعداد اضلاع هر یک از چندضلعی‌های مجموعه باشند.

اولاً: جفت‌وجور کردن‌ها سه به سه است. آن‌گاه زوایای O_1 و O_2 و O_3 (زوایای مرکزی) **شکل ۱**، نظیر هر چندضلعی، به ترتیب ارزش $\frac{4}{n_1}$ و $\frac{4}{n_2}$ و $\frac{4}{n_3}$ قائمه را دارند و باید داشته باشیم (طبق بند ۱):

$$\frac{4}{n_1}+\frac{4}{n_2}+\frac{4}{n_3}=2 \quad \text{یا} \quad \frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}+\frac{1}{n_3}=\frac{1}{2} \qquad (1)$$

با توجه به این‌که $3 \le n_1 \le 6$ است (بند ۱) متوالیاً n_1 را مساوی ۳ و ۴ و ۵ و ۶ انتخاب می‌کنیم. جواب‌های زیر را برای سایر nها خواهیم داشت:

الف) ۳ و ۷ و ۴۲
ب) ۳ و ۸ و ۲۴
پ) ۳ و ۹ و ۱۸
ت) ۳ و ۱۰ و ۱۵
ث) ۳ و ۱۲ و ۱۲
ج) ۴ و ۵ و ۲۰
چ) ۴ و ۶ و ۱۲
ح) ۴ و ۸ و ۸
خ) ۵ و ۵ و ۱۰
د) ۶ و ۶ و ۶

ثانیاً: پوشش یا جفت‌وجور کردن‌ها چهار به چهار است. این‌جا نیز داریم (با توجه به بند ۱):

$$\frac{4}{n_1}+\frac{4}{n_2}+\frac{4}{n_3}+\frac{4}{n_4}=4 \quad \text{یا} \quad \frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}+\frac{1}{n_3}+\frac{1}{n_4}=1 \qquad (2)$$

که فقط جواب‌های زیر را خواهیم داشت:

ذ) ۳ و ۳ و ۴ و ۱۲
ر) ۳ و ۳ و ۶ و ۶
ز) ۳ و ۴ و ۴ و ۶
ژ) ۴ و ۴ و ۴ و ۴

ثالثاً: پوشش پنج به پنج است. طبق بند ۱ باید داشته باشیم:

$$\frac{4}{n_1}+\frac{4}{n_2}+\frac{4}{n_3}+\frac{4}{n_4}+\frac{4}{n_5}=6 \quad \text{یا} \quad \frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}+\frac{1}{n_3}+\frac{1}{n_4}+\frac{1}{n_5}=\frac{3}{2} \qquad (3)$$

این رابطه فقط در ازای مقادیر زیر برقرار است:

س) ۳ و ۳ و ۳ و ۳ و ۶
ش) ۳ و ۳ و ۳ و ۴ و ۴

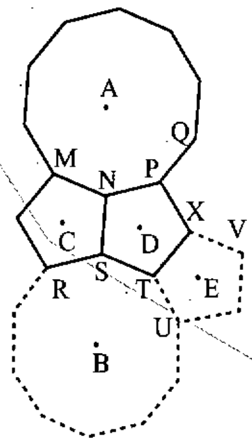
رابعاً: پوشش حول نقطه‌ی شش‌تایی صورت می‌گیرد (بند ۱). خواهیم داشت:

$$\sum_{i=1}^{6}\frac{4}{n_i}=8 \quad \text{و یا} \quad \sum\frac{1}{n_i}=2 \quad (4) \quad i=1,2,\dots,6$$

از این رابطه نیز فقط جواب زیر را داریم:

ص) ۳ و ۳ و ۳ و ۳ و ۳ و ۳

جواب‌های قابل قبول مسئله: جواب‌های «د، ژ، ص» از نوع چندضلعی‌های منتظم هم‌نوع هستند و در بند ۲ در نظر گرفته شده‌اند. ولی باید جواب‌های «الف، ب، پ، ت، ج، خ» را که در مورد این مسئله، یعنی پوشش دادن صفحه قابل قبول نیستند، کنار بگذاریم. چه برای مثال، اگر جواب «خ» یعنی ۱۰ و ۵ و ۵ را در نظر بگیریم، می‌توان حول نقطه‌ی N (**شکل ۵**)

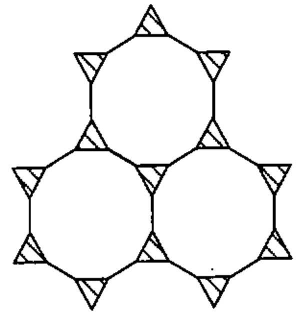


(شکل۵)

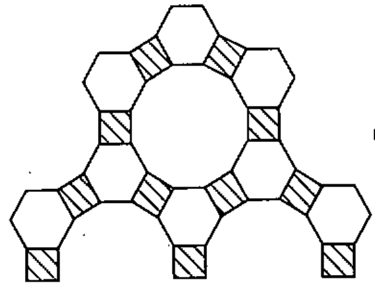
یک ده‌ضلعی منتظم A و دو پنج‌ضلعی منتظم C و D را قرار داد، ولی این ترتیب چیدن نمی‌تواند برای پوشش صفحه تداوم داشته باشد. زیرا زاویه‌ی $R\hat{S}T$ مساوی $360^\circ - 2\times108^\circ = 144^\circ$ است و فقط می‌توان یک ده‌ضلعی B در S قرار داد. درنتیجه، چون $U\hat{T}X = 108$ درجه است، نمی‌توان در نقطه‌ی T جز یک پنج‌ضلعی منتظم E قرار داد. بعد از این، دیگر ممکن نیست پوشش را ادامه داد، چه زاویه‌ی $V\hat{X}P = 144$ درجه می‌شود. اگر در نقطه‌ی X یک پنج‌ضلعی قرار دهیم، چون زاویه‌ی $X\hat{P}Q = 108$ درجه است، این پنج‌ضلعی قسمتی از ده‌ضلعی A را می‌پوشاند و روی آن قرار می‌گیرد (شکل ۵). به طریق مشابه ثابت می‌شود، سایر جواب‌های اشاره‌شده‌ی اخیر قابل قبول نیستند.

خلاصه فقط جواب‌های زیر باقی می‌مانند:

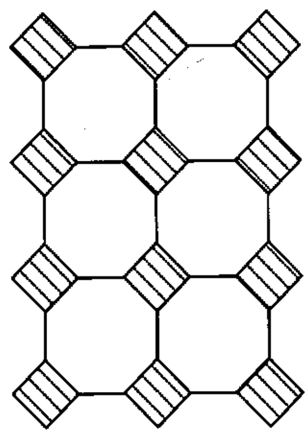
الف) ۳ و ۱۲ و ۱۲ (شکل ۶)
ب) ۴ و ۶ و ۱۲ (**شکل ۷**)
پ) ۴ و ۸ و ۸ (شکل ۸)
ت) ۳ و ۳ و ۶ و ۶ (**شکل ۹**)
ث) ۳ و ۴ و ۴ و ۶ (شکل ۱۰)
ج) ۳ و ۳ و ۳ و ۴ و ۴ (شکل ۱۱)
چ) ۳ و ۳ و ۴ و ۱۲ (شکل ۱۲)
ح) ۳ و ۳ و ۳ و ۳ و ۶ (شکل ۱۳)



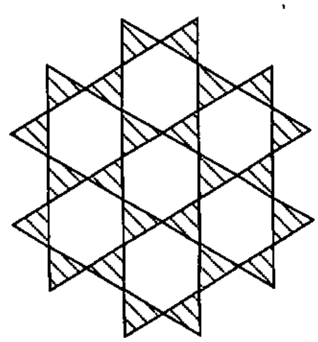
(الف)
(شکل ۶)



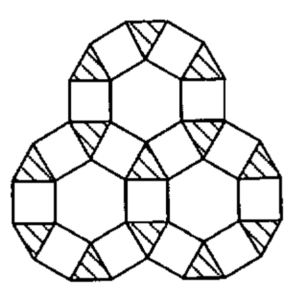
(ب)
(شکل ۷)



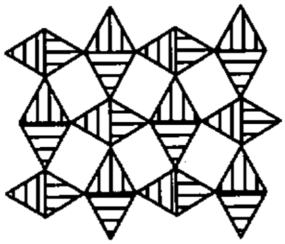
(پ)
(شکل ۸)



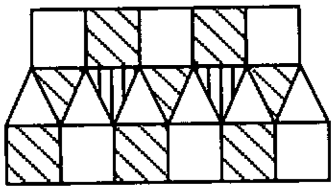
(ت)
(شکل ۹)



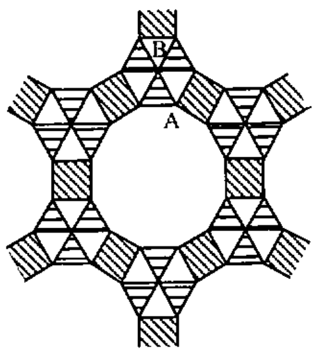
(ث)
(شکل ۱۰)



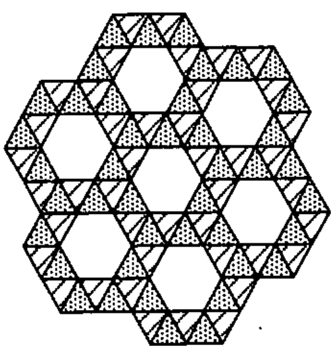
(ج)
(شکل ۱-۱۱)



(ج)
(شکل ۲-۱۱)



(چ)
(شکل ۱۲)



(ح)
(شکل ۱۳)

پوشش‌های متساوی الساقین

بین این هشت نوع پوشش، فقط شش نوع اول متساوی‌الساقین‌اند. برای بررسی شرط انطباق جمعی معکوس هم می‌توان از یک ترانسپاز[۶] ان که روی آن یکی از این پوشش‌ها طراحی شده‌اند، استفاده کرد. بعد از انطباق معکوس یک چندضلعی طرح اولیه بر یک چندضلعی دلخواه ترانسپاران، ملاحظه خواهد شد که بادوران یا تغییر مکان مناسب ترانسپاران در تمام انطباق‌های ممکنِ دو چندضلعی مساوی، دست‌کم حالتی پیدا خواهد شد که انطباقِ کامل برای همه‌ی مجموعه‌های نامتناهی طراحی شده، فراهم آید.

پوشش‌های غیر متساوی الساقین

جواب‌های «چ» و «ح» با توجه به شرح و تفصیل گذشته، متساوی‌الساقین نیستند. برای مجموعه‌ی «ح» (شکل ۱۳) با استفاده از روش ترانسپاران مذکور بالا، تشخیص ممکن است. در مورد پوشش «چ» (شکل ۱۲) یک بررسی ساده در شکل نشان می‌دهد،

زوایای حول رأس‌های A و B چندضلعی‌ها که به منظور پوشش به کار رفته‌اند، یکسان نیستند؛ چون حول رأس A دو مثلث متساوی‌الاضلاع، یک مربع و یک دوازده‌ضلعی منتظم قرار گرفته‌اند و حال آن‌که حول نقطه‌ی B شش مثلث متساوی‌الاضلاع. درحقیقت مجموعه‌ی «ج» طرح دیگری از مجموعه‌ی «ب» (شکل ۷) است.

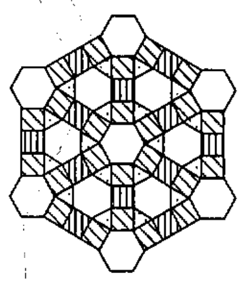
ولی می‌توان تعداد بسیار زیادی پوشش‌های غیر متساوی‌الساقین به‌دست آورد:

الف) خواه به‌وسیله‌ی چیدن عناصر مجموعه‌های متساوی‌الساقین به‌طریق دیگر؛

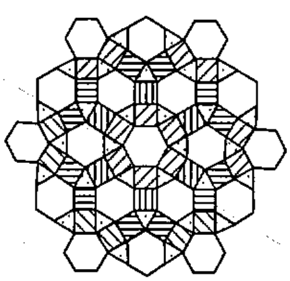
ب) خواه به‌وسیله‌ی ترکیب مجموعه‌ها از انواع متفاوت چندضلعی.

برای مثال **اولاً**: اشکال ۱۴ و ۱۵ دو پوشش غیرمتساوی‌الساقین را نشان می‌دهند که می‌توان با طور دیگر قرار دادن عناصر مجموعه‌ی «ث» آن‌ها را به‌دست آورد. هر رأس شامل یک مثلث متساوی‌الاضلاع، دو مربع و یک شش‌ضلعی است. ولی ترتیب قرار گرفتن آن‌ها در همه‌ی رأس‌ها یک‌جور نیست و استقرار مجموعه بر خودش، با روشی که پیشتر اشاره شد، غیر ممکن است.

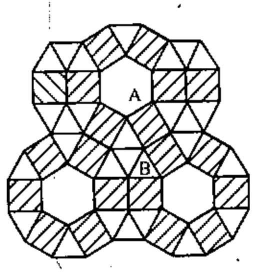
ثانیاً: اشکال ۱۷ و ۱۶ نیز نمونه‌های دیگری از دو ترکیب نوع مجموعه‌های (۶ و ۴ و ۴ و ۳) «ث» و (۴ و ۴ و ۳ و ۳ و ۳) «ج» را نشان می‌دهند. در رأس‌های A عناصر مجموعه‌ی اولیه قرار داده شده است و در رأس‌های B عناصر نوع دوم.



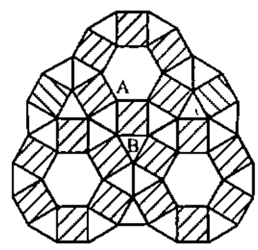
(شکل ۱۴)



(شکل ۱۵)



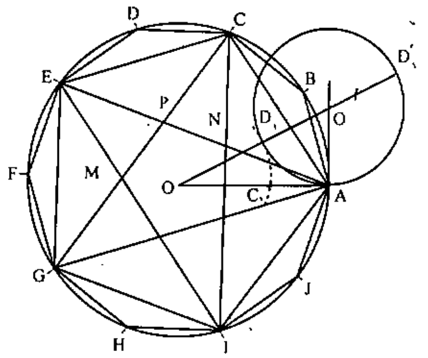
(شکل ۱۶)



(شکل ۱۷)

تقسیم طلایی

اگر پاره‌خطی را به دو جزء نامساوی چنان تقسیم کنیم که مربع جزء بزرگ‌تر، مساوی جزء کوچک‌تر در طول تمام پاره‌خط باشد، می‌گویند این پاره‌خط بر نسبت ذات وسط و طرفین تقسیم شده است. همان‌طور که اشاره شد، پیشینیان آن را تقسیم طلایی می‌گفتند.



در دایره‌ی شکل بالا به مرکز O، این تقسیم برای OA=R صورت گرفته است. به این ترتیب که در A عمودی به اندازه‌ی $AO'=\frac{OA}{۲}$ بر OA اخراج می‌کنیم و دایره‌ای به مرکز O′ و به شعاع O′A می‌کشیم. خط راست OO′ این دایره را در $D_۱$ و $D'_۱$ قطع می‌کنند. داریم: $\overline{OA}^۲ = OD_۱.OD'_۱$ (۱) اما $OD'_۱ = OD_۱ + D_۱D'_۱ = OD_۱ + OA$ اگر $OC_۱$ را مساوی $OD_۱$ روی OA مشخص کنیم، از رابطه‌ی (۱) نتیجه می‌شود:

$$\overline{OC_۱}^۲ = OA.C_۱A$$

(یا $\frac{OC_۱}{OA} = \frac{C_۱A}{OC_۱}$) که همان تقسیم طلایی است. اما با تبدیلات مناسب در رابطه‌ی (۱)، با توجه به تساوی‌های ذکر شده‌ی بعد، مقدار $OD_۱ = OC_۱ = \frac{R}{۲}(\sqrt{۵}-۱)$ را خواهید یافت (محاسبه کنید). پس $OC_۱ = C_۱$. یعنی ضلع ده‌ضلعی منتظم محاط در دایره‌ی O. بقیه‌ی رسم شکل به سهولت میسر است. در شکل، یک ده‌ضلعی منتظم محدب، یک پنج‌ضلعی منتظم محدب و یک پنج‌ضلعی ستاره‌ای رسم شده‌اند. حال شما دو سؤال زیر را بررسی کنید:

۱. اضلاع پنج‌ضلعی منتظم ستاره‌ای یکدیگر را بر نسبت طلایی تقسیم می‌کنند. ۲. نسبت ضلع پنج‌ضلعی محدب منتظم به قطرش، نسبت طلایی است.

زیرنویس

1. Proclus
2. Lucien
3. Aristophane
4. Kepler
5. M. Badoureau

۶. Transparent نوعی پرده‌ی نقاشی است که پشت به روشنایی قرار می‌دهند تا تصاویر آن معلوم شود. نور گذر یا طلق شفاف.

منبع

Curiosités Géometriques/ E. Fourrey/ LIBRAIRIE VUIBERT-Paris

استدلال های ریاضی

(قسمت ۳)

● میرشهرام صدر
mir_sadr@yahoo.com

برای دانش‌آموزان سال سوم

اشاره

در شماره‌های قبل راجع به درک شهودی، استدلال‌های استقرایی و قیاسی و محدودیت‌های آن‌ها، استدلال استنتاجی و مثال نقض صحبت کردیم. اینک در ادامه‌ی آن، استدلال‌های دیگر ریاضی را مطرح می‌کنیم.

قضیه‌ی شرطی

هر قضیه که به صورت ترکیب شرطی $p \Rightarrow q$ (اگر p آن‌گاه q) باشد و با توجه به درستی p بتوان درستی q را نتیجه گرفت، قضیه‌ای شرطی است. در قضیه‌ی شرطی $p \Rightarrow q$ ، p را فرض و q را حکم قضیه می‌نامیم.

مثال: ثابت کنید اگر $x > ۲$ ، آن‌گاه $۲x - ۳ > ۱$.

حل:

فرض: $x > ۲$

حکم: $۲x - ۳ > ۱$

برای اثبات این مطلب، باید با توجه به درستی فرض، به درستی حکم رسید.

$$x > ۲ \Rightarrow ۲x > ۴ \Rightarrow ۲x - ۳ > ۴ - ۳ \Rightarrow ۲x - ۳ > ۱$$

مثال: ثابت کنید اگر $x > ۱$ ، آن‌گاه $۴ - x^۲ < ۳$.

حل:

فرض: $x > ۱$

حکم: $۴ - x^۲ < ۳$

$$x > ۱ \Rightarrow x^۲ > ۱ \Rightarrow -x^۲ < -۱ \Rightarrow ۴ - x^۲ < ۴ - ۱ \Rightarrow ۴ - x^۲ < ۳$$

اگر در مثال قبل، جای فرض و حکم را عوض کنیم، گزاره‌ی

شرطی «اگر $4 - x^2 < 3$ آن‌گاه $x > 1$» به دست می‌آید. اکنون اگر با فرض درستی $4 - x^2 < 3$ بتوان به درستی $x > 1$ رسید، در این صورت، عکس قضیه‌ی شرطی، یک قضیه‌ی شرطی است. در غیر این صورت، عکس قضیه‌ی شرطی، یک قضیه‌ی شرطی نیست.

$$4 - x^2 < 3 \Rightarrow 4 - x^2 - 4 < 3 - 4 \Rightarrow -x^2 < -1 \Rightarrow x^2 > 1$$

$$\Rightarrow x > 1 \text{ یا } x < -1$$

همان‌طور که ملاحظه می‌کنید، با فرض درستی $4 - x^2 < 3$، به $(x < -1)$ یا $(x > 1)$ رسیدیم و نتوانستیم فقط درستی $(x > 1)$ را ثابت کنیم. درنتیجه، عکس این قضیه‌ی شرطی برقرار نیست.

عکس قضیه‌ی شرطی

هرگاه $p \Rightarrow q$ یک قضیه‌ی شرطی باشد، چنان‌چه در این قضیه جای فرض و حکم را با هم عوض کنیم، گزاره‌ی $q \Rightarrow p$ به دست می‌آید. حال در صورتی که $q \Rightarrow p$ یک قضیه‌ی شرطی باشد، به آن قضیه‌ی شرطی عکس $p \Rightarrow q$ گوییم.

مثال: قضیه‌ی «اگر $x > -5$، آن‌گاه $-4x - 18 < 2$» را درنظر بگیرید. آیا عکس آن، یک قضیه‌ی شرطی است؟

حل: ابتدا عکس قضیه‌ی شرطی را می‌نویسیم:

«اگر $-4x - 18 < 2$ آن‌گاه $x > -5$»

$$-4x - 18 < 2 \Rightarrow -4x - 18 + 18 < 2 + 18$$

$$\Rightarrow -4x < 20 \Rightarrow \frac{-4x}{-4} > \frac{20}{-4} \Rightarrow x > -5$$

درنتیجه، عکس این قضیه‌ی شرطی برقرار است.

قضیه‌ی دوشرطی

اگر $p \Rightarrow q$ و $q \Rightarrow p$ هر دو قضیه‌ی شرطی باشند، در این صورت می‌گوییم p با q یک قضیه‌ی دوشرطی را تشکیل می‌دهند و می‌نویسیم $p \Leftrightarrow q$ و می‌خوانیم: «p شرط لازم و کافی برای q است» یا «شرط لازم و کافی برای p آن است که q» یا «p اگر و تنها اگر q».

مثال: در این‌جا، دو قضیه‌ی دوشرطی آمده است:

۱. شرط لازم و کافی برای این‌که $x > -5$ آن است که $-4x - 18 < 2$.

۲. دو زاویه‌ی مجاور به قاعده‌ی یک مثلث با هم برابرند، اگر و تنها اگر مثلث متساوی‌الساقین باشد.

اثبات بازگشتی

گاهی اوقات برای اثبات بعضی از مسئله‌ها، باید از یک فرض یا یک رابطه‌ی کاملاً بدیهی شروع کنیم. اما در برخورد اول با مسئله، ممکن است این رابطه‌ی بدیهی به ذهنمان نیاید. بنابراین با استفاده از درستی حکم و انجام اعمال ریاضی روی آن، سعی می‌کنیم به یک رابطه‌ی بدیهی برسیم. در چنین حالتی، برای تکمیل اثبات، باید نشان دهیم که تمام مراحل انجام شده بازگشت‌پذیر هستند. در غیر این صورت، درستی اثبات تأیید نمی‌شود.

مثال: با استفاده از اثبات بازگشتی، حکم‌های زیر را ثابت کنید:

الف) برای دو عدد حقیقی a و b، ثابت کنید:

$$a^2 + b^2 + 1 \geq ab + b + a$$

ب) برای عددهای حقیقی x، y و z ثابت کنید:

$$4x^2 + y^2 + 9z^2 + 27 \geq 4x - 2y + 30z$$

ج) برای عددهای حقیقی x، y و z ثابت کنید:

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + xz$$

د) برای عددهای حقیقی و مثبت a و b ثابت کنید:

$$a^3 + b^3 \geq ab(a + b)$$

حل:

الف) $a^2 + b^2 + 1 \geq ab + b + a$

دو طرف را در ۲ ضرب می‌کنیم:

$$2a^2 + 2b^2 + 2 \geq 2ab + 2b + 2a$$

$$\Leftrightarrow a^2 + a^2 + b^2 + b^2 + 1 + 1 - 2ab - 2b - 2a \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (a^2 - 2ab + b^2) + (b^2 - 2b + 1) + (a^2 - 2a + 1) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (a - b)^2 + (b - 1)^2 + (a - 1)^2 \geq 0$$

چون نابرابری آخر همواره درست است، بنابراین آن را یک فرض بدیهی درنظر می‌گیریم و با بازگشت مراحل انجام‌شده، می‌توانیم به درستی حکم برسیم.

ب) $4x^2 + y^2 + 9z^2 + 27 \geq 4x - 2y + 30z$

$$\Leftrightarrow 4x^2 + y^2 + 9z^2 + 27 - 4x + 2y - 30z \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (4x^2 - 4x + 1) + (y^2 + 2y + 1) + (9z^2 - 30z + 25) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (2x-1)^2+(y+1)^2+(3z-5)^2 \geq 0$$

چون نابرابری آخر همواره درست است، پس با برگشت روابط، می‌توان به درستی حکم رسید.

ج)
$$x^2+y^2+z^2 \geq xy+yz+xz$$
$$\Leftrightarrow 2(x^2+y^2+z^2) \geq 2(xy+yz+xz)$$
$$\Leftrightarrow x^2+x^2+y^2+y^2+z^2+z^2-2xy-2yz-2xz \geq 0$$
$$\Leftrightarrow (x^2+y^2-2xy)+(y^2+z^2-2yz)+(x^2+z^2-2xz) \geq 0$$
$$\Leftrightarrow (x-y)^2+(y-z)^2+(x-z)^2 \geq 0$$

چون نابرابری آخر همواره درست است، پس با بازگشت روابط، می‌توان به درستی حکم رسید.

د)
$$a^3+b^3 \geq ab(a+b) \Leftrightarrow (a+b)(a^2+b^2-ab) \geq ab(a+b)$$
$$\Leftrightarrow a^2+b^2-ab \geq ab \qquad (\text{چون } a+b>0)$$
$$\Leftrightarrow a^2+b^2-2ab \geq 0 \Leftrightarrow (a-b)^2 \geq 0$$

چون نابرابری آخر همواره درست است، پس با برگشت روابط، می‌توان به درستی حکم رسید.

برهان خُلف

برای اثبات درستی یک حکم با روش برهان خلف، ثابت می‌کنیم که خلافِ حکم نادرست است. برای این منظور، مراحل زیر را به ترتیب انجام می‌دهیم:

۱. فرض می‌کنیم که حکم مسئله درست نباشد (فرض خُلف).

۲. نشان می‌دهیم که فرض خلف نتیجه‌ای به دست می‌دهد که خلاف فرض مسئله یا خلاف یکی از اصول یا قضیه‌هایی است که قبلاً پذیرفته‌ایم.

۳. در این مرحله به تناقض می‌رسیم. بنابراین فرض خلف، باطل و حکم مسئله برقرار است.

مثال: نشان دهید با فرض صحیح بودن n، اگر n^3 مضرب ۳ باشد، آن‌گاه n نیز مضرب ۳ است.

حل: برهان خلف

فرض می‌کنیم n مضرب ۳ نباشد (فرض خلف)، یعنی $n \neq 3k$ که $k \in Z$. بنابراین داریم:

$n = 3k+1$ یا $n = 3k+2$; $(k \in Z)$

در حالتی که $n = 3k+1$، خواهیم داشت:

$$n^3 = (3k+1)^3 = 27k^3+27k^2+9k+1$$
$$= 3\underbrace{(9k^3+9k^2+3k)}_{k' \in Z}+1 = 3k'+1$$

در این حالت ملاحظه می‌کنیم که n^3 مضرب ۳ نیست و این با فرض مسئله متناقض است.

در حالتی که $n = 3k+2$، خواهیم داشت:

$$n^3 = (3k+2)^3 = 27k^3+54k^2+36k+8$$
$$= 3\underbrace{(9k^3+18k^2+12k+2)}_{k'' \in Z}+2 = 3k''+2$$

در این حالت نیز ملاحظه می‌کنیم که n^3 مضرب ۳ نیست و این با فرض مسئله متناقض است.

درنتیجه، در هر دو حالت به تناقض رسیدیم. پس فرض خلف، باطل و حکم برقرار است.

مثال: اگر n عددی صحیح و n^2 مضرب ۵ باشد، نشان دهید که n نیز مضربی از ۵ است.

حل: برهان خلف

فرض کنیم n عدد صحیح و مضرب ۵ نباشد (فرض خلف)، بنابراین $n \neq 5k$ که $k \in Z$ و داریم:

$n = 5k+1$ یا $n = 5k+2$ یا $n = 5k+3$ یا $n = 5k+4$; $(k \in Z)$ یعنی $n = 5k+i$ به‌طوری که:

$k \in Z, i \in \{1,2,3,4\}$

اگر در هر یک از حالت‌های بالا مقدار n^2 را حساب کنیم، ملاحظه خواهیم کرد که n^2 مضرب ۵ نیست و این با فرض مسئله تناقض دارد. درنتیجه، در هر حالت به تناقض می‌رسیم. پس فرض خلف، باطل و حکم برقرار است.

مثال: ثابت کنید که $\sqrt[3]{3}$ گنگ است.

حل: برهان خلف

فرض کنیم $\sqrt[3]{3}$ گنگ نباشد، (فرض خلف) پس $\sqrt[3]{3}$ گویاست. یعنی:

$$\sqrt[3]{3} = \frac{p}{q}; p,q \in Z, q \neq 0, (p,q) = 1$$

$$\sqrt[3]{3}=\frac{p}{q}\Rightarrow(\sqrt[3]{3})^3=(\frac{p}{q})^3\Rightarrow p^3=3q^3$$

از برابری آخر نتیجه می‌گیریم که p^3 مضرب ۳ است، پس p نیز مضرب ۳ است، یعنی $p=3k$ که $k\in Z$:

$$\begin{cases}p^3=3q^3\\p=3k\end{cases}\Rightarrow(3k)^3=3q^3\Rightarrow q^3=9k^3=3\underbrace{(3k^3)}_{k'\in Z}=3k'$$

از این برابری نتیجه می‌گیریم که q^3 مضرب ۳ است، پس q مضرب ۳ است، یعنی $q=3k_1$ که $k_1\in Z$. بنابراین p و q هر دو مضرب ۳ هستند و این با فرض $(p,q)=1$ در تناقض است. پس فرض خلف، باطل و حکم برقرار است.

مثال: ثابت کنید که $\sqrt{5}-\sqrt{3}$ عددی گنگ است.

حل: برهان خلف

فرض کنیم که $\sqrt{5}-\sqrt{3}$ گنگ نباشد (فرض خلف). پس $\sqrt{3}-\sqrt{5}$ عددی گویاست، یعنی:

$$\sqrt{3}-\sqrt{5}=a\ ,\ \ a\in Q$$

$$\sqrt{3}=a+\sqrt{5}\Rightarrow(\sqrt{3})^2=(a+\sqrt{5})^2\Rightarrow 3=a^2+5+2a\sqrt{5}$$

$$\Rightarrow\sqrt{5}=\frac{-a^2-2}{2a}\in Q$$

درنتیجه $\sqrt{5}\in Q$ و این با گنگ بودن عدد $\sqrt{5}$ متناقض است. بنابراین به تناقض رسیدیم. پس فرض خلف، باطل و حکم برقرار است.

مثال: اگر ۲، ۳، ۵ و... و p تمام اعداد اول کوچک‌تر یا مساوی p باشند، ثابت کنید که $N=(2\times3\times5\times...\times p)+1$ یا اول است یا عامل اول بزرگ‌تر از p دارد.

قبل از حل این مثال لازم است که نکته‌های زیر را مطرح کنیم:

۱. هر عدد طبیعی $n>1$ یک عامل اول دارد، یا به عبارت دیگر، بر یک عدد اول بخش‌پذیر است.

۲. هرگاه a و $b\neq 0$ دو عدد صحیح باشند، به‌طوری که a بر b بخش‌پذیر باشد، در این صورت یک عدد صحیح مانند q یافت می‌شود؛ به گونه‌ای که $a=b\times q$.

۳. هرگاه دو عدد صحیح a و b بر عدد صحیح c بخش‌پذیر باشند، در این صورت $a\pm b$ بر c بخش‌پذیر است.

حل مثال با برهان خلف

فرض کنیم $N=(2\times3\times5\times...\times p)+1$ اول نباشد و عامل اول بزرگ‌تر از p نداشته باشد (فرض خلف). در این صورت عدد N که بزرگ‌تر از یک و طبیعی است، عامل اولی مانند p' دارد (نکته‌ی ۱). از طرف دیگر، عدد N عامل اول بزرگ‌تر از p ندارد. بنابراین $p'\in\{2,3,5,...,p\}$ و N بر p' بخش‌پذیر است (نکته‌ی ۲). یعنی: $N=p'\times q(q\in Z)$ یا

$$(2\times3\times5\times...\times p)+1=p'\times q \qquad (1)$$

چون $p'\in\{2,3,5,...,p\}$ ، بنابراین $(2\times3\times5\times...\times p)$ بر p' بخش‌پذیر است. یعنی:

$$(2\times3\times5\times...\times p)=p'\times q'\quad(q'\in Z) \qquad (2)$$

با توجه به رابطه‌های ۱ و ۲ و نکته‌ی ۳ داریم:

$$\begin{cases}(2\times3\times5\times...\times p)+1=p'\times q\\(2\times3\times5\times...\times p)=p'\times q'\end{cases}$$
$$\overline{(2\times3\times5\times...\times p)+1-(2\times3\times5\times...\times p)=p'\times\underbrace{(q-q')}_{q_1\in Z}}$$

$$\Rightarrow 1=p'\times q_1$$

از رابطه‌ی اخیر می‌فهمیم که عدد ۱ بر عدد اول p' بخش‌پذیر است و این غیرممکن است (تناقض). پس فرض خلف، باطل و حکم مسئله برقرار است.

برهان مستقیم

در قضیه‌ای به صورت $p\Rightarrow q$ ، به برهانی که با استفاده از درستی p نشان می‌دهد که q درست است، برهان مستقیم گوییم. استدلال استنتاجی و اثبات قضیه‌های شرطی، دو نوع از برهان‌های مستقیم‌اند.

برهان غیرمستقیم

به استدلال‌هایی مانند برهان خلف یا اثبات بازگشتی که در آن‌ها شیوه‌ی برهان مستقیم نیست، یعنی برهانی که حکم را به‌طور مستقیم از فرض نتیجه نگیریم، برهان غیرمستقیم گوییم.

با راهیان

مجموع ها و

○ غلامرضا یاسی پور



این بخش در مورد «مجموع‌ها و حاصل‌ضرب‌های ادغامی»[1] در مثلثات است. مسائل مربوط به «اصل ادغامی در جبر»، موضوع یکی از بخش‌های بعدی است.

در مسائل شامل مجموع‌ها، شیوه‌ی کار، استفاده از اتحادهای مثلثاتی برای نوشتن مجموع به صورت

$$\sum_{k=1}^{n}[F(k+1)-F(k)]$$

و سپس حذف جمله‌ها برای به‌دست آوردن $F(n+1)-F(1)$ است. به‌طور مشابه، برای حاصل‌ضرب‌ها:

$$\prod_{k=1}^{n}\frac{F(k+1)}{F(k)}=\frac{F(n+1)}{F(1)}$$

در این مورد، یکی از مثال‌ها، محاسبه‌ی $\sum_{k=1}^{n}\cos kx$ است. با فرض $x \neq 2m\pi$ و صحیح بودن m، آن را در $2\sin x/2$ ضرب می‌کنیم. از فرمول ضرب به جمع حاصل‌ضرب یک سینوس و یک کسینوس، به‌دست می‌آوریم:

$$2\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{x}{2}\cos kx=\sum_{k=1}^{n}(\sin(k+\frac{1}{2})x-\sin(k-\frac{1}{2})x)$$

$$=\sin(n+\frac{1}{2})x-\sin\frac{1}{2}x$$

(۹)

حاصل ضرب‌های ادغامی در مثلثات

به این ترتیب، مجموع اولیه عبارت است از:

$$(\sin(n+\frac{1}{2})x)/(2\sin(x/2))-\frac{1}{2}$$

البته زمانی که $x=2m\pi$ ، m صحیح، پاسخ n است.

برای مثال دوم، از فرمول مربوط به تابع تانژانت استفاده می‌کنیم.

مجموع:

$$\sum_{k=0}^{n} tg^{-1}\frac{1}{k^2+k+1}$$

را محاسبه کنید که در آن، tg^{-1} به جای تابع arctg قرار دارد.

در حل این مثال، از فرمول تفریق مربوط به تانژانت، یعنی

$$tg(a-b)=\frac{tga-tgb}{1+tga\,tgb}$$

استفاده می‌کنیم که فرمول مربوط به arctg، یعنی فرمول:

$$tg^{-1}u-tg^{-1}v=tg^{-1}\frac{u-v}{1+uv}$$

را به دست می‌دهد.

برای سادگی کار، قرار می‌دهیم $a_k=tg^{-1}x$. در این صورت:

$$\frac{1}{k^2+k+1}=\frac{k+1-k}{1+k(k+1)}=tg(a_{k+1}-a_k)$$

درنتیجه، مجموع مورد محاسبه برابر است با:

$$\sum_{k=0}^{n} tg^{-1}(tg(a_{k+1}-a_k))=\sum_{k=0}^{n}(a_{k+1}-a_k)=a_{n+1}-a_0$$
$$=tg^{-1}(n+1)$$

در حل مسائل زیر، از شیوه‌های مشابهی می‌توان استفاده کرد.

۱. ثابت کنید:

$$\frac{\sin x}{\cos x}+\frac{\sin 2x}{\cos^2 x}+\cdots+\frac{\sin nx}{\cos^n x}=\cot g\,x-\frac{\cos(n+1)x}{\sin x\cos^n x}$$

به ازای هر $x\neq k\frac{\pi}{2}$ ، k صحیح، برقرار است.

۲. ثابت کنید:

$$\frac{1}{\cos 0^\circ\cos 1^\circ}+\frac{1}{\cos 1^\circ\cos 2^\circ}+\cdots+\frac{1}{\cos 88^\circ\cos 89^\circ}=\frac{\cos 1^\circ}{\sin^2 1^\circ}$$

۳. فرض می‌کنیم n عددی صحیح و مثبت و a عددی حقیقی و چنان باشد که a/π عددی گنگ یا اصم است. مجموع زیر را محاسبه کنید.

$$\frac{1}{\cos a-\cos 3a}+\frac{1}{\cos a-\cos 5a}+\cdots+\frac{1}{\cos a-\cos(2n+1)a}$$

۴. اتحاد زیر را اثبات کنید.

$$\sum_{k=1}^{n} tg^{-1}\frac{1}{2k^2}=tg^{-1}\frac{n}{n+1}$$

۵. مجموع زیر را که در آن $a\neq k\pi$ ، k صحیح است، محاسبه کنید.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}tg\,\frac{a}{2^n}$$

۶. ثابت کنید که:

$$\sum_{n=1}^{\infty}3^{n-1}\sin^3\frac{a}{3^n}=\frac{1}{4}(a-\sin a)$$

۷. ثابت کنید میانگین اعداد $n\sin n^\circ$ ، $n=2,4,6,\cdots,180$ برابر $\cot g 1^\circ$ است.

۸. ثابت کنید به ازای هر عدد صحیح و مثبت n و هر عدد حقیقی

($x \neq \frac{k\pi}{2^m}$ ، $m = 0, 1, \cdots, n$ ، k صحیح)،

$$\frac{1}{\sin 2x} + \frac{1}{\sin 4x} + \cdots + \frac{1}{\sin 2^n x} = \cot g\, x - \cot g\, 2^n x$$

۹. محاسبه کنید.

$$\frac{tg 1}{\cos 2} + \frac{tg 2}{\cos 4} + \cdots + \frac{tg 2^n}{\cos 2^{n+1}}$$

۱۰. ثابت کنید به ازای هر عدد حقیقی ناصفر x، داریم:

$$\prod_{n=1}^{\infty} \cos \frac{x}{2^n} = \frac{\sin x}{x}$$

۱۱. ثابت کنید به ازای هر عدد صحیح $n > 1$:

$$\cos \frac{2\pi}{2^n - 1} \cos \frac{4\pi}{2^n - 1} \cdots \cos \frac{2^n \pi}{2^n - 1} = \frac{1}{2^n}$$

۱۲. حاصل‌ضرب زیر را محاسبه کنید.

$$\prod_{k=1}^{n} \left(1 - tg^2 \frac{2^k \pi}{2^n + 1}\right)$$

۱۳. فرض می‌کنیم n عددی صحیح و مثبت، و x عددی حقیقی متفاوت از $2^{k+1}(\frac{\pi}{3} + l\pi)$ ، $k = 1, 2, \cdots, n$ ، و l صحیح باشد. حاصل‌ضرب زیر را محاسبه کنید.

$$\prod_{k=1}^{n} \left(1 - 2\cos \frac{x}{2^k}\right)$$

۱۴. ثابت کنید.

$$\prod_{k=1}^{n} \left(1 + 2\cos \frac{2\pi . 3^k}{3^n + 1}\right) = 1$$

پاسخ‌های مجموع‌ها و حاصل‌ضرب‌های ادغامی در مثلثات

۱. فرمول مجموع کسینوس‌ها مستلزم این است که:

$$\sin kx \ \sin x = \cos kx \ \cos x - \cos(k+1)x$$

که در آن k عدد صحیح و مثبت دل‌خواهی است. با تقسیم دوطرف این برابری به $\sin x \cos^k x$ به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{\sin kx}{\cos^k x} = \frac{\cos kx}{\sin x \cos^{k-1} x} - \frac{\cos(k+1)x}{\sin x \cos^k x}$$

داریم:

$$\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\sin 2x}{\cos^2 x} + \frac{\sin 3x}{\cos^3 x} + \cdots + \frac{\sin nx}{\cos^n x}$$

$$= \frac{\cos x}{\sin x} - \frac{\cos 2x}{\sin x \cos x} + \frac{\cos 2x}{\sin x \cos x} - \frac{\cos 3x}{\sin x \cos^2 x}$$

$$+ \cdots + \frac{\cos nx}{\sin x \cos^{n-1} x} - \frac{\cos(n+1)x}{\sin x \cos^n x}$$

$$= \cot g\, x - \frac{\cos(n+1)x}{\sin x \cos^n x}$$

و اتحاد ثابت می‌شود.

(Ionescu-Tiu, C. , Vidrascu, M., Exercitii si probleme de trigonometrie (Exercises and problems in trigonometry), Ed. Didactică si Pedagogică, Bucharest, 1969)

۲. با ضرب رابطه در $\sin 1°$ به دست می‌آوریم:

$$\frac{\sin 1°}{\cos 0° \cos 1°} + \frac{\sin 1°}{\cos 1° \cos 2°} + \cdots + \frac{\sin 1°}{\cos 88° \cos 89°} = \frac{\cos 1°}{\sin 1°}$$

این رابطه را می‌توان به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\frac{\sin(1°-0°)}{\cos 1° \cos 0°} + \frac{\sin(2°-1°)}{\cos 2° \cos 1°} + \cdots + \frac{\sin(89°-88°)}{\cos 89° \cos 88°} = \cot g 1°$$

از اتحاد

$$\frac{\sin(a-b)}{\cos a \cos b} = tga - tgb$$

نتیجه می‌گیریم که سمت چپ آن برابر است با

$$\sum_{k=1}^{89} \left[tgk° - tg(k-1)°\right] = tg 89° - tg 0° = \cot g 1°$$

و اتحاد به اثبات می‌رسد.

(USAMO, 1992)

۳. مجموع را به صورت زیر تبدیل می‌کنیم:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\cos a - \cos(2k+1)a} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sin ka \sin(k+1)a}$$

مانند مسئله‌ی قبل، مجموع، پس از ضرب در sina، به صورت زیر درمی‌آید:

$$\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin((k+1)a - ka)}{\sin ka \sin(k+1)a} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} (\cot gka - \cot g(k+1)a)$$

$$= \frac{1}{2}(\cot ga - \cot g(n+1)a)$$

بنابراین، پاسخ مسئله عبارت است از:

$$(\cot ga - \cot g(n+1)a) / (2 \sin a)$$

۴. داریم:

$$\sum_{k=1}^{n} tg^{-1} \frac{1}{2k^2} = \sum_{k=1}^{n} tg^{-1} \frac{(2k+1) - (2k-1)}{1 + (2k-1)(2k+1)}$$

با استفاده از فرمول تفریق arctg (مقدمه را ملاحظه کنید)، مجموع اخیر به صورت زیر درمی‌آید:

$$\sum_{k=1}^{n}(tg^{-1}(2k+1)-tg^{-1}(2k-1))$$

که برابر است با:

$$tg^{-1}(2n+1)-tg^{-1}(1)=tg^{-1}\frac{(2n+1)-1}{1+(2n+1)}=tg^{-1}\frac{n}{n+1}$$

۵. توجه داشته باشید که:

$$tgx=\frac{1}{tgx}-\frac{1-tg^2x}{tgx}=\frac{1}{tgx}-2\frac{1}{tg2x}=\cot gx-2\cot g2x$$

که مستلزم این است که:

$$\frac{1}{2^n}tg\frac{a}{2^n}=\frac{1}{2^n}\cot g\frac{a}{2^n}-\frac{1}{2^{n-1}}\cot g\frac{a}{2^{n-1}}$$

این مجموع ادغام می‌شود و پاسخ زیر را به‌دست می‌دهد:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}\cot g\frac{a}{2^n}-\cot ga$$

حد اخیر برابر $1/a$ است، زیرا:

$$\lim_{x\to 0}x\cot gax=\lim_{x\to 0}\cos ax\frac{x}{\sin ax}=\frac{1}{a}$$

بنابراین، پاسخ مسئله برابر $1/a-\cot ga$ است.

(T. Andreescu)

۶. با استفاده از اتحاد $\sin 3x=3\sin x-4\sin^3 x$

ملاحظه می‌کنیم که:

$$3^{n-1}\sin^3\frac{a}{3^n}=\frac{1}{4}(3^n\sin\frac{a}{3^n}-3^{n-1}\sin\frac{a}{3^{n-1}})$$

درنتیجه، این مجموع ادغام می‌شود و برابر است با:

$$\frac{1}{4}\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{a}{3^n}}{\frac{1}{3^n}}-\frac{1}{4}\sin a$$

با استفاده از این موضوع که:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{a}{3^n}}{\frac{1}{3^n}}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{x}=a$$

نتیجه می‌گیریم، مقدار مجموع برابر است با $(a-\sin a)/4$.

۷. مجموع زیر را محاسبه می‌کنیم.

$$\sum_{k=1}^{90}k\sin(2k)^\circ\sin 1^\circ$$

با تبدیل حاصل‌ضرب‌ها به مجموع داریم:

$$\sum_{k=1}^{90}k\cos(2k-1)^\circ-k\cos(2k+1)^\circ$$

$$=\sum_{k=1}^{90}(k-(k-1))\cos(2k-1)^\circ-90\cos 181^\circ$$

$$=\sum_{k=1}^{90}\cos(2k-1)^\circ-90\cos 1^\circ$$

از آن‌جا که

$\cos(180^\circ-x)=-\cos x$

جملات مجموع اخیر، دوبه‌دو حذف می‌شوند. در نتیجه عبارت محاسبه‌شده برابر $90\cos 1^\circ$ است. با تقسیم بر $\sin 1^\circ$ و گرفتن میانگین، $\cos 1^\circ$ را به‌دست می‌آوریم.

راه‌حل دیگری نیز با استفاده از اعداد مختلط، امکان‌پذیر است. در این مورد $\sin n^\circ$ را به صورت:

$(e^{i\pi n/180}-e^{-i\pi n/180})/(2i)$

بیان و از این موضوع استفاده می‌کنیم که:

$$x+2x^2+\dots+nx^n=\frac{nx^{n+1}}{x-1}-\frac{x^{n+1}-x}{(x-1)^2}$$

این فرمول را می‌توان با استقرا یا مشتق گرفتن از

$1+x+x^2+\dots+x^n=(x^{n+1}-1)/(x-1)$

به اثبات رساند [USAMO, 1996 با طرح از: T.Andreescu].

۸. داریم:

$$\frac{1}{\sin 2x}=\frac{2\cos^2x-(2\cos^2x-1)}{\sin 2x}=\frac{2\cos^2x}{2\sin x\cos x}-\frac{2\cos^2x-1}{\sin 2x}$$

$$=\frac{\cos x}{\sin x}-\frac{\cos 2x}{\sin 2x}=\cot gx-\cot g2x$$

این رابطه نشان می‌دهد که سمت چپ ادغام می‌شود و اتحاد به‌دست می‌آید [هشتمین المپیاد ریاضی، ۱۹۶۶].

۹. داریم:

$$\frac{tga}{\cos 2a}=\frac{tga(1+tg^2a)}{1-tg^2a}=\frac{2tg-tga(1-tg^2a)}{1-tg^2a}$$

$$=\frac{2tga}{1-tg^2a}-tga=tg2a-tga$$

بنابراین، مجموع مسئله به صورت زیر درمی‌آید:

$$tg2-tg1+tg4-tg2+\dots+tg2^{n+1}-tg2^n=tg2^{n+1}-tg1$$

۱۰. از فرمول دو برابر زاویه‌ی سینوس حاصل می‌کنیم:

$\cos u = \sin 2u / (2 \sin u)$

در نتیجه می‌توان نوشت:

$$\prod_{n=1}^{\infty} \cos\frac{x}{2^n} = \lim_{k\to\infty} \prod_{n=1}^{k} \cos\frac{x}{2^n} = \lim_{k\to\infty} \prod_{n=1}^{k} \frac{1}{2}\cdot\frac{\sin\frac{x}{2^{n-1}}}{\sin\frac{x}{2^n}}$$

$$= \lim_{k\to\infty} \frac{1}{2^k}\frac{\sin x}{\sin\frac{x}{2^k}} = \frac{\sin x}{x} \lim_{k\to\infty} \frac{\frac{x}{2^k}}{\sin\frac{x}{2^k}} = \frac{\sin x}{x}$$

این حد، به ازای $x = \pi$، توسط ارشمیدس برای یافتن مقدار تقریبی π به‌کار رفته است. در واقع، آن‌چه که ارشمیدس انجام داد، محاسبه‌ی تقریبی طول دایره با استفاده از پیرامون چندضلعی منتظم با 2^k ضلع محاطی بود و محاسبه‌اش به فرمول فوق تبدیل می‌شود.

۱۱. در صورتی‌که سمت چپ را در $\sin((2\pi)/(2^n - 1))$ ضرب کنیم و متوالیاً از فرمول دو برابر زاویه‌ی سینوس استفاده به‌عمل آوریم حاصل می‌کنیم:

$$2^n \sin\frac{2\pi}{2^n-1}\cos\frac{2\pi}{2^n-1}\cos\frac{4\pi}{2^n-1}\cdots\cos\frac{2^n\pi}{2^n-1}$$

$$= 2^{n-1}\sin\frac{4\pi}{2^n-1}\cos\frac{4\pi}{2^n-1}\cdots\cos\frac{2^n\pi}{2^n-1} = \cdots$$

$$= \sin\frac{2^{n+1}\pi}{2^n-1} = \sin\left(2\pi + \frac{2\pi}{2^n-1}\right) = \sin\frac{2\pi}{2^n-1}$$

از آن جا که حاصل‌ضرب مورد محاسبه از این رابطه، با تقسیم بر $\sin((2\pi)/(2^n - 1))$ به‌دست می‌آید، نتیجه حاصل می‌شود:

(Romanian high school text book)

۱۲. اتحاد $1 - tg^2 x = \frac{2tgx}{tg2x}$

رابطه‌ی زیر را به‌دست می‌دهد:

$$1 - tg^2\frac{2^k\pi}{2^n+1} = 2\frac{tg\frac{2^k\pi}{2^n+1}}{tg\frac{2^{k+1}\pi}{2^n+1}}$$

و نتیجه می‌شود که حاصل‌ضرب مورد بحث به مورد ذیل ادغام می‌شود:

$$2^n\frac{tg\frac{2\pi}{2^n+1}}{tg\frac{2^{n+1}\pi}{2^n+1}} = 2^n\frac{tg\frac{2\pi}{2^n+1}}{tg\left(2\pi - \frac{2\pi}{2^n+1}\right)} = -2^n$$

(T.Andreescu)

۱۳. می‌توان نوشت:

$$1 - 2\cos a = \frac{1-4\cos^2 a}{1+2\cos a} = \frac{1-2(1+\cos 2a)}{1+2\cos a}$$

$$= -\frac{1+2\cos 2a}{1+2\cos a}$$

نتیجه می‌گیریم که حاصل‌ضرب مسئله به صورت زیر ادغام می‌شود:

$$(-1)^n\frac{1+2\cos x}{1+2\cos\frac{x}{2^n}}$$

و اتحاد به اثبات می‌رسد.

۱۴. داریم:

$$1+2\cos 2a_k = 1+2(1-2\sin^2 a_k) = 3 - 4\sin^2 a_k$$

$$= \frac{\sin 3a_k}{\sin a_k}$$

که در آن

$$a_k = \frac{3^k\pi}{3^n+1}$$

درنتیجه، حاصل‌ضرب به مورد زیر ادغام می‌شود:

$$\frac{\sin 3a_n}{\sin a_1} = \frac{\sin\frac{3^{n+1}\pi}{3^n+1}}{\sin\frac{3\pi}{3^n+1}}$$

صورت کسر اخیر برابر است با:

$$\sin\left(3\pi - \frac{3\pi}{3^n+1}\right) = \sin\frac{3\pi}{3^n+1}$$

و درنتیجه، برابر مخرج همین کسر است. به این ترتیب، راه‌حل مسئله کامل می‌شود.

(T. Andreescu)

زیرنویس

1. telescopic

اتحاد و معادله (۱۵)

معادله‌هایی از درجه‌ی بالاتر (بحث تاریخی)

● پرویز شهریاری

اشاره
در شماره‌های قبل درباره‌ی اتحاد و معادله، تجزیه چند جمله‌ای دلخواه و مسئله‌های گوناگون درباره‌ی معادله بحث شد، اینک در پی به حل معادله‌هایی از درجه‌ی بالاتر خواهیم پرداخت.

نخستین کسی که معادله‌ی درجه‌ی سوم را به طریق جبری حل کرد، جمشید **کاشانی**، ریاضی‌دان ایرانی بود. او در سده‌ی پانزدهم می‌زیست (مرگ او در سال ۱۴۳۶ میلادی اتفاق افتاد که به روایتی با توطئه‌ی **الغ‌بیگ** کشته شد). و برای ساختن رصدخانه‌ی سمرقند از کاشان به سمرقند رفته بود. جمشید کاشانی ریاضی‌دان و محاسب برجسته‌ای بود که توانست عدد π را تا ۱۷ رقم بعد از ممیز محاسبه کند و برای بار اول، عددها را به صورت ده‌دهی، همان‌طور که ما امروز می‌نویسیم، کشف کرد.

کاشانی، برای کارهای اخترشناسی به محاسبه‌ی سینوس یک درجه نیاز داشت. پیش از او، ریاضی‌دانان دیگر ایرانی، مثل **ابوریحان بیرونی**، **ابوالوفای بوزجانی**[1] و دیگران، آن را به تقریب به کار می‌بردند. برای نمونه، ابوالوفای بوزجانی از یک نابرابری برای محاسبه‌ی تقریبی سینوس یک درجه استفاده می‌کرد.[2] ولی جمشید کاشانی توانست با حل جبری یک معادله‌ی درجه سوم، مقدار آن را تا هر دقت دل‌خواه، به‌دست آورد. تابع‌های مثلثاتی ۱۵ درجه و ۱۸ درجه را تا آن زمان پیدا کرده بودند و جمشید کاشانی باید به یاری سینوس ۳ درجه (یعنی اختلاف ۱۸ درجه و ۱۵ درجه) سینوس یک درجه را محاسبه می‌کرد. سینوس ۳ درجه برحسب سینوس یک درجه چنین است:

$$\sin 3^\circ = 4\sin^3 1^\circ - 3\sin 1^\circ$$

اگر در این برابری فرض کنیم $\sin 1^\circ = x$ و $\sin 3^\circ = a$، باید این معادله را نسبت به x حل کنیم:

$$4x^3 - 3x - a = 0 \qquad (1)$$

و جمشید کاشانی این معادله را حل کرد (با هر تقریب دل‌خواه).

می‌دانیم معادله‌ی کامل درجه سوم، یعنی: $ax^3+bx^2+cx+d=0$ را با مجهول کمکی $x=y-\frac{b}{3a}$ می‌توان به معادله‌ای تبدیل کرد که ضریب x^2 در آن برابر صفر باشد. یعنی بااین مجهول کمکی، معادله را به معادله‌ای تبدیل کرد که شامل x^3، x و مقدار ثابت باشد. یعنی معادله به‌صورت «۱». به این ترتیب، جمشید کاشانی راه‌حل جبری معادله‌ی درجه سوم را پیدا کرد. البته قبل از کاشانی، خیام نیشابوری راه‌حل‌هایی، بعضی جبری و بعضی هندسی، برای حل انواع معادله‌ی درجه سوم داده بود (به یاری مقطع‌های مخروطی در کتاب جبر و مقابله‌ی خود).

بعد از جمشید کاشانی، «پائولوولمس» ریاضی‌دان اسپانیایی، راه‌حلی برای معادله‌ی درجه چهارم پیدا کرده بود، از این راه‌حل، اطلاعی در دست نیست. ولی او بنا به دادگاه تفتیش عقاید و به‌دستور **توماس دما ـ تووگله مادا** (۱۴۲۰ تا ۱۴۹۸ میلادی)، رئیس مرکز تفتیش عقاید اسپانیا به دلیل همین کشف ریاضی خود، به مرگ با آتش محکوم شد.

بعد نوبت به ریاضی‌دان‌های ایتالیایی می‌رسد. **ژه‌ژولامو کاردانو** (۱۵۰۱ تا ۱۵۷۶ میلادی) برای محاسبه ریشه‌های معادله‌ی درجه سوم رابطه‌ای به‌دست آورد (برای معادله‌ی $x^3+px+q=0$). کاردانو در نوشته‌های فارسی به کاردان مشهور است:

$$x=\sqrt[3]{\sqrt{(\frac{q}{2})^2+(\frac{p}{3})^3}+\frac{q}{2}}-\sqrt[3]{\sqrt{(\frac{q}{2})^2+(\frac{p}{3})^3}-\frac{q}{2}}$$

این رابطه، برای نخستین‌بار در کتاب کاردانو به نام «هنر بزرگ یا قانون‌های جبری» آمده است و به همین دلیل، «رابطه‌ی کاردان» نام گرفته است. دلیل‌هایی وجود دارند که این رابطه به یک ریاضی‌دان دیگر ایتالیایی به نام تارتاگلیا (۱۴۹۹ تا ۱۵۵۷ میلادی) است. تارتاگلیا در کودکی پدر خود را از دست داد. او به دست سربازان فرانسوی که شهرش را اشغال کرده بودند، کشته شد. همان‌جا سربازان فرانسوی، زبان تارتاگلیا را بریدند و فکش را شکستند. این وضع تا آخر زندگی همراه نیکولو بود و به همین دلیل، او را «تارتاگلیا» می‌نامیدند که به زبان ایتالیایی به کسی گفته می‌شود که لکنت زبان دارد. مادر نیکولو قدرت پرداخت شهریه‌ی او را در مدرسه نداشت و «نیکولو» زبان و ریاضیات را پیش خود آموخت. نیکولو جوانی بااستعداد بود و چنان پیش‌رفت که در سال ۱۵۳۵ میلادی، کرسی ریاضیات را در شهر «وه‌رُونا»[3] ایتالیا به او سپردند.

کاردانو آدم بااستعدادی بود. او پزشکی و فلسفه را به خوبی می‌دانست. در حل تمرین‌های ریاضی هم کار می‌کرد. کاردانو، در ضمن، به اخترشماری (علمی دروغین) هم اعتقاد داشت. او حتی زایچه‌ی خود را تشکیل داد. او در این زایچه، روز و ساعت مرگ خود را پیش‌بینی کرده بود، ولی چون در روز موعود چیزی پیش نیامد، برای این‌که درستی پیش‌گویی خود را ثابت کند، در ساعت موعود خودکشی کرد.

ظاهر امر این است که کاردان از راه‌حل معادله‌ی درجه سومی که تارتاگلیا کشف کرده بود، به نحوی آگاه می‌شود و بدون این‌که نام مؤلف اصلی آن را ببرد، در کتاب خود نشر می‌دهد. تارتاگلیا، خود مشغول نوشتن کتابی بزرگ در زمینه‌ی جبر بود که حل معادله‌ی درجه‌ی سوم، جای نمایانی در آن داشت، ولی چون کاردان کتاب خود را زودتر منتشر کرده بود، وسیله‌ای برای نزاع آن‌ها شد که برای همه‌ی عمر باقی ماند.

از ریاضی‌دانان ایرانی که روی معادله‌های سیال کار کرده است، **ابوبکر محمد فرزند حسین معروف به کرجی**[4] است. کرجی بخشی از کتاب «الفخری» خود را به معادله‌های سیال اختصاص داده است که بالاتر از درجه‌های دوم و سوم هستند؛ مثل:

$x^9-y^4=z^2$ یا $x^4+y^9=z^2$

یا معادله‌های $x^3-y^2=z^3$ یا $x^3+y^2=z^3$ و می‌توان احساس کرد که کرجی به‌دنبال راهی بوده است تا ناممکن بودن مسئله‌ی بزرگ فرما را ثابت کند. البته کرجی هیچ‌جا نامی از این قضیه که ۸۰۰ سال بعد فرما مطرح کرده است، نمی‌برد. بسیاری از معادله‌هایی را که آورده، با جواب ذکر کرده است. بین جواب‌ها، عددهای کسری (ولی گویا) به فراوانی دیده می‌شوند. به‌عنوان نمونه، برای معادله‌ی $x^4-y^4=z^3$ جواب‌های $x=\frac{18}{5}$، $y=\frac{9}{5}$ و $z=\frac{27}{5}$ را معین می‌کند.

به هر حال به نظر من به‌دنبال ناممکن بودن معادله‌ی $x^n+y^n=z^n$ برای x، y، z و n درست بوده است. از قضیه‌ای که بعدها نام قضیه‌ی بزرگ فرما را به خود گرفته و همین چند سال پیش به صورت پیچیده‌ای ثابت شده است، نامی نمی‌برد.

□

پس از کاردان و تارتاگلیا، **لو ودیکوفه راری** (۱۵۲۲ تا ۱۵۶۵ میلادی) ریاضی‌دان دیگر ایتالیایی، به کشف راه‌حل معادله‌ی درجه چهارم موفق شد. این‌که ایرانی‌ها به معادله‌ی بالاتر از درجه سوم نمی‌پرداختند، یکی به‌خاطر این بود که دوره‌ی ریاضیات ایرانی، دوره‌ی کاربردی بود و در آن دوره تنها به معادله‌هایی توجه داشتند که در زندگی، عمل و دانش‌های دیگر کاربرد داشته باشد. دوم به این دلیل بود که آن‌ها به پیروی از ریاضی‌دانان یونانی، غالباً تلاش می‌کردند تعبیری هندسی برای عمل‌های خود پیدا کنند. آن‌ها مجهول را به صورت پاره‌خطی در نظر می‌گرفتند. اگر مجهول را با x نشان دهیم، x^2 را به معنای مساحت مربعی به ضلع x و x^3 را به صورت مکعبی به ضلع x در نظر می‌گرفتند و چون فضای ما سه‌بعدی است، برای x^4، x^5 و رتبه‌های بالاتر، مفهومی قائل نبودند. این

مشکل بعدها به‌وسیله‌ی رنه‌دکارت (۱۵۹۶ تا ۱۶۵۰ میلادی) حل شد که ثابت کرد جمله x^2 را هم می‌توان به یاری پاره‌خط راست نشان داد.

□

در ایران، مکان‌های «وراقی» (یعنی کتاب‌فروشی) مرکز تجمع اهل دانش و ادب بود. وراق‌ها تنها به فروش کتاب بسنده نمی‌کردند، خود اهل دانش و فرهنگ بودند، با دانشمندان و ادیبان صحبت می‌کردند، به رونویس کردن کتاب‌ها می‌پرداختند و حتی خودشان آن‌ها را صحافی می‌کردند. ولی در ایتالیا، در دوره‌ی رُنسانس، کارگاه‌های نقاشی، مجسمه‌سازی و صنعتی محلی، اجتماع بزرگان فرهنگ بود. هر روز در این کارگاه‌ها جمع می‌شدند و اگر کسی مسئله یا خبری داشت، به دیگران می‌گفت. تارتاگلیا، کاردانو، فه‌راری و بسیاری دیگر از راه همین اجتماع کارگاهی، کار خود را آغاز کردند و موفقیت‌های خود را عرضه داشتند. رُنسانس به دیگر کشورها، دیرتر از ایتالیا رسید. فرانسه، انگلیس و کشورهای شمالی اروپا، باید اندکی صبر می‌کردند تا پرتوهای رُنسانس را دریافت کنند. از این گذشته، محفل‌هایی از دانشمندان و فرهنگیان، به آن صورت که در ایران و ایتالیا بود، در آن‌جاها کمتر پیدا می‌شد. تا سده‌ی نوزدهم طول کشید تا دنبال کار معادله‌ها گرفته شد.

یکی از بزرگترین ریاضی‌دانان اروپای غربی، **نیلس هنریک آبل** (۱۸۰۲ تا ۱۸۲۹ میلادی) ریاضی‌دان نروژی بود. آبل از خانواده‌ی تهی‌دستی بود. او از کودکی استعداد خود را نمایان ساخت، ولی تهی‌دستی خانواده، او را از امکان تحصیل منظم بازداشت. او پیشرفت خود را در دانش، مدیون آموزش پیش‌خود و برخی از دوستان نزدیکش بود. با زحمت بسیار توانست در دانشگاه پایتخت نام‌نویسی کند، ولی دانشگاه نمی‌توانست در جهت استعداد او کمک کند. زیرا او به دانش ریاضی علاقه داشت، ولی دانشگاه در آن زمان رشته ریاضی نداشت.

در سال ۱۸۲۳ کوشید معادله‌ی درجه پنجم را به یاری رادیکال‌ها حل کند. آبل در آغاز گمان کرد معادله را حل کرده است، ولی وقتی به اشتباه خود پی برد، دنبال مطلب را رها نکرد و سرانجام ثابت کرد، معادله درجه پنجم، راه‌حل جبری به صورت رادیکالی در حالت کلی خود ندارد، مگر در حالت‌های خاص.

این موفقیت جالب، هم‌چنین تألیف او درباره‌ی انتگرال‌گیری عبارت‌های جبری، شرایطی را فراهم کرد که او بتواند به خارج برود و هدف خود را دنبال کند. او نوشته خود را برای گاوس فرستاد. ولی گاوس به گمان این که کار یک جوان بی‌تجربه است، اعتنایی به آن نکرد.

آبل ابتدا «برلن ماند و با اندیشه‌ی پاسخ مساعد گاوس نسبت به استعداد خارق‌العاده‌ی خود، انتظار کشید. در اینجا با روزنامه‌ی «کرل» در زمینه ریاضیات نظری و کاربردی آشنا شد که خیلی مورد علاقه‌ی جوانان بود و به‌وسیله‌ی **اوگوست لئوپولد کرل** (۱۷۸۰ تا ۱۸۵۵ میلادی) منتشر می‌شد.[۵]

در برلن، آبل بررسی خود را درباره‌ی هم‌گرایی رشته‌های توانی و قضیه‌های مهمی که به شعاع هم‌گرایی رشته‌های توانی در حوزه‌ی عددهای حقیقی و مختلط مربوط می‌شدند، کامل کرد.

در سال ۱۹۲۶، آبل به پاریس رفت و در آن‌جا رساله‌ی خود را زیر عنوان «یادداشتی درباره‌ی یک گروه گسترده‌ی تابع‌های غیرجبری» به فرهنگستان علوم فرستاد. ولی این کار با ارزش هم مورد توجه لازم قرار نگرفت. این کار مدت‌ها نزد «کوشی» بین کاغذهای او باقی ماند و تنها بعد از مرگ آبل در سال ۱۸۴۱ چاپ شد. در این اثر، آبل انتگرال از نوع $R(x,y)dx$ را مورد بررسی قرار داده بود که در آن، $R(x,y)$ تابع دلخواه و گویایی از x و y و y تابعی جبری از x است. درضمن، دو حالت جداگانه را تشخیص داده بود: اگر y به صورت ریشه‌ای از چندجمله‌ای درجه سوم و درجه چهارم بیان شود، آن‌وقت انتگرال به انتگرال بیضوی منجر می‌شود. و اگر y ریشه‌ای از چندجمله‌ای با توان بالای درجه چهارم باشد، آن‌وقت انتگرال به صورت هذلولوی درمی‌آید. امروزه، انتگرال به‌صورت $\int R(x,y)dx$ را انتگرال آبلی می‌نامند.

زندگی بعدی آبل، بسیار اندوه‌بار است: این بی‌حرمتی که در حق این ستاره‌ی دانش و کشف خلاق او شده بود و تنها پس از مرگش به رسمیت شناخته شد و درضمن بی‌پولی و بینوایی دائمی، آبل را واداشت تا در سال ۱۹۲۷ به زادگاه خود برگردد. ولی بازگشت او هم با شادی همراه نبود. در آغاز نتوانست کار ثابتی پیدا کند و تنها درس می‌داد، یعنی بخشی از درس خود را حفظ کرده بود. راست است که در سال ۱۸۲۸ توانست کار تدریس در دانشگاه بگیرد، ولی سرانجام فقر و اندوه دائمی او را از پا درآورد و سِل در او پیشرفت کرد و در ششم آوریل ۱۸۲۹، یعنی وقتی که تنها ۲۶ سال داشت، از دنیا رفت.

چنین بود زندگی جوان نابغه، ولی با مرگ آبل، اندیشه‌ی بلند او در ریاضیات نمرد و ارزش خود را تا زمان حال حفظ کرده است. به‌ویژه یکی از اندیشه‌های عمیق آبل، مورد استفاده‌ی پژوهشگران ریاضیات است. این اندیشه را خود آبل چنین، شرح می‌دهد: «به جای این که درباره‌ی رابطه‌ای بیندیشیم که وجود آن نامعلوم است، باید به این پرسش پاسخ دهیم: آیا چنین رابطه‌ای درواقع وجود دارد». خود آبل با در نظر گرفتن این اندیشه، ثابت کرد که معادله‌ی درجه چهارم را نمی‌توان به یاری رادیکال‌ها حل کرد. هم‌چنین برخی از تابع‌ها را پیدا کرد که نمی‌توان با روش‌های مقدماتی انتگرال آن‌ها را به‌دست آورد. بعد از مرگ آبل «مجله‌ی رکول» درباره‌ی او نوشت: «او برای خودش کار نمی‌کرد. کار او به خاطر دانش بود که عشق آتشین به آن داشت.»

اکنون درباره‌ی زندگی اندوه‌بار یکی دیگر از ریاضی‌دانان بزرگ

سده‌ی نوزدهم صحبت می‌کنیم. اواریست گالوا (۱۸۱۱ تا ۱۸۳۲ میلادی) در «بورلا ـ رن» نزدیک پاریس متولد شد. هنوز درس می‌خواند که نخستین کارهای علمی خود را چاپ کرد. در سال ۱۸۲۹ در امتحان پلی‌تکنیک پاریس شرکت کرد. گالوا، هم به دلیل کار علمی پلی‌تکنیک و هم به علت انقلابی بودن دانشجویان آن‌جا علاقه داشت به آن‌جا وارد شود. گالوا در امتحان پذیرفته نشد و علاقه‌ی عمیق او به ریاضیات موجب شد بین او و معلمی که امتحان می‌کرد، برخوردی پیش آید.[۶]

گالوا به‌ناچار در «اکول نرمال» ثبت‌نام کرد که دنبال کار دبیرستان بود. ولی از آن‌جا هم، بعد از یک سال، اخراج شد. دلیل اخراج، علاقه‌ی پرحرارت گالوا به زندگی سیاسی فرانسه بود.

نهم ماه مه سال ۱۸۳۱، گالوا در ضیافتی که روز جمهوری برپا شده بود، با خنجری در دست، بلند شد و در حالی که خنجر را نشان می‌داد گفت: «به نام لوئی فیلیپ!» پیام آشکار بود: گالوا، لوئی فیلیپ را تهدید کرده بود.

پس از این حادثه، گالوا دستگیر و به زندان «سنت پلاگی» فرستاده شد. در دادگاه که گالوا را خیلی جدی به‌خاطر عواقب عمل او تهدید کرده بودند، سرانجام به دلیل جوان بودنش، حکم به تبرئه‌ی او دادند. در آن موقع گالوا ۱۹ ساله بود. چهاردهم ژوئیه‌ی ۱۸۳۱، گالوا به خاطر شرکت فعال در تظاهرات مردم در روز انقلاب سال ۱۷۸۹، دوباره به زندان افتاد. بعد از آزادی از زندان، گالوای ۲۱ ساله در یک دوئل کشته شد. شواهدی در دست است که پلیس این دوئل را ترتیب داده بود.

گالوا در زندگی کوتاه خود، توانست اندیشه‌ی تازه‌ای را در ریاضیات وارد کند؛ اندیشه‌ای که به پیشرفت جبر و به‌طور کلی ریاضیات، کمک کرد و جهت آن را تغییر داد.

گالوا در زندگی کوتاه خود، روی هم ۵ مقاله‌ی کوتاه منتشر کرد که نزدیک به ۳۵ صفحه می‌شدند. عنوان‌های این مقاله‌ها چنین است: «اثبات یک قضیه از کسرهای مسلسل»، «مقاله‌ای درباره‌ی برخی جنبه‌های آنالیز»، «تجزیه و تحلیل یک یادداشت درباره‌ی حل معادله‌ها»، «مقاله‌ای درباره‌ی حل عددی معادله‌ها» و «از نظریه‌ی عددها». اواریست گالوا، کارهای بسیار اساسی خود را دو بار برای فرهنگستان علوم پاریس و دیگران فرستاد. این نامه‌ها برای ریاضی‌دان مشهور اوگوست کوشی (۱۷۸۹ تا ۱۸۵۷ میلادی) و ژان باتیست ژوزف فوریه (۱۷۶۸ تا ۱۸۳۰ میلادی) ریاضی‌دان بزرگ فرانسوی، برای بررسی فرستاده شد، ولی آن‌ها ارزشی برای این نامه‌ها قائل نشدند و حتی آن‌ها را گم کردند. شب قبل از دوئل، گالوا برای دوستش «شه والیه» نامه‌ای نوشت که در آن گفته شده است: «او چند کشف دارد که یکی از آن‌ها به حل معادله‌ها و دیگری به انتگرال تابع‌ها مربوط است.» در ضمن به شه والیه نوشته بود، آن‌ها را برای گاوس و ژاکوبی فرستاده است، زیرا از درستی آن‌ها و این که برای دانش بسیار اهمیت دارد، مطمئن است، ولی از جانب آن‌ها جوابی به او داده نشد.

تنها ۱۴ سال بعد از مرگ گالوا بود که ژوزف لیوول (۱۸۰۹ تا ۱۸۸۲ میلادی) کار او را با دقت بررسی کرد و متوجه کشفی بزرگ شد. آن وقت بود که این اثر چاپ شد.

بررسی اساسی و عمیق گالوا به مسئله‌ی جبر مربوط است. او به تنظیم قضیه‌ی مربوط به عددهای گنگی پرداخت که معادله‌های جبری را تشکیل می‌دهند. این نظریه را در ریاضیات «نظریه‌ی گالوا» می‌نامند. نظریه گالوا، بررسی‌های گسترده‌ای درباره‌ی حل معادله‌های از درجه‌ی بالا کرده است. معادله‌های درجه سوم و درجه چهارم را در سده‌ی شانزدهم و به‌وسیله‌ی ریاضی‌دانان ایتالیایی، به‌وسیله رادیکال‌ها داده شده بود و آبل در سده نوزدهم، غیر قابل حل بودن معادله‌های بالاتر از درجه چهارم را به کمک رادیکال‌ها ثابت کرد. نظریه‌ی معادله‌های دوجمله‌ای هم به وسیله گاوس گسترش یافته بود.

گالوا در «یادداشتی درباره‌ی شرط‌هایی در قابل حل بودن معادله‌ها به کمک رادیکال‌ها»، شرط‌های قابل حل بودن معادله‌ها به کمک رادیکال‌ها را، از هر درجه‌ای که باشند، مطرح کرده است. او در نظریه خود، مفهوم‌های زیادی را وارد ریاضیات کرده است که امکان بررسی‌های جدی را در چند جمله‌ای‌های جبری می‌دهد. از جمله این مفهوم‌ها، می‌توان از گروه، زیرگروه، میدان و غیره نام برد. نتیجه‌گیری‌های گالوا، کاربرد خود را در بسیاری از شاخه‌های گوناگون ریاضیات پیدا کرده است.

زیرنویس

۱. بوزجان در مرز افغانستان است. هنوز باقی‌مانده‌ی آثار این شهر در نزدیک تربت‌جام باقی است.

۲. این نابرابری را در کتاب «نابرابری‌ها» آورده‌ام.

3. Verona

۴. ویکه (woepcke) در سال ۱۸۵۳ نسخه‌ای از کتاب «فخری» تألیف کرجی را به‌دست آورد که در آن اشتباه نام کرجی به کرخی تبدیل شده بود. کرخه محله‌ای در نزدیکی بغداد است و درنتیجه ویکه کرجی را عرب و عراقی می‌دانست. ولی از کتاب «آب‌های زیرزمینی» (تألیف کرجی) به‌طور کامل مشهود است که ایرانی بوده و اهل کرج نزدیک تهران است.

۵. crelle ریاضی‌دان و مهندس آلمانی. از ۱۸۲۷ عضو فرهنگستان برلن شد و از سال ۱۸۲۶ مجله‌ی خود را منتشر کرد.

۶. گالوا دوباره در امتحان پلی‌تکنیک شرکت کرد، ولی هر دو بار رد شد. در یکی از امتحان‌ها، از پاسخ دادن به پرسش مربوط به لگاریتم، به دلیل ساده بودن آن، امتناع کرد.

هم‌نهشتی و کاربردهای آن

قسمت ۱

● سید محمدرضا هاشمی موسوی
hashemi – moosavi@yahoo.com

واژه‌ی «هم‌نهشتی» برگردان کلمه‌ی «Congruence» است. این کلمه به معنای سازگاری، موافقت و مطابقت شیئی با شیء دیگر به‌کار رفته است. برای مثال، در هندسه دو شکل را که قابل انطباق باشند، هم‌نهشت گویند. در این‌جا، برای درک بیشتر این واژه مثالی می‌آوریم.

مثال: فرض کنید دو ظرف شیر با گنجایش‌های $A = ۴۲$ و $B = ۱۷$ و یک پیمانه‌ی $C = ۵$ لیتری در دسترس داشته باشیم. در صورتی که هر دو ظرف A و B پر از شیر باشند و بخواهیم با پیمانه‌ی C شیر برداریم، واضح است که پس از ۸بار برداشت از ظرف A و پس از ۳بار برداشت از ظرف B، ۲لیتر شیر در هر یک از ظرف‌ها باقی مانده به اصطلاح می‌گوییم دو ظرف A و B به پیمانه‌ی ۵ هم پیمانه و یا به‌بیان دیگر هم نهشت‌اند. این مطلب را با بیان ریاضی به این صورت نشان می‌دهند:

$$A \overset{5}{\equiv} B$$

مفهوم هم‌پیمانگی یا هم‌نهشتی را که بین ظرف‌ها برقرار است، می‌توان در Z تعمیم داد و در حالت کلی، این مفهوم را به‌صورت زیر تعریف کرد:

تعریف

اگر m عددی طبیعی و a و b دو عدد صحیح باشند، a و b را به پیمانه‌ی (سنج) m «هم‌نهشت» گوییم، هرگاه (a-b) یا (b-a) مضربی صحیح از m (پیمانه) باشد. به بیان دیگر، عبارت $(a-b)$ یا (b-a) بر m بخش‌پذیر باشد، در این صورت می‌نویسیم:

$$a \overset{m}{\equiv} b \qquad (1)$$

بیان ریاضی این تعریف چنین است:

$$\forall a,b\in Z\ ,\ m\in N\ ;\ a\overset{m}{\equiv}b \Leftrightarrow a-b=km \text{ یا } m|(a-b)$$

قضیه‌ی ۱: رابطه‌ی هم‌نهشتی به پیمانه‌ی m ($\overset{m}{\equiv}$) روی Z (مجموعه‌ی اعداد صحیح) یک رابطه‌ی هم‌ارزی است.

اثبات: باید ثابت کرد که رابطه‌ی $\overset{m}{\equiv}$ دارای سه خاصیت انعکاسی، تقارنی و تعدی است:

الف) $\forall a\in Z\ ,\ a-a=(0)m \Rightarrow a\overset{m}{\equiv}a$ (انعکاسی)

ب) $\forall a,b\in Z\ ,\ a\overset{m}{\equiv}b \Rightarrow m|a-b \Rightarrow m|-(a-b)$

$\Rightarrow m|(b-a) \Rightarrow b\overset{m}{\equiv}a$ (تقارنی)

ج) $\forall a,b,c\in Z\ ,\ a\overset{m}{\equiv}b\ ,\ b\overset{m}{\equiv}c \Rightarrow m|(a-b)\ ,\ m|(b-c)$

$\Rightarrow m|(a-b)+(b-c) \Rightarrow m|(a-c) \Rightarrow a\overset{m}{\equiv}c$ (تعدی)

در این جا، ثابت شد که رابطه‌ی $\overset{m}{\equiv}$ یک رابطه‌ی هم‌ارزی است و چون هر رابطه‌ی هم‌ارزی، هر مجموعه‌ی تعریف شده روی آن را افراز می‌کند، بنابراین، رابطه‌ی $\overset{m}{\equiv}$ مجموعه‌ی Z را افراز می‌کند و بنا به تعریف کلاس‌های هم‌ارزی، برای هر عضو Z، کلاس هم‌ارزی یا دسته‌ی هم‌نهشتی، به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\forall a\in Z\ ,\ [a]=\left\{x\in Z | x\overset{m}{\equiv}a\right\}$$

برای مثال، اگر m=۲، آن‌گاه خواهیم داشت:

$$[0]=\left\{x\in Z | x\overset{2}{\equiv}0\right\}=\{x\in Z | x=2k\}$$
$$=\{\dots,-4,-2,0,2,4,\dots\}$$
$$[1]=\left\{x\in Z | x\overset{2}{\equiv}1\right\}=\{x\in Z | x=2k+1\}$$
$$=\{\dots,-3,-1,1,3,\dots\}$$

بدیهی است که $2\in[0]$، پس $[0]=[2]$ و هم‌چنین $3\in[1]$، پس $[1]=[3]$. به‌همین ترتیب، برای هر عضو دل‌خواه مثل a که $a\in[0]$ داریم $[a]=[0]$ و برای هر عضو دل‌خواه مثل b که $b\in[1]$، خواهیم داشت $[b]=[1]$. بنابراین رابطه‌ی $\overset{2}{\equiv}$، فقط دو کلاس یا دسته‌ی هم‌نهشتی دارد که این دو مجموعه، Z را افراز می‌کنند:

الف) $[0]\neq\varnothing\ ,\ [1]\neq\varnothing$ (زیرا: $0\in[0]\ ,\ 1\in[1]$)

ب) $[0]\cap[1]=\varnothing$

ج) $[0]\cup[1]=Z$

تذکر ۱: رابطه‌ی $\overset{m}{\equiv}$، دارای m دسته‌ی هم‌نهشتی $[0]$، $[1]$، $[2]$، ... و $[m-1]$ است. در حالت کلی، دسته‌ی هم‌نهشتی عدد مفروض a به پیمانه‌ی m را با نماد $[a]_m$ نشان می‌دهیم.

تذکر ۲. شرط لازم و کافی برای آن‌که $x\in[a]_m$، آن است که داشته باشیم: $x\overset{m}{\equiv}a$.

قضیه‌ی ۲: اگر عددی مثل a را بر m تقسیم کنیم و باقی‌مانده‌ی تقسیم را به r نشان دهیم $(a=mq+r)$، آن‌گاه خواهیم داشت:

$$a\overset{m}{\equiv}r$$

اثبات: با توجه به فرض قضیه، یعنی $a=mq+r$، می‌توان نوشت $a-r=mq$ یا $m|a-r$. پس:

$$a\overset{m}{\equiv}r$$

نتیجه: با استفاده از قضیه‌ی ۲، می‌توان عدد هم‌نهشت با عدد مفروض به پیمانه‌ی دل‌خواه را محاسبه کرد. یعنی کافی است عدد مورد نظر را به پیمانه تقسیم کنیم و باقی‌مانده‌ی تقسیم را به‌دست آوریم.

مثال: عدد هم‌نهشت با ۳۳۴ به پیمانه‌ی ۱۷ را بیابید.

حل: با توجه به تقسیم ۳۳۴ بر ۱۷، خواهیم داشت:

$$334=17\times19+11 \Rightarrow 334\overset{17}{\equiv}11$$

قضیه‌ی ۳: برای عددهای صحیح k و s، اگر $a\overset{m}{\equiv}b$، آن‌گاه:

$$a+km\overset{m}{\equiv}b+sm$$

اثبات: با توجه به فرض $a\overset{m}{\equiv}b$، می‌توان نوشت:

$$a-b=t_1m$$

هم‌چنین:

$$(a+km)-(b+sm)=(a-b)+m(\underbrace{k-s}_{t_2})=t_1m+t_2m$$

$$=(\underbrace{t_1+t_2}_{q})m=qm$$

پس:

$$(a+km)-(b+sm)=qm \Rightarrow a+km\overset{m}{\equiv}b+sm$$

نتیجه: اگر به دو طرف یک رابطه‌ی هم‌نهشتی، هر مضرب صحیحی از پیمانه را اضافه کنیم، همیشه به یک هم‌نهشتی معادل خواهیم رسید. در حالت خاص، با فرض $k=0$، خواهیم داشت:

$$a\overset{m}{\equiv}b+sm$$

بنابراین، همیشه دوطرف یا یک طرف هر رابطه‌ی هم‌نهشتی را می‌توان به اندازه‌ی هر مضرب پیمانه تغییر داد. برای مثال، هم‌نهشتی $a\overset{5}{\equiv}-3$، معادل هم‌نهشتی $a\overset{5}{\equiv}5-3$ یا $a\overset{5}{\equiv}2$ است.

مسئله: در صورتی که a عددی صحیح باشد، ثابت کنید:

$$a\overset{2}{\equiv}0 \quad \text{یا} \quad a\overset{2}{\equiv}1$$

حل: رابطه‌ی $\overset{2}{\equiv}$، مجموعه‌ی Z را به دو مجموعه‌ی $[0]$ و $[1]$ افراز می‌کند و با توجه به تعریف افراز، باید $Z=[0]\cup[1]$. پس اگر a عدد صحیح دل‌خواهی باشد، باید $a\in[0]_2$ یا $a\in[1]_2$. بنابراین، برطبق تعریف دسته‌های هم‌نهشتی خواهیم داشت:

$$a\in[0]_2 \Rightarrow a\overset{2}{\equiv}0\ ;\ a\in[1]_2 \Rightarrow a\overset{2}{\equiv}1$$

تذکر ۱: گزاره‌ی «a و b به پیمانه‌ی m هم‌نهشت‌اند» را با یکی از نمادهای زیر نشان می‌دهند:

۱) $a\overset{m}{\equiv}b$ ۲) $a\equiv b$ (پیمانه‌ی m)

۳) $a\equiv b$ (هنگ m) ۴) $a\equiv b(\mathrm{mod}\,m)$

در صورتی که (a-b) مضرب m نباشد، a و b به پیمانه‌ی m ناهم‌نهشت‌اند. در این صورت می‌نویسیم:

$a\not\equiv b$ (پیمانه‌ی m)

تذکر ۲: می‌دانیم هر عددی بر ۱ بخش‌پذیر است. بنابراین، هر دو عدد صحیح به پیمانه‌ی ۱ هم‌نهشت‌اند. به همین دلیل در عمل، همیشه پیمانه‌هایی غیر از ۱ مورد نظر ما خواهند بود.

قضیه‌ی ۴: دو عدد صحیح a و b به پیمانه‌ی m هم‌نهشت‌اند، اگر و تنها اگر باقی‌مانده‌ی a بر m برابر باقی‌مانده‌ی b بر m باشد.

اثبات: با فرض این‌که a و b به پیمانه‌ی m هم‌نهشت‌اند، می‌توان نوشت:

$$a\overset{m}{\equiv}b\Rightarrow a-b=km\ ;\ a=b+km \qquad (1)$$

اگر باقی‌مانده‌ی b بر m برابر r باشد:

$$b=sm+r\ ;\ 0\le r<m \qquad (2)$$

از رابطه‌های ۱ و ۲ نتیجه می‌شود:

$$a=(sm+r)+km\ ;\ a=(k+s)m+r\ ,\ 0\le r<m$$

این برابری نشان می‌دهد که r باقی‌مانده‌ی a بر m است. یعنی a و b هم‌باقی‌مانده‌اند.

به‌عکس: با فرض این‌که باقی‌مانده‌ی a و b بر m برابر باشد:

$$\begin{cases} a=km+r \\ b=k'm+r \end{cases} \Rightarrow a-b=m(k-k')\ ;\ a\overset{m}{\equiv}b$$

توجه: هم‌نهشتی در واقع تعمیم برابری است و رفتار آن در ارتباط با جمع و ضرب، مانند جمع و ضرب معمولی است. برخی از این خواص را در قضیه‌ی زیر آورده‌ایم.

قضیه‌ی ۵: اگر m عدد طبیعی ثابت و a، b و c اعداد صحیح دل‌خواه باشند، در این صورت خواص زیر برقرار است:

1) $a\overset{m}{\equiv}a$

2) $a\overset{m}{\equiv}b\Rightarrow b\overset{m}{\equiv}a$

3) $a\overset{m}{\equiv}b\ ,\ b\overset{m}{\equiv}c\Rightarrow a\overset{m}{\equiv}c$

4) $a\overset{m}{\equiv}b\ ,\ c\overset{m}{\equiv}d\Rightarrow a+c\overset{m}{\equiv}b+d$

5) $a\overset{m}{\equiv}b\ ,\ c\overset{m}{\equiv}d\Rightarrow ac\overset{m}{\equiv}bd$

6) $a\overset{m}{\equiv}b\Rightarrow a^k\overset{m}{\equiv}b^k\ (k\in\mathbb{N})$

7) $a\overset{m}{\equiv}b\ ,\ a\overset{n}{\equiv}b\Rightarrow a\overset{[m,n]}{\equiv}b$

8) $a\overset{m}{\equiv}b\ ,\ b\overset{n}{\equiv}c\Rightarrow a\overset{(m,n)}{\equiv}c$

9) $a\overset{m}{\equiv}b\Rightarrow (a,m)=(b,m)$

10) $ac\overset{m}{\equiv}bc\ ,\ (m,c)=d\Rightarrow a\overset{\frac{m}{d}}{\equiv}b$

11) $a\overset{m}{\equiv}1\Leftrightarrow (a,m)=1$

در این جا، هر قسمت را به‌طور خلاصه و مختصر اثبات می‌کنیم:

۱. می‌دانیم برای هر a داریم $a-a=(0)m$، پس می‌توان نوشت:

$$a\overset{m}{\equiv}a$$

۲. اگر $a\overset{m}{\equiv}b$، در این صورت $a-b=km$ و یا $b-a=(-k)m$، پس: $b\overset{m}{\equiv}a$

۳. با فرض $a\overset{m}{\equiv}b$ و $b\overset{m}{\equiv}c$ ، خواهیم داشت:

$$\begin{cases}a-b=km\\ b-c=k'm\end{cases}\Rightarrow a-c=(k+k')m\Rightarrow a\overset{m}{\equiv}c$$

۴. با فرض $a\overset{m}{\equiv}b$ و $c\overset{m}{\equiv}d$ ، خواهیم داشت:

$$\begin{cases}a-b=km\\ c-d=k'm\end{cases}\Rightarrow (a+c)-(b+d)=(k+k')m$$

$$\Rightarrow a+c\overset{m}{\equiv}b+d$$

نتیجه‌ی ۱ : در حالت خاص خواهیم داشت:

$$a\overset{m}{\equiv}b\Rightarrow a\pm c\overset{m}{\equiv}b\pm c$$

نتیجه‌ی ۲ : به استقرا می‌توان نشان داد که اگر داشته باشیم:

$$\begin{array}{ccc}a_1 & \overset{m}{\equiv} & b_1\\ a_2 & \overset{m}{\equiv} & b_2\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ & \vdots & \\ \cdots & \cdots & \cdots\\ a_k & \overset{m}{\equiv} & b_k\end{array}$$

آن‌گاه:

$$a_1+a_2+\cdots+a_k\overset{m}{\equiv}b_1+b_2+\cdots+b_k$$

۵. با فرض $a\overset{m}{\equiv}b$ و $c\overset{m}{\equiv}d$ ، خواهیم داشت:

$$\begin{cases}a-b=km\\ c-d=k'm\end{cases}\quad ; \quad \begin{cases}a=b+km\\ c=d+k'm\end{cases}$$

از ضرب دو رابطه‌ی فوق خواهیم داشت:

$$ac=bd+(bk'+dk+kk'm)m\Rightarrow ac\overset{m}{\equiv}bd$$

نتیجه‌ی ۱ : در حالت خاص خواهیم داشت:

$$a\overset{m}{\equiv}b\Rightarrow ac\overset{m}{\equiv}bc$$

نتیجه‌ی ۲ : به استقرا می‌توان نشان داد که اگر داشته باشیم:

$$\begin{array}{ccc}a_1 & \overset{m}{\equiv} & b_1\\ a_2 & \overset{m}{\equiv} & b_2\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ & \vdots & \\ \cdots & \cdots & \cdots\\ a_k & \overset{m}{\equiv} & b_k\end{array}$$

آن‌گاه:

$$a_1a_2\cdots a_k\overset{m}{\equiv}b_1b_2\cdots b_k$$

۶. اگر در نتیجه‌ی ۲ فرض کنیم:

$$a_1=a_2=\cdots=a_k=a\ ,\ b_1=b_2=\cdots=b_k=b$$

خواهیم داشت:

$$a\overset{m}{\equiv}b\Rightarrow a^k\overset{m}{\equiv}b^k$$

۷. با فرض $a\overset{m}{\equiv}b$ و $a\overset{n}{\equiv}b$ ، به ترتیب می‌توان نوشت $m|(a-b)\ ,\ n|(a-b)$. پس:

$$[m,n]|(a-b)\Rightarrow a\overset{[m,n]}{\equiv}b$$

نتیجه : اگر $a\overset{m}{\equiv}b$ و $a\overset{n}{\equiv}b$ و $(m,n)=1$ ، بدیهی است که $[m,n]=mn$. پس:

$$a\overset{mn}{\equiv}b$$

۸. با فرض $(m,n)=d$ ، خواهیم داشت $d|m$ و $d|n$. پس:

$$\begin{cases}d|m\\ m|(a-b)\end{cases}\Rightarrow d|(a-b)\ (1)\ ,\ \begin{cases}d|n\\ n|(b-c)\end{cases}\Rightarrow$$

$$d|(b-c)\ (2)\overset{(1),(2)}{\Rightarrow}d|(a-b)+(b-c)\Rightarrow d|(a-c)\Rightarrow a\overset{d}{\equiv}c$$

۹. با فرض $(a,m)=d_1$ و $(b,m)=d_2$ ، ثابت می‌کنیم $d_2=d_1$.

با توجه به فرض، یعنی $a\overset{m}{\equiv}b$ ، داریم $a-b=km$. پس:

$$(a,m)=d_1\Rightarrow\begin{cases}d_1|a\\ d_1|m;d_1|km\end{cases}\Rightarrow d_1|a-km=b$$

می‌دانیم اگر $d_1|b$ و $d_1|m$ ، آن‌گاه $d_1|(b,m)=d_2$ و در نتیجه خواهیم داشت: $d_1\le d_2$

به همین ترتیب، می‌توان ثابت کرد که $d_2|d_1$ یا $d_2\le d_1$.

بنابراین در کل ثابت می‌شود: $d_2=d_1$.

۱۰. با فرض $ac\overset{m}{\equiv}bc$ ، خواهیم داشت $m|(ac-bc)$ یا $m|c(a-b)$. پس:

$$c(a-b)=km\xrightarrow{(\text{تقسیم بر } d)}\frac{c}{d}(a-b)=\frac{m}{d}k$$

$$\Rightarrow\frac{m}{d}\Big|\frac{c}{d}(a-b)$$

$$\xrightarrow[(\text{لم اقلیدس})]{(\frac{m}{d},\frac{c}{d})=1}\frac{m}{d}|(a-b)\Rightarrow a\overset{\frac{m}{d}}{\equiv}b$$

نتیجه : اگر $ac\overset{m}{\equiv}bc$ و $(m,c)=1$ ، آن‌گاه $a\overset{m}{\equiv}b$.

۱۱. با فرض $a \overset{m}{\equiv} 1$، خواهیم داشت $a-1=km$ یا $a=km+1$. پس: $(a,m)=1$ و به‌عکس، اگر $(a,m)=1$، خواهیم داشت $a=km+1$ یا $a-1=km$، پس: $a \overset{m}{\equiv} 1$.

نتیجه: با فرض $(a,m)=1$، خواهیم داشت:

$$a^n \overset{m}{\equiv} 1 \quad (n \in \mathbb{N})$$

نکته: به‌طور کلی، اگر $a \overset{m}{\equiv} r$ و $0 \le r < m$، در این صورت باقی‌مانده‌ی a بر m برابر r است.

مسائل حل شده

۱. عدد ۱۳۴ به پیمانه‌ی ۷، با چه عددی بین صفر و ۷ هم‌نهشت است؟

حل: ابتدا عدد ۱۳۴ را بر ۷ تقسیم می‌کنیم:

$$134 = 19(7)+1$$

بدیهی است، باقی‌مانده‌ی این تقسیم، جواب مسئله است:

$$134 \overset{7}{\equiv} 1 \qquad (\text{زیرا: } 19(7) \overset{7}{\equiv} 0)$$

۲. با فرض $a \overset{5}{\equiv} -2$، نشان دهید $a \overset{5}{\equiv} 3$.

حل: با توجه به $5 \overset{5}{\equiv} 0$، می‌توان به طرف دوم فرض، صفر را افزود:

$$5 \overset{5}{\equiv} 0 - 2 \overset{5}{\equiv} 5-2 \overset{5}{\equiv} 3 \Rightarrow a \overset{5}{\equiv} 3$$

۳. با فرض $a \overset{9}{\equiv} 79$، باقی‌مانده‌ی a بر ۹ را به‌دست آورید.

حل: $(\text{زیرا: } 72 \overset{9}{\equiv} 0)$ $\quad a \overset{9}{\equiv} 72+7 \Rightarrow a \overset{9}{\equiv} 7$

۴. باقی‌مانده‌ی تقسیم 2^7، 4^7، 2^{21} را بر ۲۹ بیابید.

حل:

$$2^7 = 128 = 4(29)+12 \Rightarrow 2^7 \overset{29}{\equiv} 12$$

$$4^7 = 2^{14} = (2^7)^2 \overset{29}{\equiv} (12)^2 \overset{29}{\equiv} 144 \overset{29}{\equiv} 28$$

$$2^{21} = (2^7)^3 \overset{29}{\equiv} (12)^3 \overset{29}{\equiv} 1728 \overset{29}{\equiv} 59(29)+17 \overset{29}{\equiv} 17$$

۵. باقی‌مانده‌ی تقسیم $\left[5\times(41)^{83}\right]^{1379}$ بر ۹ را به‌دست آورید.

حل:

$$41 \overset{9}{\equiv} 5 \ , \ 5^3 = 125 \overset{9}{\equiv} 8 \overset{9}{\equiv} -1 \Rightarrow 5^3 \overset{9}{\equiv} -1$$

$$(5^3)^{27} \overset{9}{\equiv} (-1)^{27} \overset{9}{\equiv} -1 \Rightarrow 5^{81}\times 5^2 \overset{9}{\equiv} (-1)\times 5^2 \Rightarrow 5^{83} \equiv -25$$

$$(41)^{83} \overset{9}{\equiv} 5^{83} \overset{9}{\equiv} -25 \overset{9}{\equiv} 27-25 \overset{9}{\equiv} 2 \Rightarrow 5\times(41)^{83} \overset{9}{\equiv} 10 \overset{9}{\equiv} 1$$

$$\Rightarrow \left[5\times(41)^{83}\right]^{1379} \overset{9}{\equiv} 1$$

۶. باقی‌مانده‌ی تقسیم $(32)^{802} + 31$ بر ۱۵ را بیابید.

حل:

$$2^5 = 32 \overset{15}{\equiv} 2 \ , \ 2^4 \overset{15}{\equiv} 1 \ , \ (2^4)^{200} \overset{15}{\equiv} 1 \ ; \ 2^{800}\times 2^2 \overset{15}{\equiv} 2^2$$

$$2^{802} \overset{15}{\equiv} 4 \ , \ 32^{802} \overset{15}{\equiv} 2^{802} \Rightarrow 32^{802} \overset{15}{\equiv} 4 \ ; \ 32^{802}+31 \overset{15}{\equiv} 4+31$$

$$32^{802}+31 \overset{15}{\equiv} 35 \overset{15}{\equiv} 5 \Rightarrow r=5 \ (\text{باقی‌مانده‌ی تقسیم})$$

۷. باقی‌مانده‌ی تقسیم $9\times(7006)^{2001}$ بر ۷ را بیابید.

حل:

$$7006 \equiv 6 \equiv -1 \ ; \ (7006)^{2001} \equiv (-1)^{2001} \overset{7}{\equiv} -1 \ ;$$

$$9\times(7006)^{2001} \overset{7}{\equiv} -9 \overset{7}{\equiv} 5 \ ; \ 9\times(7006)^{2001} \overset{7}{\equiv} 5 \Rightarrow r=5$$

۸. باقی‌مانده‌ی تقسیم $(2^{13}-4)$ بر ۲۳ را بیابید.

حل:

$$2^6 \overset{23}{\equiv} 18 \overset{23}{\equiv} -5 \ , \ 2^5 \overset{23}{\equiv} 9 \Rightarrow 2^6\times 2^5 \overset{23}{\equiv} -45 \overset{23}{\equiv} 1$$

$$2^{11} \overset{23}{\equiv} 1 \ ; \ 2^2\times 2^{11} \overset{23}{\equiv} 2^2 \ ; \ 2^{13} \overset{23}{\equiv} 4 \ ; \ 2^{13}-4 \overset{23}{\equiv} 0 \Rightarrow r=0$$

تمرین

۱. اگر $x \overset{5}{\equiv} 37$، باقی‌مانده‌ی x بر ۵ چه عددی است؟

۲. اگر x بر ۱۳ باقی‌مانده‌ی ۷ دهد، $8x-1$، بر ۱۳ چه باقی‌مانده‌ای می‌دهد؟

۳. اگر n بر ۷ باقی‌مانده‌ی ۴ دهد و $x = n^3 + 3n^2 + 4n + 1$، باقی‌مانده‌ی x بر ۷ چه عددی است؟

۴. اگر باقی‌مانده‌های تقسیم x بر ۷ و ۸ به ترتیب برابر ۳ و ۵ باشند، باقی‌مانده‌ی تقسیم x بر ۵۶ چه عددی است؟

۵. باقی‌مانده‌ی تقسیم $(64)^{1377}$ بر ۱۳ چه عددی است؟

۶. باقی‌مانده‌ی تقسیم $k = 66^{1377} + 65^{1377}$ بر ۱۳ چه عددی است؟

۷. باقی‌مانده‌ی تقسیم $s = (67\times 68)^{1377}$ بر ۱۳ چه عددی است؟

۸. باقی‌مانده‌ی تقسیم 7^{1382} بر عدد ۱۹ چه عددی است؟

۹. باقی‌مانده‌ی تقسیم 11^{1383} بر عدد ۶۱ چه عددی است؟

۱۰. باقی‌مانده‌ی تقسیم 1358^{1385} بر عدد ۴۱ را تعیین کنید.

۱۱. باقی‌مانده‌ی تقسیم $N = 19^{57} + 13^{75}$ بر عدد ۱۷ را تعیین کنید.

۱۲. باقی‌مانده‌ی تقسیم $a = 5(7006)^{2005}$ بر عدد ۷ را بیابید.

ادامه دارد...

ریاضی را چگونه یاد بگیریم

● داریوش عابد

مقدمه

مدت‌های مدیدی است که ریاضیات به‌عنوان درسی که یادگرفتن آن دشوار است، شهرت دارد. برای بسیاری از دانش‌آموزان، ریاضی درس سختی است که فرا گرفتن آن زحمت زیادی دارد. وقتی من خود را به‌عنوان دبیر ریاضیات به کسی معرفی می‌کنم، اولین واکنش او بیان این جملات است که: «در مدرسه، من در درس ریاضی خیلی ضعیف بودم.» یا این که: «من از ریاضی متنفرم.» و...

چنین نظراتی، در مورد درس‌های دیگر کمتر بیان می‌شوند. در این سال‌ها که من معلم دانش‌آموزان زیادی بوده‌ام، متوجه شده‌ام که گروهی از آن‌ها در آموختن ریاضیات مشکلات جدی داشته‌اند. در حالی که عده‌ای دیگر، تنها به این راهنمایی نیاز داشته‌اند که چگونه ریاضیات را بخوانند و توانایی خود را در آن به حداکثر برسانند.

ریاضی بیش از سایر درس‌ها به روش‌های مطالعه‌ای خاص احتیاج دارد. در این متن به اختصار بعضی از این روش‌ها را بررسی می‌کنیم.

شناخت ریاضی

ریاضیات مجموعه‌ای از مباحث است که هر مبحث به طور جداگانه، برپایه‌ای متکی است که تمام مباحث قبلی را شامل می‌شود. اگر در هریک از این مباحث ضعیف هستید، آن را کاملاً یاد بگیرید و سپس آموختن مبحث بعدی را آغاز کنید. هیچ‌گاه ضعف‌های خود را نادیده نگیرید و همان‌طور به درس ادامه ندهید. بدانید که ضعف‌ها خیلی زود شما را دچار زحمت و مشکل خواهند کرد.

مفاهیم و قضایا

مفاهیم و قضایای ریاضی، تقریباً جزو محسوسات جهان اطراف ما نیستند. اما با این حال، روش‌های بسیاری برای محسوس‌تر و قابل فهم‌تر کردن آن‌ها وجود دارد. در مورد درک مفاهیم، برای این که یک مفهوم را کاملاً درک کنید، باید چند مثال از آن را مطالعه کنید. اغلب اوقات، دانش‌آموزان تعاریف را حفظ می‌کنند. حفظ کردن تعاریف زیانی ندارد، اما به‌خودی خود هم مفید نیست، چون به زودی فراموش می‌شوند.

بهترین راه درک تعاریف، مطالعه‌ی مثال‌های خاص است. برای مطالعه‌ی مثال‌ها، چند منبع در دسترس شماست؛ کتاب درسی برای هر مفهوم اصلی و تعریف، تعداد زیادی مثال آورده است. معلم نیز در کلاس درس، مثال‌های بیشتری را ارائه می‌کند. برای آن‌که درک خود را از تعاریف قوی‌تر کنید، باید خودتان نیز مثال بسازید یا با حل مسئله‌های کتاب درسی، موارد صدق یا نقض تعریف را پیدا کنید.

اثبات قضایا

اولین و مهم‌ترین قدم این است که بفهمید، یک قضیه چه می‌گوید و چگونه می‌توان آن را در مسئله‌ها به‌کار بست، تا این که بدانید قضیه به چه طریقی اثبات می‌شود. تنها موقعی به اثبات یک قضیه توجه کنید که کاملاً درک کرده باشید، آن قضیه چه می‌گوید و مثال‌های زیادی هم در مورد آن حل کرده باشید. آن‌وقت است که از عهده‌ی اثبات قضیه برخواهید آمد.

تجسم ذهنی

تجسم ذهنی را به‌عنوان یک ابزار کمکی اثبات قضایا برای مطالعه‌ی درس و یادگیری آن به‌کار ببرید و نگران نباشید که احتمالاً با تجسم ذهنی، به نوعی خود را فریب می‌دهید و ریاضی را فقط باید در فرم شفاهی آن یاد بگیرید. این دقیقاً همان کاری است که ریاضی‌دان‌ها به‌عنوان امری عادی می‌پندارند. در حقیقت، علم ریاضیات با انجام همین تصاویر مجسم و شهودی توسعه می‌یابد. پس شما هم می‌توانید در اثبات قضایا، از اشکال و تصاویر استفاده کنید و پس از استدلال ایده‌های خود به‌صورت تصویری، آن‌ها را به‌صورت شفاهی و محاسباتی درآورید.

استفاده از منابع تمرین

درس ریاضی مانند یک سریال تلویزیونی نیست که مثل یک بیننده‌ی خاموش، تنها به تماشای آن بپردازید، بلکه باید در آن مشارکت کنید و برای تأمین این هدف، تمرین‌های زیادی حل کنید. برای حل تمرین، منابع بسیاری در اختیار شما هستند؛ اول از همه، تمرین‌های آخر هر بخش در کتاب درسی، بعد مجموعه‌ی مسائل یادآوری در آخر هر فصل، سپس مسائل و پلی‌کپی‌های اضافی که معلم به شما می‌دهد، هم‌چنین در بازار کتاب‌های بسیاری در این زمینه وجود دارند.

معمولاً اولین مجموعه تمرین در مجموعه تمرین‌های آخر هر بخش کتاب درسی، تعمیم ساده‌ای از مثال‌های متن کتاب هستند و شما می‌توانید با حل آن‌ها، مهارت‌های پایه‌ای خود را تقویت کنید. قبل از حل این تمرین‌ها، حتماً تکنیک‌های محاسباتی مهم آن بخش را که غالباً در میان کادر یا با رنگی متفاوت نوشته شده‌اند، مطالعه کنید. در بیشتر کتاب‌ها، مجموعه‌ی تمرین‌ها طوری ترتیب داده شده‌اند که بعد از آن‌ها، تمرین‌هایی می‌آیند که هم شامل مباحث فصل جاری هستند و هم به مباحث بخش‌های قبل مربوط می‌شوند. برای آن‌که در درس ریاضی کاملاً مهارت پیدا کنید، باید تعداد زیادی از این تمرین‌ها را حل کنید. تا وقتی که در حل این‌گونه تمرین‌ها توانایی لازم را کسب نکرده‌اید و یا با آن‌ها مشکلی دارید، به تمرینات دشوار یا به اصطلاح ستاره‌دار، حتی فکر هم نکنید.

روش‌های حل مسائل

در حل مسائل و تمرینات و انجام

محاسبات، لازم است عملیات جبری و حسابی انجام دهید. چنین محاسباتی، اشتباهاتی را ایجاد می‌کنند که علت آن‌ها درست نفهمیدن مفهوم درس نیست، بلکه بی‌دقتی و نداشتن تمرکز است. بعضی از مسائل ریاضی نیز چندقسمتی هستند؛ مثل مسائل رسم منحنی و یافتن ماکزیمم و می‌نیمم. در حل این مسائل هم خیلی دقت کنید، چون اگر در مرحله‌ی اول اشتباهی مرتکب شوید، جواب بقیه‌ی قسمت‌ها نیز نادرست به‌دست می‌آید. هم‌چنین، هیچ مرحله‌ای از محاسبات را ذهنی انجام ندهید، چون محاسبات ذهنی معمولاً عاری از خطا و اشتباه نیستند.

اهمیت کتاب درسی

کتاب درسی بهترین منبع است که در اختیار دارید. کتاب شامل شرح تعاریف و قضایا، مثال‌های حل شده، تمرین‌ها و مطالب یادآوری است. ممکن است به‌نظر برسد نقش کتاب درسی کاملاً واضح و روشن است و دیگر به توضیح نیازی ندارد. با این حال، ذکر چند نکته را لازم می‌دانم. اول از همه باید بدانید که کتاب ریاضی را نمی‌توان مثل دیگر کتاب‌ها مطالعه کرد. کتاب‌های ریاضی با دقت بسیار نوشته شده‌اند و باید با دقت بسیار مطالعه شوند. یعنی نباید انتظار داشته باشید که صفحات یک کتاب ریاضی را به‌سرعت مطالعه و مطالب آن‌را هم درک کنید. این روش مطالعه شاید برای یک کتاب داستان و رمان مناسب باشد، اما درباره‌ی ریاضیات این‌طور نیست.

کتاب ریاضی را باید با دقت بسیار مطالعه کرد و جزئیات هر تعریف، قضیه یا مثال را بررسی نمود. بد نیست موقع مطالعه‌ی کتاب ریاضی، مداد و کاغذ به‌دست بگیرید تا بتوانید محاسبات را پیش خود بررسی کنید. بعد از خواندن هر تعریف یا قضیه، سعی کنید بدون نگاه کردن به کتاب، آن‌را تکرار کنید. قبل از خواندن جواب مثال‌ها، سعی کنید خودتان آن‌ها را حل کنید. فقط بعد از آن‌که مسئله را حل کردید و یا در حل مسئله با مشکلی مواجه شدید، به جواب کتاب نگاه کنید.

تکلیف منزل

تکلیف منزل قسمت اساسی در درس ریاضیات است. چه‌طور انتظار دارید بدون انجام تعداد زیادی تمرین، در حل مسائل ریاضی متبحّر شوید؟ حتماً معلمانتان تعدادی تمرین تعیین می‌کنند تا شما حل کنید. در حل این تمرین‌ها کوشا باشید. تمام مسائل را حل کنید و جزئیات را موبه‌مو انجام دهید. ممکن است معلمان شما را مکلف به تحویل تمرین‌ها به صورت کتبی کند یا نه. در هر حال، حتی اگر ملزم به نوشتن تمرین‌ها نشده‌اید، باید آن‌ها را در دفترتان حل کنید. اگر مسئله را ذهنی حل کنید، هیچ راهی برای بررسی کردن جزئیات وجود ندارد. من اکثر اوقات با دانش‌آموزانی برخورد می‌کنم که وقتی نمره‌شان را می‌بینند، مأیوس می‌شوند و ادعا می‌کنند درس را فهمیده‌اند، اما سر امتحان گیج شده‌اند. این افراد، اگر تکلیف‌های منزلشان را به تفصیل می‌نوشتند، هیچ‌گاه از نتیجه‌ی کارشان تعجب نمی‌کردند.

توصیه‌ی مهم

توصیه می‌شود سعی کنید، قبل از آن‌که مطالب در کلاس درس ارائه شوند، آن‌ها را از کتاب درسی بخوانید. زمانی که معلم درس می‌دهد، به نکاتی که هنگام مطالعه‌ی درس از کتاب نفهمیده‌اند، توجه کنید و مطمئن شوید که این نکات در کلاس درس برای شما تفهیم شده‌اند. بعداً می‌توانید دوباره کتاب را بخوانید. سعی کنید کلاس‌ها را از دست ندهید و مهم‌تر از همه سعی کنید عقب نیفتید. ریاضیات درسی به‌هم پیوسته است؛ اگر درس دیروز را یاد نگرفته باشید، نمی‌توانید تمرین‌های امروز را حل کنید. به‌علاوه از درس فردا هم سردر نخواهید آورد. پس علاوه بر حضور مستمر و پویا در کلاس، حتماً یادداشت‌هایی بردارید.

بعضی از دانش‌آموزان، کلمه به کلمه‌ی حرف‌های معلمشان را یادداشت می‌کنند، در حالی که بعضی دیگر تنها کلیات درس را می‌نویسند. شما نیز می‌توانید از روش خاص خود برای یادداشت برداشتن استفاده کنید؛ روشی که با عادت‌ها و نیازهای مطالعاتی شما سازگار است. اما به‌هرحال در کلاس درس معلم، یادداشت بردارید و نسبت به کلاس درس برخوردی فعال داشته باشید. درس را گوش دهید و تجزیه و تحلیل کنید:

اگر مطلبی را نفهمیدید، از سؤال کردن نترسید. می‌دانم که ممکن است پرسیدن سؤال در مقابل دانش‌آموزان دیگر کار آسانی نباشد، اما نباید این احساس را هم داشته باشید که با پرسیدن سؤال، نادانی خود را در معرض نمایش گذاشته‌اید. بسیاری از سؤالاتی که به ذهن شما می‌رسند، برای هم‌کلاسی‌هایتان هم مطرح هستند. آن‌ها حتماً خوش‌حال می‌شوند شما سؤالاتی را که برای آن‌ها هم مطرح‌اند، بپرسید. در ضمن، نگران نظر و بیان معلم هم نباشید.

امتحان

از امتحان دادن فرار نکنید. معلم برای این‌که اطلاعات شما را درباره‌ی درس آزمایش کند، در کلاس امتحان می‌گیرد. به نظر من، امتحان شانس خوبی برای دانش‌آموزان است تا درجه‌ی مهارت خود را در درس بیازمایند. این بهترین فرصت برای آزمودن پیشرفت توانایی آن‌ها در ریاضیات است. اگر از امتحان دادن می‌ترسید، بهتر است قبل از آن اقدامات زیر را انجام دهید:

- اول این‌که یادداشت‌های کلاسی خود را مرور کنید.
- تکلیف‌های منزل را مرور کنید. مطمئن شوید که می‌توانید همه‌ی تمرین‌های تعیین شده را حل کنید.
- همه‌ی قضایا و تعاریف را خوب بخوانید و بفهمید، تا آن‌جا که به‌راحتی بتوانید آن‌ها را روی کاغذ بیاورید.
- تا آن‌جا که می‌توانید تمرین حل کنید. معمولاً تعداد تمرین‌های کتاب درسی آن‌قدر زیاد است که معلم نمی‌تواند همه‌ی آن‌ها را به‌عنوان تکلیف منزل برای شما تعیین یا در کلاس حل کند. پس هنگام آماده شدن برای امتحان، از هر بخش تعدادی از تمرین‌های حل نشده را حل کنید. می‌توانید از ابزارهای کمک‌درسی سمعی و بصری، مانند نوار یا کتاب‌های کمک‌آموزشی هم استفاده کنید.
- وقت خود را با عقل و درایت صرف کنید. دنبال بهانه نگردید. کار خود را به‌طور منظم انجام دهید. در این صورت، ریاضی را آسان و لذت‌بخش خواهید یافت.

مطالب گفته شده را به کار ببندید. بسیار مایلیم نظرات شما را در این‌باره بدانیم، لذا با ما مکاتبه کنید.

منبع:

یکی از مقالات دکتر لاری جوئل گلدشتاین از سایت:
www.projeeteuclid.org

مسائلی برای حل

ریاضیات ۱

۱. تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه $(k+1)$ عضوی، ۴۸ واحد از تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه $(k+3)$ عضوی کمتر است، حاصل (k^2-k+1) را بیابید.

۲. فرض کنید a کوچک‌ترین عدد طبیعی باشد که $N=3^5\times 6^7\times 13^5\times a$ مربع کامل یک عدد طبیعی باشد، در این صورت مجموع مقسوم‌علیه‌های مثبت a را بیابید.

۳. اگر عدد $0/6\overline{24}$ به کسر تحویل‌ناپذیر $\frac{a}{b}$ تبدیل شود، آن‌گاه مجموع رقم‌های دهگان اعداد a و b را بیابید.

۴. عبارت‌های زیر را تجزیه کنید.

$A=y^2+2y-x^2+1$ و $B=x^{10}+x^5+1$

۵. خارج قسمت تقسیم عبارت x^3+8 بر $x+2$ برابر x^m-kx^n است. مقدار $m+n+k$ را بیابید.

۶. اگر $x+\frac{1}{x}=3$ آن‌گاه مقدار $A=\frac{x^2}{(x+1)^2}$ را بیابید.

۷. مختصات سه رأس مثلثی به صورت $A(0,-1)$ ، $B(2,-4)$ ، $C(3,1)$ است، نوع مثلث را مشخص کنید.

۸. نمودار معادله‌ی $x^2-y^2-2x+2y=0$ از نقطه‌ی $A(a,b)$ دو بار عبور می‌کند، این نقطه را بیابید.

۹. حاصل عبارت $\frac{1}{(3\sqrt{8}-\sqrt{50}+\sqrt{3})}$ را بیابید.

۱۰. انتهای کمان α در کدام ناحیه باشد تا عبارت $\frac{\tan\alpha+\sin\alpha}{\cot\alpha+\cos\alpha}$ همواره مثبت باشد.

۱۱. مجموعه جواب دستگاه نامعادلات $\begin{cases}|x|<2\\(2x-1)<|x|\end{cases}$ را بدست آورید.

۱۲. معادله‌ی محور تقارن منحنی نمایش تابع $2x^2+y-x-\frac{3}{2}=0$ را بدست آورید.

۱۳. مکعب مستطیلی با قاعده مربع شکل و ارتفاع ۸ مفروض است. اگر عدد حجم مکعب ۱۰ واحد کمتر از عدد سطح مکعب مستطیل باشد، حجم مکعب را بیابید.

---

۱. دامنه‌ی تعریف هریک از معادله‌های زیر را تعیین و معادله را حل کنید.

الف) $\frac{2x}{x-1}+\frac{x+1}{x-2}=\frac{3x+2}{x}$

ب) $\sqrt{x}+\sqrt{x+1}=\sqrt{3x+1}$

۲. اولاً نمودار تابع f با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases}x^2-1 & x\geq 0\\ x-2 & x<0\end{cases}$ و $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ را رسم کنید و از روی آن، یک‌به‌یک و پوشایی f را تحقیق کنید. ثانیاً مقدار $f(f(\frac{1}{2}))$ را به‌دست آورید.

۳. اولاً مقدار k را طوری به‌دست آورید که دستگاه معادلات $\begin{cases}kx+(k+2)y=k+4\\(k+1)k+3ky=4k+1\end{cases}$ بی‌شمار جواب داشته باشد. ثانیاً به‌ازای $k=1$ ، دستگاه معادلات فوق را به روش ماتریس وارون حل کنید.

۴. نمودار تابع با ضابطه‌ی $y=\frac{|x|}{[x]}-x$ را به ازای $-2\leq x<2$ رسم کنید.

۵. معادله‌ی روبه‌رو را حل کنید:

$2\log 2+\log(x^2-1)-\log(4x-1)=0$

۶. دنباله‌ی $a_n=\frac{2n^2-1}{n^2-n+1}$ مفروض است. اولاً چندمین جمله از این دنباله مساوی $\frac{7}{3}$ است. ثانیاً آیا جمله‌ای از این دنباله مساوی ۲ است؟

۷. تصاعد حسابی را مشخص کنید که مجموع هشت جمله‌ی نخست آن، نصف مجموع هشت جمله‌ی بعدی آن باشد و دوبرابر جمله‌ی چهارم آن، ۷ واحد از جمله‌ی هشتم آن بیشتر باشد.

۸. m را طوری به‌دست آورید که $2m+12$ و m و $m-8$ سه جمله‌ی متوالی از یک تصاعد هندسی باشند.

۹. درستی اتحادهای زیر را اثبات کنید:

الف) $\frac{tg170^\circ tg100^\circ-\sin 290^\circ\cos 200^\circ}{\sin 160^\circ\sin 70^\circ}=tg20^\circ$

ب) $\cos 2\alpha(1+tg\alpha\, tg2\alpha)=1$

ج) $\frac{2\sin\alpha\cos 3\alpha}{\sin 2\alpha}=2\cos 2\alpha-1$

۱۰. معادله‌ی مثلثاتی زیر را حل کنید:

$\sin 2x+\sin^4 x=\cos^4 x$

۱۱. نقاط $A(1,-1)$ ، $B(3,3)$ و $C(-3,1)$ مفروض‌اند. مختصات بردارهای $\vec{a}=\vec{AB}$ ، $\vec{b}=\vec{AC}$ و $\vec{c}=\vec{BC}$ را به‌دست آورید و سپس بردارهای $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ و $\vec{a}.\vec{c}(2\vec{a}-\vec{b})$ را برحسب بردارهای واحد نمایش دهید. هم‌چنین زاویه‌ی بین بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ را به‌دست آورید.

۱۲. با حروف کلمه‌ی «آهستگی»، چند کلمه‌ی چهارحرفی می‌توان نوشت؟ چندتا از این کلمات با حرف «ت» شروع می‌شوند؟ چندتا از آن‌ها بدون نقطه هستند؟

۱۳. سه دانش‌آموز سال اول، چهار دانش‌آموز سال دوم و پنج دانش‌آموز سال سوم، به اردوی آموزشی رفته‌اند.

الف) اگر بخواهیم از بین آن‌ها یک تیم فوتبال شش‌نفره تشکیل دهیم، به‌طوری که از هر پایه به تعداد مساوی در تیم عضویت داشته باشند، این کار به‌چند طریق مقدور است؟

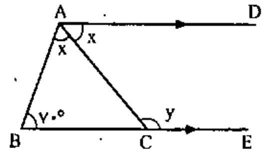
ب) اگر از این جمع به تصادف یک گروه چهارنفره انتخاب کنیم، چه‌قدر احتمال دارد که دوتا از آن‌ها کلاس اول و دوتا کلاس سوم باشند؟ چه‌قدر احتمال دارد که هیچ دانش‌آموز سال سومی در تیم نباشد؟

ریاضیات ۲

هندسه ی ۱

محمد هاشم رستمی

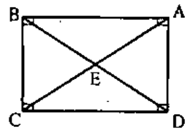
۱. اندازه‌ی x و y را در شکل داده شده تعیین کنید. (پیکان‌های هم‌جهت، خط‌های موازی را نشان می‌دهند.)



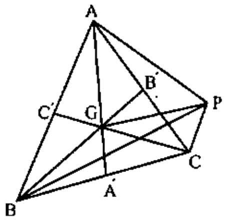
۲. چهارضلعی ABCD مستطیل و E نقطه‌ی برخورد قطرهای آن است. نسبت x به y را در هریک از حالت‌های زیر تعیین کنید:

الف) $AC = 2x + y\ ,\ BD = 16\ ,\ AD = x - 2y\ ,\ BC = 3$

ب) $AE = 2x\ ,\ BE = y\ ,\ ED = x + 10$



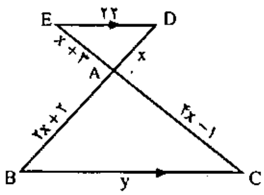
۳. اگر نقطه‌ی G محل برخورد میانه‌های مثلث ABC را به نقطه‌ی P واقع در خارج این مثلث وصل کنیم، ثابت کنید یکی از سه مثلث PGA، PGB و PGC، معادل مجموع دو مثلث دیگر است.



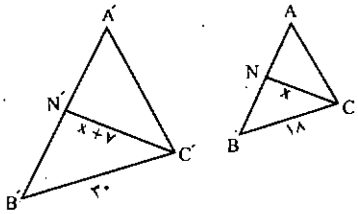
۴. تفاضل اندازه‌های دو ضلع زاویه‌ی قائمه از یک مثلث قائم‌الزاویه، مساوی ۳۱ است. اگر اندازه‌ی مساحت این مثلث ۱۸۰ واحد سطح باشد، اندازه‌ی ضلع‌های آن را تعیین کنید.

۵. واسطه‌ی هندسی بین دو مقدار $\sqrt{2a}$ و $\sqrt{18a^2}$ را تعیین کنید.

۶. اندازه‌ی x و y را با توجه به شکل داده شده تعیین کنید. پیکان‌های هم‌جهت، خط‌های موازی را نشان می‌دهند.



۷. دو مثلث ABC و A′B′C′ متشابه و CN و C′N′ دو میانه‌ی متناظر از این دو مثلث هستند. اندازه‌ی این دو میانه را تعیین کنید.

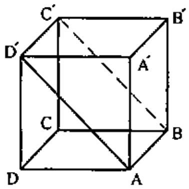


۸. مکعب مستطیلی به قطر $\sqrt{138}$ داده شده است که اندازه‌ی طول و عرض قاعده‌اش ۵ و ۷ است. درباره‌ی این مکعب مستطیل حساب کنید:

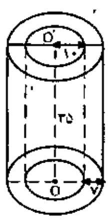
الف) اندازه‌ی ارتفاع را.

ب) اندازه‌ی مساحت جانبی، مساحت کل و حجم را.

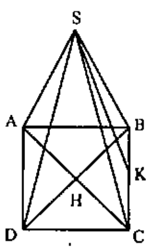
۹. در مکعب داده شده، اندازه‌ی مساحت ABCD مساوی $36\sqrt{2}$ است. اندازه‌ی حجم آن را تعیین کنید



۱۰. قاعده‌های دو استوانه‌ی شکل روبه‌رو، بر هم منطبق و مرکزهای دو قاعده نیز برهم منطبق هستند. با توجه به شکل، اندازه‌ی حجم فضای بین این دو استوانه را تعیین کنید.



۱۱. در هرم مربع القاعده‌ی منتظم SABCD، اندازه‌ی ارتفاع هرم مساوی ۲۴ سانتی‌متر و اندازه‌ی سهم هرم مساوی ۲۶ سانتی‌متر است. اندازه‌ی حجم آن را تعیین کنید.



۱۲. سطح کره‌ای به شعاع R با سطح کل مخروط قائمی به شعاع قاعده‌ی $\frac{R}{2}$ مساوی است. اندازه‌ی ارتفاع مخروط را تعیین کنید.

---

۱. مطلوب است محاسبه‌ی $\lim\limits_{x\to 4}\frac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt[3]{x^2+11}-3}$

۲. تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases}\frac{b\sin 4x}{\sqrt{1-\cos 4x}} & ,\ x<0\\ a[x-1] & ,\ x>0\\ \left[x^2-\sqrt{3}\right] & ,\ x=0\end{cases}$ در $x=0$ پیوسته است. a و b را بیابید.

۳. تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\tan^4 4x+\cot^2 2x$ مفروض است. $f'(\frac{\pi}{12})$ را بیابید.

۴. در تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\frac{x^2+4}{x^2+mx+1}$، حدود m را چنان بیابید که نمودار تابع سه مجانب داشته باشد.

حسابان ۱

مجتبی رفیعی

۵. نقطه‌ای روی محور yها بیابید که بتوان از آن، دو مماس عمود بر هم بر نمودار تابع با ضابطه‌ی $y=-x^2+2$ رسم کرد.

۶. معادله‌ی خط قائم بر نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\sqrt[3]{x^2}$ را در نقطه‌ای به طول ۸ واقع بر منحنی تابع بیابید.

۷. اگر خط به معادله‌ی $y=-2x+1$ از نقاط اکسترمم نسبی تابع با ضابطه‌ی $f(x)=x^3-3x^2+mx+5$ بگذرد، مقدار m را بیابید.

۷. معادله‌ی $\cos 2x+3\cos x-4=0$ را حل کنید و جواب‌های کلی آن را بنویسید.

۸. جدول تغییرات و نمودار دو تابع با ضابطه‌های زیر را رسم کنید.

الف) $y_1=-x^4+3x^2-1$ ب) $y_2=\frac{2x-1}{2x+1}$

جبر و احتمال

هوشنگ شرقی

۱. به کمک قضیه‌ی استقرای ریاضی ثابت کنید:

$4^n-3n+5=3r$

۲. اگر x و y دو عدد حقیقی باشند، ثابت کنید:

$1+x^2+y^2\ge 2(x+2y-2)$

۳. می‌دانیم $\sqrt{2}$ عددی گنگ است. ثابت کنید $\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}$ نیز عددی گنگ است.

۴. از جعبه‌ای که در آن سی جفت کفش بچه‌گانه در چهار رنگ متفاوت وجود دارد، لااقل چند جفت باید خارج کنیم تا مطمئن شویم که سه جفت آن‌ها همرنگ هستند؟

۵. ثابت کنید هرگاه x و y دو عدد گویای غیرصفر باشند، حاصل تقسیم آن‌ها نیز عددی گویاست.

۶. با استفاده از جبر مجموعه‌ها ثابت کنید:

$(A-C)\cap(B-C)=(A\cap B)-C$

۷. اگر $A=\{x\in Z|x^2\le 1\}$ و $B=\{x\in Z|x^2=x\}$ باشد، مجموعه‌ی $A^2-A\times B$ را با اعضای خود نمایش دهید و نمودار هندسی آن را رسم کنید.

۸. رابطه‌ی زیر در مجموعه‌ی $\mathbb{R}^2$ مفروض است. اولاً، نشان دهید این رابطه هم‌ارزی است. ثانیاً، کلاس هم ارزی $[(-2,1)]$ را مشخص کنید.

$$\begin{cases} R:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2 \\ (x,y)R(z,t)\Leftrightarrow x+\frac{1}{2}t^2=z+\frac{1}{2}y^2 \end{cases}$$

۹. یک تیم فوتبال در دو هفته‌ی متوالی دو مسابقه داده است. نتیجه‌ی هر مسابقه می‌تواند برای این تیم برد، باخت یا مساوی شود.

الف) فضای نمونه‌ی این پدیده‌ی تصادفی را بنویسید.

ب) پیشامد A را که در آن این تیم، لااقل یک برد داشته است، بنویسید.

ج) پیشامد B را که در آن این تیم، فقط یک باخت داشته است، بنویسید.

د) پیشامدهای $A\cap B$ و $A'-B$ را مشخص کنید.

۱۰. می‌خواهیم از بین ۵ مرد و ۴ زن، یک کمیته‌ی چهارنفره تشکیل دهیم. مطلوب است تعیین احتمال آن‌که: الف) تعداد مردها در کمیته بیشتر باشد. ب) تعداد زن‌ها در کمیته بیشتر باشد.

۱۱. در یک مسابقه‌ی دو، شانس برد A، دوبرابر شانس برد B و نصف شانس برد C و شانس برد B، سه برابر شانس برد D است. شانس برد D و احتمال برد B یا C را به دست آورید.

۱۲. دو دوست بین ساعت ۸ تا ۸:۲۰ در جایی قرار ملاقات دارند. مطلوب است تعیین احتمال آن‌که هیچ یک بیشتر از ۵ دقیقه معطل نشود.

۱۳. یک عدد طبیعی کوچک‌تر از ۲۰۱، به تصادف انتخاب می‌کنیم. مطلوب است تعیین احتمال آن‌که این عدد مضرب ۳ یا ۵ باشد، ولی مضرب ۷ نباشد.

۱۴. اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه‌ی S باشند، ثابت کنید:

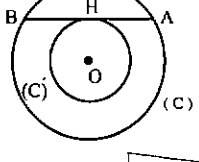
$P(A'-B)=P(A')+P(B')-P(A\cap B)'$

۱. در مثلث ABC، $\hat{A}=65°$ و $\hat{B}=40°$ است. ترتیب اندازه‌های سه ضلع این مثلث را مشخص کنید.

۲. ثابت کنید در هر مثلث، بزرگ‌ترین ضلع، از ثلث محیط مثلث بزرگ‌تر است و کوچک‌ترین ضلع، از ثلث محیط کوچک‌تر است.

۳. از مثلث ABC، اندازه‌ی زاویه‌های $\hat{B}=\alpha$ و $\hat{C}=\beta$ و محیط مثلث $AB+BC+AC=2P$ داده شده است. مثلث را رسم کنید.

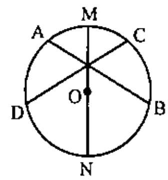
۴. دو دایره‌ی هم‌مرکز (C) و (C') داده شده‌اند. وتر AB، از دایره‌ی (C) به طول ۲۴ سانتی‌متر، بر دایره‌ی (C') مماس است. اگر نسبت شعاع‌های این دو دایره مساوی $\frac{1}{2}$ باشد، اندازه‌ی این دو شعاع را تعیین کنید.



هندسه‌ی ۲

محمدهاشم رستمی

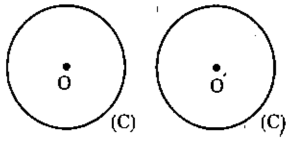
۵. ثابت کنید در هر دایره، دو وتر متقاطع متساوی، با قطری که از نقطه‌ی تقاطعشان می‌گذرد، زاویه‌های مساوی می‌سازند.



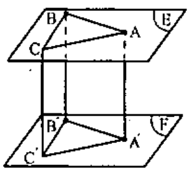
۶. مختصات نقطه‌ای را تعیین کنید که تحت تبدیل $T(x,y)=(2x-1, 3y+6)$ تصویرش نقطه‌ی (۵ و ۳-) باشد.

۷. نقطه‌های $A=(4,0)$ ، $B=(2,6)$ و $C=(-6,0)$ رأس‌های مثلث ABC هستند. این مثلث و تصویر آن تحت تجانس $H(x,y)=(\frac{1}{2}x, \frac{1}{2}y)$ را در یک دستگاه مختصات رسم کنید. این تجانس انبساط است یا انقباض؟

۸. دو دایره‌ی مساوی C و C′ داده شده‌اند. ثابت کنید که هر یک از این دو دایره، انتقال یافته‌ی دایره‌ی دیگر است. بردار انتقال را نیز مشخص کنید.



۹. دو صفحه‌ی E و F با هم موازی‌اند. اگر ABC مثلثی در صفحه‌ی E و A′B′C′ تصویر قائم این مثلث در صفحه‌ی F باشد، ثابت کنید این دو مثلث هم‌نهشت هستند.



پاسخ تشریحی مسائل

ریاضیات ۱

.۱

$$2^{k+1}+48=2^{k+3} \Rightarrow 2^{k+3}-2^{k+1}=48 \Rightarrow 8(2^k)-2(2^k)=48$$
$$\Rightarrow 6(2^k)=48 \Rightarrow 2^k=8 \Rightarrow k=3$$
$$k^2-k+1=(3^2)-(3)+1=7$$

.۲

$$N=3^5\times 6^7\times 13^5\times a=2^7\times 3^{12}\times 13^5\times a$$
کوچکترین مقدار $a = 2\times 13=26$

مقسوم‌علیه‌های مثبت $a = (1,2,13,26) \Rightarrow 1+2+13+26=42$

.۳

$$x=0/6\overline{24}$$
$$10x=6/\overline{24}$$
$$1000x=624/\overline{24}$$
$$990x=618$$
$$\Rightarrow x=\frac{618}{990}=\frac{103}{165} \Rightarrow \begin{cases} a=103 \\ b=165 \end{cases} \Rightarrow 0+6=6$$

.۴

$$A=y^2+2y-x^2+1=(y^2+2y+1)-x^2$$
$$=(y+1)^2-x^2=(x+y+1)(y-x+1)$$
$$B=x^{10}+x^5+1+x-x=x^{10}-x+(x^5+x+1)$$
$$=x^{10}-x+(x^5-x^2+x^2+x+1)$$
$$=x^{10}-x+x^2(x^3-1)+x^2+x+1$$
$$=x^{10}-x+x^2(x-1)(x^2+x+1)+x^2+x+1$$
$$=x(x^9-1)+(x^2+x+1)[x^2(x-1)+1]$$
$$=x(x^3-1)(x^6+x+1)+(x^2+x+1)[x^2(x-1)+1]$$
$$=x(x-1)(x^2+x+1)(x^6+x+1)+(x^2+x+1)[x^2(x-1)+1]$$
$$=(x^2+x+1)\left[x(x-1)(x^6+x+1)+x^2(x-1)+1\right]$$

.۵

$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$$
$$x^3+8=(x+2)(x^2-2x+2^2) \Rightarrow$$
$$x^2-2x+2^2=x^m-kx^n+4$$
$$\Rightarrow \begin{cases} m=2 \\ n=1 \\ k=2 \end{cases} \Rightarrow m+n+k=5$$

.۶

$$x+\frac{1}{x}=3 \Rightarrow x+\frac{1}{x}+2=3+2 \Rightarrow \frac{x^2+1+2x}{x}=5$$
$$\Rightarrow \left(\frac{x^2+1+2x}{x}=5\right)^2 \Rightarrow \frac{(x+1)^4}{x^2}=25 \Rightarrow \frac{x^2}{(x+1)^4}=\frac{1}{25}$$

.۷

$$\left.\begin{array}{l} m_{AC}=\frac{1-(-1)}{3-0}=\frac{2}{3} \\ m_{AB}=\frac{-4-(-1)}{2-0}=-\frac{3}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow m_{AC}\cdot m_{AB}=-1 \Rightarrow$$ قائم‌الزاویه

$$\left.\begin{array}{l} AB=\sqrt{(2-0)^2+(-4-(-1))^2}=\sqrt{4+9}=\sqrt{13} \\ AC=\sqrt{(3-0)^2+(1-(-1))^2}=\sqrt{9+4}=\sqrt{13} \end{array}\right\}$$

$\Rightarrow AB=AC \Rightarrow$ متساوی‌الساقین

۸. $x^۲ - y^۲ - ۲x + ۲y = ۰ \Rightarrow (x-۱)^۲ - (y-۱)^۲ = ۰$

$\Rightarrow \begin{cases} x-۱ = y-۱ \Rightarrow y = x \\ x-۱ = -y+۱ \Rightarrow y = ۲-x \end{cases}$

معادله‌ی فوق نمودار دو خط است، که نقطه‌ی تقاطع آنها مورد نظر است. $x = ۲ - x \Rightarrow x = ۱ \Rightarrow A(۱,۱)$

۹. $\frac{۱}{(۳\sqrt{۸} - \sqrt{۵۰} + \sqrt{۳})} = \frac{۱}{۶\sqrt{۲} - ۵\sqrt{۲} + \sqrt{۳}} = \frac{۱}{\sqrt{۲} + \sqrt{۳}}$

برای گویا کردن کسر، صورت و مخرج را در مزدوج مخرج ضرب می‌کنیم.

$\frac{۱}{\sqrt{۲}+\sqrt{۳}} \times \frac{\sqrt{۲}-\sqrt{۳}}{\sqrt{۲}-\sqrt{۳}} = \frac{\sqrt{۲}-\sqrt{۳}}{۲-۳} = \sqrt{۳} - \sqrt{۲}$

۱۰.

$\frac{\tan\alpha + \sin\alpha}{\cot\alpha + \cos\alpha} = \frac{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \sin\alpha}{\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + \cos\alpha} = \frac{\frac{\sin\alpha(۱+\cos\alpha)}{\cos\alpha}}{\frac{\cos\alpha(۱+\sin\alpha)}{\sin\alpha}}$

$= \frac{\sin^۲\alpha(۱+\cos\alpha)}{\cos^۲\alpha(۱+\sin\alpha)}$

هر چهار عامل فوق نامنفی هستند، پس به شرط آن که هیچ‌یک از عبارات فوق صفر نباشند (α مضربی از ۹۰° نباشد) عبارت داده شده همیشه مثبت می‌شود.

۱۱.

$x \ge ۰, x < ۲, ۲x - ۱ < x \Rightarrow x < ۱ \Rightarrow ۰ \le x < ۱$

$x < ۰, -x < ۲, ۲x - ۱ < -x \Rightarrow ۳x < ۱ \Rightarrow x < \frac{۱}{۳} \Rightarrow -۲ < x < ۰$

$\Rightarrow -۲ < x < ۱ - ۱۱$

۱۲. معادله‌ی محور تقارن عبارت درجه‌ی دوم $y = ax^۲ + bx + c$ خط $x = -\frac{b}{۲a}$ می‌باشد. پس:

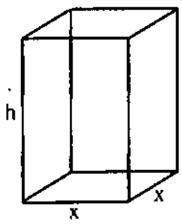
$۲x^۲ + y - x - \frac{۳}{۲} = ۰ \Rightarrow y = -۲x^۲ + x + \frac{۳}{۲}$

$\Rightarrow$ معادله‌ی محور تقارن : $x = -\frac{-۱}{۲(-۲)} = \frac{۱}{۴}$

۱۳.

حجم مکعب = سطح قاعده × ارتفاع = $x^۲ \times ۸$

سطح کل=سطح دو قاعده + مجموع سطح جانبی= $۲x^۲ + ۴x(۸)$



$\Rightarrow ۸x^۲ = ۲x^۲ + ۳۲x - ۱۰$

$\Rightarrow ۶x^۲ = ۳۲x - ۱۰ \Rightarrow ۳x^۲ - ۱۶x + ۵ = ۰$

$\Rightarrow \frac{۱}{۳}(۳x - ۱۵)(۳x - ۱) = ۰$

$\Rightarrow \begin{cases} x = ۵ \Rightarrow V = ۸x^۲ = ۸ \times ۲۵ = ۲۰۰ \\ x = \frac{۱}{۳} \Rightarrow V = ۸x^۲ = ۸ \times \frac{۱}{۹} = \frac{۸}{۹} \end{cases}$

ریاضیات ۲

۱. الف) $D = \mathbb{R} - \{۰,۱,۲\}$

$\frac{۲x^۲ - ۴x + x^۲ - ۱}{(x-۱)(x-۲)} = \frac{۳x+۲}{x} \Rightarrow ۳x^۳ - ۴x^۲ - x$

$= (۳x+۲)(x^۲ - ۳x + ۲)$

$\Rightarrow ۳x^۳ - ۴x^۲ - x = ۳x^۳ - ۹x^۲ + ۶x + ۲x^۲ - ۶x + ۴$

$\Rightarrow ۳x^۲ - x - ۴ = ۰ \Rightarrow x = \frac{۱ \pm \sqrt{۴۹}}{۶} \Rightarrow x = -۱$ یا $x = \frac{۴}{۳}$

ب) $x \ge ۰ \ \ x \ge -۱ \ , \ x \ge -\frac{۱}{۳} \Rightarrow D = \{x | x \in \mathbb{R}, x \ge ۰\}$

$(\sqrt{x} + \sqrt{x+۱})^۲ = (\sqrt{۳x+۱})^۲ \Rightarrow x + x + ۱ + ۲\sqrt{x^۲ + x} = ۳x + ۱$

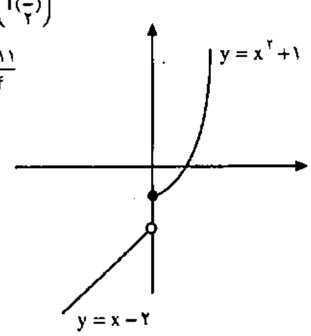
$\Rightarrow ۲\sqrt{x^۲+x} = x \Rightarrow ۴x^۲ + ۴x = x^۲ \Rightarrow ۳x^۲ + ۴x = ۰$

$\Rightarrow x(۳x+۴) = ۰ \Rightarrow x = ۰$ یا $x = -\frac{۴}{۳}$ (غیر قابل قبول)

۲. با توجه به نمودار، f یک به یک است، ولی پوشا نیست.

$f(\frac{۱}{۲}) = \frac{۱}{۴} - ۱ = -\frac{۳}{۴} \Rightarrow f\left(f(\frac{۱}{۲})\right)$

$= f(-\frac{۳}{۴}) = -\frac{۳}{۴} - ۲ = \frac{-۱۱}{۴}$



۳.

$x = \frac{\begin{vmatrix} k+۴ & k+۲ \\ ۴k+۱ & ۳k \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} k & k+۲ \\ k+۱ & ۳k \end{vmatrix}} = \frac{۳k^۲ + ۱۲k - ۴k^۲ - ۸k - k - ۲}{۳k^۲ - k^۲ - ۳k - ۲}$

$= \frac{-k^۲ + ۳k - ۲}{۲k^۲ - ۳k - ۲}$

$-k^۲ + ۳k - ۲ = ۰ \Rightarrow k = ۱$ یا $k = ۲$

به ازای $k = ۲$ مخرج کسر نیز مساوی صفر می‌شود. درنتیجه به ازای این مقدار، دستگاه معادلات مبهم می‌شود و بی شمار جواب دارد. اما به ازای $k = ۱$، دستگاه به صورت زیر درمی‌آید:

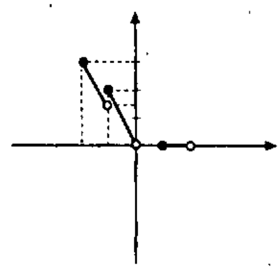
$\begin{cases} x + ۳y = ۵ \\ ۲x + ۳y = ۵ \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} ۱ & ۳ \\ ۲ & ۳ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۵ \\ ۵ \end{bmatrix} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} ۱ & ۳ \\ ۲ & ۳ \end{bmatrix}$

$\Rightarrow A^{-۱} = \frac{۱}{-۳}\begin{bmatrix} ۳ & -۳ \\ -۲ & ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۱ & ۱ \\ \frac{۲}{۳} & -\frac{۱}{۳} \end{bmatrix}$

$\Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۱ & ۱ \\ \frac{۲}{۳} & -\frac{۱}{۳} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۵ \\ ۵ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰ \\ \frac{۵}{۳} \end{bmatrix}$

۴.

$f(x) \begin{cases} \frac{-x}{-۲} - x & -۲ \le x < -۱ \\ \frac{-x}{-۱} - x & -۱ \le x < ۰ \\ \text{تعریف نشده} & ۰ \le x < ۱ \\ \frac{x}{۱} - x & ۱ \le x \le ۲ \end{cases}$



$$\Rightarrow f(x)=\begin{cases}-\frac{3}{2}x & -2\le x<-1\\ -2x & -1\le x<0\\ 0 & 1\le x\le 2\end{cases}$$

۵. $\log 4+\log(x^2-1)=\log(4x-1)$

$\Rightarrow \log(4x^2-4)=\log(4x-1)\Rightarrow 4x^2-4=4x-1$

$\Rightarrow 4x^2-4x-3=0\Rightarrow (2x-3)(2x+1)=0$

$\Rightarrow x=\frac{3}{2}$ یا $x=-\frac{1}{2}$ غ ق ق

۶. اولاً: $\frac{2n^2-1}{n^2-n+1}=\frac{7}{3}\Rightarrow 7n^2-7n+7=6n^2-3$

$n^2-7n+10=0\Rightarrow (n-2)(n-5)=0\Rightarrow n=2$ یا $n=5$

جملات دوم و پنجم، هر دو مساوی $\frac{7}{3}$ هستند.

$a_n=2\Rightarrow \frac{2n^2-1}{n^2-n+1}=2\Rightarrow 2n^2-1=2n^2-2n+2\Rightarrow n=\frac{3}{2}$

و چون $n\notin\mathbb{N}$، بنابراین چنین جمله‌ای وجود ندارد.

۷. $S_8=\frac{1}{2}(S_{16}-S_8)\Rightarrow S_{16}=3S_8$

$\Rightarrow 8[2a_1+15d]=3\times 4[2a_1+7d]\Rightarrow 4a_1+30d=6a_1+21d$

$\Rightarrow 2a_1=9d, 2a_4=a_8+7\Rightarrow 2(a_1+3d)=a_1+7d+7$

$\Rightarrow a_1-d=7\quad \begin{cases}a_1-d=7\\ 2a_1-9d=0\end{cases}\Rightarrow d=2,\ a_1=9$

$9,11,13,15,\cdots$

۸.

$m^2=(m-8)(2m+12)=2m^2+12m-16m-96$

$\Rightarrow m^2-4m-96=0\Rightarrow (m-12)(m+8)=0$

$\Rightarrow m=12$ یا $m=-8$

۹.

الف) $\text{کسر}=\frac{tg(180-10)tg(90+10)-\sin(270+20)\cos(180+20)}{\sin(180-20)\sin(90-20)}$

$=\frac{(-tg10)(-\cot g10)-(-\cos20)(-\cos20)}{(\sin20)(\cos20)}=\frac{1-\cos^2 20}{\sin20\cos20}$

$=\frac{\sin^2 20}{\sin20\cos20}=\frac{\sin20}{\cos20}=tg20$

ب) $\cos2\alpha(1+\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}.\frac{\sin2\alpha}{\cos2\alpha})=(\cos2\alpha+\frac{\sin\alpha\sin2\alpha}{\cos\alpha})$

$=\frac{\cos2\alpha\cos\alpha+\sin2\alpha\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\cos(2\alpha-\alpha)}{\cos\alpha}=\frac{\cos\alpha}{\cos\alpha}=1$

ج) $\frac{2\sin\alpha(4\cos^3\alpha-3\cos\alpha)}{2\sin\alpha\cos\alpha}=4\cos^2\alpha-3$

$=4(\frac{1+\cos2\alpha}{2})-3=2+2\cos2\alpha-3=2\cos2\alpha-1$

۱۰.

$\sin2x=\cos^4x-\sin^4x=(\underbrace{\cos^2x-\sin^2x}_{\cos2x})(\underbrace{\cos^2x+\sin^2x}_{1})$

$\Rightarrow \sin2x=\cos2x\Rightarrow tg2x=1=tg\frac{\pi}{4}\Rightarrow 2x=k\pi+\frac{\pi}{4}$

$\Rightarrow x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{8}$

۱۱. $\vec a=\begin{bmatrix}3\\3\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix}$ و $\vec b=\begin{bmatrix}-3\\1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-4\\2\end{bmatrix}$

$\vec c=\begin{bmatrix}-3\\1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}3\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-6\\-2\end{bmatrix}$ و $\vec a+\vec b+\vec c=\begin{bmatrix}-8\\4\end{bmatrix}=-8i+4j$ و

$\vec a.\vec c=2\times(-6)+4(-2)=-20\Rightarrow \vec a.\vec c(2\vec a-\vec b)$

$=-20(8i+6j)=-160i-120j$

$\vec a.\vec b=2(-4)+4(2)=0\Rightarrow \vec a\perp\vec b\Rightarrow \alpha=90^\circ$

۱۲.

تعداد کلمات چهار حرفی: $p(6,4)=\frac{6!}{2!}=360$

تعداد کلمات چهار حرفی که با «ت» شروع می‌شوند: $p(5,3)=\frac{5!}{2!}=60$

برای شمارش تعداد کلمات چهار حرفی بدون نقطه، توجه می‌کنیم که حرف «ی» در وسط نقطه‌دار است و برای بدون نقطه بودن، تنها می‌تواند حرف آخر باشد. بنابراین:

«ی» در آخر باشد: ۱ ۴ ۳ ۲ (ی)

«ی» در آخر نباشد: ۴ ۳ ۲ ۱

درنتیجه، تعداد کلمات بدون نقطه برابر است با:

$24+24=48$

۱۳.

الف) $C(3,2).C(4,2).C(5,2)=3\times6\times10=180$

ب) $p(A)=\frac{C(3,2).C(5,2)}{C(12,4)}=\frac{3\times10}{11\times5\times9}=\frac{2}{33}$

$p(B)=\frac{C(7,4)}{C(12,4)}=\frac{35}{11\times5\times9}=\frac{7}{99}$

هندسه ۱

۱. الف) روش اول: AD موازی BE و AB قاطع است. پس داریم:

$D\hat AB+A\hat BC=180^\circ\Rightarrow x+x+70^\circ=180^\circ$

$\Rightarrow 2x=180^\circ-70^\circ=110^\circ\Rightarrow x=55^\circ$

از طرف دیگر، ACE زاویه‌ی خارجی مثلث ABC است. پس داریم:

$A\hat CE=A\hat BC+B\hat AC\Rightarrow y=70^\circ+x=70^\circ+55^\circ=125^\circ$

ب) روش دوم: AD موازی BC و AC قاطع است، پس $A\hat CB=C\hat AD=x$. از آن‌جا در مثلث ABC داریم:

$\hat A+\hat B+\hat C=180^\circ\Rightarrow x+70^\circ+x=180^\circ\Rightarrow x=55^\circ$

اکنون داریم:

$A\hat CB+A\hat CE=180^\circ\Rightarrow 55^\circ+y=180^\circ\Rightarrow y=125^\circ$

۲. در مستطیل ABCD داریم:

الف)

$AC=BD\Rightarrow 2x+y=16\quad (1)$

$AD=BC\Rightarrow x-2y=3\quad (2)$

از آن‌جا داریم:

$\begin{matrix}(1)\\(2)\end{matrix}\begin{cases}2x+y=16\\ x-2y=3\end{cases}\Rightarrow x=7$ و $y=2$

ب) قطرهای مستطیل با هم مساوی‌اند و یکدیگر را نصف می‌کنند. پس داریم:

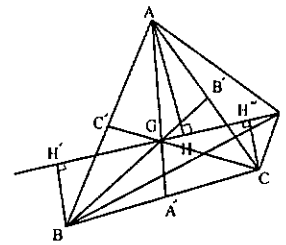
$$AE = BE \Rightarrow 2x = y \quad (1)$$
$$AE = ED \Rightarrow 2x = x + 10 \quad (2)$$
$$\begin{matrix}(1)\\(2)\end{matrix}\begin{cases}2x = y\\ 2x = x + 10\end{cases} \Rightarrow x = 10 \quad \text{و} \quad y = 20$$

۳. از رأس‌های A، B و C، عمودهای AH، BH' و CH'' را بر خط PG رسم می‌کنیم. می‌دانیم که $AH = BH' + CH''$ است (بنا به مسئله‌ای در جلد اول دایرةالمعارف هندسه). از آن‌جا داریم:

$$AH \times \frac{PG}{2} = BH' \times \frac{PG}{2} + CH'' \times \frac{PG}{2}$$
$$\Rightarrow S_{PAG} = S_{PBG} + S_{PCG}$$

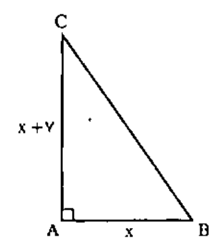
و این حکم مسئله است که ثابت شد.

نکته: صورت مسئله‌ی جلد اول دایرةالمعارف هندسه چنین است:



۴. مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABC، $(\hat{A} = 90^\circ)$ را در نظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم AB یعنی ضلع کوچک‌تر زاویه‌ی قائمه‌ی مثلث، مساوی x باشد. در این صورت، $AC = x + 31$ خواهد شد. اما بنا به فرض داریم:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB.AC \quad \text{و} \quad S_{ABC} = 180$$



از آن‌جا خواهیم داشت:

$$180 = \frac{1}{2} \times x(x+31) \Rightarrow x^2 + 31x - 360 = 0$$
$$\Rightarrow x = -40 < 0 \;\text{و}\; x = 9 \Rightarrow AB = 9 \;\text{و}\; AC = 16$$
$$BC^2 = AB^2 + AC^2 = 9^2 + 16^2 = 337 \Rightarrow BC = \sqrt{337}$$

۵. این واسطه‌ی هندسی را x می‌گیریم. داریم:

$$x^2 = (\sqrt{2a})(\sqrt{18a^3}) = \sqrt{36a^4} = 6a^2 \Rightarrow x = a^2\sqrt{6}$$

۶. بنا به نتیجه‌ی ۲ از قضیه‌ی تالس داریم:

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE} = \frac{BC}{DE} \Rightarrow \frac{2x+2}{x} = \frac{4x-1}{x+3} = \frac{y}{24}$$
$$\Rightarrow \frac{2x+2}{x} = \frac{4x-1}{x+3} \Rightarrow 2x^2 + 8x + 6 = 4x^2 - x$$
$$\Rightarrow 2x^2 - 9x - 6 = 0$$
$$\Rightarrow x = \frac{9 \pm \sqrt{81+48}}{4} = \frac{9 \pm \sqrt{129}}{4}$$
$$x = \frac{9 - \sqrt{129}}{4} < 0 \quad \text{غ‌ق‌ق}$$
$$x = \frac{9 + \sqrt{129}}{4} \;\text{جواب} \Rightarrow \frac{\frac{2(9+\sqrt{129})}{4} + 2}{\frac{9+\sqrt{129}}{4}} = \frac{y}{24}$$
$$\Rightarrow y = 24 \times \frac{26 + 2\sqrt{129}}{9 + \sqrt{129}}$$

۷. می‌دانیم که نسبت طول میانه‌های متناظر دو مثلث متشابه، مساوی نسبت تشابه آن دو مثلث است. بنابراین داریم:

$$\frac{CN}{C'N'} = \frac{BC}{B'C'} \Rightarrow \frac{x}{x+7} = \frac{18}{30} \Rightarrow 30x = 18x + 126$$
$$\Rightarrow 12x = 126 \Rightarrow x = 10/5 \Rightarrow CN = 10/5 \;\text{و}\; C'N' = 17/5$$

۸. طول، عرض، ارتفاع و قطر مکعب مستطیل را به‌ترتیب a، b، c و d فرض می‌کنیم. بنا به داده‌های مسئله داریم:

$$a = 5 \;،\; b = 7 \;\text{و}\; c = x \;\text{و}\; d = \sqrt{138}$$

اما می‌دانیم که در مکعب مستطیل داده شده، $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ است، پس خواهیم داشت:

$$\sqrt{138} = \sqrt{5^2 + 7^2 + x^2} = 138 = 25 + 49 + x^2 \Rightarrow x^2 = 64$$

$x = 8$ اندازه‌ی ارتفاع مکعب مستطیل

S جانبی $=$ محیط قاعده $\times$ ارتفاع $= 2(5+7) \times 8 = 192$

S یک قاعده $= 5 \times 7 = 35$

S کل $= S$ جانبی $+ 2 \times S$ یک قاعده $= 35 + 192 = 227$ واحد سطح

حجم مکعب مستطیل $= a.b.c = 5 \times 7 \times 8 = 280$ واحد حجم

۹. ضلع مکعب را a فرض می‌کنیم. ABCD بخشی از یک صفحه‌ی قطری است که به مکعب محدود است (صفحه‌ی قطری مکعب، یا صفحه‌ی قطری مکعب مستطیل، صفحه‌هایی هستند که بر هر دو قطر مکعب یا بر هر دو قطر مکعب مستطیل می‌گذرند). بنابراین، ABCD مستطیلی است که طول و عرضش مساوی a و $a\sqrt{2}$ است. درنتیجه، مساحتش $a^2\sqrt{2}$ است. بنابراین خواهیم داشت:

$36\sqrt{2} = a^2\sqrt{2} \Rightarrow a^2 = 36 \Rightarrow a = 6$ اندازه‌ی ضلع مکعب

از آن‌جا:

حجم مکعب $= a^3 \Rightarrow$ حجم مکعب $= 6^3 = 216$ واحد حجم

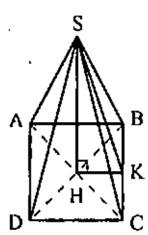
۱۰. با توجه به شکل داده شده، شعاع قاعده‌ی استوانه‌ی کوچک‌تر $R = 10$ و شعاع قاعده‌ی استوانه‌ی بزرگ‌تر $R' = 10 + 7 = 17$ و ارتفاع مشترک استوانه‌ها $h = 35$ است. بنابراین داریم:

حجم استوانه‌ی کوچک‌تر $= \pi R^2 h = \pi \times 10^2 \times 35 = 3500\pi$

حجم استوانه‌ی بزرگ‌تر $= \pi R'^2 h = \pi \times 17^2 \times 35 = 10115\pi$

حجم بین دو استوانه $= 10115\pi - 3500\pi = 6615\pi$ واحد حجم

۱۱. ارتفاع هرم SH و سهم هرم SK است. از H به K وصل می‌کنیم. در مثلث قائم‌الزاویه‌ی SHK $(\hat{H} = 90^\circ)$ داریم:

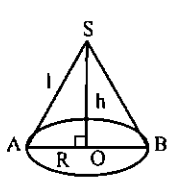


$$SK^2 = SH^2 + HK^2 \Rightarrow 26^2 = 24^2 + HK^2$$
$$\Rightarrow HK^2 = 676 - 576 = 100 \Rightarrow HK = 10 = \frac{AB}{2} \Rightarrow AB = 20$$

از آن‌جا:

حجم هرم $= \frac{1}{3} S_{ABCD} \times AH = \frac{1}{3}(20)^2 \times 24 = 3200$

۱۲. ارتفاع مخروط داده شده را h و مولد آن را l می‌نامیم. در مثلث قائم‌الزاویه‌ی SAO $(\hat{O} = 90^\circ)$ داریم



$$l^2 = h^2 + \left(\frac{R}{2}\right)^2 \Rightarrow l = \sqrt{h^2 + \frac{R^2}{4}}$$

S کل مخروط $= S$ جانبی مخروط $+ S$ قاعده‌ی مخروط

$\Rightarrow S$ کل مخروط $= \frac{1}{2}(2\pi)\frac{R}{2} \times l + \pi\left(\frac{R}{2}\right)^2$

$$\Rightarrow S_{\text{کل مخروط}} = \frac{\pi R}{۲}\left(\sqrt{h^۲+\frac{R^۲}{۴}}\right)+\frac{\pi R^۲}{۴} \quad \text{و} \quad S_{\text{کره}} = \frac{۴}{۳}\pi R^۲$$

$$S_{\text{کل مخروط}} = S_{\text{کره}} \Rightarrow \frac{۴}{۳}\pi R^۲ = \frac{\pi R}{۲}\sqrt{h^۲+\frac{R^۲}{۴}}+\frac{\pi R^۲}{۴}$$

$$\frac{۴R}{۳}-\frac{R}{۴} = \frac{۱}{۲}\sqrt{h^۲+\frac{R^۲}{۴}} \Rightarrow \frac{۱۳R}{۱۲} = \frac{۱}{۲}\sqrt{h^۲+\frac{R^۲}{۴}}$$

$$\Rightarrow \frac{۱۳R}{۶} = \sqrt{h^۲+\frac{R^۲}{۴}} \Rightarrow \frac{۱۶۹R^۲}{۳۶} = h^۲+\frac{R^۲}{۴}$$

$$\Rightarrow h^۲ = \frac{۱۶۹R^۲}{۳۶}-\frac{R^۲}{۴}$$

$$\Rightarrow h^۲ = \frac{۱۶۰R^۲}{۳۶} = \frac{۴۰R^۲}{۹} \Rightarrow h = \frac{۲\sqrt{۱۰}}{۳}R \quad \text{ارتفاع مخروط}$$

حسابان

۱.
$$\lim_{x\to ۴}\frac{\sqrt{۲x+۱}-۳}{\sqrt[۳]{x^۲+۱۱}-۳} = \frac{۰}{۰}$$

$$\lim_{x\to ۴}\frac{\sqrt{۲x+۱}-۳}{\sqrt[۳]{x^۲+۱۱}-۳}$$

$$= \lim_{x\to ۴}\frac{\sqrt{۲x+۱}-۳}{\sqrt[۳]{x^۲+۱۱}-۳}\times\frac{\sqrt{۲x+۱}+۳}{\sqrt{۲x+۱}+۳}\times\frac{\sqrt[۳]{(x^۲+۱۱)^۲}+۹+۳\sqrt[۳]{x^۲+۱۱}}{\sqrt[۳]{(x^۲+۱۱)^۲}+۹+۳\sqrt[۳]{x^۲+۱۱}}$$

$$= \lim_{x\to ۴}\frac{(۲x+۱-۹)(\sqrt[۳]{(x^۲+۱۱)^۲}+۹+۳\sqrt[۳]{x^۲+۱۱})}{(x^۲+۱۱-۲۷)(\sqrt{۲x+۱}+۳)}$$

$$= \lim_{x\to ۴}\frac{۲(x-۴)(۲۷)}{(x-۴)(x+۴)(۶)} = \frac{۹}{۵}$$

۲.

$$\text{حد چپ} \quad \lim_{x\to ۰^-} f(x) = \lim_{x\to ۰^-}\frac{b\sin ۴x}{\sqrt{۸x^۲}} = \lim_{x\to ۰^-}\frac{b(۴x)}{-۲\sqrt{۲}x} = \frac{-۲b}{\sqrt{۲}}$$

$$\text{حد راست} \quad \lim_{x\to ۰^+} f(x) = a[۰^+-۱] = -a$$

$$\text{مقدار تابع} \quad f(۰) = [۰-\sqrt{۳}] = -۲$$

$$-a=-۲ \Rightarrow \boxed{a=۲} \quad \frac{-۲b}{\sqrt{۲}} = -۲ \Rightarrow \boxed{b=\sqrt{۲}}$$

۳.

$$f'(x) = ۱۶(۱+\tan^۲ ۴x)\tan^۳ ۴x - ۴(۱+\cot^۲ ۲x).\cot ۲x$$

$$f'(\frac{\pi}{۱۲}) = ۱۶(۱+\tan^۲\frac{\pi}{۳})\tan^۳\frac{\pi}{۳} - ۴(۱+\cot^۲\frac{\pi}{۶}).\cot\frac{\pi}{۶}$$

$$f'(\frac{\pi}{۱۲}) = ۱۶(۱+۳)(۳\sqrt{۳}) - ۴(۱+۳)\sqrt{۳} = ۱۷۶\sqrt{۳}$$

۴. چون صورت و مخرج کسر هم‌درجه‌اند، پس نمودار تابع یک مجانب افقی دارد. بنابراین منحنی این تابع، باید دو مجانب قائم داشته باشد.

باید این معادله دو ریشه‌ی متمایز داشته باشد:

$$\text{مجانب قائم}: f(x)\to\pm\infty \Rightarrow x^۲+mx+۱=۰$$

$$\Delta>۰ \Rightarrow m^۲-۴>۰ \Rightarrow m^۲>۴ \Rightarrow \begin{cases} m>۲ \\ m<-۲\end{cases} \quad \text{یا}$$

۵. فرض می‌کنیم نقطه‌ی $A(۰,k)$ روی محور yها و m شیب خط مماس باشد.

$$y-y_A = m(x-x_A) \Rightarrow y-k = m(x-۰) \Rightarrow y = mx+k$$

معادله‌ی فرضی مماس

$$\begin{cases} y=-x^۲+۲ \\ y=mx+k\end{cases} \Rightarrow mx+k = -x^۲+۲ \Rightarrow x^۲+mx+(k-۲)=۰$$

برای این‌که خط بر منحنی مماس باشد، باید $\Delta=۰$

$$\Delta = m^۲-۴(k-۲)=۰ \Rightarrow m^۲+۰m-۴(k-۲)=۰$$

ریشه‌های این معادله، شیب‌های خط‌های مماس‌اند (m' و m'' ریشه‌های این معادله‌اند).

$$\xRightarrow{\text{چون دو مماس بر هم عمودند}} m'.m''=-۱ \Rightarrow \frac{c}{a}=-۱ \Rightarrow \frac{-۴(k-۲)}{۱}=-۱$$

$$\Rightarrow ۴(k-۲)=۱ \Rightarrow ۴k=۹ \Rightarrow k=\frac{۹}{۴} \Rightarrow A(۰,\frac{۹}{۴})$$

۶.
$$f(x)=\sqrt[۳]{x^۲} \Rightarrow f'(x)=\frac{۲}{۳\sqrt[۳]{x}} \qquad x_A=۸$$

$$y_A=\sqrt[۳]{۶۴}=۴ \,,\; m_{\text{مماس}}=\frac{۲}{۳\sqrt[۳]{۸}}=\frac{۲}{۳(۲)}=\frac{۱}{۳} \Rightarrow m_{\text{قائم}}=-۳$$

$$y-y_A = m_{\text{قائم}}(x-x_A)$$

$$\Rightarrow y-۴=-۳(x-۸) \Rightarrow y=-۳x+۲۸ \quad \text{معادله‌ی خط قائم}$$

۷. در تابع درجه سوم، اگر خطی از نقاط اکسترمم نسبی نمودار تابع بگذرد، این خط از نقطه‌ی عطف تابع هم می‌گذرد.

$$f(x)=x^۳-۳x^۲+mx+۵ \text{ و } \text{طول عطف} = -\frac{b}{۳a}=\frac{۳}{۳}=۱ \,,\; y=-۲x+۱$$

$$y_{\text{عطف}} = -۲(۱)+۱=-۱ \Rightarrow F(۱,-۱) \quad \text{نقطه‌ی عطف است.}$$

$$F(۱,-۱) \xrightarrow{\text{در معادله‌ی تابع}} -۱=۱-۳+m+۵ \Rightarrow \boxed{m=-۴}$$

۸.
$$\cos ۲x+۳\cos x-۴=۰$$

$$۲\cos^۲ x-۱+۳\cos x-۴=۰ \Rightarrow ۲\cos^۲ x+۳\cos x-۵=۰$$

$$\text{مجموع ضرایب صفر است} \Rightarrow \begin{cases}\cos x=۱ \\ \cos x=-\frac{۵}{۲} \quad \text{غیرممکن}\end{cases}$$

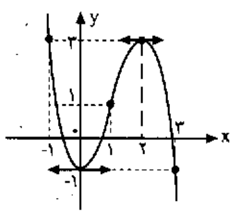
$$\cos x=۱ \Rightarrow x=۲k\pi$$

۹.
$$y_۱=-x^۳+۳x^۲-۱$$

$$y_۱'=-۳x^۲+۶x=۰ \Rightarrow -۳x(x-۲)=۰ \Rightarrow \begin{cases} x=۰\Rightarrow y=۱ \\ x=۲\Rightarrow y=۳\end{cases}$$

$$y_۱''=-۶x+۶=۰ \Rightarrow x_F=۱ \Rightarrow y_F=۱$$

x	$-\infty$		-۱		۰		۱		۲		۳		$+\infty$
$y_۱'$		−		−	۰	+		+	۰	−		−	
$y_۱$		↘	۳	↘	-۱	↗	۱	↗	۳	↘	-۱	↘	$-\infty$



$$y_۲=\frac{۲x-۱}{۲x+۱}$$

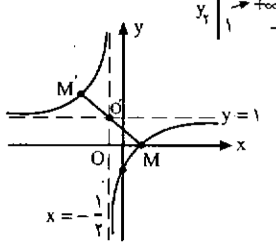
$$\text{مجانب قائم}: y\to\pm\infty \Rightarrow ۲x+۱=۰ \Rightarrow x=-\frac{۱}{۲} \quad \text{معادله‌ی مجانب قائم}$$

$$\text{مجانب افقی}: x\to\pm\infty \Rightarrow \text{حد } y_۲=\frac{۲}{۲}=۱ \Rightarrow y=۱ \quad \text{معادله‌ی مجانب افقی}$$

$$y_۲'=\frac{۴}{(۲x+۱)^۲}>۰ \quad x=۰ \Rightarrow y=-۱ \,,\; y=۰$$

$$\Rightarrow ۲x-۱=۰ \Rightarrow x=\frac{۱}{۲}$$

x	$-\infty$		$-\frac{۱}{۲}$		۰		$\frac{۱}{۲}$		$+\infty$
$y_۲'$		+	‖	+		+		+	
$y_۲$	۱	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	-۱	↗	۰	↗	۱



۱.

$n=1:\ 4-3+5=6=2r(r=2)$

فرض استقرا: $n=k:\ 4^k-3k+5=2r'$

حکم استقرا: $n=k+1:\ 4^{k+1}-3(k+1)+5=2r''$

طرفین فرض را در ۴ ضرب می‌کنیم:

$4^{k+1}-12k+20=12r' \Rightarrow$

$4^{k+1}-3(k+1)+5-9k+18=12r'$

$\Rightarrow 4^{k+1}-3(k+1)+5=9k+12r'-18$

$=3(\underbrace{3k+4r'-6}_{r^*})=2r''$

۲.

$1+x^2+y^2 \geq 2x+4y-4 \Leftrightarrow x^2-2x+1+y^2-4y+4 \geq 0$

$\Leftrightarrow (x-1)^2+(y-2)^2 \geq 0$ و $(n-1)^2 \geq 0$ و $(y-2)^2 \geq 0$

۳. فرض می‌کنیم $\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}$ عددی گویا باشد (برهان خلف):

$\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}=\frac{m}{n}, m,n \in z, n\neq 0 \Rightarrow \frac{\sqrt{2}-1}{2}=\frac{m^2}{n^2}$

$\Rightarrow \sqrt{2}-1=\frac{2m^2}{n^2} \Rightarrow \sqrt{2}=1+\frac{2m^2}{n^2}$

$=\frac{n^2+2m^2}{n^2}=\frac{p}{q}, p,q \in z, q\neq 0$

بنابراین $\sqrt{2}$ مساوی عدد گویایی می‌شود و این تناقض است.

۴. $\left[\frac{m-1}{n}\right]+1=3 \Rightarrow \left[\frac{m-1}{4}\right]=2$ و $n=4$ و $m=?$

$\Rightarrow 2 \leq \frac{m-1}{4} < 3 \Rightarrow 8 \leq m-1 < 12 \Rightarrow 9 \leq m < 13$

پس باید حداقل ۹ جفت کفش بیرون بیاوریم.

۵. $x=\frac{m}{n}$ و m و $n \in z-\{0\}$ و $y=\frac{m'}{n'}, m',n' \in z-\{0\}$

$\Rightarrow \frac{x}{y}=\frac{\frac{m}{n}}{\frac{m'}{n'}}=\frac{mn'}{nm'}=\frac{m''}{n''}$ و m'' و $n'' \in z$ و $n''\neq 0 \Rightarrow \frac{x}{y}\in Q$

۶.

$(A-C)\cap(B-C)=(A\cap C')\cap(B\cap C')$

$=(A\cap B)\cap(C'\cap C')=(A\cap B)\cap C'$

$=(A\cap B)-C$

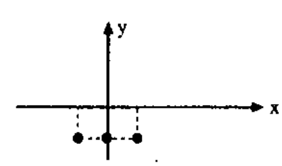
۷.

$A=\{-1,1,0\}$ و $B=\{0,1\} \Rightarrow$

$A^2=\{(-1,-1),(-1,1),(-1,0),(1,-1),(1,1),(1,0),(0,-1),(0,1),(0,0)\}$

$A\times B=\{(-1,0),(-1,1),(1,0),(1,1),(0,0),(0,1)\}$

$A^2-A\times B=\{(-1,-1),(1,-1),(0,-1)\}$



۸.

خاصیت بازتابی: $(x,y)R(x,y) \Rightarrow x+\frac{1}{2}y^2=x+\frac{1}{2}y^2$

خاصیت تقارنی: $(x,y)R(z,t) \Leftrightarrow (z,t)R(x,y)$

$x+\frac{1}{2}t^2=z+\frac{1}{2}y^2 \Leftrightarrow z+\frac{1}{2}y^2=x+\frac{1}{2}t^2$

خاصیت تعدی: $(x,y)R(z,t),(z,t)R(r,s) \Rightarrow (x,y)R(r,s)$

$\begin{cases} x+\frac{1}{2}t^2=z+\frac{1}{2}y^2 \\ z+\frac{1}{2}s^2=r+\frac{1}{2}t^2 \end{cases} \Rightarrow x+\frac{1}{2}s^2=r+\frac{1}{2}y^2$

از جمع کردن طرفین دو رابطه‌ی سمت چپ، به رابطه‌ی سمت راست می‌رسیم.

$(-2,1)R(x,y) \Rightarrow -2+\frac{1}{2}y^2=x+\frac{1}{2} \Rightarrow x=\frac{1}{2}y^2-\frac{5}{2}$

$\Rightarrow [(-2,1)]=\left\{(x,y)\middle| x,y\in \mathbb{R}, x=\frac{y^2-5}{2}\right\}$

۹. برد، باخت و مساوی را با امتیازهای آن‌ها، یعنی ۳، ۰ و ۱ متناظر می‌کنیم:

$S=\{(3,0),(3,1),(3,3),(1,0),(1,1),(1,3),(0,0),(0,1),(0,3)\}$

$A=\{(3,0),(3,1),(3,3),(1,3),(0,3)\}$

$B=\{(3,0),(1,0),(0,1),(0,3)\} \Rightarrow A\cap B=\{(3,0),(0,3)\}$

$A'-B=A'\cap B'=(A\cup B)'=\{(1,1),(0,0)\}$

۱۰.

الف) $P(A)=\frac{\binom{5}{3}\binom{4}{1}+\binom{5}{4}}{\binom{9}{4}}=\frac{10\times 4+5}{126}=\frac{45}{126}=\frac{5}{14}$

ب) $P(B)=\frac{\binom{4}{3}\binom{5}{1}+\binom{4}{4}}{\binom{9}{4}}=\frac{4\times 5+1}{126}=\frac{21}{126}=\frac{1}{6}$

۱۱:

$P(A)=2P(B)=\frac{1}{2}P(C), P(B)=3P(D), P(A)+P(B)$

$+P(C)+P(D)=1 \Rightarrow 2P(B)+P(B)+4P(B)+\frac{1}{3}P(B)$

$=1 \Rightarrow P(B)=\frac{3}{22}, p(D)=\frac{1}{22}, P(C)=\frac{12}{22} \Rightarrow P(B\cup C)$

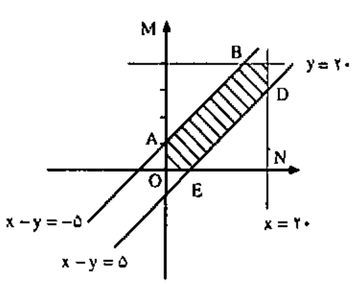
$=P(B)+P(C)=\frac{15}{22}$

۱۲.

$S=\{(x,y)|x,y\in\mathbb{R}, 0\leq x,y\leq 20\}$ و

$A=\{(x,y)|(x,y)\in S, |x-y|\leq 5\}$

$P(A)=\frac{S_{OABCDE}}{S_{OMCN}}=\frac{20\times 20-\frac{15\times 15}{2}-\frac{15\times 15}{2}}{20\times 20}=\frac{7}{16}$



۱۳.

$P(A\cup B-C)=P(A\cup B)-P[(A\cup B)\cap C]$

$=P(A\cup B)-P[(A\cap C)\cup(B\cap C)]$

$=P(A)+P(B)-P(A\cap B)-P(A\cap C)-P(B\cap C)$

$+P(A\cap B\cap C)$

$=\frac{\left[\frac{200}{3}\right]+\left[\frac{200}{5}\right]-\left[\frac{200}{15}\right]-\left[\frac{200}{21}\right]-\left[\frac{200}{35}\right]+\left[\frac{200}{105}\right]}{200}$

$=\frac{80}{200}=\frac{2}{5}$

۱۴.

$P(A'-B)=P(A'\cap B')=P(A\cup B)'=1-P(A\cup B)$

$=1-P(A)-P(B)+P(A\cap B)=1-P(A)+1-P(B)$

$-(1-P(A\cap B))=P(A')+P(B')-P(A\cap B)'$

۱. اندازه‌ی زاویه‌ی سوم مثلث، یعنی اندازه‌ی زاویه‌ی C را به‌دست می‌آوریم. داریم:

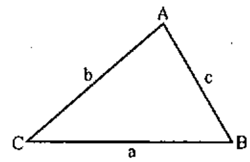
$\hat{A}=65^\circ \ , \ \hat{B}=40^\circ \ , \ \hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=180^\circ$

$\Rightarrow 65^\circ+40^\circ+\hat{C}=180^\circ \Rightarrow \hat{C}=180^\circ-105^\circ=75^\circ$

از آن‌جا خواهیم داشت:

$75^\circ>65^\circ>40^\circ \Rightarrow \hat{C}>\hat{A}>\hat{B} \Rightarrow c>a>b$

۲. ضلع‌های مثلث را a، b و c و محیط مثلث را ۲p می‌نامیم. فرض می‌کنیم a بزرگ‌ترین ضلع مثلث باشد، داریم:



$$\begin{cases} a>b \\ a>c \\ a=a \end{cases}$$

از جمع این رابطه‌ها داریم:

$$3a>a+b+c \Rightarrow 3a>2p \Rightarrow a>\frac{2p}{3}$$

اکنون فرض می‌کنیم c کوچک‌ترین ضلع مثلث باشد. خواهیم داشت:

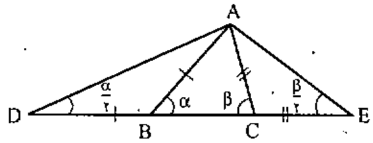
$$\begin{cases} c<a \\ c<b \Rightarrow 3c<a+b+c \Rightarrow 3c<2p \Rightarrow c<\frac{2p}{3} \\ c=c \end{cases}$$

پس حکم مسئله ثابت شد.

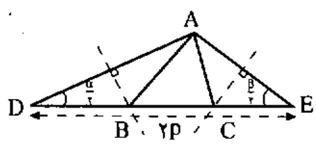
۳. فرض می‌کنیم مسئله حل شده و مثلث ABC جواب آن است، یعنی مثلثی است که محیط آن مساوی ۲p، $\hat{B}=\alpha$ و $\hat{C}=\beta$ است. ضلع BC را از طرف B به اندازه‌ی BD=AB و از طرف C به اندازه‌ی CE=AC امتداد می‌دهیم و از D و E به A وصل می‌کنیم. طول پاره‌خط DE مساوی محیط مثلث ABC است، زیرا داریم:

$DE=DB+BC+CE=AB+BC+AC=2p$

مثلث‌های ABD و ACE نیز متساوی‌الساقین هستند. زاویه‌ی $A\hat{B}C$، زاویه‌ی خارجی مثلث متساوی‌الساقین ABD است، پس: $\hat{D}=\frac{\hat{B}}{2}=\frac{\alpha}{2}$ و زاویه‌ی $A\hat{C}B$ زاویه‌ی خارجی مثلث متساوی‌الساقین ADE است، پس $\hat{E}=\frac{\hat{C}}{2}=\frac{\beta}{2}$. در نتیجه، دو زاویه و ضلع بین این دو زاویه از مثلث ADE معلوم است ($\hat{E}=\frac{\beta}{2}$ ، $\hat{D}=\frac{\alpha}{2}$ ، $DE=2p$). پس این مثلث قابل رسم است. بنابراین، برای رسم مثلث ABC چنین عمل می‌کنیم:

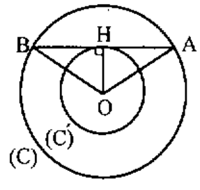


پاره‌خط DE را به طول معلوم ۲p رسم می‌کنیم. آن‌گاه از D خطی رسم می‌کنیم که با DE زاویه‌ای مساوی $\frac{\alpha}{2}$ بسازد و از نقطه‌ی E و در همان طرفی که زاویه‌ی $\frac{\alpha}{2}$ را ساخته‌ایم، خطی رسم می‌کنیم که با DE زاویه‌ی $\frac{\beta}{2}$ بسازد. محل برخورد دو خط رسم شده، رأس A از مثلث ABC است. اکنون عمودمنصف ضلع AD، هم‌چنین عمودمنصف ضلع AE را رسم می‌کنیم تا DE را در نقطه‌های B و C قطع کنند. از A به B و C وصل می‌کنیم. مثلث ABC جواب مسئله است.



نکته: چون مثلث ABD در رأس B متساوی‌الساقین است، پس عمودالمنصف قاعده‌ی AD، از رأس B می‌گذرد و همین ویژگی، برای مثلث متساوی‌الساقین ACE نیز وجود دارد. یعنی عمود منصف قاعده‌ی AE از رأس C می‌گذرد.

۴. از O به A و H وصل می‌کنیم. می‌دانیم که OH عمودمنصف وتر AB است. پس داریم:



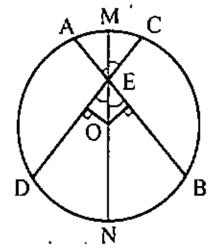
$$AH=BH=\frac{AB}{2}=\frac{24}{2}=12$$

از طرف دیگر، OA=R، $OH=R'$ و $\frac{R'}{R}=\frac{1}{2}$ و یا $R=2R'$ است.

در مثلث قائم‌الزاویه‌ی OHA داریم:

$$OA^۲ = OH^۲ + AH^۲ \Rightarrow (۲R')^۲ = R'^۲ + ۱۲^۲$$
$$\Rightarrow ۴R'^۲ = R'^۲ + ۱۴۴ \Rightarrow ۳R'^۲ = ۱۴۴ \Rightarrow R'^۲ = ۴۸$$
$$\Rightarrow R' = \sqrt{۴۸} = ۴\sqrt{۳} \Rightarrow R = ۲R' = ۲ \times ۴\sqrt{۳} = ۸\sqrt{۳}$$

۵. می‌خواهیم ثابت کنیم که $A\hat{E}M = M\hat{E}C$ و یا $B\hat{E}N = D\hat{E}N$ است.



برای اثبات، از نقطه‌ی O مرکز دایره، دو عمود OH و OK را به ترتیب بر AB و CD فرود می‌آوریم.

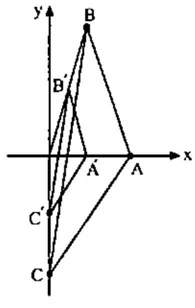
چون AB=CD است، پس داریم: OH=OK (وترهای مساوی در یک دایره، از مرکز آن دایره به یک فاصله‌اند). اما نقطه‌ای که از دو خط متقاطع به یک فاصله باشد، روی نیم‌ساز زاویه‌های حاصل از آن دو خط متقاطع واقع است. بنابراین نقطه‌ی O زاویه‌ی AEC (یا BED) قرار دارد، به‌عبارت دیگر، OE نیم‌ساز زاویه‌ی BED (یا AEC) است و حکم مسئله ثابت شد.

۶. داریم:

$$\begin{cases}۲x-۱=-۳\\ ۳y+۶=۵\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}۲x=-۲\\ ۳y=-۱\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=-۱\\ y=-\frac{۱}{۳}\end{cases} \Rightarrow (-۱,-\frac{۱}{۳})$$ نقطه‌ی خواسته شده.

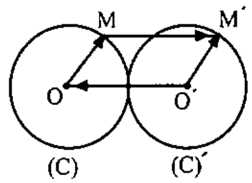
۷. داریم:

$$A=(۴,۰)\ ,\ B=(۲,۶)\ ,\ C=(-۶,۰)$$
$$H(x,y)=(\frac{۱}{۲}x\ ,\ \frac{۱}{۲}y)$$
$$\Rightarrow A'=H(A)=H(۴,۰)=(۲,۰)$$
$$B'=H(B)=H(۲,۶)=(۱,۳)$$
$$C'=H(C)=H(-۶,۰)=(-۳,۰)$$



این تجانس یک انقباض محسوب می‌شود، زیرا $k=\frac{۱}{۲}<۱$ است.

۸. دو شعاع دل‌خواه موازی و هم‌جهت OM و O'M' از دو دایره را رسم می‌کنیم و از M به M' وصل می‌کنیم. چهارضلعی OMM'O' متوازی‌الاضلاع است، زیرا $OM \parallel O'M'$ و $OM = O'M'$ است.



بنابراین $\vec{MM'}=\vec{OO'}$ و نقطه‌ی M' انتقال یافته‌ی نقطه‌ی M به‌اندازه‌ی بردار انتقال ثابت $\vec{OO'}$ است. پس دایره‌ی «C'» انتقال یافته‌ی دایره‌ی «C» به اندازه‌ی بردار انتقال $\vec{OO'}$ است. بدیهی است که دایره‌ی C نیز انتقال یافته‌ی دایره‌ی C' به اندازه‌ی بردار انتقال $\vec{O'O}$ است.

۹. می‌دانیم که خط‌های عمود بر یک صفحه باهم موازی‌اند. پس AA'، BB' و CC' باهم موازی هستند. از طرف دیگر، پاره‌خط‌های AA'، BB' و CC' فاصله‌ی بین دوصفحه‌ی موازی E و F هستند. پس باهم مساوی‌اند؛ یعنی $AA'=B'B=C'C$ است. بنابراین چهارضلعی‌های AA'B'B، AA'C'C و BB'C'C که در هر کدام، دو ضلع روبه‌رو باهم موازی و مساوی‌اند، متوازی‌الاضلاع هستند، $AB=A'B'$، $AC=A'C'$ و $BC=B'C'$ است. در نتیجه، دو مثلث ABC و A'B'C' به حالت تساوی سه ضلع نظیر هم نهشت هستند و حکم مسئله ثابت شد.

برگردانده و به این اسم نامیده است .

ترجمه‌ی فارسی قسمتی از مقدمه‌ی کتاب المقنع :

«علی بن احمد نسوی گوید : برای کتابخانه‌ی مجدالدوله کتابی درباره‌ی به‌کار بردن حساب هندی تصنیف کرده بودم و آن تکاب بعداً در کتابخانه‌ی مولانا شرف‌الملوک وارد شد و طرز کلام آن وی را قانع نساخت ، زیرا به فارس نوشته شده بود و او می‌گفت که الفاظ فارسی دراز و معانی آن پوشیده است و دستور داد که برای کتابخانه‌اش کتابی به زبان عربی بنویسم که به مقصودی که دارد نزدیک‌تر باشد و من دستور او را انجام دادم . »

کتاب المقنع در چهار مقاله است : مقاله‌ی اول درباره‌ی اعمال مربوط به عددهای صحیح ، مقاله‌ی دوم درباره‌ی کسرها ، مقاله‌ی سوم در عددهای صحیح و کسر (= عددهای صحیحی که کسر همراه دارند) و مقاله‌ی چهارم درباره‌ی درجه‌ها و دقیقه‌ها (= کسرهای شصتگانی) .

نسوی خود نوشته است که در کتاب المقنع برهان‌های هندسی را نیاورده تا کلام طولانی نشود .

۲. کتاب الاشباع فی شرح الشکل القطاع

این کتاب به زبان عربی است و نسوی آن را در شرح «شکل قطاع» از کتاب مجسطی بطلمیوس نوشته است . دو نسخه‌ی خطی از کتاب الاشباع در استانبول (کتابخانه‌ی سرای به شماره‌های ۳۴۶۴/۱۴ و ۴۵۵/۲) و یک نسخه‌ی خطی نیز در لیدن (به شماره‌ی ۱۰۶۰) موجود است .

نسوی کتاب الاشباع را مانند یکی دیگر از تألیف خود (= اختصار صور الکواکب) به یکی از نقبای علویان ری اهداء کرده است .

۳. کتاب التجرید اصول الهندسه

این کتاب مختصری است در هندسه‌ی مقدماتی دارای مقدمه و هفت مقاله که نسوی آن‌چه را از ضایای هندسه در نجوم و مساحت لازم می‌دانسته در آن گرد آورده است .

در مقالات هفتگانه‌ی این کتاب از مطالب زیر گفت‌وگو شده است : تعریف مفاهیم هندسی و قضایایی درباره‌ی خطوط متوازی و مثلث و به‌خصوص قضیه‌ی فیثاغورس ، جبر هندسی ، دایره و خط مماس و زاویه‌ی محاطی ، چندضلعی‌های محاطی و محیطی ، تناسب و نسبت شکل‌های متشابه ، هندسه‌ی فضایی مخصوصاً خواص کره .

نسوی این کتاب را نیز مانند کتاب الاشباع و کتاب اختصار صور الکواکب به مطهر بن ابوالقاسم از نقبای علویان ری اهداء کرده است . در آخر این کتاب نام کتاب البلاغ که نسوی در شرح اصول اقلیدس تألیف کرده آمده است .

۴. تفسیر کتاب مأخوذات ارشمیدس

مأخوذ در لغت به معنی «گرفته شده» و در اصطلاح ریاضی قضیه‌ای است که آن را به عنوان مقدمه ثابت می‌کنند تا بعداً در استدلال قضیه یا قضایای دیگر از آن استفاده نمایند .

مأخوذات نام کتاب مختصری است در هندسه ، منسوب به ارشمیدس ، شامل پانزده شکل (= قضیه یا مسأله) . اصل یونانی کتاب مأخوذات از بین رفته است ولی ترجمه‌ی عربی آن که توسط ثابت‌بن قره انجام گرفته در دست است . در سده‌ی چهارم هجری ریاضیدان و منجم ایرانی ابوسهل کوهی مقاله‌ای درباره‌ی کتاب مأخوذات ارشمیدس نوشت و آن را «تزیین کتاب ارشمیدس فی المأخوذات» نامید . این مقاله نیز متأسفانه از بین رفته است .

نسوی با در دست داشتن مقاله‌ی ابوسهل کوهی مأخوذات را تفسیر کرده و نصیرالدین طوسی در سال ۶۵۳ تفسیر نسوی را تحریر کرده است .

آثار ریاضی مفقود نسوی

۵. کتاب البلاغ فی شرح کتاب اقلیدس

نسوی در صفحه‌ی آخر کتاب التجرید فی اصول الهندسه اشاره کرده است به کتاب البلاغ که آن را در شرح کتاب اصول اقلیدس نوشته بوده است . از این کتاب فعلاً اثری در دست نیست .

۶. مقاله فی عمل الدائره

نصیرالدین طوسی در تحریر کتاب مأخوذات نوشته است : «قال الاستاد المختص (= نسوی) قد صنفت مقاله فی عمل دائره نسبتها الی دائرة مفروضه کنسبة مفروضه...»

منبع

زندگی‌نامه‌ی ریاضی‌دانان دوره‌ی اسلامی ، ابوالقاسم قربانی ، مرکز نشر دانشگاهی



پنجره ای رو به آفتاب ۲

مسابقه ی خاطره نویسی

تجربه های من در آموزش و ترویج نماز بین دانش آموزان دوره ی راهنمایی

ستاد اقامه ی نماز وزارت آموزش و پرورش، پس از برگزاری موفقیت آمیز مرحله ی نخست مسابقه ی «پنجره ای رو به آفتاب» در دوره ی ابتدایی، مرحله ی دوم این مسابقه را در دوره ی راهنمایی برگزار می کند:

● **هدف:**
گردآوری و استفاده از تجربه های ارزنده ی معلمان، مربیان و مدیران دوره ی آموزش راهنمایی در راه یادگیری و ترویج نماز در مدارس راهنمایی کشور

● **جوایز:**
- ده نفر اول، اهدای لوح تقدیر + کمک هزینه ی سفر حج عمره مفرده به مبلغ ۵میلیون ریال
- ده نفر دوم، اهدای لوح تقدیر + کمک هزینه ی سفر به سوریه به مبلغ ۳میلیون ریال
- ده نفر سوم، اهدای لوح تقدیر + کمک هزینه ی سفر به عتبات عالیات به مبلغ ۲ میلیون ریال
- ده نفر چهارم، اهدای لوح تقدیر + کمک هزینه ی سفر به مشهد مقدس به مبلغ ۱ میلیون ریال

● **شرایط:**
۱. آثار ارسالی باید فقط در قالب نوشتاری «خاطره» باشد. بنابراین آثاری که در قالب داستان تخیلی، مقاله و ... باشد، داوری نمی شود.
۲. معیارهای ارزیابی خاطره ها عبارتند از: «بکر و تازه بودن موضوع»، «کشش و جذابیت»، «محتوای غنی آموزشی»، «نثر و زبان مناسب» و «سندیت(ذکر زمان و مکان)».
۳. موضوع خاطره باید در چارچوب:
الف ـ شیوه های یادگیری خلاق؛
ب ـ روش موفق یا ناموفق برای ترویج نماز بین دانش آموزان دوره ی راهنمایی در موقعیت های گوناگون، شامل کلاس درس، جشن تکلیف، نمازخانه، اردو و ... باشد.
۴. حجم و تعداد خاطره های ارسالی، به تصمیم شرکت کنندگان در مسابقه بستگی دارد.
۵. زمان ارسال خاطره ها حداکثر تا پایان خرداد ۱۳۸۷ است.
۶. شرکت کنندگان باید اصل یا کپی برگه ی مشخصات خود را که در بروشور مسابقه آمده است، تکمیل کنند، و ضمن الصاق یک قطعه عکس ۲×۳، همراه با خاطره ها که با خط خوانا و ترجیحاً به صورت حروف چینی تهیه شده است، به نشانی دبیرخانه ی مسابقه، ارسال نمایند.

● خاطره های برگزیده به صورت کتاب منتشر خواهد شد و طی مراسم ویژه ای در آبان ماه ۱۳۸۷ از پدیدآورندگان آثار منتخب، تجلیل خواهد شد.
برای تهیه ی بروشور مسابقه به دفتر آموزشگاه مراجعه نمایید.

نشانی دبیرخانه: تهران، خیابان سپهبدقرنی، ساختمان مرکزی وزارت آموزش و پرورش، طبقه ی سوم، ستاد اقامه نماز. کدپستی: ۱۵۹۹۹
تلفن: ۸۲۲۸۱-۰۲۱ (داخلی ۲۲۸۵)

وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش وبرنامه ریزی آموزشی
دفتر انتشارات کمک آموزشی

۵۸

رشد برهان

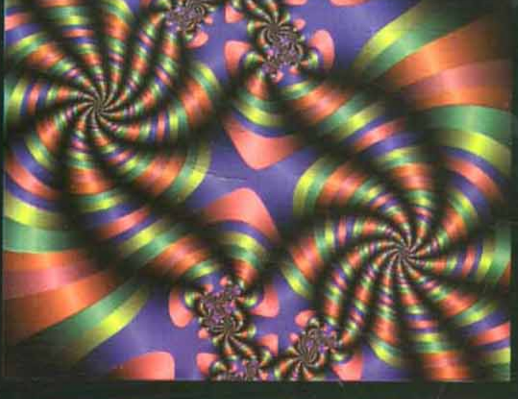
فصلنامه ی آموزشی، تحلیلی و اطلاع رسانی

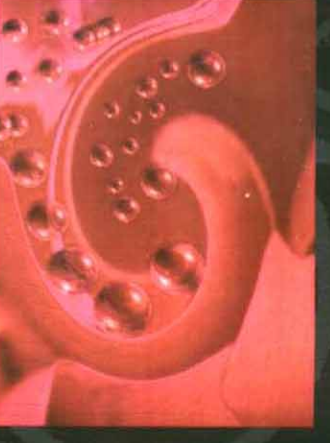
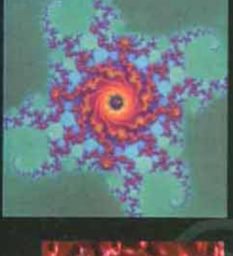
مجله ی ریاضی

دوره ی متوسطه

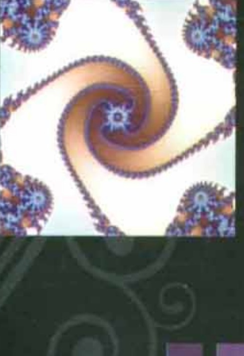
• دوره‌ی هفدهم • شماره‌ی ۴ • تابستان ۱۳۸۷ • بها: ۳۵۰۰ ریال

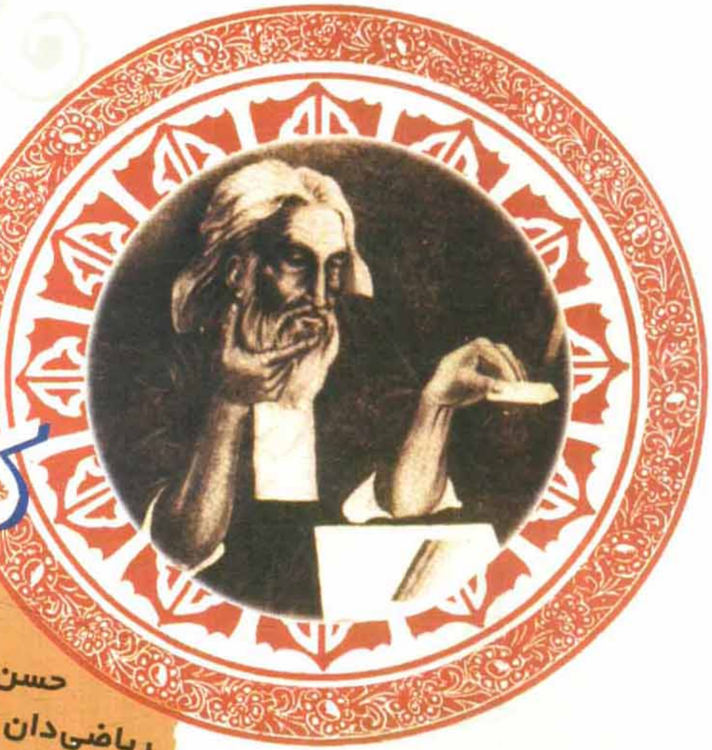








کمال‌الدین فارسی

حسن بن علی بن حسن کمال‌الدین فارسی
ریاضی‌دان و فیزیک‌دان ایرانی (در حدود ۶۶۵-۷۱۸)

از علمای بزرگ ریاضی و فیزیک ایران و دنیای اسلام، در نیمه‌ی دوم سده‌ی هفتم و اوایل سده‌ی هشتم، در فارس به دنیا آمد. در جوانی برای کسب علم و فضیلت به مسافرت پرداخت تا از محضر استادان بزرگ مستفید شود. با آن‌که مدت عمرش زیاد نبود، آثار بدیعی در ریاضی و نورشناسی (اپتیک) پدید آورد. در تألیفاتش از استادان خود با نهایت تجلیل و احترام نام برده و مراتب فضل و کمالش چه در زمان حیات و چه پس از آن، مورد تأیید و تصدیق دانشمندان بوده است.

استادش **قطب‌الدین شیرازی** او را «الولد الاعز الاکرم و الامام الافضل الاعلم قدوة الاذکیاء ملک العلماء کمال الملّه والدین» نامیده و **عمادالدین کاشانی** و **غیاث‌الدین جمشید کاشانی** در کتاب‌های «ایضاح المقاصد» و «مفتاح الحساب»، از او با عنوان‌های امام و فاضل و محقق یاد کرده‌اند.

کمال‌الدین فارسی در نوزدهم ماه ذیقعده‌ی سال ۷۱۸ در شهر تبریز درگذشت.

نام بعضی از استادانش

کمال‌الدین فارسی چنان‌که قبلاً هم گفته شد، در ایام جوانی برای کسب علم و فضیلت، به شهرهای گوناگون سفر می‌کرده تا از محضر استادان بزرگ مستفید گردد. خود در این باره نوشته است:

«و چون خدای تعالی مرا در جوانی، با همه‌ی کوتاه‌دستی و گمراهی و سستی اسباب کوشش و نیرومندی موانع، توفیق ارزانی داشت که همت بر طلب علم مصروف دارم، به سرزمین‌های گوناگون رخت می‌کشیدم و در پی یافتن بزرگان بودم تا از روشنی ایشان کسب نور کنم...»

وی در تألیفاتش، سه تن از استادان خود را به شرح زیر نام برده است:

۱. **ابن خوام** (عبدالله‌بن محمدبن عبدالرزاق عمادالدین بغدادی) که کمال‌الدین فارسی به خدمت او راه یافته و سال‌های متوالی ظاهراً در اصفهان شاگرد و ملازم او بوده و علم حساب را نزد او آموخته و کتاب اساس القواعد فی اصول الفوائد را در شرح کتاب **الفوائد البهائیه فی قواعد الحسابیه**، تألیف او نوشته است.

۲. **قطب‌الدین شیرازی** که کمال‌الدین فارسی کتاب تنقیح المناظر را با راهنمایی و به نام او نوشته و در مقدمه‌ی آن کتاب با کمال تجلیل و احترام از او یاد کرده است: «مولای اعظم و امام افضل، پیشوای پیشوایان عالم... استاد فضلای جهان، آشکارکننده‌ی کلمات بلندپایه‌ی خدا، آن‌که اجرای احکام الهی به دست اوست و فرمانش در آشکار کردن حلال و حرام همه‌جا روان است...»

۳. **جمال‌الدین صاعدبن محمد سغدی ترکستانی** که کمال‌الدین فارسی کتاب «البصائر فی اختصار تنقیح المناظر» را به خواهش او و به نام او نوشته و در آن، او را استاد خود نامیده است.

بقیه در صفحه ی ۳ جلد

بسم الله الرحمن الرحیم

وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه ریزی آموزشی
دفتر انتشارات کمک آموزشی

• مدیر مسئول: علیرضا حاجیان زاده
• سردبیر: حمیدرضا امیری
• مدیر داخلی: میرشهرام صدر
• طراح گرافیک: آزیتا کوثری
• ویراستار ادبی: کبری محمودی

صندوق الکترونیکی سردبیر:
Borhanm@roshdmag.ir
پیام گیر نشریات رشد: ۸۸۸۳۹۲۳۲-۸۸۳۰۱۴۸۲
• چاپ و صحافی: شرکت افست (سهامی عام)
• نشانی دفتر مجلّه: تهران، صندوق پستی ۱۵۸۷۵/۶۵۸۵
تلفن دفتر مجلّه: ۹-۸۸۸۳۱۱۶۰ داخلی ۳۹۷
تلفن امور مشترکین: ۷۷۳۳۶۶۵۶-۷۷۳۳۵۱۱۰
www.roshdmag.ir
ISSN 1735 - 4951

رشد برهان ۵۸
مجله ی ریاضی
دوره ی متوسطه فصلنامه ی آموزشی، تحلیلی و اطلاع رسانی
دوره‌ی هفدهم /شماره‌ی ۴/ تابستان ۱۳۸۷/ شمارگان: ۱۵۰۰۰ نسخه

رشد برهان متوسطه، تمامی دبیران محترم و دانش‌آموزان عزیز را در زمینه‌های زیر به همکاری دعوت می‌کند:

■ نگارش مقاله‌های کمک درسی (شرح و بسط و رفع مشکلات مبحث درسی کتاب‌های ریاضی دوره‌ی متوسطه و پیش‌دانشگاهی)
■ طرح مسائل کلیدی به همراه حل آن‌ها (برای دانش‌آموزان)
■ طرح مسائل مسابقه‌ای به همراه حل آن‌ها (برای دانش‌آموزان)
■ طرح معماهای ریاضی
■ نگارش یا ترجمه‌ی مقاله‌های عمومی ریاضی (مانند تاریخ ریاضیات، زندگینامه‌ی علمی و اجتماعی ریاضیدانان، نکته‌های تازه و لطیف ریاضیات، آموزش ریاضیات، آموزش کامپیوتر و ...)

رشد برهان متوسطه هر سه ماه، یکبار منتشر می شود.
مجلّه در حکّ، اصلاح، حذف و اضافه ی مقاله ها آزاد است.
مقاله های وارده ،باید خوانا و حتی الامکان کوتاه باشد.
مقاله های رسیده مسترد نمی شود.
استفاده از مطالب مجلّه در کتاب ها یا مجله های دیگر با ذکر دقیق مأخذ بلامانع است.

ریاضیات و کاربردهای آن در زندگی

واژه‌ی «Mathematics» (ریاضیات) به جای واژه‌ی یونانی «Mathematike» گذاشته شده که خود این واژه در اصل از واژه‌ی «Mathema» به معنای «دانش» و «دانایی» گرفته شده است.

در زبان فارسی، بسیاری از کارشناسان واژه‌ی ریاضیات را مشتق از واژه‌ی «ریاضت» می‌دانند. اما ریاضت فقط به معنای «پرهیزکاری بدنی» یا فعالیت‌های سخت و طاقت‌فرسا نیست و به معانی «در خود فرو رفتن»، «فهمیدن» و «رسیدن به رازها» نیز به کار رفته است. البته اگر واژه‌ی ریاضیات را برگرفته از ریاضت، و ریاضت را به معنی «سختی کشیدن و در انزوا فرو رفتن بدانیم، تا اندازه‌ای برای مخاطبین ممکن است بار منفی داشته باشد.

این مشابه برداشتی است که گاهی اوقات از واژه‌ی «جبر» به معنی «زور» یا «فشار» می‌شود. البته چنین برداشتی از واژه‌ی جبر صحیح نیست. خود خوارزمی، واژه‌ی جبر را به معنای «جبران کردن» به کار برده است؛ زیرا او بیشتر با معادلات و حل معادلات سروکار داشت و می‌دانیم که بردن عدد منفی از یک طرف معادله به طرف دیگر، آن را مثبت می‌کند و در واقع جبران می‌شود. در مصراع «که جبر خاطر مسکین بلا بگرداند»، واژه‌ی جبر دقیقاً به معنای جبران کردن به کار رفته است.

***

ریاضیات چیست و چه رابطه‌ای با دیگر علوم دارد؟ ریاضیات، **دانشی است که توسط آن می‌توان، بستگی‌های کمّیتی و شکل‌های مسطح و فضایی دنیای واقع را مورد بررسی، تجزیه و تحلیل و نقد قرار داد و روابط موجود بین اشیا را به لحاظ کمّی و حتی کیفی، تبیین کرد.**

ریاضیات را ملکه یا مادر علوم می‌دانند. ارتباط علوم دیگر به‌خصوص علوم پایه با ریاضیات، و نیاز علوم برای پیشرفت و کاربرد به ریاضیات، بسیار زیاد و انکارناپذیر است. در واقع به‌کار بردن ریاضیات و به‌خصوص روش‌های ریاضی در علوم دیگر، هیچ مرزی نمی‌شناسد و هر روز به این کاربردها افزوده می‌شود.

زمانی هاردی ریاضی‌دان مشهور و معاصر که «نظریه‌ی اعداد» تخصص اصلی او بوده است، اعلام کرد: «هیچ بخشی از ریاضیات بدون کاربردتر از نظریه‌ی اعداد نیست و در نظریه‌ی اعداد، بخشی بلااستفاده‌تر از اعداد اول وجود ندارد.» در حالی که الان در دنیا، در بسیاری از علوم به‌خصوص علوم رایانه، از نظریه‌ی اعداد استفاده‌های فراوان می‌شود و در «نظریه‌ی رمزنگاری و رمزگشایی»، حرف اصلی را نظریه‌ی اعداد و به‌خصوص اعداد اول می‌زنند. در نظریه‌ی رمزنگاری، از هم‌نهشتی‌ها استفاده‌ی فراوان می‌شود و بیشتر می‌کوشند، پیمانه‌های هم‌نهشتی‌ها را اعداد اول در نظر بگیرند تا امکان تجزیه‌ی آن‌ها وجود نداشته باشد!

علومی هم‌چون مکانیک آسمانی، به‌خصوص بخش مربوط به حرکت سیّاره‌ها، کاملاً به ریاضیات و روش‌های ریاضی وابسته‌اند. قانون جاذبه‌ی عمومی ساختاری کاملاً ریاضی و ساده دارد. ولی حل مسائل مربوط به حرکت ماده یا یک جسم تحت تأثیر نیروی جاذبه، حتی در حالت‌های دو بعدی و سه‌بعدی، به مراحل پیچیده و دشواری می‌انجامد. هم‌چنین، در بسیاری از نظریه‌های فیزیک می‌توان به توانایی‌ها و قابلیت‌های روش‌های ریاضی و تأثیر آن‌ها در تکامل و پیشرفت این نظریه‌ها پی برد.

اغراق نیست اگر بگوییم: «در صورتی که ریاضیات را از فیزیک و مکانیک حذف کنیم، تقریباً (شاید تحقیقاً) چیزی از آن‌ها باقی نمی‌ماند.» ما از ابتدایی‌ترین معادلات در مکانیک (از معادله‌ی حرکت به بعد)، از مشتق بی‌نیاز نیستیم و این یعنی کاربرد ریاضیات در مکانیک. و یا برای محاسبه‌ی شار مغناطیسی در فیزیک، از انتگرال روی میدان مغناطیسی استفاده می‌شود. از علم احتمال نیز، گذشته از کاربردهایش در علومی چون ژنتیک و آمار، در نظریه‌ی پراکندگی مواد به صورتی بسیار دقیق استفاده می‌شود. نظریه‌ی پراکندگی به بررسی جابه‌جایی تصادفی و میکروسکوپی ذرّه‌ها تحت تأثیر مولکول‌های ماده‌ی حلال تکیه دارد. قانون دقیق این جابه‌جایی برای ما معلوم نیست، اما نظریه‌ی احتمال این امکان را به ما می‌دهد تا نتیجه‌ی کمیتیِ معینی به دست آوریم و آن تعیین قانونِ احتمالی برای جابه‌جایی ذره‌ها در فواصل زمانی بزرگ است.

معرفی ریاضی دانان ایرانی



یادهای آموزشی (۱۱)

•پرویز شهریاری

ابوالوفا، در رصدخانه‌ای که شرف‌الدین به هزینه‌ی خود در بغداد ساخته بود، به سرپرستی **کوهی** (ابوسهل بیژن، فرزند رستم کوهی) و با همکاری برخی دیگر، به رصد پرداخت (سال ۹۸۸م).

ریاضیات در یونان باستان مخصوص آزادها بود و تنها به هندسه می‌پرداخت. اگر از استثناهایی مثل **ارشمیدس** بگذریم، از آن‌جا که اعتقاد داشتند هندسه علمی مجرد است، به آن پرداختند و موردهای کاربردی را به برده‌ها واگذاشتند که هیچ اثری از آن‌ها باقی نمانده است. یونانی‌ها حتی عددنویسی نداشتند و عددها را با حرف‌های الفبا می‌نوشتند.

چند سده‌ای که گذشت، نوبت به ایرانی‌ها رسید که تنها به ریاضیات کاربردی می‌پرداختند و در همه‌ی دانش‌ها سرآمد شدند. خوارزمی[1]، و بعد بیرونی[2] و ابوالوفا آمدند، توانستند بسیاری از دشواری‌های روزمره را حل کنند.

محمود، فرزند **محمد**، معروف به **ابوالوفای بوزجانی** در سال ۳۶۱ قمری متولد و در سال ۴۱۹ قمری در بغداد از دنیا رفت. وی شرح هایی بر اثرهای اقلیدس[3]، دیوفانت[4] و خوارزمی نوشت. به‌علاوه زیجی نوشت که اصلاح شده‌ی آن اکنون در دست است. حل مسئله‌های هندسی به یاری پرگار، رسم هفت‌ضلعی منتظم با تقریب (طول ضلع هفت ضلعی منتظم نصف طول ضلع مثلث متساوی‌الاضلاع است)، قضیه‌ی سینوس‌ها در مثلث محاسبه $\sin 30'$ تا رقم هشتم بعد از ممیز، با رسم سهمی با نقطه‌یابی‌های هندسی $x^4 = a$ و $x^4 + ax^3 = b$ را پیدا کرد. او $\sin(a \pm b)$ را محاسبه کرد.

نهضت علمی که از آخرهای سده‌ی دوم هجری آغاز شده بود، رفته رفته شکوفه می‌داد. **اخوان‌الصفا**[5] دانش‌نامه‌ی خود را در سده‌ی چهارم هجری تنظیم کردند. ابن‌ندیم[6]، به تفصیل در فهرست[7] خود شرح حال دانشمندان را توضیح داد. در «مجسطی» که کتابی درباره‌ی مثلثات بوده است، **ابوالوفای بوزجانی**[8] جدولی برای سینوس‌ها ۳۰ دقیقه به ۳۰ دقیقه تنظیم و محاسبه کرده بود (در دستگاه شصت شصتی). این محاسبه با دقت $\frac{1}{10^8}$ بود و تا ۸ رقم بعد از ممیز درست بود. او به عنوان نمونه، سینوس ۳۰ دقیقه را این‌طور محاسبه کرده بود: ۰/۰۰۸۷۲۶۵۳۵۵ **ابوالوفا** با مفهوم سکانت (که آن را قطر ظل می‌نامیدند) آشنا بود. و تانژانت را به روشنی تعریف و جدول تانژانت‌ها را تنظیم کرد. همه جا شعاع دایره را R (و نه واحد) می‌گرفت. البته نشانه‌هایی وجود دارد که ابوالوفا نخستین کسی است که در دایره‌ی مثلثاتی، مقدار R را واحد انتخاب کرد.

او قضیه تانژانت‌ها را برای حل مثلث کروی (به جای قضیه‌ی منه‌لاوس[9]) به‌کار می‌برد. ابوریحان

بیرونی، از اثبات این قضیه به‌وسیله ابوالوفا نام برده است. خود او در مجسطی می‌گوید:
روشن است، اگر $R = ۱$ درنظر بگیریم، آن وقت:

$$tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\ ,\ \cot g\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

ابوالوفا در مثلث قائم‌الزاویه کروی، دستورها و در مثلث غیر قائم‌الزاویه‌ی کروی، قضیه سینوس‌ها را به‌دست آورد:

$$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin C}$$

گرچه **ابونصر عراقی**، **کوشیار گیلانی** و **ابومحمود خجندی** هم همین رابطه را آورده‌اند. ولی به احتمال زیاد، ابوالوفا پیش از دیگران به این رابطه رسیده است.
رابطه‌های زیر را نیز به ابوالوفا نسبت می‌دهند:

$$۲\sin^{۲}\frac{\alpha}{۲} = ۱ - \cos\alpha$$

$$\sin ۲\alpha = ۲\sin\alpha\cos\alpha$$

ابوالوفا سهمی را آینه‌ی سوزان می‌نامید. او ریاضیات و اخترشناسی را در نیشابور نزد عمو و دایی خود آموخت و در ۲۰ سالگی به عراق رفت.

زیرنویس

۱. محمد فرزند موسی خوارزمی در سال ۲۳۶ هجری قمری از دنیا رفت. کتاب جبر و مقابله‌ی او تا زمان ویت (۱۶۰۳-۱۵۴۰ میلادی) مورد مطالعه بود.

۲. محمد فرزند احمد بیرونی، معروف به ابوریحان بیرونی (۴۳۰-۳۶۲ هجری قمری)، ریاضی‌دان، فیلسوف، جغرافی‌دان و سیاح ایرانی، در سال ۴۰۸ هجری به غزنین برده شد.

۳. اقلیدس در اسکندریه، در دوران بطلمیوس اول، از سال ۲۸۵ تا ۳۲۸ پیش از میلاد زندگی می‌کرد.

۴. دیوفانت که عرب‌ها او را دیوفتیس می‌خواندند، در سال ۲۵۰ بعد از میلاد مُرد. نخستین کسی بود که علامت‌هایی در جبر بنیان گذاشت. او را دیوفانت اسکندرانی هم می‌گویند.

۵. اخوان‌الصفا نام جمعیتی سری است که در سده‌ی چهارم هجری تشکیل شده بود.

۶. ابن‌ندیم (محمد فرزند اسحاق)، مورخ و شرح‌حال‌نویسی که در سال ۳۸۵ هجری از دنیا رفت.

۷. «فهرست ابن‌ندیم» از آن اوست.

۸. بوزجان شهری بوده است در نزدیکی مرز افغانستان که هنوز بخشی از آن به صورت نیمه‌ویرانه باقی مانده است.

۹. منه‌لاوس، ریاضی‌دان، اخترشناس و فیزیک‌دان اهل اسکندریه که در آخرهای سده‌ی اول پیش از میلاد در اسکندریه می‌زیست.



● میرشهرام صدر
mir_sadr@yahoo.com

انتخاب یک دسته گل

فرض کنیم دو نوع گل و به تعداد فراوان از هر نوع، موجود است. می‌خواهیم دسته گلی با چهار شاخه گل از این دو نوع گل انتخاب کنیم. این کار به چند طریق امکان‌پذیر است؟

اگر x_1 گل از نوع اول و x_2 گل از نوع دوم انتخاب کنیم، چون یک دسته گل با چهار شاخه نیاز داریم، بنابراین معادله‌ی زیر را داریم:

$$x_1 + x_2 = 4$$

جواب‌های صحیح و نامنفی معادله‌ی اخیر را می‌توان به صورت جدول زیر نوشت:

x_1	x_2
۰	۴
۱	۳
۲	۲
۳	۱
۴	۰

ملاحظه می‌کنیم که معادله‌ی $x_1 + x_2 = 4$ دارای ۵ جواب صحیح و نامنفی است که عبارت‌اند از: (۰,۴)، (۱,۳)، (۲,۲)، (۳,۱) و (۴,۰).

در حالت کلی فرض کنید، k نوعِ متفاوت گل و به تعداد فراوان از هر نوع موجود است و می‌خواهیم، n شاخه گل از این k نوع گل انتخاب کنیم. اگر x_1 گل از نوع اول، x_2 گل از نوع دوم و... و x_k گل از نوع kام انتخاب کنیم، چون یک دسته گل با n شاخه نیاز داریم، بنابراین معادله‌ی زیر را خواهیم داشت:

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_k = n \;;\; (x_i \geq 0 ,\ i = 1,2,\ldots,k) \qquad (1)$$

اکنون برای یافتن تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله‌ی (۱)، قضیه‌ی زیر را بیان می‌کنیم.

تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله‌ی $x_1 + x_2 + \cdots + x_k = n$

قضیه: فرض کنیم، k نوعِ متفاوت گل و به تعداد فراوان از هر نوع موجود است. ثابت کنید تعداد انتخاب n گل از این k نوع گل که در آن‌ها تکرار نیز مجاز است، برابر است با:

$$\binom{n+k-1}{k-1} = \binom{n+k-1}{n}$$

برهان: kنوع متفاوت گل را می‌توان با $(k-1)$ پاره‌خط متمایز کرد. هم‌چنین، اگر تعداد انتخاب‌های گل‌ها، از هر نوع را با تعدادی علامت ستاره (*) مشخص کنیم (باید تعداد ستاره‌ها برابر با n باشد)، در این صورت دارای nستاره و $(k-1)$ پاره‌خط هستیم. در نتیجه، $(n+(k-1))$ خط و ستاره وجود دارد که تعداد کل تبدیلات این اشیا برابر با $(n+(k-1))!$ است. اگر در این تبدیلات، پاره‌خط‌ها را یا ستاره‌ها را باهم جابه‌جا کنیم، حالت جدیدی ایجاد نمی‌شود، بنابراین طبق قاعده‌ی تبدیل با تکرار[1] خواهیم داشت:

نوع اول	نوع دوم	...	نوع kام
**	****	...	**...*

($k-1$= تعداد پاره‌خط‌ها، n=تعداد ستاره‌ها)

$$P_n=\frac{(n+(k-1))!}{n!\times(k-1)!}=\binom{n+k-1}{k-1}=\binom{n+k-1}{n}$$

نتیجه: تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله‌ی (۱) برابر است با:

$$\binom{n+k-1}{k-1}$$

دیدیم که معادله‌ی $x_1+x_2=4$ دارای ۵ جواب صحیح و نامنفی است. اکنون می‌توان با استفاده از فرمولی که به‌دست آورده‌ایم، تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی این معادله را محاسبه کنیم.

$$n=4,\ k=2;\ \binom{n+k-1}{k-1}=\binom{4+2-1}{2-1}=\binom{5}{1}=5$$

مثال: به چند طریق می‌توان ۸ عدد شکلات را بین ۶ نفر طوری تقسیم کرد، که ممکن است به بعضی‌ها شکلات نرسد؟

حل: اگر x_1 شکلات به نفر اول و x_2 شکلات به نفر دوم و... و x_6 شکلات به نفر ششم بدهیم، معادله‌ی زیر را خواهیم داشت:

$$x_1+x_2+\cdots+x_6=8;\ (x_i\ge 0,\ i=1,2,\dots,6)$$

تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله‌ی بالا برابر است با:

$$n=8,\ k=6;\ \binom{n+k-1}{k-1}=\binom{8+6-1}{6-1}=\binom{13}{5}=1287$$

مثال: دستگاه معادله‌های $\begin{cases}x_1+x_2=3\\x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=7\end{cases}$ چند جواب صحیح نامنفی دارد؟

حل: معادله‌ی $x_1+x_2=3$ دارای $\binom{3+2-1}{2-1}=\binom{4}{1}=4$ جواب صحیح نامنفی است. اگر در معادله‌ی $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=7$ قرار دهیم، $x_1+x_2=3$. بنابراین معادله‌ی $x_3+x_4+x_5=4$ به دست می‌آید که دارای $\binom{4+3-1}{3-1}=\binom{6}{2}=15$ جواب صحیح نامنفی است. طبق اصل ضرب، این دستگاه دارای $\binom{4}{1}\times\binom{6}{2}=60$ جواب صحیح و نامنفی است.

مسئله: تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی نامعادله‌ی $x_1+x_2+x_3+x_4\le 10$ را بیابید.

حل: می‌دانیم: $a\le b$؛ یعنی وجود دارد عدد حقیقی نامنفی $y\ge 0$ به طوری که: $a+y=b$. بنابراین تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی نامعادله‌ی $x_1+x_2+x_3+x_4\le 10$ برابر با تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله‌ی $x_1+x_2+x_3+x_4+y=10$ است. این تعداد جواب برابر است با:

$$n=10,\ k=5;\ \binom{n+k-1}{k-1}=\binom{14}{4}$$

مثال: تعداد جملات بسط $(x+y)^8$ را بیابید.

حل: می‌دانیم، عبارت حرفی هر جمله‌ی بسط $(x+y)^8$ به صورت $x^{n_1}y^{n_2}$ است که در آن: $n_1+n_2=8$ و $n_1\ge 0$ و $n_2\ge 0$. در نتیجه، تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی این معادله برابر با تعداد جملات بسط است. در نتیجه:

$$n=8,\ k=2;\ \binom{n+k-1}{k-1}=\binom{8+2-1}{2-1}=\binom{9}{1}=9$$

تعداد جملات بسط $(a_1+a_2+\dots+a_k)^n$

هر جمله‌ی بسط $(a_1+a_2+\dots+a_k)^n$ دارای عبارت حرفی به صورت $a_1^{n_1}a_2^{n_2}\cdots a_n^{n_k}$ است که در آن، $n_1+n_2+\cdots+n_k=n$ و برای هر $1\le i\le k$ داریم: $n_i\ge 0$. در نتیجه، تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی این معادله، برابر با تعداد جملات این بسط است که برابر است با: $\binom{n+k-1}{k-1}$.

مثال: تعداد جملات بسط $(a+b+c)^{10}$ را بیابید.

حل: $n=10$ ، $k=3$. پس تعداد جملات بسط برابر است با:

$$\binom{n+k-1}{k-1}=\binom{10+3-1}{3-1}=\binom{12}{2}=66$$

تعداد جواب‌های صحیح و مثبت معادله‌ی $x_1+x_2+\cdots+x_k=n$

می‌خواهیم ۸ عدد شکلات را بین شش نفر تقسیم کنیم، به طوری که به هریک حداقل یک شکلات برسد، این کار به چند طریق ممکن است؟ به این منظور، ابتدا به هر نفر یک شکلات می‌دهیم. سپس

۲ شکلات باقی می‌ماند که باید آن را بین ۶ نفر تقسیم کنیم، بنابراین تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله‌ی $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6=2$ را می‌یابیم. جواب مسئله برابر است با:

$$n=2\ ,\ k=6\ ;\binom{n+k-1}{k-1}=\binom{7}{5}=21$$

اکنون می‌خواهیم تعداد جواب‌های صحیح و مثبت معادله‌ی زیر را به‌دست آوریم:

$$x_1+x_2+\dots+x_k=n$$

به این منظور، فرض کنیم می‌خواهیم که n شیء را بین k نفر تقسیم کنیم، به‌طوری که به هریک حداقل یک شیء برسد. بنابراین ابتدا به هرینک از k نفر، یک شیء می‌دهیم. در نتیجه $(n-k)$ شیء، باقی می‌ماند که باید آن را بین k نفر تقسیم کنیم. پس تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله‌ی $x_1+x_2+\dots+x_k=n-k$ برابر با تعداد جواب‌های صحیح و مثبت معادله‌ی $x_1+x_2+\dots+x_k=n$ و برابر است با:

$$\binom{(n-k)+k-1}{k-1}=\binom{n-1}{k-1}$$

به بیان دیگر می‌توان گفت که در جواب‌های صحیح و مثبت معادله‌ی $x_1+x_2+\dots+x_k=n$، برای هر $1\le i\le k$ داریم:

$$x_i>0$$

چون برای هر $0\le i\le k$، x_i یک عدد صحیح بزرگ‌تر از صفر است، یعنی $x_i>0$، پس: $x_i\ge 1$ در نتیجه: $x_i-1\ge 0$ و بنابراین داریم:

$$x_1>0\Rightarrow x_1\ge 1\Rightarrow x_1-1\ge 0$$
$$x_2>0\Rightarrow x_2\ge 1\Rightarrow x_2-1\ge 0$$
$$\vdots\qquad\vdots\qquad\vdots$$
$$x_k>0\Rightarrow x_k\ge 1\Rightarrow x_k-1\ge 0$$

اکنون اگر قرار دهیم $y_i=x_i-1\ge 0$، $(1\le i\le k)$ بنابراین: $x_i=y_i+1$. پس داریم:

$$x_1+x_2+\dots+x_k=n\ ,\ x_i=y_i+1\Rightarrow\ (1\le i\le k)$$

$$y_1+1+y_2+1+\dots+y_k+1=n\Rightarrow$$
$$y_1+y_2+\dots+y_k=n-k$$

در معادله‌ی بالا، برای هر $1\le i\le k$ داریم: $y_i\ge 0$ که تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی این معادله، جواب مسئله است و برابر است با:

$$\binom{(n-k)+k-1}{k-1}=\binom{n-1}{k-1}$$

مثال: به چند طریق می‌توان ۷ سیب و ۶ پرتقال را بین چهار نفر تقسیم کرد، به‌طوری که: الف) به صورت دل‌خواه میوه‌ها را تقسیم کنیم و ممکن است به کسی میوه نرسد؟ ب) به هر نفر حداقل یک میوه برسد؟ ج) به هر نفر حداقل یک سیب برسد؟

حل:

الف) ۱۳ عدد میوه داریم و می‌خواهیم آن‌ها را به صورت دل‌خواه بین ۴ نفر تقسیم کنیم. بنابراین تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله‌ی $x_1+x_2+x_3+x_4=13$ را پیدا می‌کنیم که برابر است با:

$$\binom{13+4-1}{4-1}=\binom{16}{3}$$

ب) ۱۳ عدد میوه داریم و می‌خواهیم آن‌ها را طوری بین ۴ نفر تقسیم کنیم که به هریک حداقل یک عدد میوه برسد. بنابراین تعداد جواب‌های صحیح و مثبت معادله‌ی $x_1+x_2+x_3+x_4=13$ را می‌یابیم که برابر است با:

$$\binom{n-1}{k-1}=\binom{13-1}{4-1}=\binom{12}{3}$$

ج) ابتدا به هر نفر یک سیب می‌دهیم، بنابراین ۳ سیب و ۶ پرتقال برایمان باقی می‌ماند که در مجموع ۹ عدد میوه داریم. اکنون ۹ میوه را بین ۴ نفر تقسیم می‌کنیم، بنابراین تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله‌ی زیر، جواب است.

$$x_1+x_2+x_3+x_4=9$$

$$\binom{9+4-1}{4-1}=\binom{12}{3}$$

مثال: تعداد جواب‌های صحیح معادله‌ی $x_1+x_2+x_3=10\ (I)$ را با شرط $x_1>0$، $x_2\ge 2$ و $x_3>3$ به‌دست آورید.

حل: تغییر متغیرهای زیر را انجام می‌دهیم:

$$x_1>0\Rightarrow x_1\ge 1\Rightarrow \overbrace{x_1-1}^{y_1}\ge 0\Rightarrow\begin{cases}x_1=y_1+1\\y_1\ge 0\end{cases}\quad (1)$$

$$x_2\ge 2\Rightarrow \overbrace{x_2-2}^{y_2}\ge 0\Rightarrow\begin{cases}x_2=y_2+2\\y_2\ge 0\end{cases}\quad (2)$$

$$x_3>3\Rightarrow x_3\ge 4\Rightarrow \overbrace{x_3-4}^{y_3}\ge 0\Rightarrow\begin{cases}x_3=y_3+4\\y_3\ge 0\end{cases}\quad (3)$$

با قرار دادن رابطه‌های (۱) و (۲) و (۳) در معادله‌ی $x_1+x_2+x_3=10$ خواهیم داشت:

$$y_1+1+y_2+2+y_3+4=10\Rightarrow y_1+y_2+y_3=3\quad (II)$$

چون در این معادله، $y_1\ge 0$، $y_2\ge 0$، $y_3\ge 0$، بنابراین تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی این معادله را به‌دست می‌آوریم که با تعداد جواب‌های صحیح معادله‌ی $x_1+x_2+x_3=10$ با شرایط $x_1>0$، $x_2\ge 2$ و $x_3>3$ برابر است؛ زیرا با تغییر متغیرهایی که روی معادله‌ی (I) انجام دادیم، معادله‌ی (II) را به‌دست آوردیم. برای مثال، (۱ و ۱ و ۱) یک جواب برای معادله‌ی

(II) است، به‌طوری که: $y_1 = 1$ و $y_2 = 2$ و $y_3 = 1$. اکنون اگر این مقادیر را در رابطه‌های (۱)، (۲)، (۳) جای‌گزین کنید، ملاحظه خواهید کرد که: $x_1 = 2$ ، $x_2 = 3$ و $x_3 = 5$. بنابراین (۵و۳و۲) یک جواب معادله‌ی (I) با شرایط داده شده است.

$$\binom{n+k-1}{k-1} = \binom{3+3-1}{3-1} = \binom{5}{2} = 10$$ تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله‌ی (II)

مثال: تعداد جواب‌های صحیح معادله‌ی $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 17$ را با شرط $x_i \geq 3$ برای $i = 1,2,3,4$ پیدا کنید.

حل: تغییر متغیرهای زیر را انجام می‌دهیم:

$$x_i \geq 3 \Rightarrow \overbrace{x_i - 3}^{y_i} \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} x_i = y_i + 3 \\ y_i \geq 3 \end{cases} \quad i = 1,2,3,4$$

با قرار دادن رابطه‌ی بالا در معادله خواهیم داشت:

$$y_1 + 3 + y_2 + 3 + y_3 + 3 + y_4 + 3 = 17 \Rightarrow$$
$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 5$$

تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله‌ی آخری با تعداد جواب‌های مسئله برابر است، بنابراین:

$$\binom{n+k-1}{k-1} = \binom{5+4-1}{4-1} = \binom{8}{3} = 56$$

مثال: مطلوب است تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی هریک از معادلات زیر:

۱. $x_1^2 + x_2 + x_3 + x_4 = 10$

حل. با توجه به معادله داریم؛ $0 \leq x_1 \leq 3$ ، درنتیجه:

$x_1 = 0 \Rightarrow x_2 + x_3 + x_4 = 10 \Rightarrow$ تعداد جواب‌ها $= \binom{12}{2} = 66$

$x_1 = 1 \Rightarrow x_2 + x_3 + x_4 = 9 \Rightarrow$ تعداد جواب‌ها $= \binom{11}{2} = 55$

$x_1 = 2 \Rightarrow x_2 + x_3 + x_4 = 6 \Rightarrow$ تعداد جواب‌ها $= \binom{8}{2} = 28$

$x_1 = 3 \Rightarrow x_2 + x_3 + x_4 = 1 \Rightarrow$ تعداد جواب‌ها $= \binom{3}{2} = 3$

تعداد کل جواب‌ها $= 66 + 55 + 28 + 3 = 152$

۲. $\sqrt{x_1} + x_2 + x_3 = 3$

$x_1 = 0 \Rightarrow x_2 + x_3 = 3 \Rightarrow$ تعداد جواب‌ها $= \binom{4}{1} = 4$

$x_1 = 1 \Rightarrow x_2 + x_3 = 2 \Rightarrow$ تعداد جواب‌ها $= \binom{3}{1} = 3$

$x_1 = 4 \Rightarrow x_2 + x_3 = 1 \Rightarrow$ تعداد جواب‌ها $= \binom{2}{1} = 2$

$x_1 = 9 \Rightarrow x_2 + x_3 = 0 \Rightarrow$ تعداد جواب‌ها $= \binom{1}{1} = 1$

تعداد کل جواب‌ها $= 4 + 3 + 2 + 1 = 10$

۳. $x_1 + x_2 + 4x_3 + x_4 + x_5 = 13$

حل. با توجه به معادله، ملاحظه می‌کنیم که $0 \leq x_3 \leq 3$ ، درنتیجه داریم:

$x_3 = 0 \Rightarrow x_1 + x_2 + x_4 + x_5 = 13$

$\Rightarrow$ تعداد جواب‌ها $= \binom{16}{3} = 560$

$x_3 = 1 \Rightarrow x_1 + x_2 + x_4 + x_5 = 9$

$\Rightarrow$ تعداد جواب‌ها $= \binom{12}{3} = 220$

$x_3 = 2 \Rightarrow x_1 + x_2 + x_4 + x_5 = 5$

$\Rightarrow$ تعداد جواب‌ها $= \binom{8}{3} = 56$

$x_3 = 3 \Rightarrow x_1 + x_2 + x_4 + x_5 = 1 \Rightarrow$ تعداد جواب‌ها $= \binom{4}{3} = 4$

تعداد کل جواب‌ها $= 560 + 220 + 56 + 4 = 840$

در ادامه‌ی بحث، برای یافتن تعداد جواب‌های صحیح معادله‌ی $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = k$ با شرطی مانند $a \leq x_i \leq b$ ؛ $a, b \in \mathbb{Z}, (1 \leq i \leq n)$ باید از اصل شمول و عدم شمول استفاده کنیم. از این رو، ابتدا این اصل را بیان می‌کنیم.

اصل شمول و عدم شمول

عدد اصلی یک مجموعه

فرض کنیم A یک مجموعه‌ی متناهی و دارای n عضو باشد. در این صورت، تعداد اعضای A را با نماد $|A|$ یا $n(A)$ نمایش می‌دهیم و به آن عدد اصلی مجموعه‌ی A می‌گوییم. در این حالت می‌نویسیم:

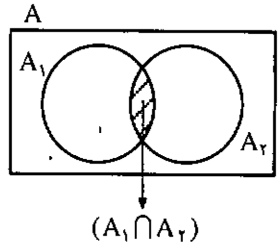
$$|A| = n$$

اصل شمول و عدم شمول برای دو مجموعه‌ی متناهی

فرض کنیم، A یک مجموعه‌ی متناهی و شامل n عضو باشد $(n \in \mathbb{N})$. اگر A_1 و A_2 دو زیر مجموعه‌ی A باشند، برای محاسبه‌ی

$|A_1 \cup A_2|$، ابتدا حاصل جمع $|A_1|+|A_2|$ را به‌دست می‌آوریم. در این حاصل جمع، تعداد عضوهای مشترک بین A_1 و A_2 دوباره شمرده می‌شوند، یعنی مقدار $|A_1 \cap A_2|$ را دوبار به حساب می‌آوریم (شمول آن‌ها دوبار به حساب آمده است). بنابراین، $|A_1 \cap A_2|$ یک‌بار در A_1 یک‌بار در A_2 محاسبه شده است. برای محاسبه‌ی تعداد عضوهایی که حداقل به یکی از دو مجموعه‌ی A_1 یا A_2 تعلق دارند، یعنی $|A_1 \cup A_2|$، باید یکی از این دوبار را کنار گذاشت (عدم شمول)، در نتیجه داریم:

$$|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|$$



نکته: برای یافتن تعداد اعضایی از A که به هیچ یک از مجموعه‌های A_1 و A_2 تعلق نداشته باشد، به‌صورت زیر عمل می‌کنیم ($\overline{A}_1$ را متمم مجموعه‌ی A درنظر می‌گیریم):

$$\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 = n - \left(|A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|\right)$$

زیرا:

$$\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 = (\overline{A_1 \cup A_2})$$

اصل شمول و عدم شمول برای سه مجموعه‌ی متناهی

فرض کنیم A یک مجموعه‌ی متناهی و شامل n عضو باشد. اگر A_1 ، A_2 و A_3 سه زیر مجموعه از A باشند، برای محاسبه‌ی $|A_1 \cup A_2 \cup A_3|$؛ به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3|$$

نکته: برای یافتن تعداد اعضایی از A که به هیچ یک از سه مجموعه‌ی A_1 ، A_2 و A_3 تعلق نداشته باشند، از دستور زیر استفاده می‌کنیم:

$$|\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \overline{A}_3| = n - |A_1 \cup A_2 \cup A_3|$$

محاسبه‌ی تعداد جواب‌های صحیح معادله‌ی $x_1 + x_2 + \cdots + x_k = n$ با شرط $a \le x_i \le b$

اکنون وقت آن رسیده است که با استفاده از اصل شمول و عدم شمول، تعداد جواب‌های صحیح این معادله را در حالتی که $a \le x_i \le b$ ، $a, b \in W, i = 1, 2, \ldots, n$ به دست آوریم. برای تشریح این موضوع از چند مثال و مسئله استفاده می‌کنیم.

مثال: در یک گل فروشی، سه رنگ متفاوت گل رُز وجود دارد. فرض کنید می‌خواهیم دسته گلی با ۹ شاخه گل رُز انتخاب کنیم به طوری که از رُز زرد ۲ تا ۵ شاخه و از رُز سفید ۱ تا ۳ شاخه در آن موجود باشد. این **انتخاب دسته گل به چند طریق ممکن است**.

حل: فرض کنیم x_1 گل از نوع اول، x_2 گل از نوع دوم و x_3 گل از نوع سوم انتخاب کنیم. در این صورت، با توجه به صورت مثال داریم:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 9 \\ 2 \le x_1 \le 5 \\ 1 \le x_2 \le 3 \end{cases}$$

ابتدا با تغییر متغیرهای مناسب، کران پایین محدوده‌ی متغیرها را به عدد صفر تبدیل می‌کنیم:

$$2 \le x_1 \le 5 \Rightarrow 0 \le \overbrace{x_1 - 2}^{y_1} \le 3 \Rightarrow \begin{cases} 0 \le y_1 \le 3 \\ x_1 = y_1 + 2 \end{cases} \quad (1)$$

$$1 \le x_2 \le 3 \Rightarrow 0 \le \overbrace{x_2 - 1}^{y_2} \le 2 \Rightarrow \begin{cases} 0 \le y_2 \le 2 \\ x_2 = y_2 + 1 \end{cases} \quad (2)$$

با قرار دادن تغییر متغیرهای (۱) و (۲) در معادله داریم:

$$y_1 + 2 + y_2 + 1 + x_3 = 9 \Rightarrow y_1 + y_2 + x_3 = 6$$

اکنون معادله‌ی $y_1 + y_2 + x_3 = 6$ (I) را با شرایط $0 \le y_1 \le 3$ و $0 \le y_2 \le 2$ داریم. پیدا کردن تعداد جواب‌های این معادله با شرایط داده شده به‌طور مستقیم کاری دشوار است. به همین منظور، به روش غیرمستقیم و با استفاده از اصل شمول و عدم شمول جواب مسئله را می‌یابیم. برای انجام این کار، ابتدا تعداد کل جواب‌های صحیح و نامنفی معادله‌ی (I) را به‌دست می‌آوریم و آن را $|A|$ می‌نامیم: $|A| = \binom{6+3-1}{3-1} = \binom{8}{2} = 28$. و سپس تعداد جواب‌هایی از معادله‌ی (I) را می‌یابیم که در شرایط مسئله صدق نمی‌کنند. با توجه به مجموعه‌های زیر، حاصل عددی عبارت $|\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2| = |A| - |A_1 \cup A_2|$ جواب مسئله است.

$$A_1 = \{(y_1, y_2, x_3) \mid y_1 > 3\}$$

$$A_2 = \{(y_1, y_2, x_3) \mid y_2 > 2\}$$

در این مرحله $|A_1 \cup A_2|$ را به‌دست می‌آوریم. به این منظور باید $|A_1|$ و $|A_2|$ و $|A_1 \cap A_2|$ را محاسبه کنیم:

$$y_1 > 3 \Rightarrow y_1 \ge 4 \Rightarrow \overbrace{y_1 - 4}^{z_1} \ge 0 \Rightarrow \begin{cases} z_1 \ge 0 \\ y_1 = z_1 + 4 \end{cases} \quad (3)$$

با قرار دادن رابطه‌ی (۳) در معادله‌ی (I) خواهیم داشت:

$$z_1 + 4 + y_2 + x_3 = 6 \Rightarrow z_1 + y_2 + x_3 = 2$$

$$\Rightarrow |A_1| = \binom{2+3-1}{3-1} = \binom{4}{2} = 6$$

$$y_2 > 2 \Rightarrow y_2 \ge 3 \Rightarrow \overbrace{y_2 - 3}^{z_2} \ge 0 \Rightarrow \begin{cases} z_2 \ge 0 \\ y_2 = z_2 + 3 \end{cases} \quad (4)$$

با قرار دادن رابطه‌ی (۴) در معادله‌ی (I) داریم:

$$y_1 + z_2 + 3 + x_3 = 6 \Rightarrow y_1 + z_2 + x_3 = 3$$

$$\Rightarrow |A_2| = \binom{3+3-1}{3-1} = \binom{5}{2} = 10$$

برای محاسبه‌ی $|A_1 \cap A_2|$، کافی رابطه‌های (۳) و (۴) را باهم در معادله‌ی (I) قرار دهیم؛ یعنی:

$$z_1 + 4 + z_2 + 3 + x_3 = 6 \Rightarrow z_1 + z_2 + x_3 = -1$$

$$\Rightarrow |A_1 \cap A_2| = 0 \ \text{(معادله جواب ندارد)}$$

ملاحظه می‌کنیم که $|A_1| = 6$، $|A_2| = 10$ و $|A_1 \cap A_2| = 0$. بنابراین داریم:

$$|\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2| = |A| - |A_1 \cup A_2| = |A| - |A_1| - |A_2| + |A_1 \cap A_2|$$
$$= 28 - 6 - 10 + 0 = 12$$

مثال: تعداد جواب‌های صحیح معادله‌ی $x_1 + x_2 + x_3 = 25$ را با شرایط $2 \le x_1 \le 7$، $3 < x_2 < 11$ و $x_3 > 3$ به‌دست آورید.

حل: ابتدا تغییر متغیرهای مناسب را با توجه به شرایط مسئله در معادله انجام می‌دهیم:

$$2 \le x_1 \le 7 \Rightarrow 0 \le \overbrace{x_1 - 2}^{y_1} \le 5 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = y_1 + 2 \\ 0 \le y_1 \le 5 \end{cases} \quad (1)$$

$$3 < x_2 < 11 \Rightarrow 4 \le x_2 \le 10$$

$$\Rightarrow 0 \le \overbrace{x_2 - 4}^{y_2} \le 6 \Rightarrow \begin{cases} x_2 = y_2 + 4 \\ 0 \le y_2 \le 6 \end{cases} \quad (2)$$

$$x_3 > 3 \Rightarrow x_3 \ge 4 \Rightarrow \overbrace{x_3 - 4}^{y_3} \ge 0 \Rightarrow \begin{cases} x_3 = y_3 + 4 \\ y_3 \ge 0 \end{cases} \quad (3)$$

با قرار دادن رابطه‌های (۱)، (۲) و (۳) در معادله خواهیم داشت:

$$y_1 + 2 + y_2 + 4 + y_3 + 4 = 25 \Rightarrow y_1 + y_2 + y_3 = 15 \quad (I)$$

در صورتی که A مجموعه‌ی جواب‌های صحیح و نامنفی معادله‌ی (I) باشد، داریم:

$$|A| = \binom{15+3-1}{3-1} = \binom{17}{2} = 136$$

اگر مجموعه‌های A_1 و A_2 را به‌صورت زیر درنظر بگیریم، آن‌گاه $|\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2| = |A| - |A_1 \cup A_2|$ جواب مسئله است.

$$A_1 = \{(y_1, y_2, y_3) \mid y_1 + y_2 + y_3 = 15 \ ,\ y_1 \ge 6\}$$
$$= \{(z_1, y_2, y_3) \mid z_1 + y_2 + y_3 = 9 \ ,\ z_1 \ge 0\}$$

$$\Rightarrow |A_1| = \binom{9+3-1}{3-1} = \binom{11}{2} = 55$$

$$A_2 = \{(y_1, y_2, y_3) \mid y_1 + y_2 + y_3 = 15 \ ,\ y_2 \ge 7\}$$
$$= \{(y_1, z_2, y_3) \mid y_1 + z_2 + y_3 = 8 \ ,\ z_2 > 0\}$$

$$\Rightarrow |A_2| = \binom{8+3-1}{3-1} = \binom{10}{2} = 45$$

$$A_1 \cap A_2 = \{(z_1, z_2, y_3) \mid z_1 + z_2 + y_3 = 2 \ ,\ z_1 \ge 0 \ ,\ z_2 \ge 0\}$$

$$\Rightarrow |A_1 \cap A_2| = \binom{2+3-1}{3-1} = \binom{4}{2} = 6$$

$$|\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2| = |A| - |A_1 \cup A_2| = 136 - (55 + 45 - 6) = 42$$

مثال: به چند طریق می‌توان ۷ مهره‌ی یکسان را درون سه جعبه‌ی متمایز طوری قرار داد که در هر جعبه حداکثر ۴ مهره قرار گیرد؟

حل: فرض کنیم در جعبه‌ی اول x_1 مهره، در جعبه‌ی دوم x_2 مهره و در جعبه‌ی سوم x_3 مهره قرار دهیم. بنابراین داریم:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 7 \ (I) \ ,\ x_i \le 4 \ ,\ i = 1, 2, 3$$

چون یافتن تعداد جواب‌های صحیح این معادله به طور مستقیم مقدور نیست، با استفاده از اصل شمول و عدم شمول و به روش غیرمستقیم جواب مسئله را می‌یابیم:

$$x_i \nleq 4 \Rightarrow x_i > 4 \Rightarrow x_i \ge 5 \ ,\ i = 1, 2, 3$$

اگر مجموعه‌های A_1, A_2, A_3 را به‌صورت زیر تعریف کنیم آن‌گاه $|\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \overline{A}_3|$ جواب مسأله است.

$$A_1 = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1 + x_2 + x_3 = 7 \ ,\ x_1 \ge 5\}$$

$$\Rightarrow |A_1| = \binom{2+3-1}{3-1} = \binom{4}{2} = 6$$

$$A_2 = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1 + x_2 + x_3 = 7 \ ,\ x_2 \ge 5\}$$

$$\Rightarrow |A_2| = \binom{4}{2} = 6$$

$$A_3=\{(x_1,x_2,x_3)\mid x_1+x_2+x_3=7\ ,\ x_3\ge 5\}$$
$$\Rightarrow |A_3|=\binom{4}{2}=6$$

$$A_1\cap A_2=\{(x_1,x_2,x_3)\mid x_1+x_2+x_3=7\ ,\ x_1\ge 5\ ,\ x_2\ge 5\}$$
$$=\{(x_1,x_2,x_3)\mid x_1+x_2+x_3=-3\ ,\ x_1\ge 0\ ,\ x_2\ge 0\}$$
$$\Rightarrow |A_1\cap A_2|=0$$

به همین ترتیب:

$$|A_1\cap A_2\cap A_3|=|A_2\cap A_3|=|A_1\cap A_3|=0$$

بنابراین داریم:

$$|\overline{A}_1\cap\overline{A}_2\cap\overline{A}_3|=|A|-|A_1\cup A_2\cup A_3|$$

اگر A مجموعه‌ی جواب‌های صحیح و نامنفی معادله‌ی $x_1+x_2+x_3=7$ باشد، آن‌گاه داریم:

$$|A|=\binom{7+3-1}{3-1}=\binom{9}{2}=36$$

بنابراین:

$$|\overline{A}_1\cap\overline{A}_2\cap\overline{A}_3|=36-(6+6+6-0)=18$$

مثال: تعداد جواب‌های صحیح معادله‌ی $x_1+x_2+x_3+x_4=15$ را با شرایط $-2\le x_i\le 3$ و $1\le i\le 3$ به‌دست آورید.

حل: ابتدا تغییر متغیرهای مناسب را با توجه به شرایط مسئله در معادله انجام می‌دهیم:

$$-2\le x_i\le 3\Rightarrow 0\le \overbrace{x_i+2}^{y_i}\le 5\Rightarrow\begin{cases}x_i=y_i-2\\ 0\le y_i\le 5\end{cases}\quad i=1,2,3$$

بنابراین داریم:

$$y_1-2+y_2-2+y_3-2+x_4=15\Rightarrow$$
$$y_1+y_2+y_3+x_4=21\quad (I)$$

در صورتی که A مجموعه‌ی جواب‌های صحیح و نامنفی معادله‌ی (I) باشد، داریم:

$$|A|=\binom{21+4-1}{4-1}=\binom{24}{3}=2024$$

چون یافتن تعداد جواب‌های صحیح این معادله به‌طور مستقیم مقدور نیست، بنابراین با استفاده از اصل شمول و عدم شمول و به روش غیرمستقیم جواب مسئله را می‌یابیم:

$$0\not\le y_i\not\le 5\Rightarrow y_i>5\Rightarrow y_i\ge 6\ ,\ i=1,2,3$$

اگر مجموعه‌های A_1 ، A_2 و A_3 را به‌صورت زیر درنظر بگیریم، آن‌گاه $|\overline{A}_1\cap\overline{A}_2\cap\overline{A}_3|$ جواب مسئله است.

$$A_1=\{(y_1,y_2,y_3,x_4)\mid y_1+y_2+y_3+x_4=21\ ,\ y_1\ge 6\}$$
$$\Rightarrow |A_1|=\binom{15+4-1}{4-1}=\binom{18}{3}=816$$

$$A_2=\{(y_1,y_2,y_3,x_4)\mid y_1+y_2+y_3+x_4=21,\ y_2\ge 6\}$$
$$\Rightarrow |A_2|=\binom{15+4-1}{4-1}=\binom{18}{3}=816$$

$$A_3=\{(y_1,y_2,y_3,x_4)\mid y_1+y_2+y_3+x_4=21,\ y_3\ge 6\}$$
$$\Rightarrow |A_3|=\binom{25+4-1}{4-1}=\binom{18}{3}=816$$

$$A_1\cap A_2=\{(y_1,y_2,y_3,x_4)\mid y_1+y_2+y_3+x_4=21\ ,\ y_1\ge 6,\ y_2\ge 6\}$$

$$\Rightarrow |A_1\cap A_2|=\binom{9+4-1}{4-1}=\binom{12}{3}=220$$

به همین ترتیب $|A_1\cap A_3|=|A_2\cap A_3|=220$ و هم‌چنین داریم:

$$A_1\cap A_2\cap A_3=\{(y_1,y_2,y_3,x_4)\mid y_1+y_2+y_3+x_4=21,\ y_1\ge 6,\ y_2\ge 6, y_2\ge 6\}$$

$$\Rightarrow |A_1\cap A_2\cap A_3|=\binom{3+4-1}{4-1}=\binom{6}{3}=20$$

بنابراین داریم:

$$|A_1\cap A_2\cap A_3|=|A|-|A_1\cup A_2\cup A_3|$$
$$=2024-(816+816+816-220-220-220+20)$$
$$=216$$

در نتیجه، تعداد جواب‌های صحیح معادله‌ی $x_1+x_2+x_3+x_4=15$ با شرایط $-2\le x_i\le 3$ $(i=1,2,3)$ ، با تعداد جواب‌های صحیح معادله‌ی $y_1+y_2+y_3+x_4=21$ با شرایط $0\le y_i\le 5$ $(i=1,2,3)$ برابر است که تعداد این جواب‌ها ۲۱۶ است.

مسئله: چند عدد چهاررقمی بزرگ‌تر از ۲۰۰۰ وجود دارد، به‌طوری که مجموع رقم‌های آن برابر با ۲۱ و رقم یکان آن‌ها بیشتر از ۵ باشند؟

حل: فرض کنیم $\overline{a_4a_3a_2a_1}$ عدد چهاررقمی مورد نظر باشد. چون این عدد باید بیشتر از ۲۰۰۰ باشد. بنابراین: $2\le a_4\le 9$. از طرف دیگر، باید مجموع رقم‌های این عدد برابر با ۲۱ باشد. بنابراین: $a_1+a_2+a_3+a_4=21$ (I) . هم‌چنین، رقم یکان این عدد باید بیشتر ۵ باشد، پس: $5<a_1\le 9$. a_2,a_3 رقم‌های دهگان و صدگان هستند، در این صورت $0\le a_2\le 9$ و $0\le a_3\le 9$. در نتیجه برای یافتن جواب مسئله باید تعداد

جواب‌های صحیح معادله‌ی (I) را با توجه به شرایط به‌دست آمده، محاسبه کرد.

ابتدا با تغییر متغیرهای مناسب، کران پایین محدوده‌ی متغیرها را به عدد صفر تبدیل می‌کنیم.

$$5 < a_1 \le 9 \Rightarrow 6 \le a_1 \le 9 \Rightarrow 0 \le \overbrace{a_1 - 6}^{y_1} \le 3 \Rightarrow \begin{cases} a_1 = y_1 + 6 \\ 0 \le y_1 \le 3 \end{cases} \quad (1)$$

$$2 \le a_4 \le 9 \Rightarrow 0 \le \overbrace{a_4 - 2}^{y_2} \le 7 \Rightarrow \begin{cases} a_4 = y_2 + 2 \\ 0 \le y_2 \le 7 \end{cases} \quad (2)$$

با قرار دادن رابطه‌های (1) و (2) در معادله‌ی (I) داریم:

$$y_1 + 6 + a_2 + a_3 + y_2 + 2 = 21 \Rightarrow$$
$$y_1 + a_2 + a_3 + y_2 = 13 \quad (II)$$

اکنون باید تعداد جواب‌های صحیح معادله‌ی (II) را با شرایط $0 \le y_1 \le 3$ ، $0 \le a_2 \le 9$ ، $0 \le a_3 \le 9$ و $0 \le y_2 \le 7$ محاسبه کرد. به این منظور از اصل شمول و عدم شمول برای چهار مجموعه استفاده می‌کنیم. اگر A مجموعه جواب‌های صحیح و نامنفی معادله‌ی (II) باشد، آن‌گاه $|A| = \binom{13+4-1}{4-1} = \binom{16}{3}$.

مجموعه‌های زیر را در نظر بگیرید:

$A_1 = \{$جواب‌های صحیح معادله با شرط $y_1 \ge 4\}$

$A_2 = \{$جواب‌های صحیح معادله با شرط $a_2 \ge 10\}$

$A_3 = \{$جواب‌های صحیح معادله با شرط $a_3 \ge 10\}$

$A_4 = \{$جواب‌های صحیح معادله با شرط $y_2 \ge 8\}$

حالا باید $|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4|$ را پیدا کنیم. به این منظور داریم:

$$y_1 \ge 4 \Rightarrow \overbrace{y_1 - 4}^{z_1} \ge 0 \Rightarrow \begin{cases} y_1 = z_1 + 4 \\ z_1 \ge 0 \end{cases} \quad (3)$$

با قرار دادن رابطه‌ی (3) در معادله‌ی (II) داریم:

$$z_1 + 4 + a_2 + a_3 + y_2 = 13 \Rightarrow z_1 + a_2 + a_3 + y_2 = 9 \Rightarrow$$

$$|A_1| = \binom{9+4-1}{4-1} = \binom{12}{3}$$

به همین ترتیب خواهیم داشت:

$$|A_2| = \binom{3+4-1}{4-1} = \binom{6}{3}, |A_3| = \binom{6}{3},$$

$$|A_4| = \binom{5+4-1}{4-1} = \binom{8}{3}$$

برای محاسبه‌ی $|A_1 \cap A_2|$ به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$\begin{cases} y_1 \ge 4 \Rightarrow \overbrace{y_1 - 4}^{z_1} \ge 0 \Rightarrow \begin{cases} y_1 = z_1 + 4 \\ z_1 \ge 0 \end{cases} \\ a_2 \ge 10 \Rightarrow \overbrace{a_2 - 10}^{z_2} \ge 0 \Rightarrow \begin{cases} a_2 = z_2 + 10 \\ z_2 \ge 0 \end{cases} \end{cases}$$

با قرار دادن رابطه‌های اخیر در معادله‌ی (II)، می‌توان $|A_1 \cap A_2|$ را محاسبه کرد:

$$z_1 + 4 + z_2 + 10 + a_3 + y_2 = 13$$
$$\Rightarrow z_1 + z_2 + a_3 + y_2 = -1 \text{ غیرممکن } \Rightarrow |A_1 \cap A_2| = 0$$

به همین ترتیب داریم:

$$|A_1 \cap A_3| = |A_2 \cap A_3| = |A_2 \cap A_4| = |A_3 \cap A_4| = 0 \text{ و }$$

$$|A_1 \cap A_4| = \binom{1+4-1}{4-1} = \binom{4}{3}$$

هم‌چنین داریم:

$$|A_i \cap A_j \cap A_k| = 0 ;\ 1 \le i < j < k \le 4$$
$$|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4| = 0$$

بنابر اصل شمول و عدم شمول برای چهار مجموعه[2] داریم:

$$|\overline{A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4}| = |A| - |A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4|$$
$$= \binom{16}{3} - \left[\binom{12}{3} + \binom{6}{3} + \binom{6}{3} + \binom{8}{3} - \binom{4}{3}\right]$$
$$= 560 - [220 + 20 + 20 + 56 - 4] = 248$$

❋❋❋

زیرنویس

1. فرض کنیم n شیء داشته باشیم که در آن‌ها، k نوع شیء متمایز $(k \le n)$ وجود داشته باشد؛ به‌طوری که n_1 تا از نوع اول، n_2 تا از نوع دوم، ... و n_k تا از نوع kام باشند و: $n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n$. در این صورت، تعداد تبدیل‌های متمایز این n شیء برابر است با:

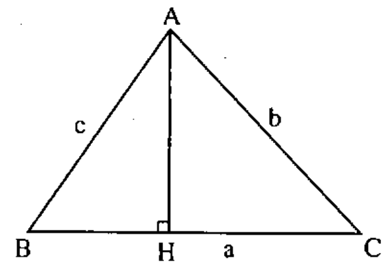
$$p_n = \frac{n!}{n_1! \times n_2! \times \cdots \times n_k!}$$

2. $|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4| = \sum_{i=1}^{4} |A_i| - \sum_{1 \le i < j \le 4} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \le i < j < k \le 4} |A_i \cap A_j \cap A_k| - |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4|$

اثبات دیگر بر قضیه‌ی هرون

● هوشنگ شرقی

قضیه‌ی هرون از قضایای کلیدی و مهم در هندسه است که در بیشتر کتاب‌های کلاسیک هندسه (به غیر از کتاب‌های هندسه‌ی ۱ و ۲ دوره‌ی متوسطه!) آمده است. به کمک این قضیه می‌توان مساحت هر مثلث را با داشتن طول اضلاع آن محاسبه کرد. اگر اضلاع مثلث را با a، b و c و محیط آن را با ۲p نمایش دهیم $(a+b+c=2p)$، مساحت آن (S) از دستور $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ به‌دست می‌آید.



دستور فوق به هرون اسکندرانی منسوب است که در حدود قرن دوم میلادی در اسکندریه‌ی مصر می‌زیست و در زمینه‌ی محاسبات هندسی کارهای زیادی انجام داده که از جمله‌ی آن‌ها همین دستور است. روش معمول در اثبات این قضیه که در اکثر کتاب‌ها ذکر شده است، استفاده از قضیه‌ی **فیثاغورس** همراه با محاسبات جبری نسبتاً طولانی است. به‌عنوان تمرین، برای کسانی که با این اثبات آشنایی ندارند، راهنمایی‌هایی برای اثبات آن در پی می‌آید:

الف) در شکل قبل رابطه‌ی فیثاغورس را در مثلث ABH بنویسید و با جای‌گذاری $BH=a-CH$ نتیجه بگیرید:

$$CH=\frac{a^2+b^2+c^2}{2a}$$

ب) به کمک قضیه‌ی فیثاغورس در مثلث AHC و دستور $AH=\sqrt{b^2-CH^2}$ و نتیجه‌ی بند (الف)، طول ارتفاع AH را بر حسب a، b و c به‌دست آورید.

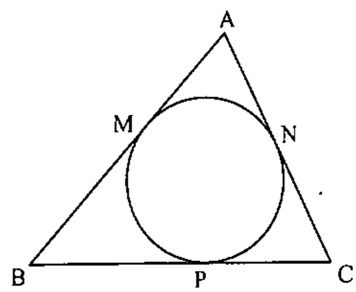
ج) با تجزیه‌ی عبارت جبری زیر رادیکال و فرض $a+b+c=2p$، سعی کنید عبارت فوق را به $AH=\frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ تبدیل و از آن‌جا به سادگی دستور هرون را استخراج کنید.

چنان‌که ملاحظه کردید، روش فوق در اثبات دستور هرون محاسبات جبری نسبتاً پیچیده‌ای دارد، لذا روش‌های دیگری هم برای اثبات آن ابداع شده است که یکی از جالب‌ترین آن‌ها درپی می‌آید.

* * *

برای اثبات این دستور، ابتدا سه پیش‌قضیه‌ی زیر مطرح می‌شوند که گرچه هر سه آن‌ها قضایای معروفی هستند، ولی اثبات آن‌ها را هم می‌آوریم.

قضیه‌ی ۱. دایره‌ی محاطی داخلی مثلث ABC، روی اضلاع مثلث شش قطعه پدید می‌آورد که دوبه‌دو با هم برابر، و مساوی $p-a$، $p-b$ و $p-c$ هستند (p نصف محیط و a، b و c طول‌های اضلاع مثلث هستند).



اثبات: برابری این قطعات با توجه به قضیه‌ی برابری مماس‌های مرسوم از یک نقطه خارج از دایره بر آن، واضح است؛ یعنی: $AM=AN$، $CN=CP$ و $BM=BP$.

از آن‌جا می‌توان نوشت:

$$AN=AC-CN=AC-CP=AC-(BC-BP)$$
$$=AC-BC+BP=AC-BC+BM=AC-BC+AB-AM$$
$$=AC+AB-BC-AN\Rightarrow AN=b+c-a-AN$$
$$\Rightarrow 2AN=b+c-a\Rightarrow 2AN=(a+b+c)-2a=2P-2a$$
$$\Rightarrow AN=P-a\Rightarrow AM=AN=P-a$$

و به همین صورت ثابت می‌شود: $CN=CP=p-c$ و $BM=BP=p-b$

قضیه‌ی ۲. اگر α، β و γ سه زاویه‌ی حاده باشند و $\alpha+\beta+\gamma=90^\circ$، آن‌گاه:

$$tg\alpha tg\beta+tg\alpha tg\gamma+tg\beta tg\gamma=1$$

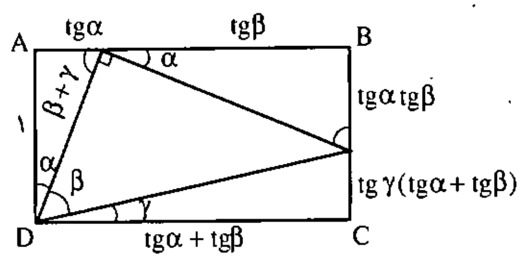
اثبات: به کمک دستور تانژانت مجموع دو زاویه به‌راحتی می‌توان نوشت:

$$\alpha+\beta=90-\gamma\Rightarrow tg(\alpha+\beta)=tg(90-\gamma)\Rightarrow tg(\alpha+\beta)$$
$$=\cot g\gamma\Rightarrow\frac{tg\alpha+tg\beta}{1-tg\alpha tg\beta}=\frac{1}{tg\gamma}\Rightarrow tg\alpha tg\beta+tg\beta tg\gamma$$
$$=1-tg\alpha tg\beta\Rightarrow tg\alpha tg\beta+tg\alpha tg\gamma+tg\beta tg\gamma=1$$

تمرین ۱. به کمک روشی مشابه، ثابت کنید: اگر $\alpha+\beta+\gamma=180^\circ$ باشد، آن‌گاه:

$$tg\alpha+tg\beta+tg\gamma=tg\alpha tg\beta tg\gamma$$

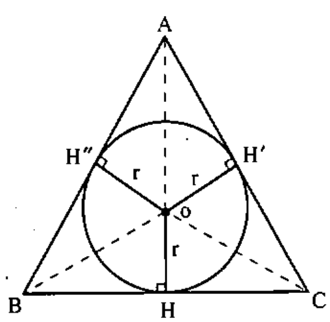
تمرین ۲. یک راه‌حل زیبای هندسی هم برای اثبات رابطه‌ی فوق وجود دارد. به شکل زیر توجه کنید:



مستطیل ABCD به طول $AB=CD=tg\alpha+tg\beta$ و به عرض $AD=BC=1$ رسم شده است. با توجه به شکل، $\alpha+\beta+\gamma=\frac{\pi}{2}$ و درستی اندازه‌ها را با توجه به شکل و به سادگی می‌توانید تحقیق کنید. هم‌چنین، با توجه به برابری $AD=BC$، درستی رابطه‌ی فوق را تحقیق کنید.

قضیه‌ی ۳. اگر S مساحت، $2p$ محیط و r شعاع دایره‌ی محاطی مثلث ABC باشد، داریم:

$$r=\frac{S}{P}$$



اثبات: مطابق شکل، O مرکز دایره‌ی محاطی داخلی مثلث ABC است و $OH=OH'=OH''=r$ و می‌توان نوشت:

$$S_{ABC}=S_{OAB}+S_{OAC}+S_{OBC}$$
$$\Rightarrow S=\frac{1}{2}OH''.AB+\frac{1}{2}OH'.AC+\frac{1}{2}OH.BC$$
$$=\frac{1}{2}r.c+\frac{1}{2}r.b+\frac{1}{2}r.a=\frac{1}{2}(a+b+c)r=pr$$
$$\Rightarrow S=pr\ ,\ \ r=\frac{S}{P}$$

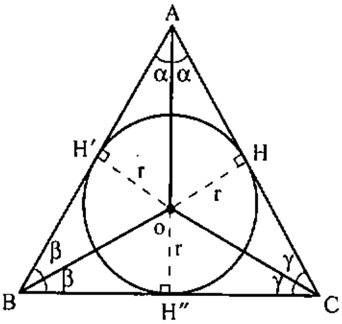
تمرین ۳. اگر h_a، h_b و h_c ارتفاعات نظیر اضلاع a، b و c

مثلث ABC باشند، ثابت کنید:

$$\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}=\frac{1}{r}$$

* * *

اکنون به کمک این سه قضیه، می‌توان درستی قضیه‌ی هرون را به‌سادگی اثبات کرد. مرکز دایره‌ی محاطی مثلث ABC، نقطه‌ی برخورد نیم‌سازهاست. بنابراین مطابق شکل داریم:



$$\Delta OAH: \operatorname{tg}\alpha=\frac{r}{AH}=\frac{r}{p-a}$$

$$\Delta OBH': \operatorname{tg}\beta=\frac{r}{BH'}=\frac{r}{p-b},\ \Delta OCH'': \operatorname{tg}\gamma=\frac{r}{CH''}=\frac{r}{p-c}$$

$$2\alpha+2\beta+2\gamma=180^\circ \Rightarrow \alpha+\beta+\gamma=90^\circ$$

$$\Rightarrow \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\gamma+\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma=1$$

$$\Rightarrow \frac{r^2}{(p-a)(p-b)}+\frac{r^2}{(p-a)(p-c)}+\frac{r^2}{(p-b)(p-c)}=1$$

$$\Rightarrow r^2\left[\underbrace{(p-c)+(p-b)+(p-c)}_{3p-(a+b+c)=3p-2p=p}\right]=(p-a)(p-b)(p-c)$$

$$\Rightarrow r^2p=(p-a)(p-b)(p-c),\quad r=\frac{S}{p}$$

$$\Rightarrow \frac{S^2}{p^2}p=(p-a)(p-b)(p-c)$$

$$\Rightarrow S^2=p(p-a)(p-b)(p-c)\Rightarrow S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

تمرین ۴. مثلث ABC به اضلاع ۷، ۸ و ۵ مفروض است. اولاً به کمک دستور هرون مساحت مثلث را محاسبه کنید و نیز طول شعاع دایره‌ی محاطی و طول‌های ارتفاع‌های مثلث را به‌دست آورید. ثانیاً به کمک شکل بالا، مقادیر $\operatorname{tg}\frac{A}{2}$، $\operatorname{tg}\frac{B}{2}$ و $\operatorname{tg}\frac{C}{2}$، و به کمک دستور $\operatorname{tg}2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$، مقادیر $\operatorname{tg}A$، $\operatorname{tg}B$ و $\operatorname{tg}C$ را به‌دست آورید و نشان دهید:

$$\operatorname{tg}A+\operatorname{tg}B+\operatorname{tg}C=\operatorname{tg}A\operatorname{tg}B\operatorname{tg}C$$

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}+\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}+\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}=1$$

معرفی سایت‌های ریاضی جهان

● احسان یارمحمدی

Math Archives
http://archives.math.utk.edu

در صفحه‌ی اصلی این سایت، تیتر «عنوان‌های ریاضیات» (Topics in Mathematics) را مشاهده می‌کنیم. در واقع در صفحات این سایت، مخاطب لینک‌های متنوعی را پیدا خواهد کرد که به‌وسیله‌ی موضوعات ریاضیات سازمان‌دهی و طراحی شده‌اند. برای جست‌وجوی مفید و مؤثر در این سایت و نیز دست‌یابی به اطلاعات مورد نظرتان، دو روش پیش‌روی شماست:

الف) می‌توانید با کلیک کردن روی عبارت مورد نظر خود، به هر یک از صفحات زیر بروید:

۱. جبر مجرد (Abstract Algebra)
۲. جبر (Algebra)
۳. آنالیز (Analysis)
۴. ریاضیات کاربردی (Applied Mathematics)
۵. حساب (Arithmetic)
۶. هنر و موسیقی (Art & Music)
۷. حساب دیفرانسیل و انتگرال (Calculus)
۸. نظریه‌ی ماشین‌های بافت سلولی (Cellular Automata)
۹. ترکیبیات (Combinatorics)
۱۰. آنالیز مختلط (Complex Analysis)
۱۱. هندسه‌ی محاسباتی (Computational Geometry)
۱۲. علم محاسباتی (Computational Science)
۱۳. جبر رایانه / رمزشناسی (Computer Algebra/ Cryptology)
۱۴. الگوریتم‌های ژنتیکی (Genetic Algorithms)
۱۵. هندسه‌ی دیفرانسیل (Differential Geometry)
۱۶. ریاضیات گسسته (Discrete Mathematics)
۱۷. دستگاه‌های دینامیکی (Dynamical Systems)
۱۸. حرکت اجسام سیال (Fluid Dunamics)
۱۹. آنالیز فوریه و امواج ضربه‌ای (Fourier Analysis & Wavelets)
۲۰. فراکتال‌ها (Fractals)
۲۱. هندسه (Geometry)
۲۲. تاریخ ریاضیات (History of Mathematics)
۲۳. ریاضیات صنعتی (Industrial mathematics)
۲۴. برنامه‌ریزی خطی و غیرخطی (Linear & Nonlinear Programing)

ادامه در صفحه‌ی ۴۶

log لگاریتم

احمد قندهاری

فرض می‌کنیم a عددی حقیقی و مثبت و مخالف عدد ۱ باشد. اگر اعدادی حقیقی مانند N و x وجود داشته باشند به‌طوری که $N = a^x$، در این صورت بنا به تعریف می‌گوییم: لگاریتم N در مبنای a برابر x است و می‌نویسیم:

$$N = a^x \Leftrightarrow \log_a N = x$$

عدد x را لگاریتم و عدد a را مبنای لگاریتم و عدد N را آنتی‌لگاریتم یا عدد L به ازا گوییم.

چون a عددی مثبت است و عدد مثبت به هر توان که برسد مثبت است، پس a^x و N عددهایی مثبت‌اند. به همین دلیل است که می‌گویند اعداد منفی و صفر لگاریتم ندارند.

مثال ۱: از تساوی $\log_{\sqrt[۵]{۳}} ۳\sqrt{۳} = x$، x را بیابید.

حل: بنا به تعریف لگاریتم می‌توان نوشت:

$$۳\sqrt{۳} = (\sqrt[۵]{۳})^x$$

دو طرف تساوی را به توان ۱۰ می‌رسانیم:

$$۳^{۱۰}(۳^۵) = (۳^۲)^x \Rightarrow ۳^{۱۵} = ۳^{۲x} \Rightarrow ۲x = ۱۵ \Rightarrow x = \frac{۱۵}{۲}$$

مثال ۲: از تساوی $\log_{۲\sqrt[۳]{۲}} N = \frac{۳}{۴}$، N را بیابید.

حل: بنابه تعریف می‌توان نوشت:

$$N = (۲\sqrt[۳]{۲})^{\frac{۳}{۴}} \Rightarrow N = \left[۲^۳(۲)\right]^{\frac{۱}{۴}} \Rightarrow N = (۲^۴)^{\frac{۱}{۴}} \Rightarrow N = ۲$$

مثال ۳: اگر $\log_a(\sqrt{۲} - ۱) = -۱$، آن‌گاه a را بیابید.

حل. بنا به تعریف می‌توان نوشت:

$$a^{-۱} = (\sqrt{۲} - ۱) \Rightarrow a = \frac{۱}{\sqrt{۲} - ۱} \Rightarrow a = \frac{۱}{\sqrt{۲} - ۱} \times \frac{\sqrt{۲} + ۱}{\sqrt{۲} + ۱}$$

$$\Rightarrow a = \frac{\sqrt{2}+1}{1} \Rightarrow a = \sqrt{2}+1$$

فرمول‌های لگاریتم

توجه: هر عددی که در مبنای لگاریتم قرار می‌گیرد، مثبت و مخالف ۱ است.

$$1) \quad 1 = a^0 \Rightarrow \log_a 1 = 0 \qquad (1)$$

$$2) \quad a = a^1 \Rightarrow \log_a a = 1 \qquad (2)$$

۳. اگر $M = a^x$ و $N = a^y$، آن‌گاه می‌توان نوشت:

$\log_a M = x$ و $\log_a N = y$

$$M.N = a^x.a^y \Rightarrow M.N = a^{x+y} \Rightarrow \log_a M.N = x+y$$

$$\Rightarrow \log_a M.M = \log_a M + \log_a N \qquad (3)$$

تعمیم:

$$\log_a M.N\cdots K = \log_a M + \log_a N + \cdots + \log_a K$$

۴. اگر $M = a^x \Rightarrow \log_a M = x$

اگر $N = a^y \Rightarrow \log_a N = x$

$$\frac{M}{N} = \frac{a^x}{a^y} \Rightarrow \frac{M}{N} = a^{x-y} \Rightarrow \log_a \frac{M}{N} = x-y$$

$$\Rightarrow \log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N \qquad (4)$$

۵. $\log_a \frac{1}{N} = \log_a 1 - \log_a N$ ، $\log_a 1 = 0$

$$\Rightarrow \log_a \frac{1}{N} = -\log_a N \qquad (5)$$

۶. اگر $N = a^x \Rightarrow \log_a N = x$ و $x \neq 0$

فرض می‌کنیم: $\log_{a^p} N^m = kx$. می‌خواهیم k را بیابیم.

بنا به تعریف می‌نویسیم: $N = a^x$ و $N^m = (a^p)^{kx}$

$$(a^x)^m = (a^p)^{kx} \Rightarrow a^{mx} = a^{kpx} \Rightarrow mx = kpx$$

$$\Rightarrow m = kp \Rightarrow k = \frac{m}{p}$$

$$\Rightarrow \log_{a^p} N^m = \frac{m}{p}\log_a N \qquad (6)$$

مثال: $\log_{\sqrt{5}} 125 = \log_{5^{\frac{1}{2}}} 5^3 = \frac{3}{\frac{1}{2}}\log_5 5 = 6$

نتایج فرمول ۶

$$1) \quad \log_a N^m = m\log_a N$$

$$2) \quad \log_{a^p} N = \frac{1}{p}\log_a N$$

$$3) \quad \log_{\frac{1}{a}} \frac{1}{N} = \log_{a^{-1}} N^{-1} = \log_a N$$

$$4) \quad \log_{\sqrt[p]{a}} \sqrt[m]{N} = \log_{a^{\frac{1}{p}}} N^{\frac{1}{m}} = \frac{\frac{1}{m}}{\frac{1}{p}}\log_a N = \frac{p}{m}\log_a N$$

۷. اگر $\log_b a = x$ و $\log_a b = y$، آن‌گاه می‌توان نوشت:

$$a = b^x,\ b = a^y \Rightarrow a = (a^y)^x \Rightarrow a = a^{x.y}$$

$$\Rightarrow x.y = 1 \Rightarrow \log_b a \times \log_a b = 1 \qquad (7)$$

نتایج فرمول ۷

$$1) \quad \log_b a = \frac{1}{\log_a b}$$

$$2) \quad \log_{MN} a = \frac{1}{\log_a MN} = \frac{1}{\log_a M + \log_a N}$$

مثال: حاصل $\log_{\sqrt{24}}\sqrt{3}$ را بیابید.

حل:

$$\log_{\sqrt{24}}\sqrt{3} = \log_{24} 3 = \frac{1}{\log_3 24} = \frac{1}{\log_2 2^3 \times 3}$$

$$\Rightarrow \log_{\sqrt{24}}\sqrt{3} = \frac{1}{\log_2 2^3 + \log_2 3} = \frac{1}{3\log_2 2 + \log_2 3}$$

$$= \frac{1}{3+\log_2 3}$$

۸. فرض می‌کنیم: $\log_b a = x$ و $\log_c b = y$ و $\log_c a = z$. در نتیجه می‌توان نوشت:

$$a = b^x,\ b = c^y,\ a = c^z$$

$$a = a \Rightarrow c^z = b^x \Rightarrow c^z = (c^y)^x \Rightarrow c^z = c^{xy}$$

$$\Rightarrow z = xy \Rightarrow \log_b a \times \log_c b = \log_c a \qquad (8)$$

تعمیم:

$$\log_b a \times \log_c b \times \log_d c \times \cdots \times \log_n k = \log_n a$$

مثال:

$$\log_7 36 \times \log_6 7 = \log_6 36 = \log_6 6^2 = 2\log_6 6 = 2$$

توجه: اگر مبنای لگاریتم ۱۰ باشد، آن را نمی‌نویسیم.

۹.

$$\log_b a \times \log_c b = \log_c a \Rightarrow \log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b} \qquad (9)$$

۱۰.

$$\text{اگر}\begin{cases}\log_c x = k \Rightarrow x = c^k \\ \log_b k = p \Rightarrow k = b^p \quad \Rightarrow x = c^k = c^{b^p} = c^{b^{a^m}} \\ \log_a p = m \Rightarrow p = a^m\end{cases}$$

$$m = \log_a p = \log_a(\log_b k) = \log_a(\log_b(\log_c x))$$

$$\Rightarrow \log_a(\log_b(\log_c x)) = m \Rightarrow x = c^{b^{a^m}} \qquad (۱۰)$$

مثال: اگر $\log_{\sqrt[4]{۲}}(\log_{\sqrt[3]{۲}}(\log_{\sqrt[4]{۲}} x)) = ۴$ ، آن‌گاه x را بیابید.

حل:

$$x = \sqrt[4]{۲}^{\sqrt[3]{۲}^{\sqrt[4]{۲}^{۴}}} \Rightarrow x = \sqrt[4]{۲}^{\sqrt[3]{۲}^{۳}} \Rightarrow x = \sqrt[4]{۲}^{۲} \Rightarrow x = \sqrt{۲}$$

۱۱.

$$\log_a N = p \Rightarrow N = a^p \Rightarrow N = (a)^{\log_a N} \qquad (۱۱)$$

۱.۲. همواره داریم:

$$(x)^{\log_a y} = (y)^{\log_a x} \qquad (۱۲)$$

اگر از دو طرف در مبنای a لگاریتم بگیریم، داریم:

$$\log_a y . \log_a x = \log_a x . \log_a y$$

تذکر: در تعریف لگاریتم گفتیم، a عددی حقیقی و مثبت و $a \neq ۱$ است. پس برای a دو حالت وجود دارد: حالت اول $a > ۰$ و حالت دوم $۰ < a < ۱$.

حال چند رابطه را در این دو حالت بررسی می‌کنیم:

حالت اول: $a > ۱ \ , \ \log a > ۰$

$$(I)\ \log_a N > ۰ \Rightarrow \frac{\log N}{\log a} > ۰ \ , \ \log a > ۰$$

$$\Rightarrow \log N > ۰ \Rightarrow N > ۱$$

$$(II)\ \log_a N < ۰ \Rightarrow \frac{\log N}{\log a} < ۰ \ , \ \log a > ۰$$

$$\Rightarrow \log N < ۰ \Rightarrow ۰ < N < ۱$$

$$(III)\ \log_a N > ۱ \Rightarrow \frac{\log N}{\log a} > ۱ \ , \ \log a > ۰$$

$$\Rightarrow \log N > \log a \Rightarrow N > a$$

$$(IV)\ \log_a N < ۱ \Rightarrow \frac{\log N}{\log a} < ۱ \ , \ \log a > ۰ \Rightarrow \log N < \log a$$

$$\Rightarrow ۰ < N < a$$

$$(V)\ \log_a N > -۱ \Rightarrow \frac{\log N}{\log a} > -۱ \ ; \ \log a > ۰ \Rightarrow \log N > -\log a$$

$$\Rightarrow \log N > \log a^{-۱} \Rightarrow \log N > \log \frac{۱}{a} \Rightarrow N > \frac{۱}{a}$$

$$(VI)\ \log_a N < -۱ \Rightarrow \frac{\log N}{\log a} < -۱ \ , \ \log a > ۰$$

$$\Rightarrow \log N < -\log a$$

$$\Rightarrow \log N < \log a^{-۱} \Rightarrow \log N < \log \frac{۱}{a} \Rightarrow ۰ < N < \frac{۱}{a}$$

حالت دوم: $۰ < a < ۱ \ , \ \log a < ۰$

$$(I)'\ \log_a N > ۰ \Rightarrow \frac{\log N}{\log a} > ۰ \ , \ \log a < ۰ \Rightarrow \log N < ۰$$

$$\Rightarrow ۰ < N < ۱$$

$$(II)'\ \log_a N < ۰ \Rightarrow \frac{\log N}{\log a} < ۰ \ , \ \log a < ۰ \Rightarrow \log N > ۰$$

$$\Rightarrow N > ۱$$

$$(III)'\ \log_a N > ۱ \Rightarrow \frac{\log N}{\log a} > ۱ \ , \ \log a < ۰ \Rightarrow \log N < \log a$$

$$\Rightarrow ۰ < x < a$$

$$(IV)'\ \log_a N < ۱ \Rightarrow \frac{\log N}{\log a} < ۱ \ , \ \log a < ۰ \Rightarrow \log N > \log a$$

$$\Rightarrow x > a$$

$$(V)'\ \log_a N > -۱ \Rightarrow \frac{\log N}{\log a} > -۱ \ , \ \log a < ۰$$

$$\Rightarrow \log N < -\log = \log \frac{۱}{a} \Rightarrow ۰ < N < \frac{۱}{a}$$

$$(VI)'\ \log_a N < -۱ \Rightarrow \frac{\log N}{\log a} < -۱ \ , \ \log a < ۰$$

$$\Rightarrow \log N > -\log a = \log \frac{۱}{a} \Rightarrow N > \frac{۱}{a}$$

سؤال‌های چهارگزینه‌ای

۱. اگر $\log(\log(\log x)) = ۰$ ، آن‌گاه x کدام است؟

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۱۰۰۰ ۴) $۱۰^{۱۰}$

حل: گزینه‌ی (۴)

$$\log(\log(\log x)) = ۰ \Rightarrow \log(\log x) = ۱ \Rightarrow \log x = ۱۰$$

$$\Rightarrow x = ۱۰^{۱۰}$$

۲. حاصل $(\sqrt{۱۰})^{۱۶\log \sqrt[4]{۳}} - ۸\log \sqrt{۲}$ کدام است؟

۱) $\frac{3}{2}$ ۲) $\frac{9}{4}$ ۳) $\frac{9}{2}$ ۴) $\frac{9}{8}$

حل: گزینه‌ی (۲)

$$=(10)^{8\log\sqrt[4]{3}-4\log\sqrt{2}}=(10)^{\log 9-\log 4}=(10)^{\log\frac{9}{4}}=\frac{9}{4}$$

۳. اگر $\log_2 x+\log_4 x+\log_8 x+\log_{16} x=(10)^{\log\frac{25}{12}}$، آن‌گاه x کدام است؟

۱) ۸ ۲) $4\sqrt{2}$ ۳) ۴ ۴) ۲

حل: گزینه‌ی (۴)

$$=\log_2 x+\log_{2^2} x+\log_{2^3} x+\log_{2^4} x=\frac{25}{12}$$

$$\log_2 x+\frac{1}{2}\log_2 x+\frac{1}{3}\log_2 x+\frac{1}{4}\log_2 x=\frac{25}{12}$$

$$\Rightarrow \frac{25}{12}\log_2 x=\frac{25}{12}\Rightarrow \log_2 x=1\Rightarrow x=2$$

۴. اگر $y\times 5^{\log x}=x^2$، مقدار y کدام است؟

۱) $20^{\log x}$ ۲) $10^{\log x}$ ۳) $2^{\log x}$ ۴) $5^{\log x}$

حل: گزینه‌ی (۱)

$$y=\frac{x^2}{5^{\log x}}=\frac{x^2}{x^{\log 5}}=x^{2-\log 5}=x^{\log 100-\log 5}$$

$$\Rightarrow y=x^{\log 20}=20^{\log x}$$

۵. اگر $(x)^{\log x}=(\frac{x}{10})^4$، آن‌گاه x کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۱۰ ۳) 10^2 ۴) 10^4

حل: گزینه‌ی (۳). از دو طرف در مبنای ۱۰ لگاریتم می‌گیریم.

$$\log x.\log x=4\log\frac{x}{10}\Rightarrow(\log x)^2=4(\log x-\log 10)$$

$$(\log x)^2-4\log x+4=0\Rightarrow(\log x-2)^2=0\Rightarrow\log x=2$$

$$\Rightarrow x=100$$

۶. اگر $M=(\log_6 5)^{\cos\alpha}$، آن‌گاه بیشترین مقدار M کدام است؟

۱) ۱ ۲) $+\infty$ ۳) $\log\frac{6}{5}$ ۴) $\log_6 5$

حل: گزینه‌ی (۳). چون $\log_6 5$ عددی بین صفر و یک است و این عدد به توان ۱,...,۰,...,۱− برسد، وقتی ماکزیمم است که توانش ۱− باشد.

$$Max(M)=(\log_6 5)^{-1}=\frac{1}{\log_6 5}=\log_5 6$$

۷. اگر $\log_x a=4$ و $\log_y a=2$ و $\log_z a=3$، آن‌گاه $\log^a_{x.y.z}$ کدام است؟

۱) $\frac{13}{12}$ ۲) $\frac{12}{13}$ ۳) $\frac{8}{11}$ ۴) $\frac{11}{8}$

حل: گزینه‌ی (۲).

$$\log_{x.y.z} a=\frac{1}{\log_a x.y.z}=\frac{1}{\log_a x+\log_a y+\log_a z}$$

$$=\frac{1}{\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}=\frac{12}{13}$$

۸. اگر $(3)^{\frac{n+1}{2}}=(4)^{\log_2 9}$، آن‌گاه n کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۸

حل: گزینه‌ی (۳).

$$3^{\frac{n+1}{2}}=4^{\log_2 9}\Rightarrow 3^{\frac{n+1}{2}}=4^{\log_4 81}$$

$$\Rightarrow 3^{\frac{n+1}{2}}=81\Rightarrow 3^{\frac{n+1}{2}}=3^4\Rightarrow\frac{n+1}{2}=4\Rightarrow n=7$$

۹. اگر $\log_{11} N=a$، آن‌گاه $\log_{\sqrt{N}} 121$ کدام است؟
(کنکور سراسری)

۱) $2a$ ۲) $\frac{a}{2}$ ۳) $\frac{4}{a}$ ۴) $\frac{a}{4}$

حل: گزینه‌ی (۳).

$$\log_{11} N=a\Rightarrow\log_N 11=\frac{1}{a}$$

$$\log_{\sqrt{n}} 121=\log_{n^{\frac{1}{2}}} 11^2=\frac{2}{\frac{1}{2}}\log_n 11=4\log_n 11=4(\frac{1}{a})=\frac{4}{a}$$

۱۰. جواب معادله‌ی $\log(\log x)=\log(7-2\log x)-\log 5$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۵ ۳) ۱۰ ۴) ۱۰۰

حل: گزینه‌ی (۳).

$$\log(\log x)=\log(\frac{7-2\log x}{5})$$

چون تابع $y=\log x$ تابعی یک به یک است، می‌توان نوشت:

$$\log x=\frac{7-2\log x}{5}\Rightarrow 5\log x=7-2\log x$$

$$\Rightarrow 7\log x=7\Rightarrow\log x=1\Rightarrow x=10$$

نگارش ریاضیات در انجمن

نگارش موضوع‌های ریاضی با جمله‌های بسیار، در بعضی موارد مناسب نیست. در بسیاری از موارد، نگارش یک موضوع ریاضی با رسم اشکال متعدد که هر یک از آن‌ها مرحله‌ای از اثبات را بیان می‌کند، با توضیح‌های کوتاه و رسا بسیار مناسب است. افزون بر این، به کارگیری نشان‌ها برای پرهیز از نگارش بعضی جمله‌ها و به کارگیری پیکان‌ها برای ارجاع‌ها و به طور کلی هر گونه اشاره‌ی کوتاه و رسا برای اثبات موضوع، به سرعت فهماندن کمک شایانی می‌کند.

این شیوه‌ی نگارش موضوع علمی، فکر خواننده را بیشتر متمرکز می‌کند، زیرا چشم خواننده، اشکال و نشان‌ها را با سرعت بیشتر می‌پیماید تا جمله‌ها را.

هم‌چنین، یک شیوه‌ی مناسب در نگارش موضوع‌های علمی آن است که در یک صفحه‌ی کتاب، موضوع (یا قسمتی از آن) را شرح دهیم (با جمله‌های کافی و فرمول‌ها و شکل‌ها) و در صفحه‌ی مقابل (یا در زیر صفحه، اگر جا کافی باشد) همان مطلب را فقط با شکل‌ها و فرمول‌های مربوط و پیکان‌ها (بدون جمله و یا با تعداد کمی جمله‌های کوتاه) مطرح کنیم تا خواننده برای مطالعه‌ی دوباره یا سه‌باره‌ی موضوع، فقط همان صفحه‌ی دوم را از نظر بگذراند. با این شیوه‌ی نگارش، نوشته با سرعت زیاد در ذهن خواننده مرور می‌شود. این روش نگارش مطالب، به پرورش فکر علمی کمک شایانی می‌کند. ممکن است بعضی کسان بگویند، این روش نگارش اقتصادی نیست (مصرف زیاد کاغذ). اما اگر توجه کنیم که در این روش، هنگام مطالعه‌ی دوباره یا سه‌باره‌ی موضوع، وقت کمی مصرف می‌شود و افزون بر این، روش یاد شده به تمرکز فکر و قدرت تفکر کمک می‌کند که این لازمه‌ی پرورش خلاقیت است، آن‌گاه در می‌یابیم که این روش بسیار هم اقتصادی است.

در سطرهای آینده، چند مسئله‌ی ریاضی را با شیوه‌ی نگارشی که یاد کردم، می‌نگارم. در پایان مقاله، اثباتی برای همرسی میانه‌های مثلث عرضه شده که از آنِ نگارنده است. این اثبات جذاب و زودفهم است. تصور می‌کنم دانش‌آموزان آن را کاملاً بپسندند.

در آغاز مقاله‌ی خود، داستان انجمن متفکران را آورده‌ام. نخستین بند مرام این انجمن آن بود که اعضای آن بسیار بیندیشند و اندیشه‌ی خود را با عبارات کوتاه بیان کنند و سخن نگویند، مگر به ضرورت.

چون شیوه‌ی کار اعضای انجمن متفکران با شیوه‌ی نگارش موضوع‌های علمی مورد نظرم هماهنگ است، از این رو آن داستان را در مقدمه‌ی مقاله‌ی خود یاد می‌کنم.

انجمن متفکران

آورده‌اند که در یکی از بلاد مشرق که امن و راحت هنرپرور بود و عدل و انصاف سایه‌گستر، گروهی از دانشمندان حقیقت‌جوی و هنرپیشگان بی‌های هوی، انجمنی ساخته و در تحقیق حقایق و استکشاف دقایق علم و ادب رنج می‌بردند، چون آنان را جز دانش و هنر، مطلوبی و جز ترقی فرهنگ و معرفت، مقصودی نبود. غول اغراض از آن مجمع گریخته و دیو خودنمایی

از آن ساحت رخت بربسته بود. فضلای انجمن متفکران سر در گریبان تحقیق فرو برده و زنگ شهرت و جاه‌طلبی از رخسار عمل خویش سترده بودند و برای این که در گفت‌وگوها و مباحثات علمی نیز حبّ سخن‌پردازی بر انصاف و اعتدال غالب نگردد، چنین قرار گذاشته بودند که اعضای این انجمن:

همواره بیندیشند و کم بنویسند و سخن نگویند الاّ به ضرورت.

از این رو، محفل آنان را انجمن متفکران می‌خواندند. با وجود آن که اعضای آن انجمن بسیار کم سخن می‌گفتند، آوازه دانش و کمالات آنان به هر جا رسید و بسیاری از دانشمندان آرزوی عضویت در انجمن متفکران را داشتند. اما چون شماره‌ی افراد آن انجمن تنها ۱۰۰ بود، پذیرش خواهان تازه‌ی عضویت ممکن نبود.

در یکی از شهرستان‌های دور، دانایی بود به جمال حکمت آراسته و از نقص بشریت پیراسته.

حضرتش ملجأ طالبان معرفت و پیشگاهش مطاف صاحبان ذوق و قریحت بود. همواره آرزو داشت که از غوغای عوام رسته و در سلک خواص پیوسته گردد و از محفل مریدان ناهنجار، به مجلس یاران غمگسار درآید و چون فطرتاً از هرزه درایی بلکه از سخن‌سرایی اکراه داشت، انجمن متفکران را بهترین مقام می‌پنداشت.

روزی خبر یافت که جایی در آن محفل انس خالی شده است. بی‌درنگ بار سفر بربست و بیابان‌ها و کوهسارها درنوردید تا به شهر انجمن متفکران رسید. هم‌چنان از گرد راه به درگاه علما شتافت و سطری درنهایت ایجاز بر ورقی نوشت و به دربان داد که: فلان بر در است و افتخار عضویت را منتظر.

قضا را کار از کار گذشته و دیگری در مکان خالی نشسته بود. چون رئیس انجمن، حاضران را از مضمون آن سطر آگاهی داد، آه حسرت از دل‌ها برآمد و دود غبن و اسف از سرها برخاست، زیرا که همه را پایه‌ی دانش و مایه‌ی بینش آن استاد مسافر معلوم بود و از صفت ممتاز و خصلت بی‌انباز او، یعنی سکوت تام و احتراز از کلام او خبر داشتند و به جان، مشتاق همدمی و مصاحبت او بودند؛ اما چه چاره که در روز پیش، یکی از مدعیان با اقتدار و عاشقان نام و اشتهار، کرسی خالی را فرو گرفته.

رئیس انجمن که ناگزیر بایستی آن خبر ملالت اثر را به دانای مسافر بدهد، در حیرت بود که چگونه این تکلیف دشوار را به انجام رساند. دیرزمانی در بحر فکرت فرورفت، به هر راهی که موافق حسن مجاملت و مطابق آداب صحبت بود، اندیشه کرد. عاقبت بفرمود تا جامی آوردند و چندان آب در آن ریختند که گنجایش ذره‌ای بیش نداشت؛ چنان که اگر قطره‌ای بر آن می‌افزودند، به همان مقدار از جام فرومی ریخت. پس اشارت کرد تا میهمان را به درون آوردند. حکیم با سادگی و خضوعی که نشانه‌ی اهل فضل و کمال است، درآمد. رئیس از جای برخاست و بی‌آن که سخنی بر زبان راند، جام مالامال را با نهایت اندوه و ملال به وی نمود.

حکیم به فراست دریافت که عدد افراد انجمن کامل و تمنّی او باطل است. لکن پای ثبات او از جای به در نرفت و خواست تا به وسیلتی، مجلسیان را آگاه کند که از افزودن عضوی، انجمنی را و از افکندن دانه، خرمنی را زیان نرسد و در حیرت بود که چگونه بی‌دستاویز کلام، این مرام را ادا کند که ناگاه در پیش پای خود، برگ گلی افتاده دید. حکیم آن برگ را برگرفت و آهسته بر سطح جام قرار داد. چنان که قطره‌ای فرونریخت و چین کدورتی بر رخسار مصفای آب نیفتاد.

حاضران چون این جواب ظریف بدیدند، یکباره شادمان شدند و کف‌ها زدند و به اتفاق، آن بزرگوار را برخلاف رسم و قانون انجمن، پذیرفتند و دفتر عضویت را پیشش نهادند تا مانند دیگران نام و نشان را به خط خویش بنگارد. حکیم چون از این کار بپرداخت، لازم دید که بنا بر مرسوم، کلمه‌ای چند در سپاس بگوید، اما چون قرار بود سخن نگویند الا به ضرورت؛ در حاشیه‌ی دفتر، عدد صد را که شماره‌ی اعضای انجمن بود، نگاشته، صفری پیش از صد گذاشت (۰۱۰۰) و در زیر آن چنین نوشت: «به این مقدار نه چیزی افزوده شد، نه چیزی کم». رئیس انجمن قلم برگرفت و با همان سادگی و ادب، عدد صد را بنگاشت و صفری پس از آن بگذاشت (۱۰۰۰) و بنوشت: «قدر ما ده برابر گشت».

متفکران

● دکتر احمد شرف‌الدین

مسئله‌ی اول (شطرنج)

۱	۲	۴	۸	۱۶	۳۲	۶۴	۱۲۸
۲۵۶							
							$۲^{۶۳}$

$$\begin{cases} S=۱+۲+۴+۸+\cdots+۲^{۶۳} \\ S=? \end{cases}$$

در صفحه‌ی شطرنج، در خانه‌ی اول، یک گندم می‌گذاریم و در خانه‌ی دوم دو گندم. سپس در هر خانه دو برابر خانه‌ی پیشین گندم می‌گذاریم. می‌خواهیم مجموع دانه‌های گندم را حساب کنیم.

حل

$$S+۱=\underbrace{۱+۱}_{۲}+۲+۴+۸+\cdots+۲^{۶۳}$$

$$S+۱=\underbrace{۲+۲}_{۴}+۴+۸+\cdots+۲^{۶۳}$$

$$S+۱=\underbrace{۴+۴}_{۸}+۸+\cdots+۲^{۶۳}$$

$$S+۱=\underbrace{۸+۸}_{۱۶}+\cdots+۲^{۶۳}$$

....

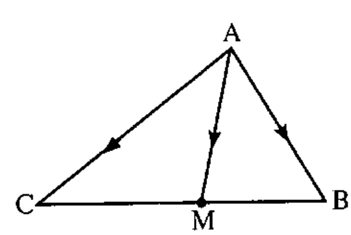
$$S+۱=\underbrace{۲^{۶۲}+۲^{۶۲}}_{۲^{۶۳}}+۲^{۶۳}=۲^{۶۳}+۲^{۶۳}$$

$$S=۲^{۶۴}-۱$$

$$S=۱۸\ ۴۴۶\ ۷۴۴\ ۰۷۳\ ۷۰۹\ ۵۵۱\ ۶۱۵$$

✻✻✻✻

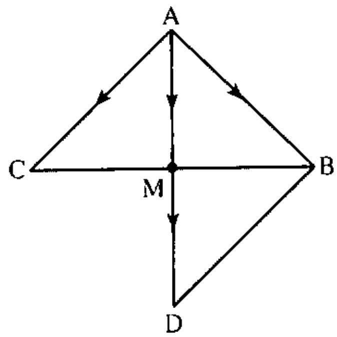
مسئله‌ی دوم



$$MB=MC \Rightarrow \vec{AB}+\vec{AC}=۲\vec{AM}$$

در مثلث ABC پاره‌خط AM میانه است، ثابت کنید...

حل



$$\vec{MD}=\vec{AM}$$

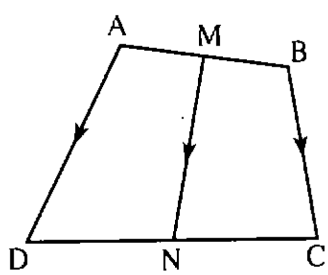
$$\begin{cases} MC=MB \\ AM=MD \\ AMC \text{ اندازه‌ی زاویه } = BMD \text{ اندازه‌ی زاویه} \end{cases} \Rightarrow A\overset{\Delta}{M}C=B\overset{\Delta}{M}D$$

$$A\overset{\Delta}{M}C=B\overset{\Delta}{M}D \Rightarrow \begin{cases} AC \parallel BD \\ AC=BD \end{cases} \Rightarrow \vec{AC}=\vec{BD}$$

$$\vec{AC}=\vec{BD} \Rightarrow \vec{AB}+\vec{AC}=\vec{AB}+\vec{BD}=\vec{AD}=۲\vec{AM}$$

✻✻✻

مسئله‌ی سوم



$$\begin{cases} MA=MB \\ ND=NC \end{cases} \Rightarrow \vec{AD}+\vec{BC}=۲\vec{MN}$$

در چهارضلعی ABCD (هامنی یا ناهامنی) دو نقطه‌ی M و N به‌ترتیب وسط‌های دو ضلع روبه‌روی AB و CD هستند. ثابت کنید:

$$\vec{AD}+\vec{BC}=۲\vec{MN}$$

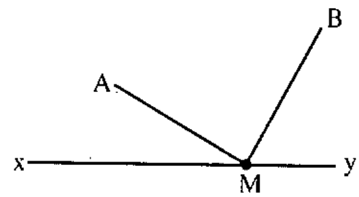
حل

$$\vec{MN}=\vec{MA}+\vec{AD}+\vec{DN}$$

....

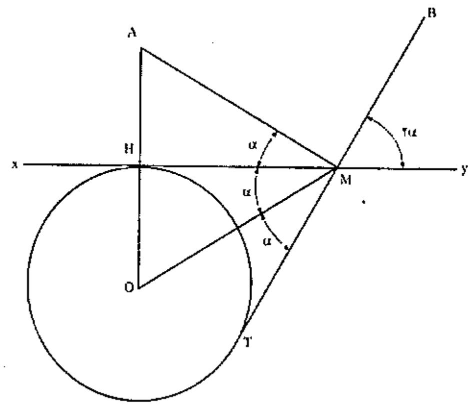
....

مسئله‌ی چهارم



در صفحه‌ی P، خط XY و دو نقطه‌ی A و B داده شده‌اند. بر خط XY نقطه‌ی M را چنان بگیرید که اندازه‌ی زاویه‌ی BMY دو برابر اندازه‌ی زاویه‌ی AMX باشد.

حل



(۱) رسم خط AHC عمود بر خط XY

(۲) $HC = HA$

(۳) رسم دایره به مرکز C و شعاع CH

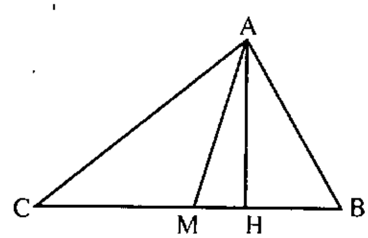
(۴) رسم مماس BT

(۵) $M = BT \cap XY$

❁ ❁ ❁

مسئله‌ی پنجم

ثابت کنید در هر مثلث، سه میانه همرس‌اند.

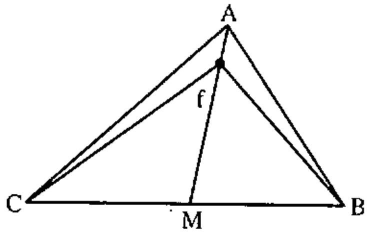


بند ۱:

$$\begin{cases} MB = MC \\ AH \perp BC \end{cases}$$

مساحت $A\overset{\Delta}{M}B$ = مساحت $A\overset{\Delta}{M}C$

بند ۲:



$$\begin{cases} MB = MC \\ P \in AM \end{cases}$$

مساحت $P\overset{\Delta}{M}B$ = مساحت $P\overset{\Delta}{M}C$

مساحت $P\overset{\Delta}{A}B$ = مساحت $P\overset{\Delta}{A}C$

بند ۳: نقطه‌ی P را روی میانه‌ی AM از نقطه‌ی A به سوی نقطه‌ی M حرکت می‌دهیم. مساحت مثلث‌های PAB و PAC از صفر به سوی نصف مساحت مثلث ABC تغییر می‌کند. پس نقطه‌ای چون A' روی میانه‌ی AM وجود دارد، به‌طوری که:

مساحت $A'\overset{\Delta}{C}A$ = مساحت $A'\overset{\Delta}{B}C$ = مساحت $A'\overset{\Delta}{A}B$

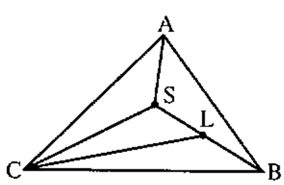
بند ۴: با همین شیوه‌ی استدلال نتیجه می‌گیریم که نقطه‌ی B' روی میانه‌ای که از رأس B می‌گذرد وجود دارد، به‌طوری که:

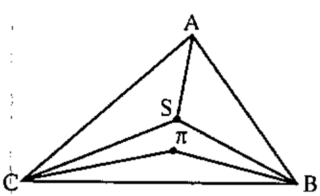
$B'\overset{\Delta}{C}A$ = مساحت $B'\overset{\Delta}{B}C$ = مساحت $B'\overset{\Delta}{A}B$

و نیز نقطه‌ی C' ...

بند ۵: داخل مثلث ABC، تنها یک نقطه‌ی S وجود دارد، به‌طوری که:

مساحت $S\overset{\Delta}{C}A$ = مساحت $S\overset{\Delta}{B}C$ = مساحت $S\overset{\Delta}{A}B$





مساحت‌های مثلث‌های MBC و LBC، از یک سوم مساحت مثلث ABC کمترند.

بند ۶: پس سه نقطه‌ی A'، B' و C' بر هم منطبق‌اند، یعنی سه میانه‌ی هر مثلث همرس‌اند.

لازم به ذکر است، اثبات همرس سه میانه که در سطرهای بالا بیان شد، از آن صاحب این قلم است.

بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک (ب م م) یا بزرگ‌ترین شمارنده‌ی مشترک

● حمیدرضا امیری

عدد صحیح c را مقسوم‌علیه مشترک یا شمارنده‌ی مشترک دو عدد صحیح a و b می‌نامیم، در صورتی که هر دو را بشمارد؛ یعنی $c|a$ و $c|b$.

برای مثال، عدد ۳ یک شمارنده‌ی مشترک برای دو عدد ۶ و ۹- است؛ زیرا ۳|۶ و ۳|۹- .

تعریف: اگر a و b دو عدد صحیح باشند، به طوری که حداقل یکی از آن‌ها صفر نباشد، بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک (ب م م) a و b را با نماد (a,b) نمایش می‌دهیم و آن عددی است طبیعی چون d، که اولاً مقسوم‌علیه مشترک a و b باشد و دوم این‌که هر مقسوم‌علیه مشترک a و b از d کوچک‌تر باشد.

اگر بخواهیم معادل تعریف فوق را با نمادهای ریاضی بیان کنیم، خواهیم داشت:

$$(a,b)=d \Leftrightarrow \begin{cases} \text{I)}\ d|a,\ d|b \\ \text{II)}\ \forall c>0,\ c|a,\ c|b \Rightarrow c\le d \end{cases}$$

به مثال‌های زیر توجه کنید:

(۶,۸) = ۲ ، (۴,۹) = ۱ ، (۳,-۶) = ۳

تعریف: اگر برای دو عدد صحیح a و b داشته باشیم (a,b) = ۱ ، در این صورت می‌گوییم a و b نسبت به هم اول (یا متباین) هستند. برای مثال، (۳,۵) = ۱ ، (۴,۹) = ۱ و (۵,۶) = ۱ .

تذکر: اگر دو عدد صحیح a و b مفروض باشند و مجموعه‌ی همه‌ی شمارنده‌های مشترک a و b را A بنامیم، یعنی فرض کنیم $A=\{c|c|a, c|b\}$ واضح است که $A\subseteq Z$ و $A\neq\emptyset$ ؛ زیرا $1\in A$. از طرف دیگر، اگر فرض کنیم $a\le b$ ، در این صورت $|a|$ یک کران بالا برای مجموعه‌ی A است (زیرا عددی بزرگ‌تر از $|a|$ نمی‌تواند a را عاد کند)، پس طبق قضیه[1]، مجموعه‌ی A باید دارای عضو انتها باشد که این عضو انتها همان ب م م است. در واقع ثابت شد که همواره ب م م دو عدد صحیح که حداقل یکی

از آن‌ها مخالف صفر باشد، موجود است.

قضیه‌ی ۱: اگر a و b دو عدد صحیح و $a|b$ $(a \neq 0)$، در این صورت $(a, b) = |a|$.

اثبات: باید ثابت کنیم که $|a|$ هر دو شرط ب‌م‌م را دارد:

۱) $a|a \ , \ -a|a \Rightarrow |a|\,|a$

طبق فرض: $a|b \Rightarrow -a|b \Rightarrow |a|\,|b$

(یعنی $|a|$ یک مقسوم‌علیه مشترک a و b است.)

۲) فرض کنیم $c > 0 \ , \ c|a \ , \ c|b$

$$c|a \Rightarrow |c| \leq |a| \overset{c>0}{\Rightarrow} c \leq |a|$$

(یعنی $|a|$ از هر مقسوم‌علیه مشترک a و b بزرگ‌تر است.)

قضیه‌ی ۲: اگر p عددی اول باشد و a عددی صحیح؛ به طوری که $p \nmid a$، در این صورت همواره $(p, a) = 1$ (عدد اول p نسبت به هر عددی که مضرب p نباشد، اول است.)

اثبات: فرض کنیم $(p, a) = d$، ثابت می‌کنیم $d = 1$.

$$(p,a) = d \begin{cases} \nearrow d|a \quad (1) \\ \searrow d|p \overset{\text{اول } p}{\Rightarrow} d = 1 \ \text{یا}\ d = p \end{cases}$$

اگر $d = p$ باشد، در این صورت، با توجه به (۱) باید $p|a$ (به جای d قرار می‌دهیم p) که با فرض $p \nmid a$ تناقض دارد؛ پس باید $d = 1$.

قضیه‌ی ۳ (قضیه‌ی بزو): اگر a و b دو عدد صحیح و حداقل یکی از آن‌ها مخالف صفر باشد، در این صورت، عضو ابتدای مجموعه‌ی $A = \{ma + nb > 0 \mid m, n \in Z\}$، بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک a و b است؛ یعنی: $\min A = (a, b)$.

اثبات: واضح است که $A \subseteq N$، از طرفی حداقل یکی از دو عدد a و b ناصفر است. بنابراین حداقل یکی از دو عدد $|a|$ یا $|b|$ عضو A است و $A \neq \varnothing$؛ زیرا:

۱) $a \neq 0 \Rightarrow |a| > 0 \Rightarrow |a| = \pm a + 0b \Rightarrow |a| \in A$

۲) $b \neq 0 \Rightarrow |b| > 0 \Rightarrow |b| = 0a \pm b \Rightarrow |b| \in A$

(توجه دارید که عددی عضو A است که دو شرط داشته باشد؛ یکی آن که مثبت باشد و دیگر آن که به صورت ترکیبی خطی و صحیح از a و b نوشته شود.)

پس ثابت شد که A زیرمجموعه‌ای ناتهی از N است. بنابراین طبق اصل خوش‌ترتیبی، باید دارای عضو ابتدا باشد. اگر عضو ابتدای A را d بنامیم، کافی است ثابت کنیم $d = (a, b)$. البته توجه دارید که چون فرض شده $d = \min A$، پس باید $d \in A$؛ یعنی باید m_0 و n_0 ای در Z باشند، به قسمی که $d = m_0 a + n_0 b$ (۱).

برای اثبات این که $d = (a, b)$، دو شرط ب‌م‌م را برای d بررسی کنیم، شرط اول آن است که $d|a$ و $d|b$. پس a را بر d تقسیم می‌کنیم. طبق قضیه‌ی تقسیم داریم: $a = dq + r$ که $0 \leq r < d$.

اگر $0 < r < d$، در این صورت داریم:

$$0 < r = a - dq \overset{(1)}{=} a - (m_0 a + n_0 b)q = \underbrace{(1 - m_0 q)}_{m}a + \underbrace{n_0 q}_{n}b$$

$\Rightarrow r \in A$ (r هر دو شرط را برای عضو A بودن داراست.)

اما $r \in A$ با توجه به این که $r < d$ و تعریف عضو ابتدا برای d یک تناقض ایجاد می‌کند (زیرا نمی‌توانیم عضوی کوچک‌تر از عضو ابتدا در مجموعه داشته باشیم) پس باید $r = 0$؛ یعنی $a = dq$ یا $d|a$ و به همین طریق ثابت می‌شود $d|b$.

حال فرض کنیم $c > 0$ و $c|a$ و $c|b$. ثابت می‌کنیم که $c \leq d$.

$$\left.\begin{matrix} c|a \Rightarrow c|m_0 a \\ c|b \Rightarrow c|n_0 b \end{matrix}\right\} \Rightarrow c|m_0 a + n_0 b \overset{(1)}{\Rightarrow} c|d \Rightarrow c \leq d$$

نتیجه‌های حاصل از قضیه‌ی بزو

نتیجه‌ی ۱: اگر $(a, b) = d$ آن‌گاه اعدادی صحیح و نسبت به هم اول، مانند r و s وجود دارند؛ به قسمی که $ra + sb = d$ (ب‌م‌م دو عدد را بر حسب ترکیب خطی آن دو عدد می‌توان نوشت).

اثبات: طبق قضیه‌ی بزو d عضو ابتدای مجموعه‌ی ترکیب‌های خطی a و b است. پس باید $d \in A$ و هر عضو A ترکیبی خطی از a و b است. اثبات نسبت به هم اول بودن ضرایب این ترکیب خطی، یعنی r و s را در نتیجه‌ی ۴ ملاحظه کنید.

نتیجه‌ی ۲: هرگاه عددی دو عدد را بشمارد، آن‌گاه همواره ب‌م‌م آن‌ها را نیز می‌شمارد؛ یعنی:

$a|b \ , \ a|c \Rightarrow a|(b,c)$

اثبات: فرض کنیم $(b,c)=d$ ثابت می‌کنیم که $a|d$.

$$(b,c)=d \xrightarrow{\text{قضیه‌ی بزو}} \exists r,s \ , \ rb+sc=d$$

از طرف دیگر $a|b,\ a|c \Rightarrow a|rb,\ a|sc \Rightarrow a|rb+sc=d \Rightarrow a|d$

تذکر ۱: عکس قضیه‌ی بزو در حالت کلی برقرار نیست. یعنی اگر عددی چون d برابر با ترکیب خطی دو عدد صحیح مانند a و b باشد، نمی‌توان نتیجه گرفت که d ب‌م‌م دو عدد a و b است.

برای مثال $۲۷=۳\times۴+۳\times۵$ ولی $(۵,۳)=۱\neq۲۷$.

نتیجه‌ی ۳: عکس قضیه‌ی بزو در حالت $d=۱$ برقرار است؛ یعنی اگر ترکیب خطی دو عدد صحیح، مساوی با یک باشد، آن‌گاه آن دو عدد نسبت به هم اول هستند.

$ra+sb=۱ \Rightarrow (a,b)=۱$

اثبات: فرض کنیم $(a,b)=d$ و ثابت می‌کنیم که $d=۱$.

$$(a,b)=d \quad \left.\begin{array}{l} d|a \Rightarrow d|ra \\ d|b \Rightarrow d|sb \end{array}\right\} \Rightarrow d|ra+sb$$

و چون طبق فرض $ra+sb=۱$ ، بنابراین باید $d|۱$ که نتیجه می‌شود $d=۱$.

تذکر ۲: اگر p عددی اول باشد و $ra+sb=p$ در این صورت $(a,b)=۱$ یا $(a,b)=p$. (مشابه اثبات نتیجه ۳، فقط به‌جای ۱ قرار دهید p)

نتیجه‌ی ۴: اگر دو عدد صحیح مانند a و b را بر بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترکشان تقسیم کنیم، آن‌گاه خارج قسمت‌ها نسبت به هم اول خواهند بود؛ یعنی:

$$(a,b)=d \Rightarrow (\frac{a}{d},\frac{b}{d})=۱$$

اثبات: کافی است ثابت کنیم یک ترکیب خطی از $\frac{a}{d}$ و $\frac{b}{d}$ مساوی با عدد یک است و طبق نتیجه‌ی ۳ ثابت می‌شود $\frac{a}{d}$ و $\frac{b}{d}$ نسبت به هم اول هستند.

$$(a,b)=d \xrightarrow{\text{قضیه‌ی بزو}} \exists r,s\in Z \ , \ ra+sb=d \overset{\text{دو طرف بر d تقسیم}}{\Rightarrow}$$

$$r\frac{a}{d}+s\frac{b}{d}=\frac{d}{d} \Rightarrow r\frac{a}{d}+s\frac{b}{d}=۱ \xrightarrow{\text{نتیجه‌ی ۳}} (\frac{a}{d},\frac{b}{d})=۱$$

تذکر ۳: تساوی $r\frac{a}{d}+s\frac{b}{d}=۱$ ترکیبی خطی از r و s نیز هست که در این صورت ثابت می‌شود $(r,s)=۱$ ؛ یعنی در قضیه‌ی بزو ضرایب ترکیب خطی که d را می‌سازد، همواره نسبت به هم اول هستند!

نتیجه‌ی ۵ (لم اقلیدس): هر گاه عددی حاصل‌ضرب دو عدد را بشمارد و نسبت به یکی از آن دو عدد، اول باشد، آن‌گاه همواره دیگری را می‌شمارد:

$a|bc \ , \ (a,b)=۱ \Rightarrow a|c$

اثبات: برای اثبات این‌که $a|c$ کافی است ثابت کنیم $c=aq$. پس به‌دنبال یک تساوی هستیم که یک طرف آن c و طرف دیگر مضرب a باشد:

$$(a,b)=۱ \xrightarrow{\text{قضیه‌ی بزو}} ra+sb=۱ \Rightarrow rac+sbc=c \quad (۱)$$

از طرف دیگر طبق فرض: $a|bc \Rightarrow bc=aq_۱ \overset{(۱)}{\Rightarrow} rac+s(aq_۱)=c$

$$\Rightarrow c=a\underbrace{(rc+sq_۱)}_{q} \Rightarrow c=aq \Rightarrow a|c$$

مسئله‌ی مهم: ثابت کنید، اگر a ، b ، c و d اعداد طبیعی باشند و $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ و داشته باشیم $(a,b)=(c,d)=۱$ ، آن‌گاه $a=c$ و $b=d$.

اثبات: کافی است ثابت کنیم $a\le c$ و $c\le a$ که در این صورت $a=c$ و درنتیجه $b=d$ حاصل می‌شود:

طبق فرض: $ad=bc \Rightarrow a|bc \ , \ (a,b)=۱ \overset{\text{لم اقلیدس}}{\Rightarrow} a|c \Rightarrow a\le c \ (۱)$

طبق فرض: $ad=bc \Rightarrow c|ad \ , \ (c,d)=۱ \overset{\text{لم اقلیدس}}{\Rightarrow} c|a \Rightarrow c\le a \ (۲)$

$(۱),(۲) \Rightarrow a=c \ , \ ad=bc \Rightarrow ad=ba \Rightarrow b=d$

تست: اگر a و b دو عدد صحیح و $p|ab$ و $۳۷p-۲۹a=۱$ ، کوچک‌ترین عضو مثبت مجموعه‌ی $A=\{mp+nb: m,n\in z\}$ کدام است؟ (کنکور سراسری ۷۵)

۱) b ۲) p ۳) ۱ ۴) ۸

حل: گزینه‌ی (۲) صحیح است؛ زیرا با توجه به رابطه‌ی $۳۷p-۲۹a=۱$ و نتیجه‌ی (۳) باید $(p,a)=۱$ و چون $p|ab$ پس طبق لم اقلیدس باید $p|b$. بنابراین $(p,a)=|p|$ که طبق قضیه‌ی بزو $\min A=(p,b)$ ، پس $\min A=|p|$ که البته در گزینه‌ها باید به جای p عدد $|p|$ به کار می‌رفت!

نتیجه‌ی ۶: اگر عددی بر دو عدد بخش‌پذیر باشد و آن دو عدد نسبت به هم اول باشند، آن‌گاه بر حاصل‌ضرب آن دو عدد نیز بخش‌پذیر است:

$b|a \ , \ c|a \ , \ (b,c)=۱ \Rightarrow bc|a$

اثبات: برای اثبات این‌که، $bc|a$ کافی است ثابت کنیم $a=bcq$ که به یک تساوی نیازمندیم؛ طوری که در یک طرف آن a و طرف دیگر آن مضرب bc باشد:

$$(b,c)=۱ \overset{\text{قضیه‌ی بزو}}{\Rightarrow} rb+sc=۱ \overset{\text{دو طرف در a ضرب}}{\Rightarrow} rab+sac=a \quad (۱)$$

از طرف دیگر طبق فرض: $b|a \ , \ c|a \Rightarrow a=bq_1 \ , \ a=cq_2$

$$\overset{(1)}{\Rightarrow} r(cq_2)b+s(bq_1)c=a \Rightarrow a=bc\underbrace{(rq_2+sq_1)}_{q}$$

$$\Rightarrow a=bcq \Rightarrow bc|a$$

نتیجه‌ی ۷: اگر p عددی اول و $p|ab$ ، آن‌گاه $p|a$ یا $p|b$ (p حداقل یکی از a یا b را عاد می‌کند).

اثبات: اگر $p|a$ حکم ثابت است و اگر $p\nmid a$ طبق قضیه‌ی ۲ ، باید $(p,a)=1$ و در نتیجه، بنابر لم اقلیدس، باید $p|b$ ؛ یعنی:

$$p\nmid a \Rightarrow (p,a)=1 \ , \ p|ab \Rightarrow p|b$$

در این صورت نیز حکم به اثبات رسید؛ یعنی همواره $p|a$ یا $p|b$.

نتیجه‌ی ۸: اگر $(a,b)=d$ و $k\in N$ در این صورت $(ka,kb)=kd$ و برعکس. (اگر $k\in Z$ ، $(ka,kb)=|k|d$)

اثبات (شرط لازم):

$$\overbrace{(a,b)=d}^{\text{فرض}} \Rightarrow \overbrace{(ka,kb)=kd}^{\text{حکم}}=k(a,b)$$

دو شرط ب‌م‌م را برای kd بررسی می‌کنیم:

۱) $(a,b)=d \quad \begin{matrix} d|a \Rightarrow kd|ka \\ d|b \Rightarrow kd|kb \end{matrix}$

۲) فرض کنیم $c>0 \ , \ c|ka \ , \ c|kb \overset{\text{باید ثابت کنیم}}{\Rightarrow} c\le kd$

طبق فرض $(a,b)=d \overset{\text{قضیه‌ی بزو}}{\Rightarrow} ra+sb=d \Rightarrow rka+skb=kd$ (۱)

از طرف دیگر فرض کرده‌ایم: $c|ka \ , \ c|kb$

$$\Rightarrow c|rka \ , \ c|skb \Rightarrow c|rka+skb \overset{(1)}{\Rightarrow} c|kb \Rightarrow c\le kd$$

(شرط کافی):

$$\overbrace{(ka,kb)=kd}^{\text{فرض}} \Rightarrow \overbrace{(a,b)=d}^{\text{حکم}}$$

حال دو شرط ب‌م‌م را برای d بررسی می‌کنیم:

۱) $(ka,kb)=kd \quad \begin{matrix} kd|ka \Rightarrow d|a \\ kd|kb \Rightarrow d|b \end{matrix}$

۲) فرض کنیم $c>0 \ , \ c|a \ , \ c|b \overset{\text{باید ثابت کنیم}}{\Rightarrow} c\le d$

$(ka,kb)=kd \overset{\text{قضیه‌ی بزو}}{\Rightarrow} rka+skb=kd \Rightarrow ra+sb=d$ (۲)

از طرف دیگر فرض کرده‌ایم: $c|a \ , \ c|b \Rightarrow c|ra \ , \ c|sb$

$$\Rightarrow c|ra+sb \overset{(2)}{\Rightarrow} c|d \Rightarrow c\le d$$

تست: اگر $(a,b)=1$ ، در این صورت $(a+b,a-b)$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۱ یا ۲ ۴) ۱ یا ۲ یا ۴

حل: گزینه‌ی ۳ صحیح است، زیرا اگر فرض کنیم $(a+b,a-b)=d$ در این صورت داریم:

$$\left.\begin{matrix} d|a+b \\ d|a-b \end{matrix}\right] \begin{matrix} \Rightarrow d|(a+b)+(a-b) \Rightarrow d|2a \\ \Rightarrow d|(a+b)-(a-b) \Rightarrow d|2b \end{matrix}$$

$$d|2a, d|2b \overset{\text{نتیجه‌ی ۲}}{\Rightarrow} d|(2a,2b) \overset{\text{نتیجه‌ی ۸}}{\Rightarrow} d|2(a,b) \Rightarrow d|2\times 1=2$$

$\Rightarrow d=1$ یا $d=2$

نتیجه‌ی ۹: اگر عددی نسبت به دو عدد اول باشد، آن‌گاه نسبت به حاصل ضرب آن دو عدد نیز اول است و برعکس:

$$(a,b)=1, \ (a,c)=1 \Leftrightarrow (a,bc)=1$$

اثبات (شرط لازم):

$$\left.\begin{matrix} (a,b)=1 \overset{\text{قضیه‌ی بزو}}{\Rightarrow} r_1a+s_1b=1 \\ (a,c)=1 \overset{\text{قضیه‌ی بزو}}{\Rightarrow} r_2a+s_2c=1 \end{matrix}\right\} \overset{\text{دو طرف تساوی‌ها در هم ضرب}}{\Rightarrow}$$

$$r_1r_2a^2+r_1s_2ac+r_2s_1ab+s_1s_2bc=1$$

$$\Rightarrow \underbrace{(r_1r_2a+r_1s_2c+r_2s_1b)}_{r}a+\underbrace{(s_1s_2)}_{s}bc=1$$

$$\Rightarrow ra+sbc=1 \overset{\text{نتیجه‌ی ۳}}{\Rightarrow} (a,bc)=1$$

اثبات (شرط کافی):

$$(a,bc)=1 \overset{\text{قضیه‌ی بزو}}{\Rightarrow} ra+sbc=1 \quad (1)$$

$$(1) \Rightarrow ra+(sb)c=1 \overset{\text{نتیجه‌ی ۳}}{\Rightarrow} (a,c)=1$$

$$(1) \Rightarrow ra+(sc)b=1 \overset{\text{نتیجه‌ی ۳}}{\Rightarrow} (a,b)=1$$

مسائل حل شده

مسئله‌ی ۱: ثابت کنید اگر $(a,b)=1$ ، آن‌گاه $(ka\pm d,a)=1$ $(k\in Z)$.

حل: فرض می‌کنیم $(ka\pm b,a)=d$ و ثابت می‌کنیم $d=1$.

$$(ka\pm b,a)=d \begin{matrix} \nearrow d|ka\pm b \\ \searrow d|a \Rightarrow d|ka \end{matrix} \Bigg\} \Rightarrow d|b$$

$$d|a, d|b \Rightarrow d|(a,b)=1 \Rightarrow d=1$$

تذکر: مسئله در حالت کلی یعنی برای $(a,b)=d$ نیز برقرار

است به عبارت دیگر:

$$(a,b)=d \Rightarrow (a,ka\pm b)=d$$

نتیجه: اگر در مسئله‌ی (۱) قرار دهیم $k=1$، در این صورت خواهیم داشت:

$$(a,b)=1 \Rightarrow (a,a\pm b)=1$$

مسئله‌ی ۲: ثابت کنید:

$$(a,b)=(-a,b)=(a,-b)=(-a,-b)$$

حل: فرض کنیم $(a,b)=d_1, (-a,b)=d_2$، ثابت می‌کنیم $d_1=d_2$.

$$(a,b)=d_1 \begin{cases} \nearrow d_1|a \Rightarrow d_1|-a & (1)\\ \searrow d_1|b & (2)\end{cases}$$

$$(1),(2) \Rightarrow d_1|(-a,b)=d_2 \Rightarrow d_1 \le d_2$$

و به طریق مشابه ثابت می‌شود $d_2 \le d_1$ که نتیجه می‌گیریم $d_1=d_2$ و در بقیه‌ی حالت‌ها نیز مطابق حل فوق عمل می‌کنیم.

مسئله‌ی ۳: اگر $(a,b)=1$، ثابت کنید

$$(m,n\in N).(a^n,b^m)=1$$

حل: ابتدا به استقرا روی n ثابت می‌کنیم، اگر $(a,b)=1$، آن‌گاه $(a^n,b)=1$.

$$p(1):(a,b)=1 \Rightarrow (a^1,b)=1 \Rightarrow p(1)\equiv T \quad \text{(برقرار است)}$$

$$p(k)\equiv T \Rightarrow (a,b)=1 \Rightarrow (a^k,b)=1 \quad \text{فرض استقرا}$$

$$p(k+1):(a,b)=1 \Rightarrow (a^{k+1},b)=1 \quad \text{حکم استقرا}$$

$$(a,b)=1 \begin{cases}\nearrow (a,b)=1\\ \searrow (a^k,b)=1\end{cases} \overset{\text{نتیجه‌ی ۹}}{\Rightarrow} (a.a^k,b)=1$$

$$\Rightarrow (a^{k+1},b)=1$$

ثابت کردیم که اگر دو عدد نسبت به هم اول باشند، آن‌گاه هر توان یکی از آن دو عدد و عدد دیگر نیز نسبت به هم اول خواهند بود که با توجه به این مطلب، برای حالت $(a^n,b^m)=1$ نیازی به استفاده از استقرا روی m نداریم و می‌نویسیم:

$$(a,b)=1 \overset{\text{ثابت شد}}{\Rightarrow} (a^n,b)=1 \overset{\text{جابه‌جایی}}{\Rightarrow} (b,a^n)=1 \overset{\text{ثابت شد}}{\Rightarrow} (b^m,a^n)=1$$

$$\overset{\text{جابه‌جایی}}{\Rightarrow} (a^n,b^m)=1$$

مسئله‌ی ۴: عکس مسئله‌ی ۳ را ثابت کنید.

حل: با فرض $(a^n,b^m)=1$ می‌خواهیم ثابت کنیم $(a,b)=1$.

$$(a^n,b^m)=1 \overset{\text{قضیه‌ی بزو}}{\Rightarrow} ra^n+sb^m=1$$

$$\Rightarrow \underbrace{(ra^{n-1})}_{r_1}a+\underbrace{(sb^{n-1})}_{s_1}b=1 \overset{\text{نتیجه‌ی ۳}}{\Rightarrow} (a,b)=1$$

مسئله‌ی ۵: ثابت کنید، اگر دو عدد نسبت به هم اول باشند، آن‌گاه حاصل ضرب و مجموع آن‌ها و همین‌طور حاصل ضرب و تفاضل آن‌ها نیز نسبت به هم اول هستند و برعکس؛ یعنی:

$$(a,b)=1 \Leftrightarrow (ab,a\pm b)=1$$

حل:

$$\left.\begin{matrix}(a,b)=1 \overset{\text{مسئله‌ی ۱}}{\Rightarrow} (a\pm b,a)=1\\ (a,b)=1 \Rightarrow (a\pm b,b)=1\end{matrix}\right\} \overset{\text{نتیجه‌ی ۹}}{\Rightarrow} (a\pm b,ab)=1$$

مسئله‌ی ۶: اگر $(a,b)=1$، $(a,c)=1$ و $(b,c)=1$، ثابت کنید $(abc,ab+ac+bc)$.

حل: از مسئله‌ی (۱) استفاده می‌کنیم:

$$\left.\begin{matrix}(a,b)=1\\(a,c)=1\end{matrix}\right\}\Rightarrow (a,bc)=1 \overset{\text{مسئله‌ی ۱}}{\Rightarrow} (a,\overbrace{ab+ac}^{ka}+bc)=1 \quad (1)$$

$$\left.\begin{matrix}(a,b)=1\\(c,b)=1\end{matrix}\right\}\Rightarrow (ac,b)=1 \overset{\text{مسئله‌ی ۱}}{\Rightarrow} (b,\overbrace{ab+bc}^{kb}+ac)=1 \quad (2)$$

$$\left.\begin{matrix}(a,c)=1\\(b,c)=1\end{matrix}\right\}\Rightarrow (c,ab)=1 \Rightarrow (c,\overbrace{ac+bc}^{kc}+ab)=1 \quad (3)$$

$$(1) \text{ و } (2) \overset{\text{نتیجه‌ی ۹}}{\Rightarrow} (ab,ab+ac+bc)=1 \quad (4)$$

$$(3) \text{ و } (4) \overset{\text{نتیجه‌ی ۹}}{\Rightarrow} (abc,ab+ac+bc)=1$$

مسئله‌ی ۷: اگر $(a,b)=1$، ثابت کنید $(a^5+b^2,2a^5+5b^2)=1$ یا ۳.

حل: فرض کنیم $(a^5+b^2,2a^5+5b^2)=d$، ثابت می‌کنیم $d=1$ یا $d=3$.

$$(a^5+b^2,2a^5+5b^2)=d$$

$$\Rightarrow \begin{cases} d|a^5+b^2 \Rightarrow \begin{cases} d|2a^5+2b^2 & (1)\\ d|5a^5+5b^2 & (2)\end{cases}\\ d|2a^5+5b^2 \quad (3)\end{cases}$$

$$\left.\begin{matrix}(1),(3)\Rightarrow d|3b^2\\(2),(3)\Rightarrow d|3a^5\end{matrix}\right\} \overset{\text{نتیجه‌ی ۲}}{\Rightarrow} d|(3a^5,3b^2)$$

$$\overset{\text{نتیجه‌ی ۸}}{\Rightarrow} d|(3a^5, b^2) \Rightarrow d|3\times 1 = 3 \Rightarrow d = 1 \text{ یا } d = 3$$

(توجه دارید که اگر $(a,b)=1$، آن‌گاه $(a^5,b^2)=1$.)

مسئله‌ی ۸: اگر $(a,b)=d$، ثابت کنید $(a^n,b^n)=d^n$.

حل:

$$(a,b)=d \Rightarrow (\frac{a}{d},\frac{b}{d})=1 \Rightarrow \left((\frac{a}{d})^n,(\frac{b}{d})^n\right)=1$$

$$\Rightarrow (\frac{a^n}{d^n},\frac{b^n}{d^n})=1 \Rightarrow d^n(\frac{a^n}{d^n},\frac{b^n}{d^n})=d^n$$

$$\overset{\text{نتیجه‌ی ۸}}{\Rightarrow} (a^n,b^n)=d^n$$

(توجه دارید که از $d|a$ نتیجه می‌شود که $d^n|a^n$ و از این رابطه در تساوی $\frac{a^n}{d^n}=(\frac{a}{d})^n$ استفاده شده است.)

مسئله‌ی ۹: ثابت کنید اگر $a^n|b^n$، آن‌گاه $a|b$.

حل: کافی است ثابت کنیم $(a,b)=a$ که در این صورت، رابطه‌ی $a|b$ نتیجه می‌شود. حال فرض می‌کنیم $(a,b)=d$ و ثابت می‌کنیم $d=a$.

$$(a,b)=d \overset{\text{مسئله‌ی ۸}}{\Rightarrow} (a^n,b^n)=d^n \qquad (1)$$

طبق فرض: $a^n|b^n \Rightarrow (a^n,b^n)=a^n \qquad (2)$

$$(1),(2) \Rightarrow a^n=d^n \Rightarrow a=d \Rightarrow (a,b)=a \Rightarrow a|b$$

مسئله‌ی ۱۰: ثابت کنید اگر $(a^n,b^n)=d^n$، آن‌گاه $(a,b)=d$. (عکس مسئله‌ی ۸)

حل:

$$(a^n,b^n)=d^n \Rightarrow (\frac{a^n}{d^n},\frac{b^n}{d^n})=1 \qquad (1)$$

حال با توجه به مسئله‌ی ۹، از این‌که $\frac{a^n}{d^n}$ عددی صحیح است یا از این‌که $d^n|a^n$، نتیجه می‌گیریم $d|a$، که در این صورت تساوی $(\frac{a^n}{d^n})=(\frac{a}{d})^n$ برقرار است:

$$(1) \Rightarrow \left((\frac{a}{d})^n,(\frac{b}{d})^n\right)=1 \Rightarrow (\frac{a}{d},\frac{b}{d})=1$$

$$\Rightarrow d(\frac{a}{d},\frac{b}{d})=d \Rightarrow (a,b)=d$$

مسئله‌ی ۱۱: اگر $(a,4)=2$ و $(b,4)=2$، ثابت کنید $(a+b,4)=4$.

حل:

$$(a,4)=2 \Rightarrow (\frac{a}{2},2)=1 \Rightarrow \frac{a}{2} \text{ فرد است } \Rightarrow \frac{a}{2}=2k+1$$

$$(b,4)=2 \Rightarrow (\frac{b}{2},2)=1 \Rightarrow \frac{b}{2} \text{ فرد است } \Rightarrow \frac{b}{2}=2k'+1$$

$$\left.\begin{array}{l}\frac{a}{2}=2k+1 \Rightarrow a=4k+2\\ \frac{b}{2}=2k'+1 \Rightarrow b=4k'+2\end{array}\right\} \Rightarrow a+b=4(k+k')+4$$

$$\Rightarrow a+b=4(k+k'+1)=4q \Rightarrow 4|a+b \Rightarrow (a+b,4)=4$$

مسئله‌ی ۱۲: اگر $d\neq 1$، $(b,d)=1$ و $(a-2b,3a-b)=d$، ثابت کنید $d=5$.

حل:

$$(a-2b,3a-b)=d \begin{array}{l}\nearrow d|a-2b \Rightarrow d|-3a+6b \qquad (1)\\ \searrow d|3a-b \qquad (2)\end{array}$$

$$(1),(2) \Rightarrow d|5b \underset{\text{لم اقلیدس}}{\overset{(d,b)=1}{\Rightarrow}} d|5 \overset{d\neq 1}{\Rightarrow} d=5$$

قضیه‌ی الگوریتم اقلیدسی: اگر $a=bq+r$، آن‌گاه $(a,b)=(b,r)$.

(اگر a را بر b تقسیم کنیم و q خارج قسمت و r باقی‌مانده‌ی تقسیم باشد، در این صورت ب‌م‌م مقسوم و مقسوم‌علیه برابر است با ب‌م‌م مقسوم‌علیه و باقی‌مانده.)

اثبات: فرض کنیم $(a,b)=d_1$ و $(b,r)=d_2$، ثابت می‌کنیم: $d_1=d_2$.

$$(a,b)=d_1 \quad \left.\begin{array}{l}d_1|a\\ d_1|b \Rightarrow d_1|bq\end{array}\right\} \Rightarrow d_1|a-bq=r$$

$$d_1|b, d_1|r \Rightarrow d_1|(b,r)=d_2 \Rightarrow d_1 \le d_2 \qquad (1)$$

$$(b,r)=d_2 \quad \left.\begin{array}{l}d_2|b \Rightarrow d_2|bq\\ d_2|r\end{array}\right\} \Rightarrow d_2|bq+r=a$$

$$d_2|a, d_2|b \Rightarrow d_2|(a,b)=d_1 \Rightarrow d_2 \le d_1 \qquad (2)$$

$$(1) \text{ و } (2) \Rightarrow d_1=d_2$$

زیرنویس

۱. هر زیرمجموعه‌ی ناتهی Z که از بالا کران‌دار باشد، دارای عضو انتهاست.

رویکرد هندسی- رویکرد جبری در آموزش هندسه



(قسمت ۳)

• محمدهاشم رستمی

اشاره

در شماره‌های قبل راجع به رویکرد هندسی و رویکرد جبری در آموزش هندسه بحث شد و مسائلی با هر دو رویکرد در فضای دوبعدی اقلیدوسی حل شد. اینک به معرفی فضای سه بعدی اقلیدوسی پرداخته و مسائلی را در این فضا با هر دو رویکرد حل و بحث خواهیم کرد.

اگر فضای سه‌بعدی اقلیدسی به مفهوم هندسی را به یک دستگاه مختصات دکارتی o-xyz متشکل از سه محور دو‌به‌دوی عمود بر هم x′ox ، y′oy و z′oz مجهز کنیم، یک تناظر یک‌به‌یک بین فضای سه‌بعدی اقلیدسی و حاصل ضرب دکارتی $\mathbb{R}^۳ = \mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ برپا می‌شود. به این ترتیب که به هر نقطه‌ی P از فضای سه‌بعدی اقلیدسی، یک سه‌تایی مرتب (z و y و x) از عددهای حقیقی نظیر می‌شود. در حقیقت، دستگاه مختصات دکارتی o-xyz، ابزار اصلی برای ایجاد ارتباط بین هندسه‌ی فضایی و جبر است؛ تحت این

شرایط:

(x,y,z) و $x,y,z \in \mathbb{R}$ $\xleftrightarrow{\text{تناظر}}$ نقطه‌ی P از فضای سه‌بعدی اقلیدسی

$\{(x,y,z) | x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{R}\}$ $\xleftrightarrow{\text{تناظر}}$ فضای سه‌بعدی اقلیدسی

$ax + by + cz + d = ۰$ $\xleftrightarrow{\text{تناظر}}$ صفحه‌ی P از فضای سه‌بعدی اقلیدسی

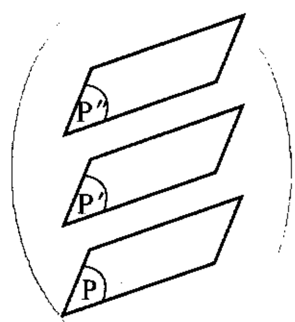
$$\begin{cases} ax+by+cz+d=0 \\ a'x+b'y+c'z+d'=0 \end{cases} \xleftrightarrow{\text{تناظر}} \text{خط D از فضای سه‌بعدی اقلیدسی}$$

$$f(x,y,z)=0 \xleftrightarrow{\text{تناظر}} \text{رویه‌ی (C) از فضای سه‌بعدی اقلیدسی}$$

نکته‌ی ۱. به جای دستگاه مختصات دکارتی o-xyz در فضا، می‌توان از دیگر دستگاه‌های مختصات در فضا، مانند دستگاه مختصات قطبی در فضا، دستگاه مختصات استوانی در فضا و دستگاه مختصات کروی در فضا استفاده کرد. این مطلب به نوع مسئله‌ای بستگی دارد که می‌خواهیم به روش تحلیل حل کنیم.

نکته‌ی۲. چگونگی انتخاب دستگاه مختصات دکارتی در فضا، اهمیت زیادی دارد. همواره باید سعی کنیم، دستگاه مختصات دکارتی و یا هر دستگاه مختصات دیگری که می‌خواهیم انتخاب کنیم، حداقل محاسبه را داشته باشد. در مثال‌هایی، این مطلب را خواهیم دید. اینک به چند مثال که با استفاده از دو رویکرد هندسی و جبری حل می‌شوند، توجه کنید.

مثال۱. ثابت کنید اگر دو صفحه با صفحه‌ی سومی موازی باشند، خودشان با هم موازی‌اند.



اثبات

الف) روش هندسی: سه صفحه‌ی P، ′P و ″P را درنظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم صفحه‌ی P موازی صفحه‌ی ′P و هم‌چنین صفحه‌ی P موازی صفحه‌ی ″P باشد، می‌خواهیم ثابت کنیم که دو صفحه‌ی ′P و ″P با هم موازی‌اند.

برای اثبات می‌گوییم، اگر دو صفحه‌ی ′P و ″P موازی نباشند، در خط راستی مانند Δ متقاطع خواهند بود و در این صورت، از هر نقطه‌ی خط Δ، دو صفحه‌ی موازی صفحه‌ی P رسم شده است که این خلاف قضیه‌ی * است. بنابراین، دو صفحه‌ی ′P و ″P متقاطع نیستند، پس با هم موازی‌اند.

قضیه *. از هر نقطه‌ی واقع در خارج یک صفحه، یک و تنها یک صفحه‌ی موازی آن صفحه می‌توان رسم کرد.

نکته: این قضیه قبلاً ثابت شده است.

ب) راه جبری: سه صفحه‌ی

$P:\ ax+by+cz+d=0$

$P':\ a'x+b'y+c'z+d'=0$

$P'':\ a''x+b''y+c''z+d''=0$

را در دستگاه مختصات قائم o-xyz درنظر می‌گیریم. با استفاده از شرط موازی بودن دو صفحه داریم:

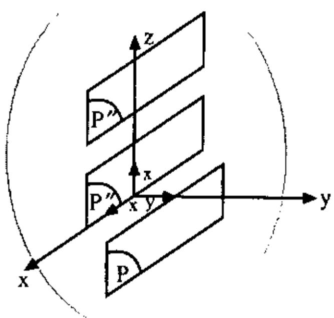
$$P \parallel P' \Rightarrow \frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'} \qquad (1)$$

$$P \parallel P'' \Rightarrow \frac{a}{a''}=\frac{b}{b''}=\frac{c}{c''} \qquad (2)$$

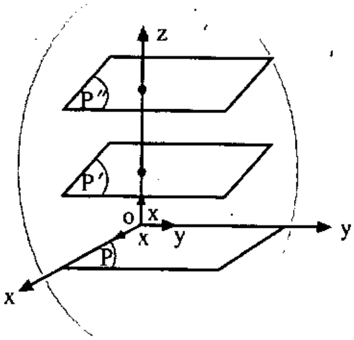
از تقسیم عضوهای نظیر دو رابطه‌ی ۱ و ۲ داریم:

$$\frac{(1)}{(2)} \Rightarrow \frac{\frac{a}{a'}}{\frac{a}{a''}}=\frac{\frac{b}{b'}}{\frac{b}{b''}}=\frac{\frac{c}{c'}}{\frac{c}{c''}} \Rightarrow \frac{a''}{a'}=\frac{b''}{b'}=\frac{c''}{c'} \Rightarrow P' \parallel P''$$

پس دو صفحه‌ی ′P و ″P با هم موازی‌اند.



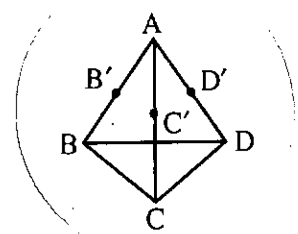
نکته. در همین مسئله می‌توانیم دستگاه مختصات قائم O − xyz را چنان اختیار کنیم که صفحه‌ی P بر صفحه xoy منطبق باشد. در این صورت، $P':z=k$ و $P'':z=k'$ خواهد بود، اما می‌دانیم که دو صفحه به معادله‌ی $z=k$ و $z=k'$ با هم موازی‌اند (دو صفحه‌ی عمود بر یک خط با هم موازی‌اند)، پس حکم مسئله درست است.



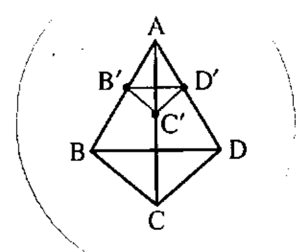
مثال ۲. ثابت کنید که در یک هرم، وسط یال‌های آن، در یک صفحه‌ی موازی صفحه‌ی قاعده قرار دارند.

اثبات

الف) روش هندسی: هرم ABCD را در نظر می‌گیریم (شکل) و وسط یال‌های AB، AC و AD را به‌ترتیب ′B، ′C و ′D می‌نامیم. می‌خواهیم ثابت کنیم که صفحه‌ی ′B′C′D با صفحه‌ی BCD، یعنی قاعده‌ی این هرم، موازی است. در مثلث ABC، پاره‌خط ′B′C وسط‌های دو ضلع AB و AC را به‌هم وصل کرده است، پس با ضلع سوم مثلث موازی است. یعنی $B'C' \| BC$ است. به روش مشابه، ′C′D که وسط‌های دو ضلع AC و AD از مثلث ACD را به‌هم وصل کرده، با ضلع سوم مثلث، یعنی CD، موازی است؛ بنابراین $C'D' \| CD$ است.



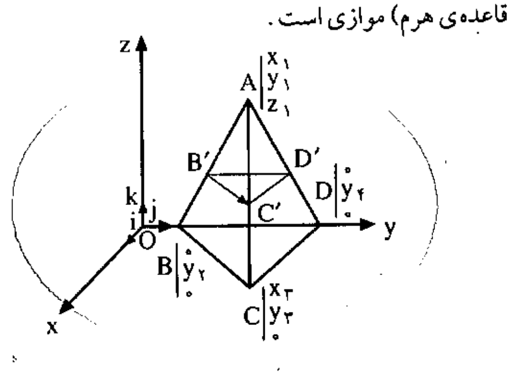
درنتیجه، صفحه‌ی ′A′B′C با صفحه‌ی ABC موازی است، زیرا دو خط متقاطع ′B′C و ′C′D از صفحه‌ی ′A′B′C با دو خط متقاطع BC و CD از صفحه‌ی ABC موازی هستند. پس حکم مسئله درست است.



نکته: این مسئله را برای یک هرم سه پهلو (مثلث‌القاعده) ثابت کردیم. اثبات مسئله برای هرم‌های چندپهلو نیز به روش مشابه انجام می‌شود.

ب) راه‌حل جبری: هرم ABCD را در نظر می‌گیریم و وسط یال‌های AB، AC و AD را به‌ترتیب ′B، ′C و ′D می‌نامیم.

می‌خواهیم ثابت کنیم که صفحه‌ی ′B′C′D با صفحه‌ی BCD (قاعده‌ی هرم) موازی است.



برای اثبات، دستگاه مختصات قائم O − xyz را چنان اختیار می‌کنیم که BCD منطبق بر صفحه‌ی xoy و BD روی محور yها باشد. در این صورت، مختصات رأس‌های هرم عبارت‌اند از:

$A=(x_۱,y_۱,z_۱)$ و $B=(۰,y_۲,۰)$

$C=(x_۳,y_۳,۰)$ و $D=(۰,y_۴,۰)$

اکنون مختصات نقطه‌های ′B، ′C و ′D را به‌دست می‌آوریم. داریم:

$$B'\begin{cases} x=\dfrac{x_A+x_B}{۲}=\dfrac{x_۱+۰}{۲}=\dfrac{x_۱}{۲} \\ y=\dfrac{y_A+y_B}{۲}=\dfrac{y_۱+y_۲}{۲} \\ z=\dfrac{z_A+z_B}{۲}=\dfrac{z_۱+۰}{۲}=\dfrac{z_۱}{۲} \end{cases}$$

$$C'\begin{cases} x=\dfrac{x_A+x_C}{۲}=\dfrac{x_۱+x_۳}{۲} \\ y=\dfrac{y_A+y_C}{۲}=\dfrac{y_۱+y_۳}{۲} \\ z=\dfrac{z_A+z_C}{۲}=\dfrac{z_۱+۰}{۲}=\dfrac{z_۱}{۲} \end{cases}$$

اما پارامترهای هادی BC عبارت‌اند از:

$$\overrightarrow{BC}=(x_۳,y_۳-y_۲,۰)$$

و پارامترهای هادی ′B′C عبارت‌اند از:

$$\overrightarrow{B'C'}=(\frac{x_۱+x_۳-x_۱}{۲},\frac{y_۱+y_۳-y_۱-y_۲}{۲},\frac{z_۱-z_۱}{۲})$$

$$=(\frac{x_۳}{۲},\frac{y_۳-y_۲}{۲},۰)$$

به‌طوری که دیده می‌شود، پارامترهای هادی $\overrightarrow{BC}$ و $\overrightarrow{B'C'}$ با هم متناسب‌اند ($\overrightarrow{BC}=۲\overrightarrow{B'C'}$)، پس ′B′C موازی BC است. به روش مشابه ثابت می‌شود که ′C′D موازی CD است. درنتیجه، صفحه‌ی ′A′B′C با صفحه‌ی ABC موازی است و حکم ثابت می‌شود.

نکته: اگر دستگاه مختصات دکارتی O − xyz را به صورت دلخواه انتخاب کنیم، مختصات رأس‌های هرم، $A=(x_۱,y_۱,z_۱)$، $B=(x_۲,y_۲,z_۲)$، $C=(x_۳,y_۳,z_۳)$ و $D=(x_۴,y_۴,z_۴)$ خواهند بود و محاسبه‌ها قدری دشوارتر می‌شود.

مقدمه

آیا تاکنون با شکلی هندسی برخورد کرده‌اید که محیط یا مساحت آن به بی‌نهایت میل کند؟ دانش‌آموزان سال سوم رشته‌ی ریاضی، در فصل اول کتاب هندسه‌ی ۲، با شکلی آشنا می‌شوند که به«برف دانه‌ی کخ» معروف است. این شکل شباهت زیادی به بلورهای برف دارد و از این رو انتخاب این نام برایش بسیار مناسب است. لازم به ذکر است، مراحل ساخت آن در کتاب توضیح داده شده است و دانش‌آموزان خود می‌توانند تا هر مرحله‌ای که می‌خواهند، شکل را رسم کنند. البته رسم شکل در مراحل بالاتر، کمی مشکل، اما جالب است. هدف از معرفی این شکل، استفاده از روش استقرایی برای بررسی یک یا دو ویژگی از آن است. اما این شکل برای مراحل بالاتر و وقتی $n \to +\infty$ میل می‌کند، ویژگی‌های جالب دیگری نیز دارد که ممکن است از نظر دانش‌آموزان پوشیده بماند. در این مقاله سعی شده است، برخی از این ویژگی‌ها بررسی و روش‌های اثبات و توجیه مناسب و قابل استفاده، برای دانش‌آموزان دبیرستانی آورده شود. در انتها نیز زیباترین نکته که همانا محاسبه‌ی محیط و مساحت برف دانه است، اثبات خواهد شد.

محیط و مساحت برف دانه‌ی کخ

● صدیقه بابایی

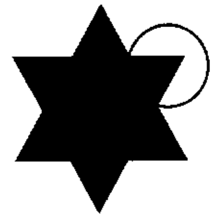
برف دانه‌ی کخ چگونه ترسیم می‌شود؟

یک مثلث متساوی الاضلاع به طول ضلع a رسم و هر ضلع آن را به سه قسمت مساوی تقسیم می‌کنیم. روی قسمت‌های میانی هر ضلع، مثلث متساوی الاضلاعی با طول ضلع $\frac{a}{3}$ ایجاد و سپس پاره خط‌های میانی را حذف می‌کنیم.

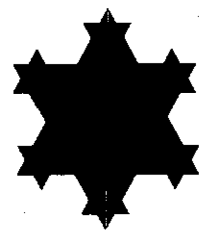


همان طور که مشاهده می‌کنید، شش مثلث متساوی الاضلاع

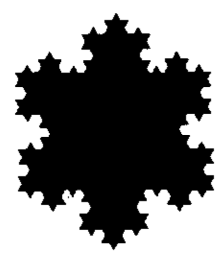
کوچک با طول ضلع $\frac{a}{۳}$ تولید شده است :



حال عمل بالا را روی اضلاع هر شش مثلث تکرار می‌کنیم تا به این شکل برسیم :



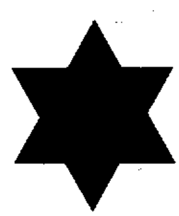
دوباره روی اضلاع کوچک جدید ایجاد شده، عمل بالا را تکرار می‌کنیم تا برف‌دانه کامل‌تر شود :[1]



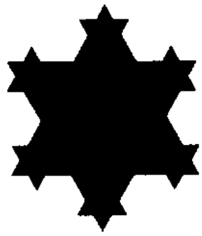
ویژگی‌های برف‌دانه‌ی کخ

تعداد پاره خط‌های موجود در برف‌دانه

مثلث متساوی الاضلاع ابتدایی را مرحله‌ی صفر در نظر می‌گیریم. در این صورت در این مرحله سه پاره خط وجود دارد. در مرحله‌ی اول به راحتی می‌توان دید که شکل تولید شده ۱۲ پاره خط دارد. در حقیقت هر ضلع مثلث اولیه، چهار پاره خط جدید ایجاد کرده است.



در مرحله‌ی دوم، هر یک از ۱۲ پاره خط ایجاد شده به چهار خط جدید تبدیل می‌شود. لذا ۱۲×۴ یا $۴^{۲}\times۳$ پاره خط در شکل وجود دارد.

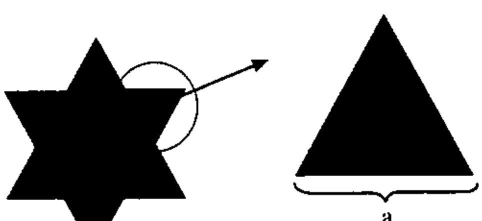


در مرحله‌ی سوم، دوباره هر یک از $۴^{۲}\times۳$ پاره خط تولید شده در مرحله‌ی پیش، به چهار پاره خط جدید تقسیم می‌شود. بنابراین در مرحله‌ی سوم $۴^{۳}\times۳$ پاره خط داریم. در هر مرحله، هر یک از پاره خط‌های موجود در مرحله‌ی قبل، چهار پاره خط جدید تولید می‌کنند. به این ترتیب، پاره خط‌های موجود در مرحله‌ی کنونی، چهار برابر تعداد پاره خط‌های مرحله‌ی قبلی است. لذا با استفاده از روش استقرایی می‌توان جدول زیر را تهیه کرد.[2]

مرحله	۰	۱	۲	...	n
تعداد پاره خط	۳	۱۲	۴۸	...	
فرمول محاسبه شده	۳×۴^{۰}	۳×۴^{۱}	۳×۴^{۲}	...	۳×۴^{n}

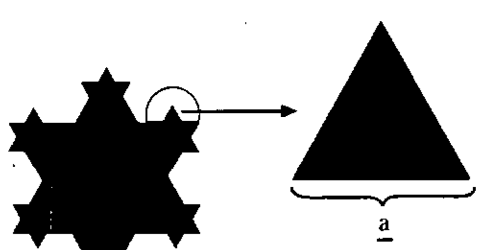
طول پاره خط‌های موجود در برف‌دانه

برف‌دانه از مثلث متساوی الاضلاعی با طول a ساخته شد. در مرحله‌ی اول، پاره خطی به طول a که ضلع مثلث را ساخته بود، به سه قسمت مساوی تقسیم شد. لذا کلیه‌ی پاره خط‌های طولی برابر $\frac{a}{۳}$ دارند.



$\frac{a}{۳}$

در مرحله‌ی دوم نیز هر پاره خط دوباره به سه قسمت تقسیم می‌شود. بنابراین طول پاره خط‌های موجود برابر $\frac{a}{۹}$ یا $\left(\frac{۱}{۳}\right)^{۲}a$ خواهد بود.



$\frac{a}{۹}$

در هر مرحله، پاره خط مرحله‌ی قبل سه قسمت خواهد شد. لذا طول هر پاره خط $\frac{1}{3}$ طول پاره خط مرحله‌ی قبل خواهد بود. به عبارت دیگر داریم:

طول پاره خط مرحله‌ی $(i-1)$ام $\times \frac{1}{3} =$ طول پاره خط مرحله‌ی i ام.

بنابراین طول پاره خط مرحله‌ی n ام برابر است با $\left(\frac{1}{3}\right)^n a$.

مرحله	۰	۱	۲	...	n
طول پاره خط های موجود در برف دانه	$\left(\frac{1}{3}\right)^0 a$	$\left(\frac{1}{3}\right)^1 a$	$\left(\frac{1}{3}\right)^2 a$	...	$\left(\frac{1}{3}\right)^n a$

محیط برف‌دانه‌ی کخ

محیط یک شکل، مجموع طول اضلاع تشکیل دهنده‌ی آن است. بنابراین با در دست داشتن تعداد پاره خط‌ها و طول آن‌ها در هر مرحله، به راحتی می‌توان محیط شکل تولید شده در هر مرحله را به‌دست آورد. برای مثال، محیط شکل در مرحله‌ام برابر است با: تعداد پاره خط های مرحله‌ی i ام $\times$ طول پاره خط مرحله‌ی‌ام

بنابراین:

$$\left(\left(\frac{1}{3}\right)^i \times a\right) \times (3 \times 4^i) =$$ محیط شکل تولید شده در مرحله‌ی i ام.

مرحله	۰	۱	۲	...	n
محیط شکل تولید شده	$3a$	$3\times 4 \times\left(\frac{1}{3}\right)^1 \times a$	$3\times 4^2\times\left(\frac{1}{3}\right)^2 \times a$	...	$3\times 4^n\times\left(\frac{1}{3}\right)^n \times a$
فرمول محاسبه شده	$\left(\frac{4}{3}\right)^0 \times 3a$	$\left(\frac{4}{3}\right)^1 \times 3a$	$\left(\frac{4}{3}\right)^2 \times 3a$	...	$\left(\frac{4}{3}\right)^n \times 3a$

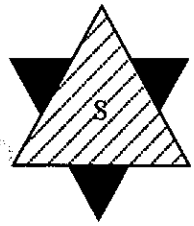
همان‌طور که قبلاً بیان شده بود، هر چه n بزرگ‌تر شود، شکل حاصل به برف‌دانه‌ی کخ نزدیک‌تر خواهد شد. وقتی n بزرگ و بزرگ‌تر شود یا به عبارت دیگر به $+\infty$ میل کند، محیط شکل ایجاد شده، به محیط برف‌دانه نزدیک‌تر خواهد شد. بنابراین خواهیم داشت:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{4}{3}\right)^n \times 3a =$$ محیط برف‌دانه‌ی کخ

واضح است که محیط برف‌دانه با افزایش n به $+\infty$ میل خواهد کرد.

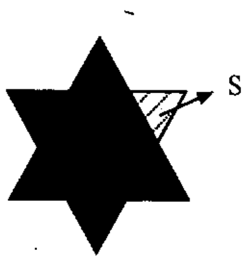
مساحت برف‌دانه‌ی کخ

اگر مساحت مثلث متساوی الاضلاع اولیه را با s_0 نشان دهیم، داریم $s_0 = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$. برای محاسبه‌ی مساحت شکل در مرحله‌ی بعد، باید به این نکته دقت کرد که مساحت شکل حاصل برابر است با مساحت شکل قبلی به علاوه‌ی مساحت سه مثلث کوچک با طول ضلع $\frac{a}{3}$ ، که در این مرحله تولید شده‌اند.



اگر مساحت یکی از این مثلث‌های کوچک را s' بنامیم، طبق شکل زیر خواهیم داشت: $s_1 = s_0 + 3s'$.

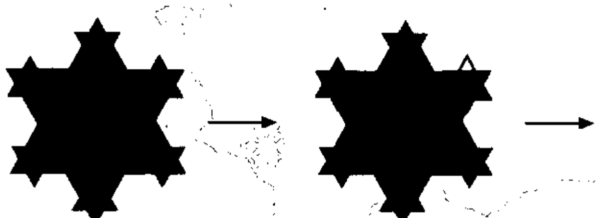
$$s_1 = s_0 + 3\times\frac{\sqrt{3}}{4}\times\left(\frac{a}{3}\right)^2 = s_0 + \frac{\sqrt{3}}{4}\times\frac{a^2}{3} = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2(1+\frac{1}{3})$$



حال به مرحله‌ی دوم می‌رویم. در این مرحله نیز ۱۲ مثلث کوچک به شکل اضافه شده‌اند که مساحت آن‌ها به مساحت شکل قبلی افزوده می‌شود.

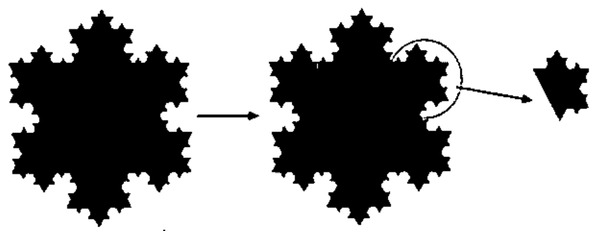
$$s_2 = s_1 + 12s' = s_1 + 12\frac{\sqrt{3}}{4}\times\left(\frac{a}{9}\right)^2$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4}a^2(1+\frac{1}{3}+\frac{4}{3^3})$$



با کمی دقت می‌توان دریافت، در هر مرحله، هر پاره خط، یک

مثلث در مرحله‌ی بعد تولید می‌کند که باید در محاسبه‌ی مساحت شکل بعد در نظر گرفته شود. برای مثال، در مرحله‌ی دوم از ترسیم، ما ۴۸ پاره خط داریم. بنابراین در محاسبه‌ی مساحت شکل در مرحله‌ی سوم، ۴۸ مثلث متساوی‌الاضلاع به طول ضلع $\frac{a}{۲۷}$ داریم که به مساحت شکل مرحله‌ی دوم افزوده می‌شود. در شکل نیز می‌توانید درستی این مدعا را ببینید.



بنابراین:

$$s_۳ = s_۲ + ۴۸ \times s' = \frac{\sqrt{۳}}{۴}a^۲(۱+\frac{۱}{۳}+\frac{۴}{۳^۳})$$

$$+۴۸ \times \frac{\sqrt{۳}}{۴} \times \left(\frac{a}{۲۷}\right)^۲ = \frac{\sqrt{۳}}{۴}a^۲(۱+\frac{۱}{۳}+\frac{۴}{۳^۳}+\frac{۴^۲}{۳^۵})$$

از نکته‌ای که در بالا ذکر شد، استفاده و ادعا می‌کنیم،

$$s_n = s_{n-۱} + \frac{۴^{n-۱}}{۳^{۲n-۱}} \times \frac{\sqrt{۳}}{۴}a^۲$$

حال به استقرا، فرمول بالا را اثبات می‌کنیم.

فرض استقرا برای $n=۱$ قبلاً توضیح داده شده است. حال فرض کنیم فرمول بالا برای n برقرار باشد. باید نشان دهیم رابطه برای $n+۱$ نیز برقرار است. طبق آن‌چه قبلاً توضیح داده شده است، مساحت در هر مرحله برابر است با مساحت شکل در مرحله‌ی قبل به‌علاوه‌ی مجموع مساحت‌های مثلث‌های کوچک و جدیدی که روی هر یک از اضلاع شکل مرحله‌ی قبل تولید می‌شود. بنابراین داریم:

$s_{n+۱} = s_n +$ (تعداد پاره خط‌های مرحله‌ی n ام) $\times$ (مساحت مثلثی با طول ضلع $\frac{a}{۳^{n+۱}}$)

$$s_{n+۱} = s_n + ۳ \times ۴^n \times \frac{\sqrt{۳}}{۴} \times \left(\frac{a}{۳^{n+۱}}\right)^۲ = s_n + \frac{۴^n}{۳^{۲n+۱}} \times \frac{\sqrt{۳}}{۴}a^۲$$

در این مرحله، باید فرمولی مستقل برای مساحت برف‌دانه به‌دست آورد. لذا در عبارت $s_n = s_{n-۱} + \frac{۴^{n-۱}}{۳^{۲n-۱}} \times \frac{\sqrt{۳}}{۴}a^۲$ مقدار $s_{n-۱}$ را قرار می‌دهیم. این یک رابطه‌ی بازگشتی است که باید در مرحله‌ی بعد مقدار $s_{n-۲}$ را قرار داد و این عمل تا $s_۱$ و $s_۰$ ادامه می‌یابد و با جای‌گذاری مقادیر خواهیم داشت:

$$s = \frac{\sqrt{۳}}{۴}a^۲ + \frac{\sqrt{۳}}{۴}a^۲ \times \frac{۱}{۳} + \frac{۴}{۳^۳} \times \frac{\sqrt{۳}}{۴}a^۲ + \frac{۴^۲}{۳^۵} \times \frac{\sqrt{۳}}{۴}a^۲$$

$$+\cdots+\frac{۴^{n-۱}}{۳^{۲n-۱}} \times \frac{\sqrt{۳}}{۴}a^۲ = \frac{\sqrt{۳}}{۴}a^۲(۱+\sum_{i=۱}^{n}\frac{۴^{i-۱}}{۳^{۲i-۱}})$$

تا این مرحله توانستیم یک سری برای محاسبه‌ی مساحت برف‌دانه محاسبه کنیم. از طرف دیگر، وقتی n بزرگ‌تر شود، می‌توان مقدار واقعی مساحت برف‌دانه را یافت. بنابراین حد زیر، مقدار واقعی مساحت برف‌دانه خواهد بود.

مساحت برف‌دانه‌ی کخ $s = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{۳}}{۴}a^۲(۱+\sum_{i=۱}^{n}\frac{۴^{i-۱}}{۳^{۲i-۱}})$

حال هم‌گرایی سری $\sum_{n=۱}^{+\infty}\frac{۴^{n-۱}}{۳^{۲n-۱}}$ را بررسی می‌کنیم.

$$\sum_{n=۱}^{+\infty}\frac{۴^{n-۱}}{۳^{۲n-۱}} = \sum_{n=۱}^{+\infty}\frac{۴^n}{۴} \times \frac{۳}{۳^{۲n}} = \sum_{n=۱}^{+\infty}\frac{۳}{۴} \times \frac{۴^n}{۹^n} = \sum_{n=۱}^{+\infty}\frac{۳}{۴}\left(\frac{۴}{۹}\right)^n$$

واضح است که سری بالا یک سری هندسی است که به $\frac{۳}{۵}$ هم‌گراست. بنابراین می‌توان گفت، مساحت برف‌دانه‌ی کخ برابر است با $\frac{\sqrt{۳}}{۴}a^۲(۱+\frac{۳}{۵}) = \frac{۲\sqrt{۳}}{۵}a^۲$.

زیرنویس

۱. لازم به ذکر است، وقتی تعداد مراحل انجام کار بالاتر می‌رود و در حقیقت تعداد این اعمال تا بی‌نهایت ادامه پیدا می‌کند، به شکل حاصل، برف‌دانه‌ی کخ می‌گویند.

۲. با توجه به مراحل بیان شده می‌توان به راحتی با استفاده از استدلال استقرایی فرمول مرحله‌ی nام را اثبات کرد.

۳. با توجه به مراحل بیان شده می‌توان به راحتی با استفاده از استدلال استقرایی فرمول مرحله‌ی nام را اثبات کرد.

مرتبه‌ی ماتریس‌های پوچ توان

● حسین کریمی

ماتریس مربعی غیر صفر $A_{n\times n}$ را پوچ توان گوییم، هرگاه عدد طبیعی m یافت شود که $A^m = O$ باشد، اگر m کوچک‌ترین عدد طبیعی باشد که در رابطه‌ی فوق صدق کند، گوییم ماتریس A پوچ توان از مرتبه‌ی m است.

مثال۱: $A=\begin{bmatrix} ۳ & ۹ \\ -۱ & -۳ \end{bmatrix}$ که در آن داریم $A^۲ = O$. درنتیجه A پوچ توان از مرتبه‌ی ۲ است.

مثال۲: $A=\begin{bmatrix} ۲ & ۶ & ۱۰ \\ ۱ & ۳ & ۵ \\ -۱ & -۳ & -۵ \end{bmatrix}$ که در آن داریم $A^۲ = O$.

درنتیجه A پوچ توان از مرتبه‌ی ۲ است.

مثال۳: $A=\begin{bmatrix} ۲ & ۱ & ۱۰ \\ ۱ & ۳ & ۵ \\ -۱ & -۲ & -۵ \end{bmatrix}$ که در آن داریم $A^۳ = O$.

درنتیجه A پوچ توان را مرتبه‌ی ۳ است. در این مقاله می‌خواهیم به دو سئوال زیر پاسخ دهیم:

۱. چه رابطه‌ای بین m (مرتبه‌ی پوچ توانی A) و n (مرتبه‌ی A) وجود دارد؟

۲. چگونه یک ماتریس پوچ توان را بسازیم؟

برای پاسخ به سؤالات بالا، این مطلب مهم را به‌عنوان پیش‌نیاز مطرح می‌کنیم: تمام ماتریس‌های مربعی $n\times n$ در یک معادله‌ی خاصی صدق می‌کنند که آن را «معادله‌ی سرشت‌نمایی» و یا «معادله‌ی مشخصه» گویند.

$$A^n = (a_{۱۱}+a_{۲۲}+\cdots+a_{nn})A^{n-۱} - \cdots + (-۱)^n(A_{۱۱}+A_{۲۲}+\cdots+A_{nn})A + (-۱)^{n-۱}|A|I$$

مثلاً تمام ماتریس‌های ۲×۲ مانند $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ در معادله‌ی $A^۲ = (a+d)A - |A|I$ صدق می‌کنند. به عبارت دیگر:

$A^۲ = (A_{۱۱}+A_{۲۲})A - |A|I$ یا $A^۲ = (a_{۱۱}+a_{۲۲})A - |A|I$

همچنین تمام ماتریس‌های ۳×۳ مانند $A=\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$ در معادله‌ی

$$A^3=(a+e+i)A^2-\left(\begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a & c \\ g & i \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix}\right)A+|A|I$$

صدق می‌کنند. به عبارت دیگر:

$$A^3=(a_{11}+a_{22}+a_{33})A^2-(A_{11}+A_{22}+A_{33})A+|A|I$$

و نیز تمام ماتریس‌های ۴×۴ مانند $A=\begin{bmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ m & n & o & p \end{bmatrix}$ در معادله‌ی زیر صدق می‌کنند.

$$A^4=(a_{11}+a_{22}+a_{33}+a_{44})A^3$$
$$-\left(\begin{vmatrix} a & b \\ e & f \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a & c \\ i & k \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a & d \\ m & p \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} f & g \\ j & k \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} f & h \\ n & p \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} k & l \\ o & p \end{vmatrix}\right)A^2$$
$$+(A_{11}+A_{22}+A_{33}+A_{44})A-|A|I$$

هریک از ضرایب A^2، دترمینان ماتریس‌هایی هستند که از حذف دو سطر و دو ستون هم مکان حاصل می‌شوند. برای مثال، اگر سطرها و ستون‌های سوم و چهارم را حذف کنیم، داریم.

$$\begin{vmatrix} a & b \\ e & f \end{vmatrix}$$

اکنون به سئوالات مطرح شده درباره‌ی ماتریس‌های ۲×۲ و سپس در مورد ماتریس‌های ۳×۳ پاسخ می‌دهیم و در نهایت به بیان حالت کلی می‌پردازیم.

اگر در ماتریس $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ داشته باشیم: $|A|=0$ و $a+d=0$، با توجه به معادله‌ی مشخصه‌ی ماتریس‌های ۲×۲ داریم: $A^2=O$ و اگر برای ماتریس غیر صفر $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ داشته باشیم: $A^2=O$، آن‌گاه با توجه به معادله‌ی مشخصه‌ی ماتریس‌های ۲×۲ و پوچ‌توان بودن A که حاکی از $|A|=0$ است، داریم: $O=(a+d)A-O$ که نشان می‌دهد $a+d=0$. پس بدین‌ترتیب، $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ پوچ‌توان از مرتبه‌ی ۲ است، اگر و فقط اگر $|A|=0$ و $a+d=0$.

حال فرض کنیم ماتریس غیرصفر $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ پوچ‌توان از مرتبه‌ی m باشد ($|A|=0$، $A^m=O$، $m>2$). اگر طرفین معادله‌ی $A^2=(a+d)A-|A|I$ را در A^{m-2} ضرب کنیم، داریم: $A^m=(a+d)A^{m-1}-|A|A^{m-2}$ که با توجه به شرایط فوق داریم: $O=(a+d)A^{m-1}-O$ و درنتیجه $a+d=0$.

این دو شرط یعنی $|A|=0$ و $a+d=0$ همان شرایط پوچ‌توانی A از مرتبه‌ی ۲ است. پس شرط $m>2$ باطل است، یعنی $m=2$ و به‌عبارت دیگر $m=n$ است.

با توجه به شرایط ذکر شده، می‌توان به سهولت ماتریس پوچ‌توان ۲×۲ را ساخت. کافی است عدد دل‌خواه A و عدد دل‌خواه غیر صفر K را در نظر بگیریم و بنویسیم: $A=\begin{bmatrix} a & \frac{a^2}{k} \\ -k & -a \end{bmatrix}$ مانند:

$$A=\begin{bmatrix} 4 & -8 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}\ ،\ A=\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$A=\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ \frac{-9}{5} & -3 \end{bmatrix}\ ،\ A=\begin{bmatrix} -\sqrt{2} & 1 \\ -2 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

اکنون فرض کنیم برای ماتریس غیر صفر $A_{3\times3}$ ($n=3$) داشته باشیم $A^2=O$ (A پوچ‌توان از مرتبه‌ی ۲ است و $m=2$). بنابراین $A^3=O$ و $|A|=0$ که با قرار دادن آن‌ها در معادله‌ی مشخصه‌ی ماتریس‌های ۳×۳ داریم:

$$O=(a_{11}+a_{22}+a_{33})O-(A_{11}+A_{22}+A_{33})A+0I$$

بنابراین:

$$A_{3\times3}\neq O\ ,\ A^2=O\Rightarrow |A|=0\ ,\ A_{11}+A_{22}+A_{33}=0$$

اما عکس ترکیب شرطی فوق برقرار نیست. یعنی اگر $|A|=0$ و $A_{11}+A_{22}+A_{33}=0$، آن‌گاه الزاماً رابطه‌ی $A^2=O$ برقرار نخواهد بود و A^3 و توان‌های بعدی، مضرب‌هایی از A^2 خواهند بود (در این صورت می‌گوییم ماتریس A، تناوب از مرتبه‌ی ۲ است).

مثال: فرض کنید $A=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&1&0\\1&2&3\end{bmatrix}$. A^2 و A^3 و A^4 و A^n را تعیین کنید.

$$A^2=\begin{bmatrix}8&10&12\\4&5&6\\8&10&12\end{bmatrix} \quad \text{و} \quad A^3=\begin{bmatrix}40&50&60\\20&25&30\\40&50&60\end{bmatrix}=5A^2$$

$$A^4=A^3.A=(5A^2).A=5A^3=5(5A^2)=25A^2$$

و $A^n=5^{n-2}.A^2$

توجه داشته باشید که در مثال بالا، هم $|A|=0$ و هم $A_{11}+A_{22}+A_{33}=0$. درحالی که $A^2\neq O$.

سؤال: چه شرطی برای ماتریس غیر صفر $A_{3\times3}$ در نظر بگیریم تا $A^2=O$ باشد؟

فرض کنیم برای ماتریس $A=\begin{bmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&i\end{bmatrix}$ داشته باشیم $A^2=O$ (البته لازم است که $|A|=0$ و $A_{11}+A_{22}+A_{33}=0$ که با توجه به مثال قبل، می‌دانیم کافی نیست).

$$A_{11}+A_{22}+A_{33}=0\Rightarrow ei-fh+ai-gc+ae-bd=0 \quad (1)$$

$$A^2=O\Rightarrow (\text{سطر اول } A)\times(\text{ستون اول } A)=0\Rightarrow a^2+bd+cg=0 \quad (2)$$

$$(\text{سطر دوم } A)\times(\text{ستون دوم } A)=0\Rightarrow bd+e^2+fh=0 \quad (3)$$

$$(\text{سطر سوم } A)\times(\text{ستون سوم } A)=0\Rightarrow gc+fh+i^2=0 \quad (4)$$

$$\xrightarrow{(1),(2),(3),(4)} a^2+e^2+i^2+2ae+2ai+2ei=0$$

$$\Rightarrow \boxed{a+e+i=0} \quad (5)$$

$$\xrightarrow{(1),(2)} ei-fh+ai+ae+a^2=0 \xrightarrow{(5)}$$

$$ei-fh=0\Rightarrow \boxed{A_{11}=0}$$

$$\xrightarrow{(1),(3)} ai-gc+ei+ae+e^2=0 \xrightarrow{(5)}$$

$$ai-gc=0\Rightarrow \boxed{A_{22}=0}$$

$$\xrightarrow{(1),(4)} ae-bd+ei+ai+i^2=0 \xrightarrow{(5)}$$

$$ae-bd=0\Rightarrow \boxed{A_{33}=0}$$

بنابراین ماتریس غیر صفر $A_{3\times3}$ پوچ‌توان از مرتبه‌ی ۲ است، اگر و فقط اگر سه شرط بالا را دارا باشد: $|A|=0$ و $a_{11}+a_{22}+a_{33}=0$ و $A_{11}=A_{22}=A_{33}=0$.

با توجه به معادله‌ی مشخصه‌ی ماتریس‌های ۳×۳، اگر $|A|=0$ و $A_{11}+A_{22}+A_{33}=0$ و $a_{11}+a_{22}+a_{33}=0$ ، آن‌گاه $A^3=O$.

اگر فرض کنیم ماتریس غیرصفر $A_{3\times3}$ پوچ‌توان از مرتبه‌ی ۳ باشد، بدیهی است که $|A|=0$ و $A\neq O$ و $A^2\neq O$ که با توجه به معادله‌ی مشخصه داریم:

$$O=A^3=(a_{11}+a_{22}+a_{33})A^2-(A_{11}+A_{22}+A_{33})A+0I$$

$$\Rightarrow(a_{11}+a_{22}+a_{33})A^2=(A_{11}+A_{22}+A_{33})A \quad (I)$$

با توجه به غیرصفر بودن A و A^2 ، یکی از دو حالت زیر رخ می‌دهد:

الف) $a_{11}+a_{22}+a_{33}\neq0$ و $A_{11}+A_{22}+A_{33}\neq0$: از ضرب طرفین تساوی (I) در A داریم: $A_{11}+A_{22}+A_{33}=0$ و این خلاف فرض است.

ب) $A_{11}+A_{22}+A_{33}=0$ و $a_{11}+a_{22}+a_{33}=0$.

بنابراین ماتریس غیرصفر $A_{3\times3}$ پوچ‌توان از مرتبه‌ی ۳ است، اگر و فقط اگر سه شرط زیر را دارا باشد: $|A|=0$ و $A_{11}+A_{22}+A_{33}=0$ و $a_{11}+a_{22}+a_{33}=0$.

مسئله: نشان دهید اگر ماتریس $A_{3\times3}$ پوچ‌توان از مرتبه‌ی m باشد، آن‌گاه $m\leq3$.

حل: نشان می‌دهیم شرط $m>3$ برقرار نیست:

با توجه به $|A|=0$ و $A^m=O$ و ضرب طرفین معادله‌ی مشخصه در A^{m-3} داریم:

$$O=A^m=(a_{11}+a_{22}+a_{33})A^{m-1}-(A_{11}+A_{22}+A_{33})A^{m-2}+0A^{m-3}$$

$$\Rightarrow(a_{11}+a_{22}+a_{33})A^{m-1}=(A_{11}+A_{22}+A_{33})A^{m-2}$$

که با توجه به غیرصفر بودن A^{m-1} و A^{m-2} به مانند مطالب فوق، دو حالت پیش می‌آید که به همان ترتیب عمل می‌کنیم و خواهیم داشت: $a_{11}+a_{22}+a_{33}=0$ و $A_{11}+A_{22}+A_{33}=0$ که با توجه به $|A|=0$ ، همان شرایط پوچ‌توانی A از مرتبه‌ی ۳ خواهد بود و شرط $m>3$ باطل است.

اکنون برای نمونه، ماتریس $A=\begin{bmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&i\end{bmatrix}$ را چنان تعیین می‌کنیم که $A^2=O$ باشد.

ابتدا سه عدد را که مجموع آن‌ها صفر است، در قطر اصلی قرار می‌دهیم؛ مانند:

$$A=\begin{bmatrix} ۱ & b & c \\ d & -۴ & f \\ g & h & ۳ \end{bmatrix}$$

از $A_{۳۳}=۰$ نتیجه می‌گیریم: $bd=-۴$، فرض کنیم $b=۲$ و $d=-۲$ باشد، پس:

$$A=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & c \\ -۲ & -۴ & f \\ g & h & ۳ \end{bmatrix}$$

از $A_{۲۲}=۰$ نتیجه می‌گیریم: $gc=۳$، فرض کنیم $c=۳$ و $g=۱$ باشد، پس:

$$A=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ -۲ & -۴ & f \\ ۱ & h & ۳ \end{bmatrix}$$

فرض کنیم، سطر دوم A مضربی از سطر اول باشد تا $|A|=۰$ برقرار شود. پس:

$$A=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ -۲ & -۴ & -۶ \\ ۱ & h & ۳ \end{bmatrix}$$

از $A_{۱۱}=۰$ نتیجه می‌گیریم: $-۱۲=-۶h$ بنابراین $h=۲$ و داریم:

$$A=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ -۲ & -۴ & -۶ \\ ۱ & ۲ & ۳ \end{bmatrix}$$

بدیهی است اگر $A^۲$ را محاسبه کنیم، خواهیم دید که $A^۲=O$.

حال برای نمونه، ماتریس $A=\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$ را چنان تعیین می‌کنیم تا پوچ‌توان از مرتبه‌ی ۳ باشد.

ابتدا چهار عدد دل‌خواه را به عنوان a و b و d و e انتخاب می‌کنیم؛ مانند:

$$A=\begin{bmatrix} ۱ & ۳ & c \\ ۲ & ۴ & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

با توجه به $a_{۱۱}+a_{۲۲}+a_{۳۳}=۰$ داریم: $i=-۵$، بنابراین:

$$A=\begin{bmatrix} ۱ & ۳ & c \\ ۲ & ۴ & f \\ g & h & -۵ \end{bmatrix}$$

فرض کنیم $A_{۲۲}=۰$ (و یا هر عدد دیگر) پس: $gc=-۵$. مانند:

$$A=\begin{bmatrix} ۱ & ۳ & -۱ \\ ۲ & ۴ & f \\ ۵ & h & -۵ \end{bmatrix}$$

ستون سوم A را مضربی از ستون اول فرض می‌کنیم تا $|A|=۰$ برقرار شود:

$$A=\begin{bmatrix} ۱ & ۳ & -۱ \\ ۲ & ۴ & -۲ \\ ۵ & h & -۵ \end{bmatrix}$$

با توجه به $A_{۱۱}+A_{۲۲}+A_{۳۳}=۰$ داریم $A_{۳۳}=۲$، بنابراین $h=۱۱$. پس:

$$A=\begin{bmatrix} ۱ & ۳ & -۱ \\ ۲ & ۴ & -۲ \\ ۵ & ۱۱ & -۵ \end{bmatrix}$$

بدیهی است که اگر $A^۳$ را محاسبه کنیم، خواهیم دید که $A^۳=O$.

توجه داشته باشید که در هر دو نمونه‌ی فوق، صفر بودن $|A|$ مهم است و نه چگونگی صفر شدن $|A|$.

مسئله: نشان دهید اگر ماتریس $A_{۴\times۴}$ پوچ‌توان از مرتبه‌ی m باشد، آن‌گاه: $m\le ۴$. با توجه به معادله‌ی سرشت‌نمایی ماتریس‌های ۴×۴، یعنی $A^۴=B_۱A^۳-B_۲A^۲+B_۳A-|A|I$

اگر شرایط زیر برقرار باشند، گوییم $A^4 = O$.

$B_1 = a_{11}+a_{22}+a_{33}+a_{44}=0$ ،
$B_3 = A_{11}+A_{22}+A_{33}+A_{44}=0$ ، $|A|=0$

$$B_2=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a_{11}&a_{13}\\a_{31}&a_{33}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a_{11}&a_{14}\\a_{41}&a_{44}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a_{22}&a_{23}\\a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a_{22}&a_{24}\\a_{42}&a_{44}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a_{33}&a_{34}\\a_{43}&a_{44}\end{vmatrix}=0$$

فرض کنیم $A_{4\times4}$ پوچ توان از مرتبه ی m باشد $(m > 4)$. بنابراین: $|A|=0$ و $A^m = O$. با ضرب طرفین معادله ی مشخصه در A^{m-4} ، داریم:

$$O = A^m = B_1A^{m-1} - B_2A^{m-2} + B_3A^{m-3} - 0A^{m-4}$$
$$\Rightarrow B_1A^{m-1} = B_2A^{m-2} + B_3A^{m-3}$$

توجه داشته باشید که اگر $B_1=B_2=B_3=0$ باشد، آن گاه A پوچ توان از مرتبه ی ۴ و شرط $m > 4$ مردود است.

$$\Rightarrow B_1A^m = B_2A^{m-1} - B_3A^{m-2} \Rightarrow B_2A^{m-1} = B_3A^{m-2}$$

چون A^{m-1} و A^{m-2} ماتریس های غیر صفر هستند، پس یکی از دو حالت زیر رخ می دهد:

الف) $B_2\neq 0$ و $B_3\neq 0$: از $B_2A^m = B_3A^{m-1}$ و $A^m = O$ ، نتیجه می گیریم $B_3=0$ و این خلاف فرض است.

ب) $B_2=0$ و $B_3=0$: از

$$O = A^m = B_1A^{m-1} - 0A^{m-2} + 0A^{m-3} - 0A^{m-4}$$

داریم $B_1=0$. درنتیجه $A^4=O$ و شرط $m > 4$ باطل است.

پس اگر $A_{4\times4}$ ماتریس پوچ توان از مرتبه ی m باشد، داریم: $m\le 4$.

مسئله: نشان دهید اگر ماتریس غیر صفر $A_{n\times n}$ پوچ توان از مرتبه ی m باشد، آن گاه: $m\le n$

حل: معادله ی مشخصه ی $A_{n\times n}$ را به صورت ذیل در نظر می گیریم:

$$A^n = B_1.A^{n-1} - B_2.A^{n-2}+\cdots+(-1)^n.B_{n-1}.A + (-1)^{n-1}.B_n.I$$

که در آن $B_1=\sum_{i=1}^{n} a_{ii}$ و ... و $B_{n-1}=\sum_{i=1}^{n} A_{ii}$ و $B_n=|A|$.

بدیهی است با فرض $B_i=0$ $(i=1,2,\cdots,n)$ ماتریس A، پوچ توان از مرتبه ی n خواهد بود. اکنون فرض کنیم A پوچ توان از مرتبه ی m باشد $(m > n)$ ، یعنی $B_n=|A|=0$ و $A^m=O$ و برای هر عدد طبیعی مانند k، $(k < m)$ داشته باشیم $A^k\neq O$. از ضرب طرفین معادله ی مشخصه در A^{m-2} داریم:

$$A^{m+n-2} = B_1.A^{m+n-3} - B_2.A^{m+n-4}+\cdots +(-1)^n.B_{n-3}.A^{m+1}+(-1)^{n-1}.B_{n-2}.A^m +(-1)^n.B_{n-1}.A^{m-1}+(-1)^{n-1}.B_n.A^{m-2}$$

که با توجه به $B_n=|A|=0$ داریم: $B_{n-1}=0$.

حال با در نظر گرفتن دو تساوی اخیر، اگر طرفین معادله ی مشخصه را در A^{m-3} ضرب کنیم، داریم $B_{n-2}=0$ و درنهایت با ضرب طرفین معادله ی مشخصه در A^{m-n} داریم: $B_1=0$ و این شرایط، نشان دهنده ی پوچ توانی A از مرتبه ی n است. به همین دلیل، شرط $m > n$ باطل است و داریم: $m\le n$.

نتایج

۱. اگر $|A_{2\times2}|=0$ ، آن گاه A متناوب خواهد بود و داریم:
$A^n=(a_{11}+a_{22})^{n-1}.A$

۲. اگر $|A_{2\times2}|=0$ و $a_{11}+a_{22}=0$ ، آن گاه $A^2=O$.

۳. اگر $|A_{3\times3}|=0$ و $A_{11}+A_{22}+A_{33}=0$ ، آن گاه A تناوب از مرتبه ی ۲ خواهد بود و داریم:
$A^n=(a_{11}+a_{22}+a_{33})^{n-2}.A^2$

۴. اگر $|A_{3\times3}|=0$ و $A_{11}+A_{22}+A_{33}=0$ و $a_{11}+a_{22}+a_{33}=0$ ، آن گاه $A^2=O$.

۵. اگر $|A_{3\times3}|=0$ و $A_{11}+A_{22}+A_{33}=0$ و $a_{11}+a_{22}+a_{33}=0$ ، آن گاه $A^3=O$.

۶. اگر $A_{n\times n}$ پوچ توان از مرتبه ی m باشد، آن گاه: $m\le n$.

جانشینی‌های مثلثاتی

به علت فراوانی تعداد اتحادهای مثلثاتی، انتخاب جانشینی مثلثاتی هوشمندانه، غالباً به راه‌حلی بسیار ساده می‌انجامد. این روش در تمام مسائلی که در ادامه ارائه کرده‌ایم، به‌کار رفته است. جانشینی مورد بحث، معمولاً هم‌چون مسئله‌ی زیر، توسط صورت و فرم عبارت جبری مربوطه پیشنهاد می‌شود.

مسئله: تمام جواب‌های حقیقی دستگاه معادلات زیر را بیابید.

$$x^۳ - ۳x = y$$

$$y^۳ - ۳y = z$$

$$z^۳ - ۳z = x$$

در این جا حضور $x^۳ - ۳x$، فرمول سه‌برابر زاویه‌ی مربوط به کسینوس‌ها را به‌خاطر می‌آورد. البته در این مورد ضریب جلوی $x^۳$ مفقود است، ولی ما با استفاده از روش دوبرابر کسینوس به‌جای کسینوس، مواظب آن خواهیم بود، و کار را با یافتن جواب‌های بین ۲- و ۲ آغاز می‌کنیم.

با نوشتن $x = ۲\cos u$ ، $y = ۲\cos v$ ، $z = ۲\cos w$ ، با $u, v, w \in [۰, \pi]$ ، دستگاه به صورت زیر درمی‌آید:

$$۲\cos ۳u = ۲\cos v$$

$$۲\cos ۳v = ۲\cos w$$

$$۲\cos ۳w = ۲\cos u$$

با استفاده از فرمول سه‌برابر زاویه برای $\cos ۳u$ و $\cos v$ ، معادله‌ی اول چنین می‌شود:

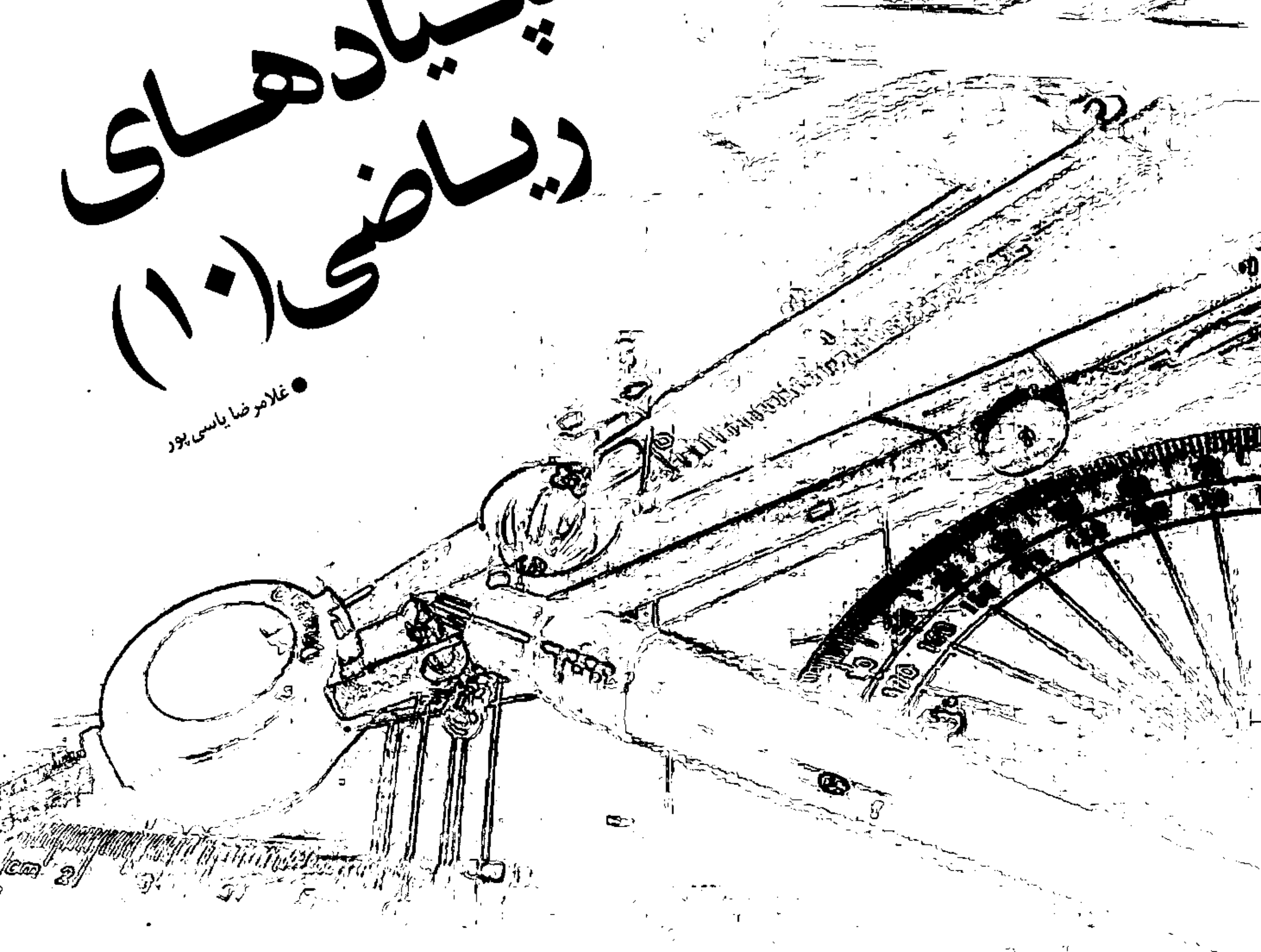
$$\cos ۹u = \cos ۳v$$

با ترکیب این معادله با معادله‌ی دوم، به‌دست می‌آوریم:

$$\cos ۹u = \cos w$$

باراهیان المپیادهای ریاضی (۱۰)

● غلامرضا یاسی‌پور



مانند قبل:

$$\cos 27u = \cos 3w$$

و معادله‌ی سوم، معادله‌ی زیر را به‌دست می‌دهد:

$$\cos 27u = \cos u$$

این برابری برقرار است اگر و تنها اگر، به‌ازای عدد صحیح k، داشته باشیم:

$$27u = 2k\pi \pm u$$

جواب‌های واقع در بازه‌ی $[0,\pi]$ عبارت‌اند از:

$$u = k\pi/14\ ,\ \ k = 0,1,\ldots,14$$

و:

$$u = k\pi/13\ ,\ \ k = 0,1,2,\ldots,12$$

در نتیجه:

$$x = 2\cos k\pi/14\ ,\ \ y = 2\cos 3k\pi/14\ ,\ \ z = 2\cos 9k\pi/14$$

$$k = 0,1,\ldots,14$$

و $x = 2\cos k\pi/13$، $y = 2\cos 3k\pi/13$ و $z = 2\cos 9k\pi/13$، با درنظر گرفتن $k = 0,1,2,\ldots,12$، جواب‌های دستگاه معادلات داده شده‌اند.

از آن‌جا که حداکثر $27 = 3 \times 3 \times 3$ جواب وجود دارد (به درجه‌ی دستگاه توجه کنید) و هم‌اکنون ۲۷ جواب متمایز به‌دست آورده‌ایم، این جواب‌ها تمام جواب‌های مطلوب هستند. اکنون به مثالی می‌پردازیم که در آن تابع تانژانت به‌کار رفته است.

مسئله: فرض می‌کنیم $\{x_n\}_n$ دنباله‌ای باشد که در برگشتی

$$x_{n+1} = \frac{\sqrt{3}x_n - 1}{x_n + \sqrt{3}}\ ,\ \ n \geq 1$$

صدق می‌کند. ثابت کنید که این دنباله، متناوب یا دوری است.

فرمول تانژانت تفاضل را به‌خاطر می‌آوریم:

$$tg(a-b) = \frac{tga - tgb}{1 + tga \times tgb}$$

نیز توجه داشته باشید که: $tg\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}$. اگر رابطه‌ی برگشتی مفروض را به‌صورت زیر بنویسیم:

$$x_{n+1} = \frac{x_n - \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 + x_n\frac{1}{\sqrt{3}}}$$

طبیعی است که جانشینی $x_1 = tgt$ را، به‌ازای عدد حقیقی t، انجام دهیم. در این صورت: $x_2 = tg(t - \pi/6)$

و به‌طور استقرایی:

$$x_n = tg(t - (n-1)\pi/6)\ ,\ \ n \geq 1$$

از آن‌جا که تانژانت، دوری با دوره‌ی π است، به‌دست می‌آوریم: $x_n = x_{n+6}$ که نشان می‌دهد، دنباله‌ی مورد نظر دارای دوره‌ی ۶ است.

چند مسئله برای تمرین بیشتر

۱. به‌ازای چه مقادیر پارامتر حقیقی a، عدد حقیقی x صادق در $\sqrt{1-x^2} \geq a - x$ موجود است؟

۲. با مفروض بودن چهار عدد متمایز در بازه‌ی $(0، 1)$، نشان دهید دو عدد از آن‌ها، x و y، چنان موجودند که:

$$0 < x < \sqrt{1-y^2} - y\sqrt{1-x^2} < \frac{1}{2}$$

۳. دنباله‌ی $\{x_n\}_n$، به‌ازای هر $n \geq 1$، در $2 \leq x_n \leq \sqrt{x_{n+2} + 2}$ صادق است. جمیع مقادیر ممکن x_{1986} را بیابید.

۴. جمیع جواب‌های حقیقی دستگاه معادلات زیر را بیابید:

$$2x + x^2y = y$$

$$2y + y^2z = z$$

$$2z + z^2x = x$$

۵. جمیع جواب‌های حقیقی دستگاه معادلات زیر را بیابید:

$$x_1 - \frac{1}{x_1} = 2x_2$$

$$x_2 - \frac{1}{x_2} = 2x_3$$

$$x_3 - \frac{1}{x_3} = 2x_4$$

$$x_4 - \frac{1}{x_4} = 2x_1$$

۶. ثابت کنید، به‌ازای هر $x, y \in R$، نابرابری‌های زیر برقرارند:

$$-\frac{1}{2} \leq \frac{(x+y)(1-xy)}{(1+x^2)(1+y^2)} \leq \frac{1}{2}$$

۷. به‌ازای هر عدد حقیقی x، دنباله‌ی $\{x_n\}_n$ را به‌طور برگشتی، با استفاده از $x_1 = x$، و:

$$x_{n+1} = \frac{1}{1-x_n} - \frac{1}{1+x_n}$$

به‌ازای هر n، تعریف کنید.

اگر $x_n = \pm 1$، آن‌گاه دنباله مختوم می‌شود (به‌ازای x_{n+1} تعریف ناشده خواهد بود). چند مورد از چنین دنباله‌هایی پس از هشت جمله مختوم می‌شوند؟

۸. دنباله‌ی اعداد حقیقی

$$a_1, a_2, a_3, \ldots$$

دارای این ویژگی است که به‌ازای هر عدد صحیح و مثبت k، داریم:

$$a_{k+1} = (ka_k + 1)/(k - a_k)$$

ثابت کنید این دنباله شامل بی‌نهایت جمله‌ی مثبت و بی‌نهایت جمله‌ی منفی است.

۹. با مفروض بودن:

$$-1 \le a_1 \le a_2 \le \ldots \le a_n \le 1$$

ثابت کنید:

$$\sum_{i=1}^{n-1}\sqrt{1-a_ia_{i+1}-\sqrt{(1-a_i^2)(1-a_{i+1}^2)}} < \frac{\pi\sqrt{2}}{2}$$

۱۰. فرض می‌کنیم $x_0=0$ ، و:

$$x_1,x_2,\ldots,x_n>0$$

با توجه به این که داریم:

$$\sum_{k=1}^{n} x_k = 1$$

ثابت کنید:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{\sqrt{1+x_0+\ldots+x_{k-1}}\sqrt{x_k+\ldots+x_n}} < \frac{\pi}{2}$$

حل مسئله‌ها

۱. $t\in[0,\pi]$ را چنان انتخاب می‌کنیم که $\cos t = x$ ، این کار امکان‌پذیر است، زیرا مقدار $|x|$ نمی‌تواند از ۱ تجاوز کند. داریم:

$$\sqrt{1-x^2}=\sin t$$

زیرا $\sin t$ ، به‌ازای $t\in[0,\pi]$ ، مثبت است. در این صورت، نابرابری مورد بحث به $\sin t+\cos t\ge a$ تبدیل می‌شود. ماکزیمم تابع

$$f(t)=\sin t+\cos t = 2\sin\frac{\pi}{4}\cos(t-\frac{\pi}{4})=\sqrt{2}\cos(t-\frac{\pi}{4})$$

در بازه‌ی $[0,\pi]$ ، برابر $\sqrt{2}$ است. در نتیجه، برد a مجموعه‌ی جمیع اعداد حقیقی نامتجاوز از $\sqrt{2}$ است.

۲. فرض می‌کنیم که اعداد مورد نظر a_1 ، a_2 ، a_3 و a_4 باشند. جانشینی $a_k=\sin t_k$ ، $t_k\in(0,\pi/2)$ را درنظر می‌گیریم. مسئله می‌خواهد این را نشان دهیم که دو اندیس i و j با این شرط:

$$0<\sin t_i\cos t_j - \sin t_j\cos t_i<\frac{1}{2}$$

موجودند. اما:

$$\sin t_i\cos t_j-\sin t_j\cos t_i=\sin(t_i-t_j)$$

در نتیجه باید ثابت کنیم که i و jای با $t_i>t_j$ و $t_i-t_j<\frac{\pi}{6}$ وجود دارند. این مطلب از اصل لانه‌ی کبوتر یا دیریکله حاصل می‌شود. زیرا دو مورد از چهار عدد مزبور باید در یکی از بازه‌های بالا قرار گیرند:

$$(0,\pi/6]\ ,\ (\pi/6,\pi/3]\ ,\ (\pi/3\ ,\ \pi/2)$$

۳. از آن جا که به‌ازای هر n، $0\le x_n\le 2$ ، می‌توانیم جانشینی مثلثاتی $x_n=2\cos y_n$ را انجام دهیم که در آن: $0\le y_n\le\pi/2$.
از نابرابری $x_n\le\sqrt{x_{n+2}+2}$ و فرمول دوبرابر زاویه‌ی $\cos 2\alpha+1=2\cos^2\alpha$ ، نابرابری زیر را حاصل می‌کنیم:

$$\cos y_{n+2}/2\le\cos y_n$$

از آن جا که کسینوس، در $[0,\pi/2]$ ، تابعی نزولی است، این موضوع مستلزم $y_n\le y_{n+2}/2$ به‌ازای جمیع مقادیر n است.
با استفاده از استقرا نتیجه می‌شود که به‌ازای هر n و k داریم:

$$y_n\le y_{n+2k}/2^k$$

و با رفتن k به بی‌نهایت، $y_n=0$ را به‌ازای هر n به‌دست می‌آوریم.
(آزمون انتخابی IMO رومانی، ۱۹۸۶، طرح از T.Andreescu)

۴. اگر یکی از مجهول‌ها، مثلاً x، برابر ±۱ باشد، آن‌گاه $2x+x^2y=y$ به $\pm2=0$ منجر می‌شود که غیرممکن است. در نتیجه، دستگاه مورد بحث را می‌توان به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\frac{2x}{1-x^2}=y$$

$$\frac{2y}{1-y^2}=z$$

$$\frac{2z}{1-z^2}=x$$

بنا به فرمول دوبرابر زاویه‌ی تانژانت‌ها، یعنی:

$$\mathrm{tg}2a=\frac{2\mathrm{tg}a}{1-\mathrm{tg}^2a}$$

طبیعی است که جانشینی $x=\mathrm{tg}\alpha$ را به‌ازای $\alpha\in(-\pi/2,\pi/2)$ ، انجام دهیم.
از دو معادله‌ی اول،

$$y=\mathrm{tg}2\alpha\ ،\ z=\mathrm{tg}4\alpha$$

و معادله‌ی آخر، مستلزم $\mathrm{tg}8\alpha=\mathrm{tg}\alpha$ می‌شود. درنتیجه، $8\alpha-\alpha=k\pi$ ، به ازای عدد صحیح kای، برقرار است. بنابراین $\alpha=k\pi/7$ ، و از آن‌جا که: $\alpha\in(-\pi/2,\pi/2)$ ، باید داشته باشیم: $-3\le k\le 3$
نتیجه می‌شود که جواب‌های دستگاه عبارت‌اند از:

$$(\mathrm{tg}\frac{k\pi}{7},\mathrm{tg}\frac{2k\pi}{7},\mathrm{tg}\frac{4k\pi}{7})\ ,\quad k=-3,-2,-1,0,1,2,3$$

۵. فرمول مثلثاتی پنهان در صورت مسئله، فرمول دو برابر زاویه‌ی کتانژانت‌هاست؛ یعنی:

$$2\cot g2\alpha=\cot g\alpha-\frac{1}{\cot g\alpha}$$

این رابطه را می‌توان از فرمول دو برابر زاویه‌ی تانژانت‌ها، یعنی: $\mathrm{tg}2\alpha=2\mathrm{tg}\alpha/(1-\mathrm{tg}^2\alpha)$ با قرار دادن $1/\cot g\alpha$ به‌جای $\mathrm{tg}\alpha$ ، به اثبات رساند.

اگر قرار دهیم: $x_1 = \operatorname{cotg} \alpha$ ، $\alpha \in (0,\pi)$ ، آن‌گاه از معادله‌ی اول $x_2 = \operatorname{cotg} 2\alpha$ ، از معادله‌ی دوم $x_3 = \operatorname{cotg} 4\alpha$ ، از معادله‌ی سوم $x_4 = \operatorname{cotg} 8\alpha$ ، و از معادله‌ی آخر $x_1 = \operatorname{cotg} 16\alpha$ حاصل می‌شود. درنتیجه، $\operatorname{cotg}\alpha = \operatorname{cotg} 16\alpha$ که مستلزم $16\alpha - \alpha = k\pi$ ، به ازای عدد صحیح k است. در این صورت، جواب‌های

$$\alpha = k\pi / 15 \;,\; k = 1,2,\dots,14$$

را به دست می‌آوریم و جواب‌های دستگاه مفروض عبارت‌اند از:

$$x_1 = \operatorname{cotg} k\pi/15 \;, x_2 = \operatorname{cotg} 2k\pi/15 \;, x_3 = \operatorname{cotg} 4k\pi/15 \;, x_4 = \operatorname{cotg} 8k\pi/15 \;, k = 1,2,3,\dots,14$$

۶. فرض می‌کنیم:

$$x = \operatorname{tg} a \quad \text{و} \quad y = \operatorname{tg} b$$

در این صورت:

$$x + y = \operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b = \frac{\sin(a+b)}{\cos a \cos b}$$

$$1 - xy = 1 - \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b = \frac{\cos(a+b)}{\cos a \cos b}$$

$$\frac{1}{1+x^2} = \cos^2 a$$

$$\frac{1}{1+y^2} = \cos^2 b$$

نابرابری مورد اثبات، هم‌ارز $-1 \le 2\sin(a+b)\cos(a+b) \le 1$ است، یعنی $-1 \le \sin 2(a+b) \le 1$ ، و کار به انجام می‌رسد.

۷. نخست توجه می‌کنیم که:

$$\frac{1}{1-x_n} - \frac{1}{1+x_n} = \frac{2x_n}{1-x_n^2}$$

اگر قرار دهیم $x_1 = \operatorname{tg}\beta$ ، با $\beta \in (-\pi/2, \pi/2)$ ، در این صورت:

$$x_2 = \frac{2\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}^2\beta} = \operatorname{tg} 2\beta$$

و به طور استقرایی به‌دست می‌آوریم:

$$x_n = \operatorname{tg} 2^{n-1}\beta$$

به این ترتیب:

$$x_8 = \operatorname{tg} 2^7 \beta = \operatorname{tg} 128\beta$$

برای این‌که دنباله دارای طول ۸ باشد، باید داشته باشیم:

$$\operatorname{tg} 128\beta = \pm 1$$

و این مستلزم آن است که، به ازای عدد صحیح kای، داشته باشیم:

$$128\beta = \pm\pi/4 + k\pi$$

به این ترتیب:

$$\beta = \pm\pi/512 + k\pi/128$$

به عبارت دیگر:

$$x = \operatorname{tg}\left(\pm\frac{\pi}{512} + \frac{k\pi}{128}\right)$$

برای k، ۱۲۸ مقدار، یعنی $k = 0,1,2,\dots,127$ وجود دارد که به ۲۵۶ مقدار متفاوت x می‌انجامد.

اکنون باید بررسی کنیم تا مطمئن شویم، هیچ‌یک از این مقادیر، دنباله‌ای به طول کمتر از هشت به دست نمی‌دهد. در واقع، برای این‌که دنباله زودتر خاتمه یابد، باید رابطه‌ی

$$\pm\frac{\pi}{512} + \frac{k\pi}{128} = \pm\frac{\pi}{2^{r+2}} + m\pi$$

را به ازای اعداد صحیح m و rای، با شرط $0 < r < 7$ ، داشته باشیم. این موضوع مستلزم آن است که:

$$\pm 1 + 4k = \pm 2^{7-r} + 2^9 m$$

اما سمت چپ این معادله فرد و سمت راست آن زوج است که این نمی‌تواند رخ دهد. درنتیجه جمیع ۲۵۶ دنباله، طولی برابر ۸ دارند.

(طرح برای AIME، ۱۹۹۶)

۸. اگر دنباله‌ی $b_1 = \operatorname{tg}^{-1} a_1$ و $b_{k+1} = b_k + \operatorname{tg}^{-1}(1/k)$ ، $k = 1,2,3,\dots$ را تعریف کنیم، آن‌گاه فرمول جمع مربوط به تانژانت‌ها، یعنی:

$$\operatorname{tg}(x+y) = \frac{\operatorname{tg}x + \operatorname{tg}y}{1 - \operatorname{tg}x \operatorname{tg}y}$$

نشان می‌دهد که به ازای هر k:

$$a_k = \operatorname{tg} b_k$$

از آن‌جا که $\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = 1$ ، نتیجه می‌شود:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\operatorname{tg}^{-1} 1/k}{1/k} = 1$$

که با توجه به آن، از یک طرف سری $b_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{tg}^{-1}\frac{1}{k}$ واگراست، و از طرف دیگر، جمله‌های سری، چون k به بی‌نهایت میل کند، به صفر میل می‌کند. درنتیجه، بی‌نهایت مجموع جزئی سری موردنظر موجود است که در بازه‌های به صورت

$$(2\pi n, 2\pi n + \pi/2)$$

قرار دارند و بی‌نهایت مجموع جزئی سری، در بازه‌ی $(2\pi n + \pi/2, 2\pi n)$ واقع‌اند.

اما یک مجموع جزئی یک b_m به ازای m وجود دارد و از آن‌جا که $a_m = \operatorname{tg} b_m$ ، نتیجه می‌شود که بی‌نهایت a_m مثبت و بی‌نهایت a_m منفی موجود است.

(المپیاد ریاضی لنینگراد، ۱۹۸۹)

۹. جانشینی مثلثاتی $a_i = \cos x_i$ ، به ازای $x_i \in [0,\pi]$ ، $i = 1,2,\dots,n$ ، عملی طبیعی است. توجه داشته باشید که یکنوایی تابع کسینوس در ترکیب با نابرابری‌های داده شده، نشان می‌دهد که x_iها دنباله‌ای نزولی تشکیل می‌دهند. عبارت سمت چپ به صورت

زیر درمی‌آید:

$$\sum_{i=1}^{n-1}\sqrt{1-\cos x_i\cos x_{i+1}-\sin x_i\sin x_{i+1}}=\sum_{i=1}^{n-1}\sqrt{1-\cos(x_{i+1}-x_i)}$$

$$=\sqrt{2}\sum_{i=1}^{n-1}\sin\frac{x_{i+1}-x_i}{2}$$

در این مورد، از فرمول‌های تفریق و دو برابر زاویه استفاده می‌کنیم. تابع سینوسی در $[0,\pi]$ کوژ به سمت پایین است. درنتیجه می‌توان از نابرابری «جنسن»[1] برای به دست آوردن نابرابری زیر استفاده کرد:

$$\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1}\sin\frac{x_{i+1}-x_i}{2}\le\sin\left(\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1}\frac{x_{i+1}-x_i}{2}\right)$$

درنتیجه:

$$\sqrt{2}\sum_{i=1}^{n-1}\sin\frac{x_{i+1}-x_i}{2}\le(n-1)\sqrt{2}\sin\frac{x_n-x_1}{2(n-1)}$$

$$\le\sqrt{2}(n-1)\sin\frac{\pi}{2(n-1)}$$

زیرا $x_n-x_1\in(0,\pi)$. بهره‌گیری از این موضوع که، به‌ازای $x>0$، $\sin x<x$، نابرابری زیر را به دست می‌دهد:

$$\sqrt{2}(n-1)\sin\pi/(2(n-1))\le\sqrt{2}\pi/2$$

(برنامه‌ی تابستانی المپیاد ریاضی، ۱۹۹۶)

۱۰. آن‌جا که x_iها مثبت‌اند و مجموعشان ۱ می‌شود، می‌توانیم جانشینی $x_0+x_1+\cdots+x_k=\sin a_k$ با $a_0=0<a_1<\cdots<a_n=\pi/2$، $k=0,1,\cdots,n$ را به کار ببریم. در این صورت، نابرابری به صورت زیر درمی‌آید:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin a_k-\sin a_{k-1}}{\sqrt{1-\sin a_{k-1}}\sqrt{1-\sin a_{k-1}}}<\frac{\pi}{2}$$

که می‌تواند به صورت زیر بازنویسی شود:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{2\sin\frac{a_k-a_{k-1}}{2}\cos\frac{a_k+a_{k-1}}{2}}{\cos a_{k-1}}$$

$\cos x$، به ازای $0\le x\le\pi/2$، تابعی نزولی است و: $\sin x<x$. درنتیجه، سمت چپ نابرابری مورد بحث، اکید کمتر از

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{2\sin\frac{a_k-a_{k-1}}{2}\cos a_{k-1}}{\cos a_{k-1}}=\sum_{k=1}^{n}(a_k-a_{k-1})=\frac{\pi}{2}$$

می‌شود و مسئله حل شده است.

(المپیاد ریاضی چین، ۱۹۹۶)

زیرنویس

[1] Jensen

معرفی سایت‌های ریاضی جهان

ادامه‌ی مطلب صفحه‌ی [illegible]

۲۵. منطق و نظریه‌ی مجموعه (Logic & Set Theory)
۲۶. آموزش ریاضی (Mathematics Education)
۲۷. زیست‌شناسی ریاضیاتی (Mathematical Biology)
۲۸. گوناگون (Miscellaneous)
۲۹. حساب دیفرانسیل و انتگرال چندمتغیره
(Multivariable Calculus)
۳۰. دینامیک غیرخطی (Nonlinear Dynamics)
۳۱. نظریه‌ی اعداد (Number Theory)
۳۲. آنالیز عددی (Numerical Analysis)
۳۳. معادلات دیفرانسیل معمولی
(Ordinary Differential Educations)
۳۴. معادلات دیفرانسیل جزئی
(Partial Differential Educations)
۳۵. حساب دیفرانسیل و انتگرال مقدماتی (Pre-Calculus)
۳۶. نظریه‌ی احتمال (Probabilitly Theory)
۳۷. آمار (Statistics)
۳۸. توپولوژی (Topology)
۳۹. مثلثات (Trigonometry)

ب) روش دیگر، نوشتن کلمه‌ی کلیدی و مورد نظر در قالب یک کلمه‌ی تنها، یک عبارت تنها و یا چندین کلمه‌ی جداگانه در قسمت مخصوص جست‌وجوی این سایت است. برای مثال، اگر مایل هستید، اطلاعاتی را به صورت کلی در زمینه‌ی «نظریه گراف‌ها» به‌دست آورید، می‌باید عبارت «Graph Theory» را در قسمت جست‌وجو بنویسید. اما اگر می‌خواهید که اطلاعاتی بیشتری درباره‌ی نظریه‌ی گراف‌ها، مثلاً پیرامون «ماتریس مجاورت گراف ساده» کسب کنید، کافی است عبارت «Adjacency Matrix of a Simple Graph» را در قسمت جست‌وجو بنویسید و به جست‌وجو بپردازید.

در سایت Math Archives قسمتی نیز به دانشگاه‌ها، کالج‌ها و انجمن‌های ریاضیات و گروه‌های ریاضی مرتبط با آن‌ها اختصاص داده شده است. در این بخش مخاطب می‌تواند، به اطلاعات گروه‌های ریاضی دانشگاه‌ها، کالج‌ها و انجمن‌های گوناگونی که اسم آن‌ها در اینترنت قرار داده شده است، از طریق انتخاب حروف الفبا دست‌رسی پیدا کند. برای مثال، شخصی که مایل است آگاهی‌هایی در مورد گروه ریاضی دانشگاه تگزاس دریافت کند، کافی است حرف «T» و فردی که به‌دنبال گروه ریاضی دانشگاه اوکلاهاما می‌باشد، کافی است، حرف O را انتخاب کند.

هم‌نهشتی و کاربردهای آن

قسمت ۲

• سید محمدرضا هاشمی موسوی
hashemi – moosavi@yahoo.com

اشاره

در قسمت اول، با هم‌نهشتی و تعریف‌ها، روابط و تعدادی از قوانین و مسأله‌های مربوط به آن آشنا شدیم. در این قسمت می‌کوشیم، ابتدا به برخی دیگر از مسأله‌های طرح شده در رابطه با موضوع پاسخ دهیم. سپس به ارایه‌ی کاربردهای هم‌نهشتی در سطوح گوناگون می‌پردازیم.

۹. باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد زیر را با فرض $n \geq 5$ بر ۴۸ را بیابید.

$$N = 1! + 2! + 3! + \cdots + n!$$

حل: می‌دانیم $n! = n(n-1)(n-2)\times\cdots\times 1$ ، پس:

$$1! \overset{48}{\equiv} 1 \ ,\ 2! \overset{48}{\equiv} 2 \ ,\ 3! \overset{48}{\equiv} 6 \ ,\ 4! \overset{48}{\equiv} 24 \ ,\ 5! \overset{48}{\equiv} 24 \ ,\ 6! \overset{48}{\equiv} 0$$

با فرض $n > 5$ ، خواهیم داشت:

$$n > 5 : \ n! \overset{48}{\equiv} 0$$

بنابراین، با فرض $n \geq 5$ ، می‌توان نوشت:

$$N = 1! + 2! + 3! + \cdots + n! \overset{48}{\equiv} 1 + 2 + 6 + 24 + 24 + 0 + \cdots + 0 = 57$$

$$N \overset{48}{\equiv} 57 \overset{48}{\equiv} 9 \Rightarrow N \overset{48}{\equiv} 9 \ ; \ r = 9$$ (باقی‌مانده‌ی تقسیم N بر ۴۸)

۱۰. ثابت کنید به ازای هر n طبیعی، عبارت $M=5^{2n}\times 9^{n+1}+2^{10n+3}$ بر ۱۷ بخش‌پذیر است.

حل:

$$2^5\overset{17}{\equiv}-2\ ;\ \left(2^5\right)^{2n}\overset{17}{\equiv}(-2)^{2n}\ ;$$

$$2^{10n}\times 2^3\overset{17}{\equiv}(-2)^{2n}\times 2^3=2^{2n}\times 8$$

$$2^{10n+3}\overset{17}{\equiv}8\times 2^{2n}\ ,\ 5^{2n}\times 9^{n+1}\overset{17}{\equiv}15^{2n}\times 9$$
$$\overset{17}{\equiv}(-2)^{2n}\times 9=2^{2n}\times 9$$

از جمع دو رابطه‌ی اخیر:

$$2^{10n+3}+5^{2n}\times 9^{n+1}\overset{17}{\equiv}8\times 2^{2n}+9\times 2^{2n}=17\times 2^{2n}\overset{17}{\equiv}0\ ;$$
$$M=5^{2n}\times 9^{n+1}+2^{10n+3}\overset{17}{\equiv}0$$

۱۱. ثابت کنید به ازای هر n طبیعی، عبارت $N=4^{3n}+18n-1$ بر ۹ بخش‌پذیر است.

حل:

$$4^{3n}=(4^3)^n=(64)^n\overset{9}{\equiv}(1)^n=1\ ;\ 4^{3n}\overset{9}{\equiv}1\ ,\ 18n\overset{9}{\equiv}0$$

از جمع دو رابطه‌ی اخیر:

$$4^{3n}+18n\overset{9}{\equiv}1+0\ ;\ 4^{3n}+18n\overset{9}{\equiv}1\ ;\ N=4^{3n}+18n-1\overset{9}{\equiv}0$$

۱۲. ثابت کنید به ازای هر n طبیعی، عبارت $S=7^{6n+3}+7^{3n+2}-12$ بر ۱۹ بخش‌پذیر است.

حل:

$$7^3=343\overset{19}{\equiv}1\ ;\ (7^3)^{2n}\times 7^3\overset{19}{\equiv}1\ ;\ 7^{6n+3}\overset{19}{\equiv}1\ ,$$

$$7^{3n+2}\overset{19}{\equiv}7^2\overset{19}{\equiv}11\ ;\ 7^{3n+2}\overset{19}{\equiv}11$$

از جمع دو رابطه‌ی اخیر:

$$7^{6n+3}+7^{3n+2}\overset{19}{\equiv}12\ ;\ S=7^{6n+3}+7^{3n+2}-12\overset{19}{\equiv}0$$

۱۳. ثابت کنید به ازای هر n طبیعی، عبارت $6^{3n-1}+7$ بر ۴۳ بخش‌پذیر است.

حل:

$$6^3=216\overset{43}{\equiv}1\ ;\ 6^{3n}\overset{43}{\equiv}1\ ,\ 6^{3n-1}+7=6^{3n-3}\times 6^2+7,$$

$$(6^3)^{n-1}\overset{43}{\equiv}1\ ;\ 6^{3n-3}\overset{43}{\equiv}1\ ,\ 6^{3n-1}+7\overset{43}{\equiv}(1)6^2+7=43;$$

$$6^{3n-1}+7\overset{43}{\equiv}0$$

۱۴. ثابت کنید به ازای هر مقدار طبیعی n و اعداد صحیح a و b داریم:

$$(a+b)^n\overset{ab}{\equiv}a^n+b^n$$

حل: با توجه به بسط دو جمله‌ای:

$$(a+b)^n=a^n+\binom{n}{1}a^{n-1}b+\binom{n}{2}a^{n-2}b^2+\cdots+b^n \quad (1)$$

از برابری ۱ نتیجه می‌شود:

$$(a+b)^n-a^n-b^n=kab \quad (2)$$

برابری ۲ را می‌توان به صورت هم‌نهشتی نشان داد:

$$(a+b)^n\overset{ab}{\equiv}a^n+b^n$$

۱۵. اگر $a\overset{n}{\equiv}b$ و $m|n$، آن‌گاه $a\overset{m}{\equiv}b$.

حل: با توجه به فرض مسأله، یعنی $a\overset{n}{\equiv}b$، می‌توان نوشت:
$n|(a-b)$

از طرفی چون $m|n$، پس با توجه به خاصیت تعدی می‌توان نوشت:

$$m|(a-b)\ ;\ a\overset{m}{\equiv}b$$

۱۶. باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد زیر بر ۷ را بیابید.

$$N=3^{557}+4^{557}+7^{557}+77^{557}+777^{557}$$

حل: هم‌نهشتی‌های زیر واضح‌اند:

$$7^{557}\overset{7}{\equiv}0\ ,\ 77^{557}\overset{7}{\equiv}0\ ,\ 777^{557}\overset{7}{\equiv}0$$

$$3^{557}+4^{557}=(3+4)(3^{556}-3^{555}\times 4+\cdots+4^{556})=7k\ ;$$

$$3^{557}+4^{557}\overset{7}{\equiv}0$$

از جمع هم‌نهشتی‌های اخیر خواهیم داشت:

$$N=3^{557}+4^{557}+7^{557}+77^{557}+777^{557}\overset{7}{\equiv}0$$

(باقی‌مانده‌ی تقسیم صفر است.)

۱۷. نشان دهید $k=5^n-3^n-2^n$ بر ۶ بخش‌پذیر است.

حل: با توجه به رابطه‌ی $(a+b)^n\overset{ab}{\equiv}a^n+b^n$ و فرض $a=3$ و $b=2$، خواهیم داشت:

$$(3+2)^n\overset{6}{\equiv}3^n+2^n\ ;\ 5^n\overset{6}{\equiv}3^n+2^n$$

پس:

$$k=5^n-3^n-2^n\overset{6}{\equiv}0$$

۱۸. ثابت کنید $N=m^n-m^{n-1}-m+1$ به ازای جمیع مقادیر طبیعی m و n بر $(m-1)^2$ بخش‌پذیر است.

حل:

$$N=m^n-m^{n-1}-m+1=m^{n-1}(m-1)-(m-1)$$
$$=(m-1)(m^{n-1}-1)$$

از طرف دیگر:

$m \overset{m-1}{\equiv} 1 \; ; \; m^{n-1} \overset{m-1}{\equiv} 1 \; ; \; m^{n-1}-1 = k(m-1)$

پس:

$N = m^n - m^{n-1} - m + 1 = k(m-1)^2$

۱۹. ثابت کنید عدد فرمای $F_n = 2^{2^n}+1$ به‌ازای $n=5$ مرکب و بر ۶۴۱ بخش‌پذیر است.

حل: کافی است ثابت کنیم عدد F_5 دارای عامل ۶۴۱ است:

$2^{32}+1 \overset{641}{\equiv} 0$

با توجه به برابری عددی $640 = 2^7 \times 5$، می‌توان نوشت:

$5\times 2^7 \overset{641}{\equiv} -1$

دو طرف این رابطه را به توان ۴ می‌رسانیم:

$5^4 \times 2^{28} \overset{641}{\equiv} 1$

از برابری $5^4 = 625 = 641 - 16$، داریم $5^4 \overset{641}{\equiv} -2^4$.

پس:

$-2^4\times 2^{28} \overset{641}{\equiv} 1 \; ; \; 2^{32} \overset{641}{\equiv} -1$

بنابراین:

$F_5 = 2^{32}+1 \overset{641}{\equiv} 0$

۲۰. ثابت کنید $2^{37n}-1$ به‌ازای جمیع مقادیر طبیعی n بر ۲۲۳ بخش‌پذیر است.

حل: با توجه به برابری $2^8 = 256 = 223 + 33$، می‌توان نوشت:

$2^8 \overset{223}{\equiv} 33 \; ; \; (2^8)^2 \overset{223}{\equiv} (33)^2$

از طرف دیگر:

$33^2 \overset{223}{\equiv} 1089 = 5(223) - 26 \overset{223}{\equiv} -26$

پس:

$2^{16} \overset{223}{\equiv} -26 \; ; \; (2^{16})^2 \overset{223}{\equiv} (-26)^2$

با توجه به برابری $676 = 26^2$ و تقسیم ۶۷۶ بر ۲۲۳، خواهیم داشت:

$2^{32} \overset{223}{\equiv} 26^2 = 676 = 3(223)+7 \overset{223}{\equiv} 7$

بنابراین:

$2^5\times 2^{32} \overset{223}{\equiv} 32\times 7 = 224 = 223+1$

پس:

$2^{37} \overset{223}{\equiv} 1 \; ; \; 2^{37n} \overset{223}{\equiv} 1$

۲۱. باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد $4^{143n} - 7^n$ به‌ازای جمیع مقادیر طبیعی n بر ۹ را بیابید.

حل: با توجه به برابری $64 = 4^3$، می‌توان نوشت:

$4^3 = 64 = 63+1 = 7(9)+1 \overset{9}{\equiv} 1$

پس:

$(4^3)^{47}\times 4^2 = 4^{143} \overset{9}{\equiv} 16 = 9+7 \overset{9}{\equiv} 7$

بنابراین:

$4^{143n} \overset{9}{\equiv} 7^n \; ; \; 4^{143n}-7^n \overset{9}{\equiv} 0$

درنتیجه، باقی‌مانده‌ی تقسیم $4^{143n}-7^n$، به‌ازای جمیع مقادیر طبیعی n بر ۹، برابر صفر است.

۲۲. ثابت کنید عدد $2^{76}+17\times 2^{39}-5$ بر ۲۱ بخش‌پذیر است.

حل: با توجه به برابری $2^6 = 64 = 63+1$، خواهیم داشت:

$2^6 = 3(21)+1 \overset{21}{\equiv} 1 \; ; \; 2^{36} \overset{21}{\equiv} 1 \; ; \; 2^{38} \overset{21}{\equiv} 4 \overset{21}{\equiv} -17$

پس:

$(2^{38})^2 \overset{21}{\equiv} (-17)^2 = 289 = 13(21)+16 \overset{21}{\equiv} 16$

بنابراین:

$2^{76}+17\times 2^{39} - 5 \overset{21}{\equiv} 16 + 17\times 2^3 - 5$

$= 16+136-5 = 147 = 7(21) \overset{21}{\equiv} 0$

۲۳. ثابت کنید عدد $5^{201}+2^{104}+2^{101}$ بر ۲۳ بخش‌پذیر است.

حل: با توجه به برابری $5^{201} = 5\times 5^{200} = 5\times 25^{100}$ و هم‌نهشتی $25 \overset{23}{\equiv} 2$، می‌توان نوشت:

$5^{201} \overset{23}{\equiv} 5\times 2^{100}$

از طرف دیگر:

$2^{104}+2^{101} = 2^{100}\times 2^4 + 2^{100}\times 2 = 18\times 2^{100}$

پس:

$5^{201}+2^{104}+2^{101} \overset{23}{\equiv} 5\times 2^{100} + 18\times 2^{100} \overset{23}{\equiv} 23\times 2^{100} \overset{23}{\equiv} 0$

۲۴. ثابت کنید عدد $9^{21}+8^{12}$ بر ۷۳ بخش‌پذیر است.

حل: با توجه به برابری $9^2 = 81 = 73+8$ و هم‌نهشتی $9^2 \overset{73}{\equiv} 8$، می‌توان نوشت:

$9^{20} \overset{73}{\equiv} 8^{10} \; ; \; 9^{21} \overset{73}{\equiv} 9\times 8^{10}$

پس:

$9^{21}+8^{12} \overset{73}{\equiv} 9\times 8^{10} + 64\times 8^{10} \overset{73}{\equiv} 73\times 8^{10} \overset{73}{\equiv} 0$

۲۵. باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد $3^{300}-2^{300}$ بر ۳۵ را بیابید.

حل: با توجه به برابری $3^3 = 27 = 35 - 8$ و هم‌نهشتی $3^3 \overset{35}{\equiv} -8$، می‌توان نوشت:

$3^{300} \overset{35}{\equiv} 8^{100} \; ; \; 3^{300} \overset{35}{\equiv} 2^{300}$

پس:

$$3^{300} - 2^{300} \overset{35}{\equiv} 0$$

بنابراین، باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد $2^{300} - 3^{300}$ بر ۳۵ برابر صفر است.

۲۶. ثابت کنید عدد $2^{29}\times 7^{10} + 3^{27}$، بر ۲۹ بخش‌پذیر است.

حل: با توجه به برابری‌های $27^9 = (3^3)^9 = 3^{27}$ و $28\times 56^9 = 28\times 7^9\times 8^9 = 7^{10}\times 2^{29}$ و هم‌نهشتی‌های $27 \overset{29}{\equiv} -2$، $28 \overset{29}{\equiv} -1$ و $56 \overset{29}{\equiv} -2$، خواهیم داشت:

$$3^{27} + 7^{10}\times 2^{29} \overset{29}{\equiv} (-2)^9 + (-1)(-2)^9 \overset{29}{\equiv} -2^9 + 2^9 \overset{29}{\equiv} 0$$

تمرین: ثابت کنید عدد $3 + 20^{40}\times 2^{42}\times 3^{302}$ بر ۱۳ بخش‌پذیر است.

راهنمایی: ابتدا برابری زیر را نتیجه بگیرید و سپس $27 \overset{13}{\equiv} 1$، $64 \overset{13}{\equiv} -1$ و $25 \overset{13}{\equiv} -1$ را به‌کار ببرید.

$$3^{302}\times 2^{42}\times 20^{40} = 36\times(27)^{100}(64)^{20}(25)^{20}$$

۲۷. نشان دهید برای هر عدد طبیعی n و برای هر عدد صحیح فرد مثل a داریم:

$$a^{2^{n-1}} \overset{2^n}{\equiv} 1$$

حل: این مسأله را با روش استقرای ریاضی ثابت می‌کنیم:

1) $n=1:\ a^{2^0} \overset{2}{\equiv} 1$

واضح است که برای هر عدد صحیح فرد مثل a داریم:

$$a \overset{2}{\equiv} 1$$

پس، حکم به ازای $n=1$ درست است.

2) $n=k:\ a^{2^{k-1}} \overset{2^k}{\equiv} 1$ (فرض استقرا)

3) $n=k+1:\ a^{2^k} \overset{2^{k+1}}{\equiv} 1$ (حکم استقرا)

با استفاده از اتحاد مزدوج:

$$a^{2^k} - 1 = (a^{2^{k-1}}-1)(a^{2^{k-1}}+1)$$

بنابر فرض استقرا داریم: $a^{2^{k-1}} - 1 = 2^k s$. هم‌چنین با توجه به فرد بودن a می‌توان نوشت:

$$a^{2^{k-1}}+1 = 2t:\ a^{2^k}-1 = (2^k s)(2t) = 2^{k+1}st$$

پس:

$$a^{2^k} - 1 \overset{2^{k+1}}{\equiv} 0;\ a^{2^k} \overset{2^{k+1}}{\equiv} 1$$

۲۸. ثابت کنید عدد $3^{12}\times 5^{10} + 2^{53}$ بر ۱۷ بخش‌پذیر است.

حل: با توجه به برابرهای:

$$2^{53}+5^{10}\times 3^{12} = 2^3\times 2^{50} + 5^{10}\times 3^2\times 3^{10}$$

$$= 8\times 32^{10} + 15^{10}\times 9$$

و با توجه به $32 \overset{17}{\equiv} 15$، می‌توان نوشت:

$$2^{53}+5^{10}\times 3^{12} \overset{17}{\equiv} 8\times 15^{10} + 15^{10}\times 9 \overset{17}{\equiv} 17\times 15^{10} \overset{17}{\equiv} 0$$

۲۹. نشان دهید برای هر n طبیعی داریم:

$$3^{4n} \overset{17}{\equiv} 4^{3n}$$

حل: با توجه به برابری‌های $3^4 = 81 = 4(17)+13$ و $4^3 = 64 = 3(17)+13$ خواهیم داشت:

$$3^{4n} = (3^4)^n \overset{17}{\equiv} (13)^n,\quad 4^{3n} = (4^3)^n \overset{17}{\equiv} (13)^n$$

پس:

$$3^{4n} \overset{17}{\equiv} 4^{3n} \overset{17}{\equiv} 13^n$$

۳۰. با استفاده از روش استقرای ریاضی ثابت کنید:

$$4^n + 6n \overset{9}{\equiv} 1$$

حل: با توجه به صورت مسأله، به‌ترتیب:

1) $n=1:\ 4^1+6(1) \overset{9}{\equiv} 1;\ 10 \overset{9}{\equiv} 1$

2) $n=k:\ 4^k+6k \overset{9}{\equiv} 1$ (فرض استقرا)

3) $n=k+1:\ 4^{k+1}+6(k+1) \overset{9}{\equiv} 1$ (حکم استقرا)

دو طرف فرض استقرا را در ۴ ضرب می‌کنیم:

$$4^{k+1}+24k \overset{9}{\equiv} 4;\ 4^{k+1}+6k+18k+6 \overset{9}{\equiv} 10;$$

$$4^{k+1}+6(k+1)+18k-9 \overset{9}{\equiv} 1$$

با توجه به $18k-9 \overset{9}{\equiv} 0$، می‌توان نوشت:

$$4^{k+1}+6(k+1) \overset{9}{\equiv} 1$$

پس، حکم برقرار است.

۳۱. ثابت کنید برای هر n طبیعی داریم:

$$160^n + 96^n \overset{62}{\equiv} 3^n + 5^n$$

حل: برابری $62 = 2\times 31$ بدیهی است. بنابراین کافی است نشان دهیم که طرف‌های اول و دوم هریک زوج و بر ۳۱ بخش‌پذیر است. طرف اول زوج است؛ زیرا مجموع دو عدد زوج است. طرف دوم نیز زوج است؛ زیرا مجموع دو عدد فرد است. در این‌جا کافی است هم‌نهشتی زیر را ثابت کنیم:

$$160^n+96^n \overset{31}{\equiv} 3^n+5^n$$

با توجه به هم‌نهشتی‌های $160 \overset{31}{\equiv} 5$ یا $160^n \overset{31}{\equiv} 5^n$ و $96 \overset{31}{\equiv} 3$ یا $96^n \overset{31}{\equiv} 3^n$، درستی هم‌نهشتی اخیر واضح است.

۳۲. باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد $k = (6^{44}+7)(6^{29}+7)$ بر ۴۳ را بیابید.

حل: با توجه به هم‌نهشتی $6^3 \overset{43}{\equiv} 1$، می‌توان نوشت:

$$6^{29} = 6^{27}\times 6^2 = (6^3)^9 \times 36 \overset{43}{\equiv} -7 \ ; \ 6^{29}+7 \overset{43}{\equiv} 0$$

هم‌چنین:

$$6^{44} = 6^{42}\times 6^2 = (6^3)^{14}\times 36 \overset{43}{\equiv} -7 \ ; \ 6^{44}+7 \overset{43}{\equiv} 0$$

بنابراین، باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد k بر ۴۳ برابر صفر است.

۳۳. باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد زیر را بر ۹ بیابید.

$$N=(4^{181}+10^{11}+5)(4^{91}+10^{6}+4)$$

حل: با توجه به هم‌نهشتی‌های $8\overset{9}{\equiv}-1$ و $10\overset{9}{\equiv}1$، می‌توان نوشت:

$$4^{181}=2^{362}=(2^3)^{120}\times 4=8^{120}\times 4\overset{9}{\equiv}(-1)^{120}\times 4=4 \ ;$$

$$10^{11}\overset{9}{\equiv}1 \ ; \ 10^{6}\overset{9}{\equiv}1 \ ; \ 4^{91}=4\times(2^3)^{60}=4\times 8^{60}\overset{9}{\equiv} 4\times(-1)^{60}=4$$

پس:

$$4^{181}+10^{11}+5\overset{9}{\equiv}4+1+5\overset{9}{\equiv}1 \ ; \ 4^{91}+10^{6}+4\overset{9}{\equiv}4+1+4\overset{9}{\equiv}0$$

بنابراین، باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد N بر ۹ برابر ۱ است.

۳۴. با استفاده از روش استقرای ریاضی ثابت کنید:

$$9|M=2\times 16^n-4^n-1$$

حل: باید نشان دهیم:

$$M=2\times 16^n-4^n-1\overset{9}{\equiv}0$$

به‌ترتیب:

1) $n=1: \ 2\times 16^1-4^1-1=27\overset{9}{\equiv}0$

2) $n=k: \ 2\times 16^k-4^k-1\overset{9}{\equiv}0$ (فرض استقرا)

3) $n=k+1: \ 2\times 16^{k+1}-4^{k+1}-1\overset{9}{\equiv}0$ (حکم استقرا)

دو طرف فرض استقرا را در ۱۶ ضرب می‌کنیم:

$$2\times 16^{k+1}-16\times 4^k-16\overset{9}{\equiv}0 \ ;$$

$$2\times 16^{k+1}-4\times 4^{k+1}-16\overset{9}{\equiv}0 \ ;$$

$$2\times 16^{k+1}-4^{k+1}-1-(12\times 4^k+15)\overset{9}{\equiv}0$$

در این‌جا، برای اثبات حکم کافی است ثابت کنیم:

$$12\times 4^k+15\overset{9}{\equiv}0 \ ; \ 3(4^{k+1}+5)\overset{9}{\equiv}0$$

پس کافی است ثابت کنیم:

$$4^{k+1}+5\overset{3}{\equiv}0$$

با توجه به هم‌نهشتی $4\overset{3}{\equiv}1$، می‌توان نوشت:

$$4^{k+1}+5\overset{3}{\equiv}1+5=6\overset{3}{\equiv}0$$

بنابراین حکم برقرار است:

$$2\times 16^{k+1}-4^{k+1}-1\overset{9}{\equiv}0$$

تمرین

۱. باقی‌مانده‌ی تقسیم $N=1!+2!+3!+\cdots+(1387)!$ بر ۴۲ را بیابید.

۲. ثابت کنید به‌ازای هر n طبیعی، عبارت $M=5^{4n}\times 9^{2n+1}+2^{20n+3}$ بر ۱۷ بخش‌پذیر است.

۳. ثابت کنید به‌ازای هر n طبیعی، عبارت $N=4^{6n}+36n$ بر ۹ بخش‌پذیر است.

۴. ثابت کنید به‌ازای هر n طبیعی، عبارت $S=7^{12n+3}+7^{6n+2}-12$ بر ۱۹ بخش‌پذیر است.

۵. ثابت کنید به‌ازای هر n طبیعی، عبارت $k=6^{12n-1}+7$ بر ۴۳ بخش‌پذیر است.

۶. ثابت کنید به‌ازای هر n طبیعی، باقی‌مانده‌ی تقسیم $N=13^n-7^n-6^n+41$ بر ۴۲ برابر ۴۱ است.

۷. باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد زیر بر ۱۲ را تعیین کنید.

$$N=3^{1383}+4^{1383}+13^{1383}+11^{1384}$$

۸. نشان دهید عدد $k=25^n-9^n-4^n$ بر ۶ بخش‌پذیر است.

۹. ثابت کنید عبارت $N=2^{3n}-2^{3n-3}-7$ به‌ازای هر n طبیعی بر ۴۹ بخش‌پذیر است.

۱۰. ثابت کنید عدد فرمای $F_5=2^{32}+1$ مرکب است.

۱۱. ثابت کنید عدد $N=2^{74n}-1$ به ازای جمیع مقادیر طبیعی n بر ۲۲۳ بخش‌پذیر است.

۱۲. باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد $N=2^{572n}-49^n$ را به ازای هر عدد طبیعی n بر ۹ به‌دست آورید.

۱۳. ثابت کنید عدد $k=2^{76}-2^{41}+16$ بر ۲۱ بخش‌پذیر است.

۱۴. ثابت کنید عدد $N=125^{67}+4^{52}+2^{101}$ بر ۲۳ بخش‌پذیر است.

۱۵. ثابت کنید عدد $k=3^{42}+2^{36}$ بر ۷۳ بخش‌پذیر است.

۱۶. ثابت کنید عدد $N=2^{53}+25^5\times 9^6$ بر ۱۷ بخش‌پذیر است.

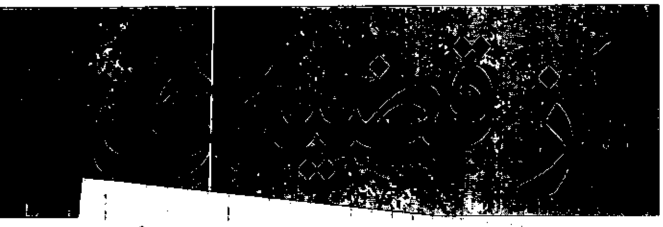
۱۷. ثابت کنید به ازای هر n طبیعی عبارت $N=3^{4n}-4^{3n}$ بر ۱۷ بخش‌پذیر است.

۱۸. با استفاده از روش استقرای ریاضی ثابت کنید، باقی‌مانده‌ی $N=2^{2n}+6n$ بر ۹ برابر ۱ است.

۱۹. باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد $N=2^{362}+10^{11}+5$ بر ۹ را تعیین کنید.

• ابراهیم دارابی

کاربردهایی لاگرانژ (۲)



در شماره‌ی قبل قضیه‌ی لاگرانژ و نتایج حاصل از آن را مطرح کردیم. همچنین کاربرد این قضیه و نتایج آن را در اثبات اتحادها، نامساوی‌ها و فرمول‌های مثلثاتی در قالب چند مثال دیدید. اینک در پی بقیه‌ی آن مثال‌ها را می‌آوریم.

مثال ۱۱. این اتحاد را ثابت کنید:

$$\operatorname{Arccos}\frac{2x}{x^2+1}=\begin{cases}\pi-\operatorname{Arcsin}\frac{x^2-1}{x^2+1}, & x\in(-\infty,-1).\\ \pi+\operatorname{Arcsin}\frac{x^2-1}{x^2+1}, & x\in[-1,0)\\ -\operatorname{Arcsin}\frac{x^2-1}{x^2+1}, & x\in[0,1)\\ \operatorname{Arcsin}\frac{x^2-1}{x^2+1}, & x\in[1,+\infty)\end{cases}$$

اثبات: دیده می‌شود:

$$\left|\frac{2x}{x^2+1}\right|\le 1\ ,\ \left|\frac{x^2-1}{x^2+1}\right|\le 1$$

و به ازای هر x حقیقی، توابع:

$$f(x)=\operatorname{Arccos}\frac{2x}{x^2+1}\ ,\ g(x)=\operatorname{Arcsin}\frac{x^2-1}{x^2+1}$$

روی محور اعداد پیوسته هستند و داریم:

$$f'(x)=\frac{-1}{\sqrt{1-(\frac{2x}{x^2+1})^2}}\times(\frac{2x}{x^2+1})'$$

$$=\frac{-(x^2+1)}{\sqrt{(x^2-1)^2}}\times\frac{2(1-x^2)}{(x^2+1)^2}=\frac{2(x^2-1)}{|x^2-1|(x^2+1)}$$

$$g'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-(\frac{x^2-1}{x^2+1})^2}}\times(\frac{x^2-1}{x^2+1})'=\frac{x^2+1}{2\sqrt{x^2}}\times\frac{4x}{(x^2+1)^2}$$

$$=\frac{2x}{|x|(x^2+1)}$$

اکنون به این ترتیب عمل می‌کنیم:

۱. در بازه‌ی $(-\infty,-1)\cup(0,1)$، تابع $F(x)=f(x)+g(x)$ را درنظر می‌گیریم. داریم:

$$F'(x)=f'(x)+g'(x)=\frac{2(x^2-1)}{|x^2-1|(x^2+1)}+\frac{2x}{|x|(x^2+1)}$$

اگر $x\in(-\infty,-1)$، آن‌گاه:

$$|x^2-1|=x^2-1\ ,\ |x|=-x\Rightarrow F'(x)=0$$

اگر $x\in(0,1)$، آن‌گاه:

$$|x^2-1|=-(x^2-1)\ ,\ |x|=x\Rightarrow F'(x)=0$$

$$\Rightarrow F(x)=c$$

$$\Rightarrow \operatorname{Arccos}\frac{2x}{x^2+1}+\operatorname{Arcsin}\frac{x^2-1}{x^2+1}=c$$

در هر یک از بازه‌های بالا، برای پیدا کردن c قرار می‌دهیم $x=-\sqrt{3}$ و $x=\frac{1}{\sqrt{3}}$. از آن‌جا داریم:

$$F(-\sqrt{3})=\operatorname{Arccos}(-\frac{\sqrt{3}}{2})+\operatorname{Arcsin}(\frac{1}{2})=\pi-\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{6}=\pi$$

$$\Rightarrow c=\pi$$

$$F(\frac{1}{\sqrt{3}})=\operatorname{Arccos}\frac{\sqrt{3}}{2}+\operatorname{Arcsin}(-\frac{1}{2})=\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{6}=0$$

پس اگر $x\in(-\infty,-1)$. آن‌گاه:

$$\operatorname{Arccos}\frac{2x}{x^2+1}+\operatorname{Arcsin}\frac{x^2-1}{x^2+1}=\pi$$

و اگر $x\in(0,1)$، آن‌گاه:

$$\operatorname{Arccos}\frac{2x}{x^2+1}+\operatorname{Arcsin}\frac{x^2-1}{x^2+1}=0$$

۲. تابع $G(x)=f(x)-g(x)$ را درنظر می‌گیریم که در آن $x\in(-1,0)\cup(1,+\infty)$

$$G(x) = \operatorname{Arccos}\frac{2x}{x^2+1} - \operatorname{Arcsin}\frac{x^2-1}{x^2+1}$$

$$G'(x) = f'(x) - g'(x) = \frac{2(x^2-1)}{|x^2-1|(x^2+1)} - \frac{2x}{|x|(x^2+1)}$$

اگر $x \in (-1,0)$ ، آن‌گاه:

$$|x^2-1| = -(x^2-1)\ ,\ |x| = -x \Rightarrow G'(x) = 0$$

اگر $x \in (1,+\infty)$ ، آن‌گاه:

$$|x^2-1| = x^2-1\ ,\ |x| = x \Rightarrow G'(x) = 0$$

پس در بازه‌ی مفروض، تابع $G(x)$ ثابت است. یعنی:

$$\operatorname{Arccos}\frac{2x}{x^2+1} - \operatorname{Arcsin}\frac{x^2-1}{x^2+1} = c$$

قرار می‌دهیم $x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ و $x = \sqrt{3}$. نتیجه می‌شود:

$$G(-\frac{1}{\sqrt{3}}) = \operatorname{Arccos}(-\frac{\sqrt{3}}{2}) - \operatorname{Arcsin}(-\frac{1}{2}) = \pi - \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6} = \pi$$

$$\Rightarrow c = \pi$$

$$G(\sqrt{3}) = \operatorname{Arccos}\frac{\sqrt{3}}{2} - \operatorname{Arcsin}\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{6} = 0$$

پس اگر $x \in (-1,0)$ ، آن‌گاه:

$$\operatorname{Arccos}\frac{2x}{x^2+1} - \operatorname{Arcsin}\frac{x^2-1}{x^2+1} = \pi$$

و اگر $x \in (1,+\infty)$ ، آن‌گاه:

$$\operatorname{Arccos}\frac{2x}{x^2+1} - \operatorname{Arcsin}\frac{x^2-1}{x^2+1} = 0$$

۳. به ازای $x = \pm 1$ و $x = 0$ مقادیر $f(x)$ و $g(x)$ را حساب می‌کنیم:

$$f(-1) = \operatorname{Arccos}(-1) = \pi\ ,\ g(-1) = \operatorname{Arcsin} 0 = 0$$

پس به ازای $x = -1$ داریم: $f(x) = \pi + g(x)$ ، یعنی:

$$\operatorname{Arccos}\frac{2x}{x^2+1} = \pi + \operatorname{Arcsin}\frac{x^2-1}{x^2+1}$$

$$g(0) = \operatorname{Arcsin}(-1) = -\frac{\pi}{2}\ ,\ f(0) = \operatorname{Arccos} 0 = \frac{\pi}{2}$$

بنابراین به ازای $x = 0$ داریم:

$$f(x) = -g(x) \Rightarrow \operatorname{Arccos}\frac{2x}{x^2+1} = -\operatorname{Arcsin}\frac{x^2-1}{x^2+1}$$

$$f(1) = \operatorname{Arccos} 1 = 0\ ,\ g(1) = \operatorname{Arcsin} 0 = 0$$

بنابراین به ازای $x = 1$ داریم:

$$f(x) = g(x) = \operatorname{Arccos}\frac{2x}{x^2+1} = \operatorname{Arcsin}\frac{x^2-1}{x^2+1}$$

بنابراین، اتحاد مفروض به ازای هر مقدار حقیقی x برقرار است.

مثال ۱۲ . عبارت زیر را به صورت حاصل‌ضرب بنویسید:

$$x(y^2-z^2) + y(z^2-x^2) + z(x^2-y^2)$$

حل: عبارت بالا را به عنوان تابعی از متغیر x در نظر می‌گیریم (y و z را مقادیر ثابت درنظر می‌گیریم):

$$f(x) = x(y^2-z^2) + y(z^2-x^2) + z(x^2-y^2)$$

مشتق تابع را حساب می‌کنیم:

$$f'(x) = y^2 - z^2 - 2xy + 2xz = (y^2-z^2) - 2x(y-z)$$
$$= (y-z)(y+z) - 2x(y-z)$$
$$= (y-z)(y+z-2x)$$

فرض کنیم $(y-z)(y+z-2x)$ مشتق تابع دیگری مانند $g(x)$ باشد:

$$g'(x) = (y-z)((y+z)-2x)$$
$$\Rightarrow g(x) = (y-z)((y+z)x - x^2)$$

چون $f(x)$ و $g(x)$ در مجموعه‌ی اعداد حقیقی پیوسته و مشتق‌پذیر هستند، و داریم:

$$f'(x) = g'(x)$$

پس بنابر نتیجه‌ی (۲) لاگرانژ (مقاله‌ی شماره‌ی قبل) داریم:

$$f(x) = g(x) + c$$

که در آن c به x بستگی ندارد، اما می‌تواند به y و z بستگی داشته باشد. داریم:

$$x(y^2-z^2) + y(z^2-x^2) + z(x^2-y^2)$$
$$= (y-z)((y+z)x - x^2) + c$$

برای تعیین c قرار می‌دهیم $x = 0$. از آن‌جا:

$$c = yz^2 - zy^2$$

بنابراین داریم:

$$f(x) = g(x) + yz^2 - zy^2$$
$$\Rightarrow f(x) = (y-z)((y+z)x - x^2) + yz^2 - zy^2$$
$$= (y-z)(xy + xz - x^2) - yz(y-z)$$
$$= (y-z)(xy - x^2 + xz - yz)$$

$$= (y-z)(x(y-x) - z(y-x))$$
$$= (y-z)(y-x)(x-z)$$

از آن‌جا نتیجه می‌شود:

$$x(y^2 - z^2) + y(z^2 - x^2) + z(x^2 - y^2)$$
$$= (y-z)(y-x)(x-z)$$

مثال ۱۳ . این عبارت را ساده کنید:

$$(x-y-z)^3 + (x+y+z)^3 + (z-x-y)^3 + (y-x-z)^3$$

حل: x را به عنوان متغیر درنظر می‌گیریم و تابع f(x) را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$f(x) = (x-y-z)^3 + (x+y+z)^3 + (z-x-y)^3 + (y-x-z)^3$$

این تابع به ازای هر x حقیقی پیوسته و مشتق‌پذیر است. داریم:

$$f'(x) = 3(x-y-z)^2 + 3(x+y+z)^2 - 3(z-x-y)^2 - 3(y-x-z)^2$$
$$= 3x^2 + 3y^2 + 3z^2 - 6xy - 6xz + 6yz + 3x^2 + 3y^2 + 3z^2$$
$$+6xy + 6xz + 6yz - 3z^2 - 3x^2 - 3y^2 + 6xz$$
$$+6yz - 6xy - 3y^2 - 3x^2 - 3z^2 + 6xy + 6yz - 6xz = 24yz$$

فرض کنیم 24yz مشتق تابعی مانند g(x) باشد:

$$g'(x) = 24yz$$
$$\Rightarrow g(x) = 24yzx$$

چون f(x) و g(x) در شرایط نتیجه‌ی (۲) لاگرانژ (مقاله‌ی شماره‌ی قبل) صدق می‌کنند، پس داریم:

$$f(x) = q(x) + c \qquad (1)$$

که در آن c به x بستگی ندارد، اما می‌تواند به y و z بستگی داشته باشد. از تساوی (۱) داریم:

$$(x-y-z)^3 + (x+y+z)^3 + (z-x-y)^3 + (y-x-z)^3$$
$$= 24xyz + c$$

برای تعیین c قرار می‌دهیم: $x = 0$. نتیجه می‌شود:

$$c = -(y+z)^3 + (y+z)^3 - (y-z)^3 + (y-z)^3 = 0$$
$$\Rightarrow f(x) = g(x)$$
$$\Rightarrow (x-y-z)^3 + (x+y+z)^3 + (z-x-y)^3 + (y-x-z)^3$$
$$= 24xyz$$

استفاده از یکنوا بودن تابع

یکنوا بودن تابع در این موارد کاربرد دارد:

۱ . حل نامعادله‌ها

۲ . اثبات نامساوی‌های شامل متغیر

۳ . اثبات نامساوی‌های عددی

۴ . تعیین تعداد ریشه‌های معادله

اگر تابع در فاصله‌ای یکنوا باشد، در آن فاصله صعودی و یا نزولی است و مشتق در آن فاصله علامت ثابتی دارد. (اگر مشتق مثبت باشد، تابع در آن فاصله صعودی و اگر منفی باشد، تابع نزولی است.)

مثال ۱۴ . این نامعادله را حل کنید:

$$2\ln(x + \sqrt{1+x^2}) + e^x - e^{-x} < 0$$

حل: تابع زیر را در نظر می‌گیریم:

$$f(x) = 2\ln(x + \sqrt{1+x^2}) + e^x - e^{-x}$$

تابع به ازای همه‌ی مقادیر حقیقی x تعریف شده، پیوسته و مشتق‌پذیر است و داریم:

$$f'(x) = \frac{2}{x+\sqrt{1+x^2}} \cdot \left(1 + \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}\right) + e^x + e^{-x}$$
$$= \frac{2}{\sqrt{1+x^2}} + e^x + e^{-x}$$

این مشتق به ازای هر x حقیقی مثبت است. بنابراین تابع در بازه‌ی $(-\infty, +\infty)$ صعودی است و نمودار آن در بیش از یک نقطه نمی‌تواند محور طول‌ها را قطع کند.

چون $f(0) = 0$ پس به ازای هر $x < 0$ داریم:

$$f(x) < f(0) \Rightarrow 2\ln(x + \sqrt{1+x^2}) + e^x - e^{-x} < 0$$

پس ریشه‌های نامعادله عبارت‌اند از همه‌ی اعداد فاصله‌ی $(-\infty, 0)$.

مثال ۱۵ . اگر $0 < x < \frac{\pi}{2}$ ، آن‌گاه ثابت کنید:

$$tgx > 3x - 2\sin x$$

اثبات: تابع $f(x) = tgx - 3x + 2\sin x$ را در بازه‌ی $(0, \frac{\pi}{2})$ درنظر می‌گیریم و مشتق آن را حساب می‌کنیم:

$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} - 3 + 2\cos x = \frac{2\cos^3 x - 3\cos^2 x + 1}{\cos^2 x}$$

$$f'(x) = \frac{2(\cos x - 1)^2(\cos x + \frac{1}{2})}{\cos^2 x}$$

به ازای $0 < x < \frac{\pi}{2}$ مقدار مشتق مثبت است. بنابراین، تابع در بازه‌ی $(0, \frac{\pi}{2})$ صعودی است و از آن‌جا داریم:

$$tgx - 3x + 2\sin x > 0$$
$$\Rightarrow tgx > 3x - 2\sin x$$

مثال ۱۶. اگر $0 < x_1 < x_2 \le e$، آن‌گاه ثابت کنید:

$$x_1^{\frac{1}{x_1}} < x_2^{\frac{1}{x_2}} \;,\; x_1^{x_2} \ge x_2^{x_1}$$

و اگر $e \le x_1 < x_2$، آن‌گاه: $x_1^{x_2} \ge x_2^{x_1}$

اثبات: تابع $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ را در بازه‌ی $(0,+\infty)$ درنظر می‌گیریم که در آن پیوسته و مشتق‌پذیر است:

$$f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

چون مشتق به ازای $x = e$ صفر می‌شود و به ازای $0 < x < e$، $f'(x) > 0$ و به ازای $x > e$، داریم: $f'(x) < 0$، پس تابع $f(x)$ در بازه‌ی $(0,e]$ صعودی و در بازه‌ی $[e,+\infty)$ نزولی است. بنابراین، به ازای هر x_1 و x_2 دلخواه که در آن $0 < x_1 < x_2 \le e$ نامساوی $f(x_1) < f(x_2)$ برقرار است، یعنی:

$$\frac{\ln x_1}{x_1} < \frac{\ln x_2}{x_2} \Rightarrow \frac{1}{x_1}\ln x_1 < \frac{1}{x_2}\ln x_2$$

$$\Rightarrow \ln x_1^{\frac{1}{x_1}} < \ln x_2^{\frac{1}{x_2}}$$

چون $\ln t$ تابع صعودی است، پس:

$$x_1^{\frac{1}{x_1}} < x_2^{\frac{1}{x_2}}$$

اگر دو طرف نامساوی $\frac{\ln x_1}{x_1} < \frac{\ln x_2}{x_2}$ را در $x_1x_2 > 0$ ضرب کنیم، نتیجه می‌شود:

$$x_2 \ln x_1 < x_1 \ln x_2 \Rightarrow \ln x_1^{x_2} < \ln x_2^{x_1}$$
$$\Rightarrow x_1^{x_2} < x_2^{x_1}$$

هم‌چنین، اگر $e \le x_1 < x_2$، آن‌گاه:

$$f(x_1) > f(x_2) \Rightarrow \frac{\ln x_1}{x_1} > \frac{\ln x_2}{x_2}$$

$$\Rightarrow x_1^{\frac{1}{x_1}} > x_2^{\frac{1}{x_2}} \text{ و } x_1^{x_2} < x_2^{x_1}$$

مثال ۱۷. $(tg48°)^{cotg48°}$ و $(tg50°)^{cotg50°}$ را با یکدیگر مقایسه کنید.

حل: دیده می‌شود:

$$tg48° = tg\frac{4\pi}{15} \quad \text{و} \quad cotg48° = \frac{1}{tg\frac{4\pi}{15}}$$

$$tg50° = tg\frac{5\pi}{18} \quad \text{و} \quad cotg50° = \frac{1}{tg\frac{5\pi}{18}}$$

$$0 < tg\frac{4\pi}{15} < tg\frac{5\pi}{18} < e$$

اگر قرار دهیم $x_1 = tg\frac{4\pi}{15}$ و $x_2 = tg\frac{5\pi}{18}$، آن‌گاه بنابر مثال قبلی، چون $0 < x_1 < x_2 < e$، پس:

$$x_1^{\frac{1}{x_1}} < x_2^{\frac{1}{x_2}}$$

و از آن‌جا داریم:

$$(tg\frac{4\pi}{15})^{\frac{1}{tg\frac{4\pi}{15}}} < (tg\frac{5\pi}{18})^{\frac{1}{tg\frac{5\pi}{18}}}$$
$$\Rightarrow (tg48°)^{cotg48°} < (tg50°)^{cotg50°}$$

مثال ۱۸. ثابت کنید:

$$(1999)^{2000} > (2000)^{1999}$$

اثبات: به ازای $e \le x_1 < x_2$ از نامساوی $x_1^{x_2} < x_2^{x_1}$ استفاده می‌کنیم. قرار می‌دهیم:

$$x_1 = 1999 \;,\; x_2 = 2000$$

داریم:

$$e < 1999 < 2000 \Rightarrow (1999)^{2000} > (2000)^{1999}$$

منبع:

مجله‌ی «ریاضیات در مدرسه» شماره‌ی ۹، سال ۲۰۰۱، چاپ مسکو.

دستور فشرده برای محاسبه‌ی نیم‌سازهای داخلی و خارجی

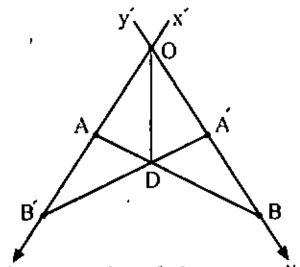
دو محور $x'ox$ و $y'oy$ و خط OD نیم‌ساز زاویه‌ی xoy را درنظر می‌گیریم (شکل ۷). نقطه‌ی دل‌خواه A را روی محور $x'ox$ درنظر می‌گیریم و آن را به نقطه‌ی D وصل می‌کنیم. نقطه‌ی برخورد خط AD و محور $y'oy$ را B می‌نامیم. اندازه‌های جبری دو بردار $\overrightarrow{OA}$ و $\overrightarrow{OB}$ را روی محورهای $x'x$ و $y'y$ به ترتیب x و y می‌نامیم. چون به هر نقطه‌ی A از محور $x'x$ یک و تنها یک نقطه از محور $y'y$ نسبت داده می‌شود و برعکس، پس بین دو متغیر x و y رابطه‌ی یک به یک

$$f(x,y)=0 \qquad (5)$$

وجود دارد. معادله‌ی ۵ (در مقاله‌ی شماره‌ی قبل) به صورت زیر است:

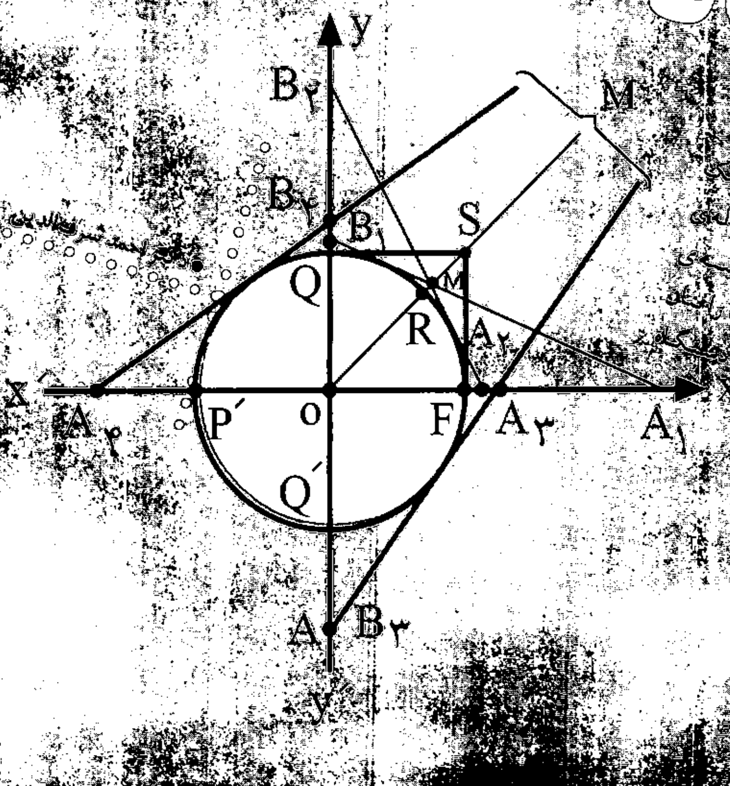
$$axy+bx+cy+d=0 \qquad (6)$$

توجه شود که در رابطه‌ی ۶، x و y دو عدد حقیقی‌اند، زیرا هر دو اندازه‌های جبری دو بردار روی محورهای $x'x$ و $y'y$ هستند. بنابراین نباید چنین تصور شود که رابطه‌ی $y=x^3$، رابطه‌ی یک به یک بین x و y است و اگر به x یک مقدار بدهیم، برای y تنها یک مقدار حاصل می‌شود، اما اگر به y یک مقدار نسبت بدهیم، برای x سه مقدار حاصل می‌شود. مثلاً اگر به y عدد ۱ را نسبت بدهیم، برای x سه مقدار حاصل می‌شود، زیرا معادله‌ی $x^3=1$، سه جواب دارد. یک جواب $x=1$ است و دو جواب دیگر، جواب‌های معادله‌ی $x^2+x+1=0$ هستند. دو جواب معادله‌ی اخیر مختلط هستند. در معادله‌ی ۶، دو متغیر x و y اعداد حقیقی‌اند، زیرا هر دو اندازه‌های جبری دو بردار روی دو محورهای $x'x$ و $y'y$ هستند. با توضیحات یاد شده می‌گوییم که تنها صورت برای معادله‌ی ۵، همان معادله‌ی ۶ است.



(شکل ۷)

حل هندسی چند معادله (۲)



اکنون ضریب‌های معادله‌ی ۶ را تعیین می‌کنیم:

الف) اگر نقطه‌ی A بر نقطه‌ی O منطبق شود، آن‌گاه نقطه‌ی B بر نقطه‌ی O منطبق می‌شود. پس اگر در معادله‌ی ۶، مقدار x برابر صفر شود، آن‌گاه مقدار y مساوی صفر می‌شود. از این مطلب نتیجه می‌شود که $d = 0$ و لذا معادله‌ی ۶ به صورت زیر است:

$$axy + bx + cy = 0 \qquad (۷)$$

ب) اگر بر محور $y'y$ نقطه‌ی A' را چنان اختیار کنیم که $\overline{OA'} = \overline{OA}$ باشد و نقطه‌ی برخورد خط DA' را با محور $x'x$ به B' نمایش دهیم، چنین داریم $\overline{OB'} = \overline{OB}$ نتیجه می‌شود که در رابطه‌ی ۶، $b = c$ است. با توجه به تساوی اخیر، رابطه‌ی ۶ به صورت زیر است:

$$axy + b(x + y) = 0 \qquad (۸)$$

رابطه‌ی ۸ را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = -\frac{a}{b} \qquad (۹)$$

توجه: اگر دو طرف معادله‌ی ۸ را بر xy بخش کنیم، معادله‌ی ۹ حاصل می‌شود. اما بررسی بخش کردن دو طرف معادله‌ی ۸ بر xy باید xy مخالف صفر باشد و این شرط در مسئله‌ی موردنظر برقرار است. زیرا تساوی $xy = 0$ هنگامی محقق می‌شود که x یا y یا هر دو صفر شوند. در مسئله‌ی موردنظر ما، xy هنگامی صفر می‌شود که طول‌های دو ضلع OA و OB از مثلث OAB صفر باشند. اما چنین حالتی در مسئله پیش نمی‌آید، زیرا ما می‌خواهیم در مثلث OAB رابطه‌ی بین طول‌های دو ضلع OA و OB و طول نیم‌ساز OD را حساب کنیم. مثلثی که طول‌های دو ضلع آن صفر باشند، معنی ندارد.

پ) اکنون در معادله‌ی ۹، مقدار $-\frac{a}{b}$ را حساب می‌کنیم. برای این منظور، یک حالت خاص درنظر می‌گیریم. یک حالت خاص مناسب آن است که $\overline{OA} = \overline{OB}$ باشد. یک حالت خاص مناسب دیگر آن است که نقطه‌ی A را روی محور $x'x$ در جایی بگیریم که خط DA موازی Oy باشد. در این حالت، مقدار $\overline{OB}$ مساوی بی‌نهایت می‌شود.

حالت خاص اول را درنظر می‌گیریم. اگر $\overline{OA} = \overline{OB}$ باشد، تساوی ۹ به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\frac{2}{\overline{OA}} = -\frac{a}{b} \qquad (۱۰)$$

در حالت $\overline{OA} = \overline{OB}$ مثلث OAD در رأس A قائم‌الزاویه می‌شود و چنین داریم:

$$\overline{OA} = \frac{\overline{OD}}{\cos\frac{O}{2}} = \frac{b}{\cos\frac{O}{2}} \qquad (۱۱)$$

از دو رابطه‌ی ۱۰ و ۱۱ نتیجه می‌شود:

$$-\frac{a}{b} = \frac{2\cos\frac{O}{2}}{b} \qquad (۱۲)$$

معادله‌ی ۹ با رعایت تساوی ۱۲ به صورت زیر درمی‌آید:

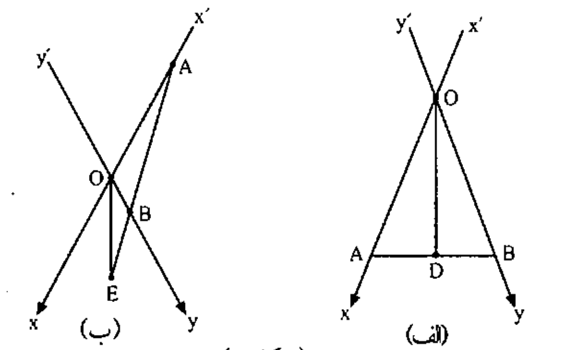
$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{2\cos\frac{O}{2}}{b} \qquad (۱۳)$$

نیم‌ساز داخلی مثلث: مثلث OAB را که در آن OD نیم‌ساز داخلی است، درنظر می‌گیریم (شکل ۸ ـ الف). در این مثلث، رابطه‌ی ۱۳ به صورت زیر درمی‌آید:

$$\frac{1}{OA} + \frac{1}{OB} = \frac{2\cos\frac{O}{2}}{OD}$$

نیم‌ساز خارجی مثلث: مثلث OAB را که در آن OE نیم‌ساز خارجی است، درنظر می‌گیریم (شکل ۸ ـ ب). در این مثلث رابطه‌ی ۱۳ به صورت زیر درمی‌آید:

$$\frac{1}{OB} - \frac{1}{OA} = \frac{2\cos\frac{O}{2}}{OE}$$



(شکل ۸)

حل هندسی دستگاه معادلات

در مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABC که A رأس زاویه‌ی قائمه است، رابطه‌ی بین دو ضلع زاویه‌ی قائمه و ارتفاع AH و نیز رابطه‌ی بین دو ضلع زاویه‌ی قائمه و نیم‌سازهای داخلی و خارجی را (در این مقاله و شماره‌ی قبل) مطرح و اثبات کردیم. اکنون رابطه‌های یاد شده را برای حل دستگاه معادلات زیر به کار می‌بریم:

$$\begin{cases} \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{a^2} \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{b} \end{cases} \qquad (۱۴)$$

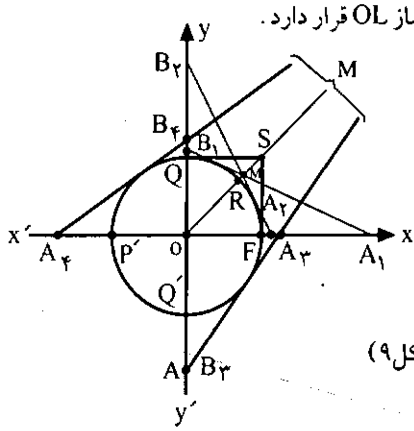
این دستگاه معادلات را در حالت $b > 0$ حل می‌کنیم. اگر $b < 0$ باشد، دو طرف معادله‌ی دوم را در -1 ضرب می‌کنیم و قرار می‌دهیم: $-x = X$ و $-y = Y$.

آن‌گاه دستگاه معادلات ۱۴ به صورت زیر درمی‌آید:

$$\begin{cases}\dfrac{1}{X^2}+\dfrac{1}{Y^2}=\dfrac{1}{a^2}\\[2mm]\dfrac{1}{X}+\dfrac{1}{Y}=\dfrac{1}{b}\end{cases}\qquad (15)$$

دستگاه معادلات (۱۵) مانند دستگاه معادلات ۱۴ است.

برای حل هندسی دستگاه معادلات ۱۴، دو محور عمود بر هم $x'ox$ و $y'oy$ را درنظر می‌گیریم (شکل۹). نقاط برخورد محور $x'x$ دایره‌ی O را P و P′ و نقاط برخورد محور $y'y$ و دایره‌ی O را Q و Q′ می‌نامیم. نقطه‌ی برخورد خط OL (نیم‌ساز زاویه‌ی xoy) را با دایره‌ی O، با R نشان می‌دهیم و نقطه‌ی برخورد مماس‌های رسم شده بر دایره‌ی O در نقاط P و Q را S می‌نامیم. نقطه‌ی S روی نیم‌ساز OL قرار دارد.



(شکل۹)

نقطه‌ی M را روی نیم‌ساز OL در جایی اختیار می‌کنیم که $\overline{OM}=\sqrt{2}\,b$ باشد (مقدار $\sqrt{2}\,b$ برای $\overline{OM}$ با توجه به دو معادله‌ی $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{b}$ و $\frac{1}{\overline{OA}}+\frac{1}{\overline{OB}}=\frac{\sqrt{2}}{b}$ به‌دست می‌آید. یادآوری می‌کنیم که $\overline{OA}$ و $\overline{OB}$ اعداد جبری‌اند.)

بر حسب مقدارهای $\overline{OM}$ چهار حالت پیش می‌آید:

الف) اگر نقطه‌ی M بین دو نقطه‌ی R و S باشد، یعنی $a<\overline{OM}<a\sqrt{2}$، در این مورد از نقطه‌ی M می‌توان دو مماس بر دایره‌ی O رسم کرد که آن‌ها را A_1B_1 و A_2B_2 می‌نامیم. وقتی نقطه‌ی M بین دو نقطه‌ی R و S باشد، خط OM نیم‌ساز داخلی در دو مثلث قائم‌الزاویه‌ی OA_1B_1 و OA_2B_2 است. در این حالت جواب‌های دستگاه معادلات چنین‌اند:

$$\begin{cases}x=\overline{OA_1}\\ y=\overline{OB_1}\end{cases}\qquad \begin{cases}x=\overline{OA_2}\\ y=\overline{OB_2}\end{cases}$$

هر دو جواب مثبت‌اند.

ب) اگر نقطه‌ی M روی نیم‌خط باز SL قرار گیرد، یعنی: $\overline{OM}>\overline{OS}$، در این صورت $\overline{OM}>a\sqrt{2}$ و می‌توان از نقطه‌ی M دو مماس بر دایره‌ی O رسم کرد که آن‌ها را A_3B_3 و A_4B_4 می‌نامیم. جواب‌های دستگاه معادلات ۱۴، وقتی $\overline{OM}>a\sqrt{2}$ باشند، چنین است:

$$\begin{cases}x=\overline{OA_3}>0\\ y=\overline{OB_3}<0\end{cases}\qquad \begin{cases}x=\overline{OA_4}<0\\ y=\overline{OB_4}>0\end{cases}$$

پ) اگر $OM=a$ باشد، یعنی نقطه‌ی M روی دایره‌ی O باشد، از نقطه‌ی M تنها یک مماس بر دایره رسم می‌شود. (وقتی نقطه‌ی M روی پاره‌خط RS به سوی نقطه‌ی R بی‌نهایت نزدیک شود، دو نقطه‌ی A_1 و A_2 بی‌نهایت به هم نزدیک می‌شوند. پس دو مماس MA_1 و MA_2 بی‌نهایت به هم نزدیک می‌شوند. وقتی نقطه‌ی M بر نقطه‌ی R منطبق شود، مماس مضاعف داریم.) با این ملاحظات، وقتی $\overline{OM}=a$ باشد، دستگاه معادلات ۱۴ دارای جواب مضاعف زیر است:

$$\begin{cases}x=a\sqrt{2}\\ y=a\sqrt{2}\end{cases}$$

ت) اگر $\overline{OM}=a\sqrt{2}$ باشد، یعنی نقطه‌ی M بر نقطه‌ی S قرار گیرد، چنین می‌گوییم:

وقتی نقطه‌ی M به نقطه‌ی S بی‌نهایت نزدیک شود، آن‌گاه مقدار $\overline{OA_1}$ بی‌نهایت به a نزدیک و مقدار $\overline{OB_1}$ بی‌نهایت بزرگ می‌شود (از حیث قدرمطلق). از روی شکل نتیجه می‌شود:

$$x_{A_1}\to a\Rightarrow y_{B_1}\to\infty$$

$$x_{A_1}\to\infty\Rightarrow y_{B_1}\to a$$

برای دستگاه معادلات ۱۴ چنین داریم:

$$\begin{cases}x\to a\\ y\to\infty\end{cases}\qquad \begin{cases}x\to\infty\\ y\to a\end{cases}$$

مسئله: معادله‌ی زیر را حل کنید:

$$a\cos x+b\sin x=c$$

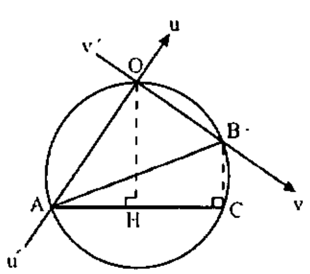
معادله را با فرض $c>0$ حل می‌کنیم. اگر $c<0$ باشد، دو طرف معادله را در ۱- ضرب می‌کنیم تا مقدار سمت راست معادله مثبت شود.

راهنمایی برای حل. شکل ۱۰ راهنما برای حل است.

بر دو محور عمود بر هم $u'ou$ و $v'ov$ به ترتیب دو بردار $\overrightarrow{AO}$ و $\overrightarrow{OB}$ را با اندازه‌های جبری a و b اختیار می‌کنیم. نقطه‌ی C محل برخورد دایره‌ی به قطر AB و دایره‌ی به مرکز A و شعاع به اندازه‌ی C است.

مقدار جواب معادله: اندازه‌ی زاویه‌ی $x=CAO$

شرط وجود جواب: $AC\le AB$، یعنی: $c^2\le a^2+b^2$



گراف تورنمنت

● احسان یارمحمدی

اشاره

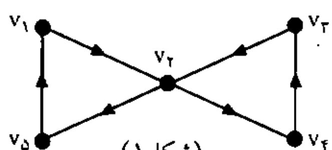
می‌دانیم در طول یک دوره مسابقه‌ی ورزشی که بین تیم‌های شرکت کننده در آن دوره مسابقات انجام می‌پذیرد، ممکن است هر تیمی در رویارویی با حریفش، شکست بخورد و یا پیروز شود؛ یا این که در مقابل یکدیگر به نتیجه‌ی تساوی برسند. یکی از روش‌های نمایش این نتایج، استفاده از گراف‌هایی است که در مبحث «نظریه‌ی گراف» کتاب ریاضیات گسسته‌ی دوره‌ی پیش‌دانشگاهی رشته‌ی علوم ریاضی، اشاره‌ای از آن‌ها آمده است. اما آن اشاره تنها در اندازه‌ای است که خواننده فقط می‌تواند با استفاده از یک نمودار گراف جهت‌دار و متناظر کردن آن به یک دوره‌ی مسابقه، متوجه برد یا باخت تیم‌ها شود و نمی‌تواند مطالب بیشتری را با استفاده از نمودار آن کسب کند.

موضوع این مقاله، بحث پیشرفته‌ای پیرامون نتیجه‌ی یک دوره مسابقه‌هایی است که بین تیم‌های شرکت کننده در آن صورت می‌پذیرد؛ به گونه‌ای که هیچ یک از تیم‌ها مجاز به تساوی در مقابل هم نیستند و هر بازی، در نهایت یک برنده و یک بازنده دارد. این موضوع را به کمک یک دسته از گراف‌های جهت‌دار خاص با ویژگی‌های منحصر به فرد با عنوان «تورنمنت»[1]، بررسی می‌کنیم. برای یادآوری و درک بهتر مقاله اشاره می‌کنم که تورنمنت در لغت به معنای مسابقات قهرمانی و تشکیل مسابقه و در ورزش به معنای یک دوره‌ی مسابقه است. هم‌چنین این مقاله، اشاره‌ای محضی- کاربردی به استفاده از رده‌ای خاص از گراف‌ها به نام «گراف‌های جهت‌دار»[2] یا «دیگراف[3]»ها در یکی از ابعاد زندگی امروزه‌ی بشر به نام ورزش دارد. به همین دلیل، در ابتدا گراف‌های جهت‌دار را معرفی و تعریف‌های مربوط به آن‌ها را بیان می‌کنیم.

تعریف ۱

گراف $\vec{G} = (V, \vec{E})$ را که در آن V مجموعه‌ای متناهی و ناتهی و $\vec{E}$ زیرمجموعه‌ای از تمام دوتایی‌های مرتب متشکل از اعضای مجموعه‌ی V است، جهت‌دار می‌نامیم.

مثال ۱. شکل ۱ نمودار گراف جهت‌دار $\vec{G}$ است. مرتبه و اندازه‌ی این گراف را مشخص کنید.



(شکل ۱)

گراف جهت‌دار $\vec{G}$ دارای مجموعه‌ی رأس‌ها و مجموعه‌ی یال‌های زیر است. بنابراین از مرتبه‌ی $p = ۵$ و اندازه‌ی $q = ۶$ خواهد بود.

$$V = \{v_۱, v_۲, v_۳, v_۴, v_۵\}$$

$$E = \{(v_۱, v_۲), (v_۳, v_۲), (v_۴, v_۳), (v_۲, v_۴), (v_۲, v_۵), (v_۵, v_۱)\}$$

تعریف ۲

درجه‌ی ورودی[۴] رأس v_i ، $۱ \le i \le p$ برابر با تعداد یال‌های جهت‌داری است که به رأس v_i وارد می‌شود که آن را به صورت $\text{in}\deg_{\vec{G}}(v_i)$ یا $\deg_{\vec{G}}^{-}(v_i)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۳

درجه‌ی خروجی[۵] رأس v_i ، $۱ \le i \le p$ برابر با تعداد یال‌های جهت‌داری است که از رأس v_i خارج می‌شود که آن را به صورت $\text{out}\deg_{\vec{G}}(v_i)$ یا $\deg_{\vec{G}}^{+}(v_i)$ نمایش می‌دهیم.

تذکر: بدیهی است که اگر $\deg_{\vec{G}}^{-}(v_i)$ یا $\deg_{\vec{G}}^{+}(v_i)$ عددی زوج[۶] باشند، آن‌گاه آن‌ها را به ترتیب رأس ورودی زوج و رأس خروجی زوج و اگر $\deg_{\vec{G}}^{-}(v_i)$ یا $\deg_{\vec{G}}^{+}(v_i)$ عددی فرد[۷] باشند، آن‌گاه آن‌ها را به ترتیب رأس ورودی فرد و رأس خروجی فرد می‌نامیم.

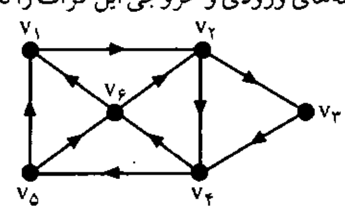
تعریف ۴

بزرگ‌ترین عدد در بین درجه رأس‌های ورودی (خروجی) گراف جهت‌دار $\vec{G}$ را ماکزیمم درجه‌ی ورودی (خروجی) می‌نامیم و آن را با Δ^{-} (Δ^{+}) نمایش می‌دهیم.

تعریف ۵

کوچک‌ترین عدد در بین درجه‌ی رأس‌های ورودی (خروجی) گراف جهت‌دار $\vec{G}$ را مینیمم درجه‌ی ورودی (خروجی) می‌نامیم و آن را با δ^{-} (δ^{+}) نمایش می‌دهیم.

مثال ۲. شکل ۲ نمودار گراف جهت‌دار $\vec{G}$ است. ماکزیمم و مینیمم درجه‌های ورودی و خروجی این گراف را تعیین کنید.



(شکل۲)

با توجه به نمودار این گراف جهت‌دار (شکل۲) داریم:

$$\left.\begin{array}{l}\deg^{-}(v_۱) = ۲\\ \deg^{-}(v_۲) = ۲\\ \deg^{-}(v_۳) = ۱\\ \deg^{-}(v_۴) = ۲\\ \deg^{-}(v_۵) = ۱\\ \deg^{-}(v_۶) = ۲\end{array}\right\} \Rightarrow \Delta^{-} = ۲, \delta^{-} = ۱$$

$$\left.\begin{array}{l}\deg^{+}(v_۱) = ۱\\ \deg^{+}(v_۲) = ۲\\ \deg^{+}(v_۳) = ۱\\ \deg^{+}(v_۴) = ۲\\ \deg^{+}(v_۵) = ۲\\ \deg^{+}(v_۶) = ۲\end{array}\right\} \Rightarrow \Delta^{+} = ۲, \delta^{+} = ۱$$

قضیه‌ی ۱

در گراف جهت‌دار $\vec{G}$ از مرتبه‌ی p و اندازه‌ی q، رابطه‌ی

$$\sum_{i=۱}^{p} \deg_{\vec{G}}^{-}(v_i) = \sum_{i=۱}^{p} \deg_{\vec{G}}^{+}(v_i) = q$$

برقرار است.

برهان

در گراف جهت‌دار $\vec{G}$ ، هر یال تنها یک جهت دارد به این معنا که دقیقاً به یک رأس از گراف $\vec{G}$ وارد می‌شود (دقیقاً از یک رأس از گراف $\vec{G}$ خارج می‌شود). بنابراین در سمت چپ رابطه‌ی ارائه‌شده در قضیه، هر یال تنها یک‌بار به‌حساب می‌آید.

اکنون که با الفبای تعریف‌ها و مطالب پیرامون گراف‌های جهت‌دار آشنا شدیم، با ارائه‌ی مثالی، مبحث اصلی مقاله را شروع می‌کنیم.

فرض کنید در یک دوره‌ی مسابقه (تورنمنت) فوتبال که نتیجه‌ی هیچ مسابقه‌ای نباید به تساوی کشیده شود و در پایان هر بازی باید یک تیم برنده و یک تیم بازنده باشد، چهار تیم سبز، سفید، قرمز و آبی حضور دارند. بعد از این که تمامی تیم‌ها با یکدیگر پیکار کرده‌اند، نتایج زیر به‌دست آمده است:

تیم سفید دو بر یک، تیم سبز را شکست داده است.

تیم قرمز با نتیجه‌ی سه بر یک، بر حریف خود تیم آبی فائق آمده است.

تیم قرمز بازی را با یک گل خورده، به تیم سفید واگذار کرده است.

تیم سبز با حساب دو بر صفر، بر تیم آبی چیره شده است.

تیم آبی با دو گل خورده، مقابل تیم سفید شکست خورده است.

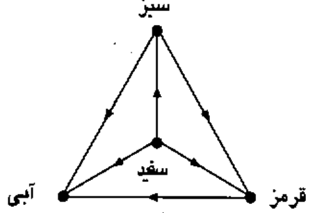
تیم سبز با یک گل زده، بر تیم قرمز برتری یافته است.

بنابر شیوه‌ی امتیازدهی که از سوی فدراسیون جهانی فوتبال (فیفا) ارائه شده است، تیم برنده سه و تیم بازنده صفر امتیاز را بعد از انجام بازی از آن خود می‌کنند. بنابراین بعد از محاسبه‌ی امتیازها، و تعداد گل‌های زده و خورده‌ی هر یک از تیم‌ها، می‌توانیم جدول زیر را برای این دوره‌ی مسابقه (تورنمنت) ارائه کنیم:

تیم	تعداد بازی	تعداد پیروزی	تعداد شکست	تعداد تساوی	امتیاز	تعداد گل زده	تعداد گل خورده	تفاضل گل
سفید	۳	۳	۰	۰	۹	۵	۱	+۴
سبز	۳	۲	۱	۰	۶	۴	۲	+۲
قرمز	۳	۱	۲	۰	۳	۳	۲	+۱
آبی	۳	۰	۳	۰	۰	۰	۷	−۷

(جدول A)

با استفاده از گراف‌های جهت‌دار نیز می‌توانیم وضعیت این دوره‌ی مسابقه را بررسی کنیم. به این صورت که در صفحه‌ی دکارتی، چهار نقطه متناظر با هریک از تیم‌های آبی، سفید، سبز و قرمز را در نظر می‌گیریم و برای هر بازی انجام شده بین دو تیم، یال جهت‌داری را از تیم برنده به سمت تیم بازنده رسم می‌کنیم. بنابراین گراف جهت‌داری که نشان‌دهنده‌ی بازی‌های انجام شده و نتایج منتج به پیروزی یا شکست آن‌ها باشد، به‌صورت شکل ۳ است.



(شکل ۳)

با توجه به گراف جهت‌دار شکل ۳ می‌توانیم، بیشتر اطلاعاتی را که در جدول بنابر قوانین فیفا ارائه شده‌اند، مانند: تعداد بازی، پیروزی، شکست، تساوی و امتیاز هریک از تیم‌های آبی، سفید، قرمز و سبز را به‌دست آوریم.

تذکر: با کمی دقت در نمودار گراف جهت‌دار ۳ درمی‌یابیم، این گراف جهت‌دار، گرافی از مرتبه‌ی $p = ۴$ و اندازه‌ی $q = ۶$ است. اکنون اگر یک گراف ساده‌ی G با مرتبه‌ی $p = ۴$ و اندازه‌ی $q = ۶$ را در نظر داشته باشیم، از آن‌جا که در هر گراف کامل K_p با اندازه‌ی q رابطه‌ی $q = \binom{p}{۲} = \frac{p(p-۱)}{۲}$ برقرار است، بنابراین گراف ساده‌ی G با مرتبه‌ی $p = ۴$ و اندازه‌ی $q = ۶$ یک گراف کامل K_p است. اگر همین روش را درباره‌ی گراف جهت‌دار مثال بیان شده نیز بررسی کنیم، درخواهیم یافت که این گراف جهت‌دار نیز، حداکثر یال‌های جهت‌داری ممکن را داراست. البته باید این نکته را نیز مورد توجه قرار دهیم که در گراف کامل K_p با اندازه‌ی q، درجه‌ی هر رأس برابر با $p - ۱$ و یا به بیان بهتر، در هر گراف کامل K_p برای ماکزیمم و مینی‌مم درجه‌ی رأس‌ها، رابطه‌ی $\Delta = \delta = p - ۱$ را داریم. اما در گراف‌های جهت‌داری که حداکثر یال‌های ممکن را دارا هستند، درستی یا نادرستی رابطه‌های $\Delta^+ = \delta^+$ یا $\Delta^- = \delta^-$ و... باید گراف‌های جهت‌دار با مرتبه و اندازه‌های گوناگون را بررسی کرد.

تعریف ۶

گراف جهت‌دار $\vec{G}$ از مرتبه‌ی P و اندازه‌ی q را که دارای حداکثر یال‌های جهت‌دار است و دقیقاً بین هر دو رأس متمایز آن، یک یال جهت‌دار وجود دارد، تورنمنت می‌نامیم و با $\vec{T}_p$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۷

گراف کامل K_p با اندازه‌ی q را که یال‌های آن یال‌های جهت‌دار هستند، تورنمنت می‌نامیم و با $\vec{T}_p$ نمایش می‌دهیم.

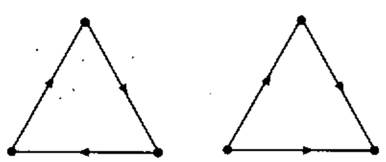
مثال ۳. نمودار تمام تورنمنت‌های متمایز $\vec{T}_۲$، $\vec{T}_۳$ و $\vec{T}_۴$ را رسم کنید.

برای تورنمنت $\vec{T}_۲$ که در آن مجموعه رأس‌هایش دو عضو دارد، نمودار زیر را می‌توان رسم کرد.



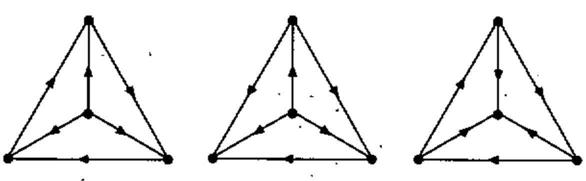
(شکل ۴)

برای تورنمنت $\vec{T}_۳$ که در آن مجموعه رأس‌هایش سه عضو دارد، نمودارهای زیر را می‌توان رسم کرد.



(شکل ۵)

برای تورنمنت $\vec{T}_۴$ که در آن مجموعه رأس‌هایش چهار عضو دارد، نمودارهای زیر را می‌توان رسم کرد.



(شکل ۶)

قضیه‌ی ۲

در تورنمنت $\vec{T}_p$ ، $p \in \mathbb{N}$ با اندازه‌ی q رابطه‌ی $q = \frac{p(p-1)}{2}$ برقرار است.

برهان

مجموع درجه‌ی رأس‌های ورودی تورنمنت $\vec{T}_p$ به اضافه‌ی مجموع درجه‌ی رأس‌های خروجی تورنمنت $\vec{T}_p$ برابر با $p(p-1)$ است. پس بنابر قضیه‌ی ۱، نصف این عدد برابر با تعداد یال‌های تورنمنت $\vec{T}_p$ است.

تذکر: می‌دانیم براساس قوانین فدراسیون جهانی فوتبال، تیم‌های شرکت‌کننده در یک دوره‌ی مسابقه (تورنمنت)، براساس امتیازاتی که به‌دست آورده‌اند، رتبه‌بندی می‌شوند. در پاره‌ای از موارد ممکن است دو یا چند تیم شرکت‌کننده در یک دوره‌ی مسابقه، امتیازات یکسان و مشابهی را به‌دست آورده باشند که در این صورت فیفا تفاضل گل آن‌ها را بررسی می‌کند و تیمی که نسبت به سایر تیم‌ها تفاضل گل بهتری داشته باشد، در رتبه‌ی بالاتر قرار می‌گیرد. اگر تفاضل گل دو یا چند تیم نیز با یکدیگر برابر باشد، آن‌گاه فیفا به سراغ تعداد گل‌های زده‌ی تیم‌ها، و در صورت برابری آن، به سراغ گل خورده‌ی تیم‌های شرکت‌کننده می‌رود و براساس آن‌ها رتبه‌بندی صورت می‌پذیرد.

اگر آگاهی‌های ما از نتایج بازی‌های انجام شده، تنها شامل نتیجه‌ی برد یا باخت تیم‌ها نباشد و در برگیرنده‌ی نتیجه‌ی بازی با تعداد گل‌های زده و خورده باشد، آن‌گاه مانند مثالی که قبلاً ارائه شد، می‌توانیم با تشکیل یک جدول، تیم‌های حاضر در آن دوره‌ی مسابقه (تورنمنت) را رتبه‌بندی کنیم. اما اگر اطلاعات ما تنها شامل نتیجه‌ی باخت یا برد تیم‌ها در مقابل یکدیگر باشد، به این علت که ممکن است تعداد پیروزی‌ها یا شکست‌های دو یا چند تیم با یکدیگر برابر باشد و از آن‌جا که ما نیز از تعداد گل‌های ردوبدل شده‌ی بین آن‌ها بی‌اطلاع هستیم، کار ما برای رتبه‌بندی تیم‌ها مقداری مشکل خواهد شد. به همین دلایل، در زیر چند تعریف را درباره‌ی تورنمنت $\vec{T}_p$ با مجموعه رأس‌های $V = \{v_1, v_2 v_3, \cdots, v_p\}$ بیان می‌کنیم تا بتوانیم در رتبه‌بندی تیم‌های شرکت‌کننده در یک دوره‌ی مسابقه (تورنمنت) صرفاً با آگاهی داشتن از نتیجه‌ی برد یا باخت تیم‌ها، اظهارنظر کنیم.

تعریف ۸

در تورنمنت $\vec{T}_p$ با مجموعه رأس‌های $V = \{v_1, v_2 v_3, \cdots, v_p\}$ و مجموعه یال‌های $E = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \cdots, \vec{e}_q\}$ ، تیم متناظر با رأس v_i ، $1 \le i \le p$ را تیم برنده می‌نامیم، اگر $\deg_{\vec{T}}^{+}(v_i) = \Delta^{+}$ باشد.

تعریف ۹

در تورنمنت $\vec{T}_p$ با مجموعه رأس‌های $V = \{v_1, v_2 v_3, \cdots, v_p\}$ و مجموعه یال‌های $E = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \cdots, \vec{e}_q\}$ ، برای تیم متناظر با رأس v_i ، $1 \le i \le p$ ، $s_1(v_i) = \deg_{\vec{T}}^{+}(v_i)$ را امتیازبندی سطح نخست می‌نامیم که به معرفی تیم نخست در رتبه‌بندی منجر می‌شود.

تعریف ۱۰

در تورنمنت $\vec{T}_p$ با مجموعه رأس‌های $V = \{v_1, v_2 v_3, \cdots, v_p\}$ و مجموعه رأس‌های $E = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \cdots, \vec{e}_q\}$ ، برای تیم متناظر با رأس v_i ، $1 \le i \le p$ ، $s_2(v_i) = \sum_{v_i v_j \in E_{\vec{T}}} s_1(v_j)$ ، $1 \le j \ne i \le p$ را امتیازبندی سطح دوم می‌نامیم که به معرفی تیم دوم در رتبه‌بندی منجر می‌شود.

تعریف ۱۱

در تورنمنت $\vec{T}_p$ با مجموعه رأس‌های $V = \{v_1, v_2 v_3, \cdots, v_p\}$ و مجموعه یال‌های $E = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \cdots, \vec{e}_q\}$ ، برای تیم متناظر با رأس v_i ،

$1 \le i \le p$ ، $s_n(v_i) = \sum_{v_i v_j \in E_{\vec{T}}} s_{n-1}(v_j)$ ، $1 \le j \ne i \le p$ را

امتیازبندی سطح n-ام می‌نامیم که به معرفی تیم n-ام در رتبه‌بندی منجر می‌شود.

مثال ۴. در یک دوره‌ی مسابقه‌ی فوتبال دوستانه که بین شش تیم آژاکس، منچستر یونایتد، بایرن مونیخ، لیون، رئال مادرید و یوونتوس برگزار شده است، بعد از تمام بازی‌ها، نتایج زیر به‌دست آمده‌اند:

ـ تیم لیون مقابل تیم‌های یوونتوس، آژاکس و رئال مادرید به پیروزی

رسیده و در مقابل تیم‌های بایرن‌مونیخ و منچستر یونایتد متحمل شکست شده است.

- تیم منچستر یونایتد تیم‌های بایرن مونیخ و لیون را شکست داده و مقابل تیم‌های رئال مادرید، یوونتوس و آژاکس نتیجه را واگذار کرده است.
- تیم رئال مادرید در مقابل تیم‌های بایرن‌مونیخ، یوونتوس، منچستریونایتد و آژاکس بازی را به سود خود به پایان رسانده و در مقابل تیم لیون متحمل شکست شده است.
- تیم یوونتوس در بازی با تیم‌های منچستر یونایتد، آژاکس و بایرن‌مونیخ پیروز از میدان خارج شده و در مقابل تیم‌های رئال‌مادرید و لیون، تن به شکست داده است.
- تیم آژاکس در رویارویی با تیم‌های لیون، یوونتوس و رئال مادرید دچار باخت شده و در مقابل تیم‌های منچستر یونایتد و بایرن‌مونیخ، نتیجه را از آن خود کرده است.
- تیم بایرن مونیخ در پیکار با تیم‌های رئال‌مادرید، منچستر یونایتد، آژاکس و یوونتوس، شکست را پذیرفته و در رویارویی با تیم لیون موفق به کسب پیروزی شده است.

با استفاده از تورنمنت‌ها، در مورد رتبه‌بندی تیم‌های شرکت‌کننده در این دوره مسابقات بحث کنید.

اگر وضعیت رویارویی این شش تیم در مصاف با یکدیگر را به‌کمک گراف‌های جهت‌دار بررسی کنیم، نمودار متناظر با این دوره مسابقات، یک تورنمنت $\vec{T}_6$ با مجموعه رأس‌های $V=\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5,v_6\}$ و اندازه‌ی $q=15$ خواهد شد. بنابراین، به هریک از تیم‌های رئال مادرید، یوونتوس، لیون، آژاکس، منچستر یونایتد و بایرن مونیخ، به ترتیب رأس‌های v_1، v_2، v_3، v_4، v_5 و v_6 را نظیر می‌کنیم. اکنون با توجه به آن‌چه که در مثال در مورد نتایج بازی‌های انجام شده، آمده است، می‌توانیم برای هریک از رأس‌های v_1، v_2، v_3، v_4، v_5 و v_6 درجه‌ی خروجی تعیین و به پیروی از آن، تیم نخست را در رتبه‌بندی مشخص کنیم. بنابراین:

$$\left.\begin{array}{l}\deg^+(v_1)=4\\ \deg^+(v_2)=3\\ \deg^+(v_3)=3\\ \deg^+(v_4)=2\\ \deg^+(v_5)=2\\ \deg^+(v_6)=1\end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{l}s_1(v_1)=4\\ s_1(v_2)=3\\ s_1(v_3)=3\\ s_1(v_4)=2\\ s_1(v_5)=2\\ s_1(v_6)=1\end{array}\right\}\Rightarrow \max(s_1)=s_1(v_1)=4$$

درنتیجه، تیم متناظر با رأس v_1 این تورنمنت، یعنی تیم رئال‌مادرید، پس از پایان بازی‌ها در رده‌ی نخست قرار گرفته است.

با اندکی دقت در مقدار $s_1(v_i)$ ،$1\le i\le 6$ درمی‌یابیم، $s_1(v_2)=s_1(v_3)=3$ بعد از مقدار $s_1(v_1)=4$ بیشترین مقدار را به خود اختصاص داده‌اند. ولی این سؤال در ذهن ما پدیدار می‌شود که کدام‌یک از تیم‌های متناظر با رأس‌های v_2 و v_3 در جایگاه دوم رتبه‌بندی قرار می‌گیرد. به همین دلیل، به محاسبه‌ی $s_2(v_i)$ ،$1\le i\le 6$ می‌پردازیم، بنابراین:

$$s_2(v_1)=\sum_{v_1v_j\in E_{\vec{T}}} s_1(v_j),1\le j\ne 1\le 6$$

$$=s_1(v_2)+s_1(v_3)+s_1(v_5)+s_1(v_6)=3+2+2+1=8$$

$$s_2(v_2)=\sum_{v_2v_j\in E_{\vec{T}}} s_1(v_j),1\le j\ne 2\le 6=s_1(v_4)+s_1(v_5)+s_1(v_6)$$

$$=2+2+1=5$$

$$s_2(v_3)=\sum_{v_3v_j\in E_{\vec{T}}} s_1(v_j),1\le j\ne 3\le 6=s_1(v_1)+s_1(v_2)+s_1(v_4)$$

$$=4+3+2=9$$

$$s_2(v_4) = \sum_{v_4 v_j \in E_{\vec{T}}} s_1(v_j), 1 \le j \ne 4 \le 6 = s_1(v_5) + s_1(v_6) = 2 + 1 = 3$$

$$s_2(v_5) = \sum_{v_5 v_j \in E_{\vec{T}}} s_1(v_j), 1 \le j \ne 5 \le 6 = s_1(v_3) + s_1(v_6) = 3 + 1 = 4$$

$$s_2(v_6) = \sum_{v_6 v_j \in E_{\vec{T}}} s_1(v_j), 1 \le j \ne 6 \le 6 = s_1(v_3) = 3$$

درنتیجه:

$$\left.\begin{array}{l} s_2(v_1) = 8 \\ s_2(v_2) = 5 \\ s_2(v_3) = 9 \\ s_2(v_4) = 3 \\ s_2(v_5) = 4 \\ s_2(v_6) = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow \max(s_2) = s_2(v_3) = 9$$

بنابراین، تیم متناظر با رأس v_3 این تورنمنت، یعنی تیم لیون، پس از پایان بازی‌ها در رده‌ی دوم، و تیم متناظر با رأس v_2 این تورنمنت، یعنی تیم یوونتوس، در رتبه‌ی سوم قرار گرفته است. از آن‌جا که تکلیف رتبه‌بندی تیم‌های متناظر با رأس‌های v_1 ، v_2 و v_3 مشخص شده است، بنابراین با اندکی دقت در مقدار $s_2(v_i)$ ، $1 \le i \ne 1,2,3 \le 6$ درمی‌یابیم، $s_2(v_5) = 4$ و $s_2(v_4) = 3$ و $s_2(v_6) = 3$ هستند. درنتیجه، تیم متناظر با رأس v_5 یعنی تیم منچستر یونایتد، در رتبه‌بندی مقام چهارم را به‌دست آورده است. اما به این دلیل که داریم: $s_2(v_4) = 3$ و $s_2(v_6) = 3$ لذا برای تشخیص این‌که چه تیمی در رتبه‌ی پنجم و کدام تیم در جایگاه ششم قرار می‌گیرد، باید به محاسبه‌ی $s_3(v_i)$ ، برای $i = 4,6$ بپردازیم. بنابراین:

$$s_3(v_4) = \sum_{v_4 v_j \in E_{\vec{T}}} s_2(v_j), 1 \le j \ne 4 \le 6 = s_2(v_5) + s_2(v_6) = 4 + 3 = 7$$

$$s_3(v_6) = \sum_{v_6 v_j \in E_{\vec{T}}} s_2(v_j), 1 \le j \ne 6 \le 6 = s_2(v_3) = 3$$

درنتیجه، تیم متناظر با رأس v_4 که همان تیم آژاکس است، در رتبه‌ی پنجم و تیم متناظر با رأس v_6 یعنی تیم بایرن مونیخ، در مکان ششم رتبه‌بندی قرار می‌گیرد.

زیرنویس

1. Tournament
2. Directed Graphs
3. Digraph
4. Indegree
5. Outdegree
6. Even
7. Odd
8. Ranking

منبع

1. http://mathworld.wolfram.com
2. http://www.fifa.com
3. http://www.graphtheory.com

از شاگردان وی، **حسین بن حسن شهنشاه سمنانی منجم** را می‌شناسیم که تا سال ۷۵۱ زنده بوده و نسخه‌ی کتاب البصائر فی علم المناظر را که ذکرش گذشت، از روی خط کمال‌الدین فارسی استنساخ کرده است.

آثار ریاضی کمال‌الدین فارسی

۱. **تذکرة الاحباب فی بیان التحاب:** مهم‌ترین اثر ریاضی شناخته‌شده‌ی کمال‌الدین فارسی، است که هدف آن اثبات درستی دستوری است که ثابت بن قره در سده‌ی سوم برای یافتن دسته‌ای از عددهای متحاب بیان کرده است. بعد از مقاله‌ای که ثابت بن قره درباره‌ی عددهای متحاب نوشته، این رساله‌ی کمال‌الدین فارسی مهم‌ترین اثری است که در دوره‌ی اسلامی راجع به نظریه‌ی اعداد تألیف شده است. مطالعه و بررسی دقیق این رساله نشان می‌دهد که کمال‌الدین فارسی ریاضی‌دانی بوده است محقق، مبتکر، صاحب افکار بدیع و فکر منظم، و موشکاف که در تألیف و تصنیف نیز زبردست و ماهر بوده است.

ثابت بن قره در مقاله‌ی خود دستور زیر را برای یافتن برخی از عددهای متحاب[1] بیان کرده است:

قضیه: اگر سه عدد $p = 3 \times 2^{n-1} - 1$ و $q = 3 \times 2^{n} - 1$ و $r = 9 \times 2^{2n-1} - 1$ هر سه اول باشند، آن‌گاه دو عدد $M = 2^{n} \times pq$ و $N = 2^{n} \times r$ متحاب خواهند بود.

کمال‌الدین فارسی رساله‌ی مذکور را برای اثبات درستی این قاعده تألیف کرده و طی آن در حدود بیست و پنج قضیه یا مسئله در نظریه‌ی اعداد بیان و ثابت کرده است که برخی از آن‌ها که پیش از وی سابقه نداشته، بسیار بدیع و از حیث تاریخ ریاضیات جالب توجه است و از آن جمله است قضیه‌ی زیر که شکل هفدهم از رساله‌ی کمال‌الدین فارسی است:

قضیه: اگر عدد اول p عدد مرکب a را نشمارد، آن‌گاه:

مجموع اجزای ap = (مجموع اجزای a) × p + (مجموع اجزای a + a)

فارسی نخستین کسی بوده که این قضیه را به صورت کامل فوق بیان کرده و با دقت به ثبوت رسانده است. در حدود بیش از ۳۲۰ سال بعد از درگذشت وی، **دکارت**، ریاضی‌دان و فیلسوف فرانسوی، همین قضیه را به صورت ناقص زیر بیان کرده است:

قضیه: اگر p عددی اول و b مجموع اجزای عدد مرکب a باشد، مجموع اجزای ap عبارت است از bp+a+b

این قضیه به صورت فوق از این جهت ناقص است که دکارت قید نکرده است که عدد اول p نباید عدد مرکب a را بشمارد. مثلاً اگر $a = 30$ و $p = 5$ باشد، آن‌گاه b یعنی مجموع اجزای ۳۰ مساوی است با ۴۲ و بنا به قضیه‌ی دکارت:

مجموع اجزای ap = $pb + a + b = 42 \times 5 + 30 + 42 = 282$

اما این صحیح نیست، زیرا مجموع اجزای $150 = 5 \times 30$ که می‌توان آن را مستقیماً حساب کرد، مساوی است با ۲۲۲ و نه ۲۸۲.

کمال‌الدین فارسی حالت کلی قضیه، یعنی حالتی که در آن p مساوی با یکی از شمارنده‌های a باشد را هم در نظر گرفته و در این حالت نیز دستور محاسبه‌ی اجزای حاصل ضرب ap را بیان و ثابت کرده است.

و نیز فارسی نخستین کسی بوده که دستور محاسبه‌ی اجزای حاصل ضرب دو عدد طبیعی را در حالت کلی بیان و ثابت کرده است (شکل هجدهم از رساله‌ی او). دستور این است:

قضیه. اگر a و b دو عدد طبیعی و نسبت به هم اول باشند و مجموع اجزای هر عدد مثلاً عدد a را s(a) بنامیم، آن‌گاه:

$$s(ab) = s(a) \times b + s(b) \times a + s(a) \times s(b)$$

دکارت در حدود بیش از سه سده بعد از درگذشت کمال‌الدین فارسی، همین دستور را در اروپا به‌دست آورد. با این تفاوت که کمال‌الدین فارسی باز در این مورد حالتی را که در آن دو عدد a و b نسبت به هم اول نباشند نیز در نظر گرفته و قاعده‌ی خود را تعمیم داده است.

علاوه بر این، فارسی پس از اثبات صحت دستور ثابت بن قره آن را به کار بسته و دو عدد متحاب ۱۷۲۹۶ و ۱۸۴۱۶ را به‌دست آورده است. در اروپا متحاب بودن این دو عدد را نخستین بار فرما، ریاضی‌دان فرانسوی در سال ۱۶۳۶ میلادی، به‌دست آورد.

باید اضافه کنم، کمال‌الدین فارسی مثل یک محقق امروزی، کارهایی را که پیشینیان وی درباره‌ی محاسبه‌ی عددهای متحاب انجام داده بودند، مورد بررسی و نقادی قرار داده و اشتباهی را که آنان در متحاب پنداشتن دو عدد ۲۰۲۴ و ۲۲۹۶ مرتکب شده بودند، گوشزد کرده و علت اشتباه آنان را نیز شرح داده است.

۲. **رساله‌ی بحث در زاویه:** موضوع این رساله بحثی است در این که آیا زاویه از مقوله‌ی کم است و یا از مقوله‌ی کیف و کمال‌الدین فارسی از بحثی که در این رساله کرده، نتیجه گرفته است که زاویه مطابق با رأی معلم اول (ارسطو) از مقوله‌ی کیف است.

زیرنویس

۱. دو عدد طبیعی را در صورتی متحاب می‌نامند که مجموع اجزای هر یک از آن‌ها مساوی با دیگری باشد مانند دو عدد ۲۲۰ و ۲۸۴، مقصود از اجزای هر عدد طبیعی غیر اول شمارنده‌هایی از آن عدد هستند که از خود عدد کوچکتر باشند. در بعضی از کتاب‌های فارسی اصطلاح اعداد متحاب را به صورت «اعداد متحابه» نوشته‌اند. اما ابوریحان بیرونی در کتاب التفهیم این اصطلاح را به صورت «عددهای متحاب» به‌کار برده و تای تأنیث به آخر متحاب اضافه نکرده است.

منبع

زندگی‌نامه‌ی ریاضی‌دانان دوره اسلامی، ابوالقاسم قربانی، مرکز نشر دانشگاهی





وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه ریزی آموزشی
دفتر انتشارات کمک آموزشی

ISSN:1735-4951
www.roshdmag.ir

رشد برهان ۵۹

مجله ی ریاضی

دوره ی متوسطه

فصلنامه ی آموزشی، تحلیلی و اطلاع رسانی

• دوره‌ی هجدهم • شماره‌ی ۱ • پاییز ۱۳۸۷ • بها: ۴۰۰۰ ریال



مشاهیر ریاضی مسلمان

ابوعبدالله محمد بن عیسی ماهانی

ریاضی‌دان و منجم معروف ایرانی (۲۱۰ - در حدود ۲۷۵)

از مردم ماهان کرمان، از افاضل علمای عدد و مهندسی عالی قدر و منجمی زبردست بود که در بغداد می‌زیست. تاریخ تولد و وفات وی به‌طور دقیق معلوم نیست، ولی با مراجعه به مدارک موجود می‌توان حدس زد، وی در حدود سال ۲۱۰هـ. ق در ماهان کرمان به دنیا آمده و در حدود سال ۲۷۵ درگذشته است.

ابن یونس، در زیج کبیر حاکمی، از رصدهای زیر که ماهانی از سال ۲۳۹ تا سال ۲۵۲ هـ. ق انجام داده نام برده و آن‌ها را مورد استفاده قرار داده است:

- رصد خسوف سال ۲۳۹
- رصد خسوف سال ۲۴۰
- رصد خسوف سال ۲۵۲
- رصد کسوف سال ۲۵۲
- رصد قران زهره و زحل سال ۲۴۴
- رصد قران زهره و عطارد سال ۲۴۴
- رصد قران زهره و مریخ در سال ۲۵۰

خیام در کتاب «جبر و مقابله»، از ماهانی نام برده و نوشته است:

«و در این فن، اصنافی [از معادلات] هست که در حل آن ها یک رشته مقدمات بسیار دشوار محتاج الیه می‌باشد و به این جهت، از پیشینیان سخنی در این باب به ما نرسیده است. شاید در حل این اصناف جست‌وجو و مطالعه کرده‌اند، ولی چیزی درنیافته‌اند، یا در تحقیقات خود نیازمند به امعان نظر در آن‌ها نشده‌اند، و یا بالاخره، شاید آثارشان در این باب به زبان ما ترجمه نشده است. و اما از متأخران، یکی از ایشان به نام ماهانی مهندسی، در صدد تحلیل جبری مقدمه‌ای برآمد که ارشمیدس در شکل چهارم از مقاله‌ی دوم کتاب خود موسوم به **کره و استوانه** به کار برده است، و این امر منجر شد به معادله‌ای بین کعب‌ها و مال‌ها و اعداد، و وی بعد از تفکر زیاد از حل آن عاجز ماند و لهذا حکم به امتناع آن کرد. بعد **ابوجعفر خازن** پیدا شد و آن را به وسیله‌ی قطوع مخروطی حل کرد.»

مقصود از معادله‌ای که خیام به آن اشاره کرده، معادله‌ی زیر است:

$$x^3 + a = cx^2$$

بقیه در صفحه‌ی ۳ جلد

بسم الله الرحمن الرحیم

رشد برهان ۵۹

مجله ی ریاضی

فصلنامه ی آموزشی، تحلیلی واطلاع رسانی

دوره‌ی هجدهم /شماره‌ی ۱/ پاییز ۱۳۸۷/شمارگان: ۱۵۰۰۰ نسخه

- مدیر مسئول: علیرضا حاجیان زاده
- سردبیر: حمیدرضا امیری
- مدیر داخلی: میرشهرام صدر
- طراح گرافیک: آزیتا کوثری
- اعضای هیأت تحریریه: حمیدرضا امیری، محمد هاشم رستمی، احمد قندهاری، میرشهرام‌صدر، هوشنگ شرقی، سید محمدرضا هاشمی موسوی، غلامرضا یاسی‌پور

و با تشکر از همکاری ارزنده ی استاد پرویز شهریاری

- ویراستار ادبی: کبری محمودی
- چاپ و صحافی: شرکت افست (سهامی عام)

ISSN 1735 - 4951 www.roshdmag.ir

صندوق الکترونیکی سردبیر: Borhanm@roshdmag.ir

پیام‌گیر نشریات رشد: ۸۸۳۰۱۴۸۲-۸۸۸۳۹۲۳۲

- نشانی دفتر مجلّه: تهران، صندوق پستی ۱۵۸۷۵/۶۵۸۵ تلفن دفتر مجله: ۹ـ ۸۸۸۳۱۱۶۰ داخلی ۳۹۷

تلفن امور مشترکین: ۷۷۳۳۶۶۵۶ـ ۷۷۳۳۵۱۱۰،

رشد برهان متوسطه، تمامی دبیران محترم و دانش‌آموزان عزیز

را در زمینه‌های زیر به همکاری دعوت می کند:

- نگارش مقاله‌های کمک درسی (شرح و بسط و رفع مشکلات مبحث درسی کتاب‌های ریاضی دوره‌ی متوسطه و پیش‌دانشگاهی)
- طرح مسائل کلیدی به همراه حل آن‌ها (برای دانش‌آموزان)
- طرح مسائل مسابقه‌ای به همراه حل آن‌ها (برای دانش‌آموزان)
- طرح معماهای ریاضی
- نگارش یا ترجمه‌ی مقاله های عمومی ریاضی (مانند تاریخ ریاضیات، زندگینامه‌ی علمی و اجتماعی ریاضیدانان، نکته‌های تازه و لطیف ریاضیات، آموزش ریاضیات، آموزش کامپیوتر و ...)

رشد برهان متوسطه هر سه ماه، یکبار منتشر می شود.

مجلّه در حکّ، اصلاح، حذف و اضافه ی مقاله ها آزاد است.

مقاله های وارده ،باید خوانا و حتی‌الامکان کوتاه باشد.

مقاله های رسیده مسترد نمی‌شود.

یادداشت سردبیر

H66Amiri@yahoo.com

سال تحصیلی ۸۸-۱۳۸۷ هم آغاز شد و یک سال بزرگ‌تر شدید! به کلاس بالاتر آمدید و امسال مطالبی در کتاب‌های ریاضی خود یاد می‌گیرید که برای شما جدیدند. بسته به این که در چه سالی (اول، دوم، سوم یا پیش‌دانشگاهی) و چه رشته‌ای (تجربی، ریاضی، انسانی و...) درس می‌خوانید، یک یا چند کتاب ریاضی را باید یاد بگیرید و مطالب آن‌ها را به دقت مطالعه کنید تا برای امتحانات در طول سال تحصیلی آماده شوید. برای یادگیری هرچه بهتر مطالب درسی، توصیه‌ی همیشگی ما به شما دانش‌آموزان عزیز از این قرار است:

۱) حضور فعال و بانشاط در کلاس درس و دقت و توجه لازم به درس و سخنان معلم؛

۲) استمرار در انجام تکالیف و عمل به توصیه‌های معلم بعد از تدریس؛

۳) مطالعه‌ی مطالب تدریس‌شده و نیز استفاده از منابع کمک‌درسی و تکمیلی استاندارد؛

۴) مطالعه و مرور مطالب قبل از حضور در کلاس درس، رفع اشکال مطالب قبلی در کلاس درس، و تا حد امکان انجام کار گروهی با هم‌کلاسی‌هایتان.

در مورد هرکدام از چهار توصیه‌ی بالا مطالب و نکات فراوانی می‌توان ذکر کرد که در این شماره روی بخشی از توصیه‌ی چهارم، یعنی «کار گروهی» اندکی تأمل می‌کنیم. کار گروهی به صورت‌های متفاوت و متنوعی انجام‌پذیر است که حداقل آن، یاد دادن یک موضوع یا مسئله‌ی ریاضی به یکی از هم‌کلاسی‌ها و یا یادگیری از اوست؛ یعنی یک گروه دو نفره! باور کنید کار گروهی نتایج اعجاب‌آوری به دنبال دارد.

اگر شما مدعی هستید که مطلبی را یاد گرفته‌اید، زمانی می‌توانید به ادعای خود اطمینان داشته باشید که بتوانید آن را به هم‌کلاسی خود یاد بدهید. چه‌بسا دانش‌آموزانی که فکر می‌کرده‌اند، مطلبی را خوب یاد گرفته‌اند. ولی وقتی آن را برای هم‌کلاسی خود توضیح داده‌اند، به مشکلی رسیده‌اند و متوجه شده‌اند، بخش‌هایی از آن مطلب را خوب فرانگرفته‌اند. یا دوستشان سؤالی پرسیده که در جواب به آن ناتوان بوده‌اند و دو نفری برای اطلاع از پاسخ صحیح به معلم مراجعه کرده‌اند. و این همان اتفاقی است که آموزش و فرایند یاددهی- یادگیری به دنبال آن است. آری دوست عزیز، تو با کار گروهی و یاد دادن مطالب ریاضی به هم‌کلاسی‌ات، هم زکات علمت را می‌دهی و هم به یادگیری خود عمق می‌بخشی و مطالب برایت جا می‌افتند.

اگر بگوییم، بهترین شیوه‌ی یادگیری، بحث و تجزیه و تحلیل مطالب تدریس‌شده در گروه‌های دو نفره به بالاست، کاملاً درست گفته‌ایم. شما می‌توانید سال تحصیلی جدید را با توجه به این که در سال «نوآوری و شکوفایی» هستیم، با کار گروهی آغاز کنید و واقعاً تأثیر کار گروهی را در شکوفایی استعدادهای خودتان مشاهده کنید؛ ان‌شاءالله.

سردبیر

ریاضیات در ایران

پرویز شهریاری

فردریک انگلس، در کتاب معروف خود «آنتی دورنیگ» (یعنی ضددورنیگ) می‌نویسد: «درست نیست اگر بگوییم که ریاضیات محض، روی آن‌چه که خود فرض و خلق کرده است، عمل می‌کند. مفهوم‌های عدد و شکل از جایی در جهان خارج به‌دست آمده‌اند. انسان، شمردن را به وسیله‌ی ده انگشت یاد گرفت و نخستین عمل‌های ریاضی را انجام داد. مفهوم عدد همه چیز هست، به جز مخلوق فکر و ذهن. مفهوم شکل نیز مانند مفهوم عدد، از جهان خارج گرفته شده است و در ذهن به صورت مفهوم خالص و به طور ناگهانی بروز نکرده است.»

لواسوی، دانشمند فرانسوی (۱۷۸۱ - ۱۸۴۰) در جایی از نوشته‌های خود می‌گوید: «زندگی تنها به این درد می‌خورد که انسان به دو کار بپردازد: اول ریاضیات بخواند و دوم ریاضیات درس بدهد.»

آریستارک[1] که در سال ۳۱۰ پیش از میلاد در «سادرس» متولد شد و در سال ۲۳۰ پیش از میلاد از دنیا رفت، بسیار پیش‌تر از کپلر اعلام کرد: «زمین به دور خورشید می‌چرخد و نه وارون آن»؛ و بر ضد او فریاد برآوردند: چه‌طور! آتش مقدس را از اجاق خدایان بربایید، چه جسارت بزرگی!» و او را سخت تکفیر کردند.

به ایران پیش از سده‌ی ششم میلادی، یعنی دوران ساسانی، اشکانی و هخامنشی، نمی‌پردازیم. در این دوره‌های کهن هم بسیاری از مقدمه‌های مثلثات و هندسه و عدد مورد توجه بوده‌اند که به بحثی طولانی نیاز دارد. می‌گذاریم برای بعد که اگر فرصتی شد بتوانیم ریشه‌های عمل آن‌ها را بازگو کنیم.

□

بعد از فروپاشی امپراطوری ساسانی ورود به سرزمین ایران، تا چند سده تنها جدل‌های سیاسی و جنگی مطرح بوده‌اند و ایرانیان فرصتی برای اظهارنظرهای علمی نداشتند. مردم ایران از خیلی قبل که به دوران هخامنشی می‌رسد، آماده‌ی یادگیری‌های علمی بودند و آن‌هایی که علاقه‌مند به دانش بودند، خیلی از وقت خود را صرف یادگیری دانش می‌کردند و در این راه، از همه‌ی دانسته‌های خود بهره می‌بردند. ایرانی‌ها برای نخستین‌بار «قنات» را کشف کردند. برای قنات، اول باید جایی پیدا کرد که آب زیر آن باشد. بعد هم از کروی بودن زمین استفاده کرد و آب را از عمق بسیار در زیرزمین، به سمت دشت روانه کرد و این یعنی کروی‌بودن زمین را حدس زده بودند. این شیوه‌ی آبیاری هنوز هم برای آبیاری سرزمین‌های جنوبی و مرکزی ایران، یعنی جاهایی که آب برای کشاورزی کم است، به کار می‌رود. از این نمونه‌ها بسیار است و سرانجام باید در این باره تحقیقی درست انجام شود.

در زمان حکومت پارت‌ها، گروهی از اهالی سیستان به هند رفتند و سنت‌های ریاضی و اخترشناسی هند را پایه گذاشتند و به «مغ ـ برهمن» مشهور شدند. به ظاهر براهما گوپتا، ریاضی‌دان بزرگ هندی سده‌ی هفتم میلادی، از بازماندگان همین مغ‌های ایرانی بوده است. درباره‌ی دانش‌هایی که پیش از سده‌ی

هفتم میلادی در ایران رواج داشته‌اند، به چند نکته اشاره می‌کنیم:

● در یکی از پاپیروس‌های مصری که نویسنده‌ی آن پزشکی مصری بوده است، می‌خوانیم:

«من از سائیس بیرون آمده‌ام». یعنی درس پزشکی خود را در سائیس خوانده‌ام و این مرکز آموزش پزشکی، در زمان داریوش هم برپا بوده است. بخش‌هایی از نوشته‌ای که روی مجسمه‌ی اوجا هورسن، پزشک مصری مانده است، می‌گوید: «داریوش به من فرمان داد به مصر بازگردم... مأموریت من این بود که ساختمان بران‌خا، بخشی از معبد دنیت را که ویران شده بود بسازم... به کتاب‌خانه‌ها کتاب دادم. جوانان را وارد آن‌ها کردم و آن‌ها را به مردان آزموده سپردم. برای هرکدام چیزهایی سودمند و ابزارهای لازم که در کتاب‌هایشان آمده بود، ساختم و فراهم کردم...».

● هرودوت تاریخ‌نویس یونانی می‌نویسد: «کوروش از آمازیس، فرعون مصر خواست تا چشم‌پزشکی به دربار او بفرستد و آمازیس چنین کرد.»

● بلوتارک، تاریخ‌نویس دیگر یونانی می‌نویسد که خود او یک مدرسه‌ی علمی ایرانی را دیده است که در آن حکمت، اخترشناسی، پزشکی و جغرافیا درس می‌داده‌اند و نزدیک به ۱۰۰ شاگرد داشته است.

● پولینوس، تاریخ‌نویس سده‌ی اول میلادی می‌گوید: «هرپیلوس، برای شرح و تفسیر اندیشه‌های زرتشت، از کتاب او که شامل ۲۰ جلد و هرکدام شامل صد هزار سفر بود، استفاده می‌کند.»

● باز نقل می‌کند که اکدی‌نو، اخترشناس بابلی که در ایران دوران هخامنشی زندگی می‌کرد، انحنای زمین را محاسبه کرد.

داستان سائیس نزدیک به هزار سال بعد تکرار شد و دانشگاه گندی‌شاپور، به مرکز دانش و به‌ویژه پزشکی جهان تبدیل شد. این مرکز تا بیش از دو سده بعد از شکست ساسانیان، هم‌چنان برپا بود و با جاذبه‌ی خود، همه‌ی دانشوران را به سمت خود می‌کشید. از جورجیس خبر داریم که وقتی ابوجعفر منصور دوانقی، خلیفه‌ی دوم عباسی، به درد معده دچار شد، از جورجیس، پسر بخت‌شیوع، رئیس پزشکی بخش گندی‌شاپور، خواست به بغداد برود.

❐

تزویج ریاضیات چند سود عمده دارد:

۱. به معلم و شاگرد یاری می‌رساند تا ریاضیات را بهتر بفهمند،

۲. یاری می‌رساند تا جهانی بیندیشیم،

۳. تاریخ ریاضیات، دانش را از شبه‌دانش جدا می‌کند،

۴. نسبت به خود اعتماد بیشتری پیدا می‌کنیم،

۵. یاد می‌گیریم تا مثل ابونصر فارابی، ابوریحان بیرونی، جمشید کاشانی، تمامی وقت خود را صرف یادگرفتن و یاددادن کنیم.

موریس کلاین، ریاضی‌دان آلمانی، کمتر از یک سده‌ی پیش می‌گفت:

«ریاضیات علمی‌ترین دستاورد اندیشه و اصیل‌ترین زاده‌ی ذهن آدمی است. موسیقی روح را نوازش می‌دهد. نقاشی چشم را می‌نوازد، شعر موجب برانگیختن عاطفه می‌شود، فلسفه ذهن را قانع می‌کند و مهندسی، زندگی را بهتر می‌سازد. ولی ریاضیات دارای مجموعه‌ی همه‌ی این ارزش‌هاست.»

و هیوم که از ۱۷۱۱ تا ۱۷۷۰ زندگی می‌کرد و فیلسوف شناخته‌شده‌ای است، می‌گوید: «کتابی که می‌خوانید، با عدد سروکار دارد؟ آیا با تجربه همراه است؟ اگر هیچ کدام از این دو نیست، باید کنار گذاشته شود.»

❐

گفته‌اند و هنوز هم می‌گویند که همه‌ی دانش‌ها و هنرها «یک‌باره» در یونان پدید آمد و به اوج خود رسید و سپس در دوره‌های تاریک سده‌های میانه که جهل بر اروپای غربی و مرکزی حاکم بود و دادگاه‌های تفتیش عقیده‌ها، دستور به آتش‌افکندن خاص و عام را می‌دادند، خاور میانه و نزدیک، تنها نقش نگه‌داری بخشی از یونان را به‌عهده گرفت و بی‌آن‌که خود چیزی به آن بیفزاید، امانتی را که به او سپرده شده بود، به اهل آن یعنی اروپاییان برگرداند و خود کنار رفت.

تازه این نکته که دارندگان دانش یونانی هم «عرب» بودند، عرب‌هایی همچون محمد فرزند خوارزمی، ابوالوفای بوزجانی (بوزجان در نزدیکی مرز ایران و افغانستان و در درون خاک ایران است)، ابوریحان بیرونی، محمد کرجی، قیام نیشابوری، نصیرالدین توسی، جمشید کاشانی و دیگران.

از سمت دیگر، خود آن‌ها گفته‌اند و می‌گویند که فیثاغورث در بابل به دانش مغان دست یافت و بعد به ایران سفر کرد. افلاطون دوره‌ای طولانی را در نزدیکی‌های ایران گذرانده.

اراتوستن به ایران و هند رفت، دموکلاس سال‌ها در دربار ایران بود. دموکرس به ایران و مصر سفر کرد. و ارسطو خواهرزاده‌ی خود را با شاگردش به ایران فرستاد تا هرچه از کتاب‌های علمی و فلسفی در ایران می‌یابد، برای او ببرد.

و می‌دانیم آن زمان که هومر، شاعر یونانی، زمین را مسطح می‌پنداشت و معتقد بود، آتن مرکز زمین است و شاعرانه خانه‌ی دلدار خود را در مرکز آتن قرار می‌داد و نتیجه می‌گرفت که خورشید و ماه و همه‌ی ستارگان به دور خانه‌ی دلدار او می‌چرخند، کهن‌ترین اثرهای ایرانی از کروی بودن زمین یاد می‌کنند (آبان پشت قطعه‌ی ۳۸، مهر پشت قطعه‌ی ۱۵، فروردین پشت قطعه‌ی ۲) و فیثاغورث که دانش مغان را آموخته بود، به حرکت زمین به دور خورشید رأی می‌داد. و افلاطون زیربنای فلسفه‌ی خود را بر آموزش‌های «زرتشت» می‌گذاشت و آکادمی خود را به تقلید از «انجمن‌های دانش» دوران هخامنشی بنیان می‌گذاشت.

---

1. Aristarque

انتگرال مرزدار و انتگرال بی مرز

● دکتر احمد شرف‌الدین

چکیده :

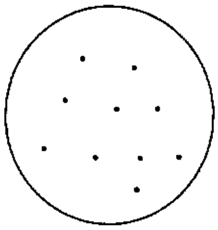
در کتاب‌های ریاضی که به زبان فارسی نوشته شده‌اند، در برابر اصطلاح «DEFINITE INTEGRAL» ، عبارت «انتگرال معین» و در برابر اصطلاح «INDEFINITE INTEGRAL» عبارت «انتگرال نامعین» به کار برده شده است . در برابر این دو اصطلاح ، به‌ترتیب دو اصطلاح «انتگرال مرزدار» و «انتگرال بی مرز» را پیشنهاد می‌کنم و دو اصطلاح انتگرال معین و انتگرال نامعین را مناسب نمی‌دانم . در ادامه در این باره توضیح می‌دهم .

معنی واژه‌ی DEFINITION

در واژه‌ی DEFINITION به معنی تعریف ، کلمه‌ی FINIS به‌کار آمده است . کلمه‌ی اخیر لاتینی و به معنی «انتها، مرز و کناره» است . وقتی چیزی را تعریف می‌کنیم ، مرز و حدی را دور آن می‌گذاریم تا آن چیز مشخص شود .

در حساب دیفرانسیل و انتگرال ، «DEFINITE INTEGRAL» دارای دو حد به صورت دو عدد است که آن‌ها را حد پایین و حد بالای انتگرال می‌نامند ، اما «INDEFINITE INTEGRAL» حد پایین (مرز پایین) و حد بالا (مرز بالا) ندارد .

در منطق گفته می‌شود : تعریف باید جامع و مانع باشد . یعنی باید به‌نحوی باشد که تمام افراد مورد تعریف در آن بگنجند و هیچ فرد دیگری داخل نشود . به عبارت دیگر ، حد و مرز مجموعه‌ای که شامل افراد مورد نظر است ، مشخص باشد؛ به بیانی که در تداول همگان است : «در و پیکرش معلوم باشد .» دیاگرام وِن ، نمایش هندسی تعریف است . در شکل زیر که دیاگرام‌ون است ، تمام افراد مورد تعریف در داخل دایره‌اند و هیچ فرد دیگری داخل دایره نیست .



اندکی توضیح درباره‌ی خط و مرز

واژه‌ی کشور از دو لفظ «کش» و «ور» تشکیل شده است کش و کشه ، در زبان ایران باستان به معنی «خط» است . لفظ «ور» پسوندی به معنی دارنده است . کشور به معنی دارنده‌ی مرز است . مملکت از نظر جغرافیایی با مرزها مشخص می‌شود . به عبارت دیگر ، خط‌ها هستند که مرز را تعریف می‌کنند . ریشه‌شناسی واژه‌ی کشور که بیان شد ، نظر نگارنده است و ممکن است صحیح باشد . در زبان عربی ، کلمه‌ی «خِطّه» که از کلمه خط گرفته شده است به معنی پاره‌ای از زمین ، زمینی که برای عمارت دور آن خط کشیده باشند ، زمین محدود ، ناحیه و کشور است .

یک فیلم مستند کرگدنی را نشان می‌داد که در محوطه‌ای مستقر بود و کرگدن دیگری ، به اصطلاح بیگانه ، به طرف آن منطقه آمد . کرگدن اول با شاخ خود خطی روی زمین کشید (گردن خود را خم کرد و چرخاند و شاخ خود را روی زمین کشید و با شیار حاصل ، خط رسم کرد) و به کرگدن دوم فهماند که این خط ، مرز زمین من است و

کرگدن دوم جلوتر نیامد.

خط و مرز وسیله‌ای برای تعریف است.

نام‌گذاری انتگرال $\int_a^b f(x)dx$

انتگرال $\int_a^b f(x)dx$، ابتدا برای محاسبه‌ی اندازه‌ی سطح زیر منحنی به‌کار رفته است. برای محاسبه‌ی اندازه‌ی سطح محصور به منحنی نمایشگر معادله‌ی $y = f(x)$، محور xها و دو خط به معادله‌های $x = a$ و $x = b$، انتگرال $\int_a^b f(x)dx$ را به‌کار می‌برند. دو خط $x = a$ و $x = b$، دو مرز از شکلی است که محاسبه‌ی سطح آن مورد نظر است.

انتگرال $\int_2^9 \frac{dx}{(x-4)^2}$ دارای معنی نیست، معین نیست و مقدار انتگرال بی‌نهایت است. آیا صحیح است که چون این انتگرال دارای حد پایین و بالاست، آن را انتگرال معین بنامیم؟

با توجه به مطالب یاد شده، به‌عنوان برابر «DEFINITE INTEGRAL»، اصطلاح «انتگرال مرزدار»، و برابر «INDEFINITE INTEGRAL»، اصطلاح «انتگرال بی‌مرز» را پیشنهاد می‌کنم.

اگر در حل یک معادله‌ی دیفرانسیل*، پس از انتگرال‌گیری مورد لزوم $\int f(x)dx$ مقدار ثابت کلی اضافه نکنیم، آن‌گاه جواب معادله‌ی دیفرانسیل کلی نخواهد بود، بلکه یک جواب خصوصی معادله حاصل خواهد شد (زیرا مقدار ثابت انتگرال را صفر گرفته‌ایم). جواب هر معادله‌ی دیفرانسیل یک قانون است. جواب خصوصی معادله‌ی دیفرانسیل قانون نیست، بلکه فقط یک مقطع است. به عبارت دیگر، وقتی در انتگرال‌گیری مقدار ثابت کلی اضافه نکنیم، جواب معادله‌ی دیفرانسیل نامعین است (زیرا قانون به دست نیامده و فقط یک مقطع از یک تحول به‌دست آمده است). نامعین بودن جوابی که برای معادله‌ی دیفرانسیل حاصل شده است، از این جهت است که در انتگرال‌گیری مقدار ثابت کلی اضافه نکرده‌ایم. پس سزاست بگوییم که در انتگرال $\int f(x)dx$، اگر مقدار ثابت کلی اضافه نکنیم، آن‌گاه انتگرال حاصل برای حل معادله‌ی دیفرانسیل، نامعین است نه آن‌که وقتی مقدار ثابت اضافه کنیم، انتگرال را انتگرال نامعین بنامیم.

---

* تعریف معادله‌ی دیفرانسیل: هر معادله که در آن تابع و مشتق تابع یا مشتق‌های تابع وجود داشته باشد، معادله‌ی دیفرانسیل نامیده می‌شود.

مثال ۱. معادله‌ی $y' = 2x$ یک معادله‌ی دیفرانسیل است و تابع y چنین است: $y = x^2 + a$. a مقدار ثابت کلی است. تابع $y = x^2 + a$ جواب معادله‌ی $y' = 2x$ نامیده می‌شود.

مثال ۲. معادله‌ی $y'' = \cos x$ یک معادله‌ی دیفرانسیل است و چنین داریم: $y' = \sin x + a$. a مقدار ثابت کلی است. از معادله‌ی اخیر نتیجه می‌شود: $y = -\cos x + ax + b$، b یک مقدار ثابت کلی است. تابع $y = \cos x + ax + b$ جواب معادله‌ی $y'' = \cos x$ نامیده می‌شود.

The Math Forum @ Drexel

معرفی سایت‌های ریاضی جهان

● احسان یارمحمدی

آدرس اینترنتی:

http://mathforum.org/dr.math

این سایت دارای سه قسمت اصلی و جالب‌توجه زیر است:

الف) درباره‌ی دکتر ریاضی (About Dr.Math)

ب) جوایز دکتر ریاضی (Dr.Math's Awards)

پ) کمک دکتر ریاضی (Dr.Math Help)

اگر به قسمت درباره‌ی دکتر ریاضی مراجعه کنیم، درمی‌یابیم که قسمت «Ask Dr.math» این سایت در واقع یک سرویس خدماتی ارائه کننده‌ی پرسش و پاسخ برای دانش‌آموزان و معلمان آن‌هاست که در قالب یک آرشیو و بایگانی قابل جست‌وجو و دارای توانایی ارزنده‌ای در زمینه‌ی ریاضیات در سطوح دبستان، راهنمایی و دبیرستان با موضوع‌های متنوع ریاضی، ارائه شده است. هم چنین، بیشتر اوقات Ask Dr.math قادر به پاسخ‌گویی به پرسش‌ها و سؤالات ریاضی است. به این منظور، تنها کافی است روی بخش «FAQ» که مخفف «Frequently Asked Questions» است، کلیک کنیم.

به طور کلی، قسمت درباره‌ی دکتر ریاضی چهار بخش عمده دارد:

۱. پرسش‌ها، پاسخ‌ها و بایگانی

(Questions, Answers, and Archives)

در این قسمت، دانش‌آموزان پرسش‌های خود را از طریق Web form برای Dr.Math ارسال می‌کنند. پاسخ‌ها بعداً از طریق آدرس الکترونیکی (E-mail) شخصی دانش‌آموزان برای آن‌ها ارسال می‌شود. سپس Dr.Math بهترین پرسش‌ها و پاسخ‌ها را گردآوری و در آرشیو قابل جست‌وجو و دست‌رس که به تفکیک ریاضیات دبستان، راهنمایی و دبیرستان سازمان‌دهی شده است، بایگانی می‌کند.

به شما پیشنهاد می‌کنیم، برای پیدا کردن آن‌چه که دنبال می‌کنید، با در دست داشتن کلمات کلیدی پیرامون آن مطلب (برای مثال اگر به دنبال فیبوناچی، گراف اویلری یا اثبات هستید، به ترتیب می‌توانید، کلمات Fibonacci، Eulerian Graph یا Proof را بنویسید) به جست‌وجوگر دکتر ریاضی (the Dr.Math Searcher) مراجعه کنید و به جست‌وجو بپردازید.

۲. جست‌وجوی یک مسئله‌ی جالب

(Looking for an Intersting problem)

ادامه در صفحه‌ی ۲۶.

هم‌شانس‌سازی فضاهای نمونه‌ای، چرا قانون بیز؟

● حمیدرضا امیری

گاهی اوقات محاسبه‌ی احتمال رخداد پیشامد A به شرط رخداد پیشامد B، یعنی $P(A|B)$، به دلیل عدم ارتباط کافی بین B و A مشکل است، ولی با تعویض شرط و مشروط، یعنی عوض کردن جای دو پیشامد A و B مشاهده می‌شود، محاسبه‌ی $P(B|A)$ به سادگی صورت می‌پذیرد. «قانون بیز» با استفاده از همین نکته، مسائلی از این نوع را به راحتی به جواب می‌رساند. زیرا طبق قانون بیز داریم:

$$P(A|B)=\frac{P(A)}{P(B)}\times P(B|A)$$

برای مثال فرض کنیم، در هر یک از جعبه‌های A_1 و A_2، به ترتیب ۴ مهره‌ی قرمز و ۳ مهره‌ی آبی، و ۲ مهره‌ی قرمز و ۵ مهره‌ی آبی وجود دارد. یکی از دو جعبه به تصادف انتخاب و یک مهره از آن خارج شده است. مشاهده می‌شود که این مهره قرمز است. می‌خواهیم محاسبه کنیم احتمال آن‌را که این مهره از جعبه‌ی A_1 باشد. در واقع، با فرض این‌که مهره‌ی خارج شده قرمز است، احتمال آن که مهره از A_1 باشد، موردنظر است. آیا علم به این‌که مهره قرمز است، کمکی می‌کند که احتمال مهره از A_1 بودن را محاسبه کنیم؟ ولی اگر جای A و B عوض شود، یعنی احتمال قرمز بودن مهره را بخواهیم، به شرط آن‌که بدانیم مهره از A_1 است، محاسبه‌ی این احتمال کاری ساده خواهد بود. زیرا اگر بدانیم مهره از جعبه‌ی A_1 خارج شده، احتمال قرمز بودن آن $\frac{۴}{۷}$ است!

از طرف دیگر، محاسبه‌ی $P(A)$ و $P(B)$ نیز به تنهایی آسان است. قانون بیز مسئله را به این شکل حل می‌کند:

A = پیشامد آن که مهره از A_1 باشد

B = پیشامد آن که مهره قرمز باشد

$$P(A|B)=\frac{P(A)}{P(B)}\times P(B|A)=\frac{\frac{۱}{۲}}{\frac{۱}{۲}\times\frac{۴}{۷}+\frac{۱}{۲}\times\frac{۲}{۷}}\times\frac{۴}{۷}$$

$$\Rightarrow\ P(A|B)=\frac{\frac{۱}{۲}}{\frac{۱}{۲}\left(\frac{۴}{۷}+\frac{۲}{۷}\right)}\times\frac{۴}{۷}=\frac{\frac{۴}{۷}}{\frac{۶}{۷}}=\frac{۴}{۶}$$

اگر بخواهیم از زاویه‌ای دیگر به این نوع مثال‌ها نگاه کنیم، شاید راحت‌تر و در مدت زمان کوتاه‌تری بتوانیم مسئله را به جواب برسانیم. در مثال قبل، وقتی شرط قرمز بودن مهره پذیرفته می‌شود، در واقع فضای نمونه‌ای محدود شده است. اگر فرض کنیم کلِ مهره‌های قرمز موجود به دو جعبه‌ی فضای نمونه‌ای محدود شده باشد، ملاحظه می‌کنیم که دو جعبه روی هم ۶ مهره‌ی قرمز دارند. پس احتمال آن که مهره‌ی مورد نظر از جعبه‌ی A_1 باشد، برابر است با تعداد قرمزهای A_1 به تعداد کل قرمزها؛ یعنی $\frac{۴}{۶}$ که با جواب مسئله از طریق قانون بیز مطابقت دارد!

حال این سؤال پیش می‌آید که آیا این مطابقت اتفاقی است یا همیشه برقرار است؟ آیا حالت خاصی است و امکان دارد در مواردی نتوانیم از این روش استفاده کنیم؟ اصولاً یکی کردن و روی هم در نظرگرفتنِ مهره‌های قرمز، مبنای صحیح علمی (از نظر علم احتمال) دارد یا خیر؟

شاید حدس زده باشید که مسئله به تعداد کل مهره‌ها در هر یک از جعبه‌ها مربوط می‌شود. درست است. در این مثال، هر دو جعبه دارای ۷ مهره‌اند و در واقع، برای هر جعبه شانس برداشت هر مهره (به شرط این که شماره‌های ۱ تا ۷ روی آن‌ها حک شده باشد) برابر است با $\frac{۱}{۷}$. یعنی احتمال برداشت قرمز شماره‌ی یک از جعبه A_1، برابر با احتمال برداشت قرمز شماره‌ی یک از جعبه‌ی A_2 و برابر است با $\frac{۱}{۷}$. دقیقاً به همین دلیل، در محاسبه‌ی احتمال شرطیِ $P(A|B)$ می‌توان از رابطه‌ی $P(A|B)=\frac{n(A\cap B)}{n(B)}$ استفاده کرد.

این مسئله را در حالت کلی نیز می‌توان به شکل زیر به اثبات رساند:

فرض کنیم در جعبه‌ی A_1، m_1 مهره‌ی قرمز و n_1 مهره‌ی آبی و در جعبه‌ی A_2، m_2 مهره‌ی قرمز و n_2 مهره‌ی آبی وجود دارد و $m_1+n_1=m_2+n_2=K$. حال اگر یکی از دو جعبه را به تصادف

انتخاب و مهره‌ای از آن خارج کنیم و ببینیم که قرمز است، چه‌قدر احتمال دارد این مهره متعلق به جعبه‌ی A_1 باشد؟

پیشامد آن که مهره از A_1 باشد = A

پیشامد آن که مهره قرمز باشد = B

$$P(A|B)=\frac{P(A)}{P(B)}\times P(B|A)=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}\left(\frac{m_1}{K}+\frac{m_2}{K}\right)}\times\frac{m_1}{K}$$

$$=\frac{\frac{m_1}{K}}{\frac{m_1+m_2}{K}}=\frac{m_1}{m_1+m_2}$$

$$\xrightarrow{m_1+m_2}P(A|B)=\frac{m_1}{m_1+m_2}=\frac{\text{تعداد قرمزهای جعبه‌ی } A_1}{\text{مجموع قرمزهای دو جعبه}}$$

حال مسئله را در حالتی بررسی می‌کنیم که تعداد کل مهره‌ها در هر یک از جعبه‌ها با هم برابر نباشند. به مسئله‌ی زیر دقت کنید:

در جعبه‌ی A_1، ۴ مهره قرمز و ۲ مهره‌ی آبی و در جعبه‌ی A_2، ۳ مهره‌ی قرمز و ۵ مهره‌ی آبی وجود دارد. یکی از این دو جعبه را به تصادف انتخاب و مهره‌ای از آن خارج می‌کنیم. مهره قرمز است. چه‌قدر احتمال دارد این مهره از جعبه‌ی A_2 باشد؟

مهره از جعبه‌ی A_2 باشد = A

مهره قرمز باشد = B

$$P(A|B)=\frac{P(A)}{P(B)}\times P(B|A)=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}\times\left(\frac{4}{6}+\frac{3}{8}\right)}\times\frac{3}{8}=\frac{\frac{3}{8}}{\frac{25}{24}}=\frac{9}{25}$$

حال اگر بخواهیم، کل مهره‌های قرمز در دو جعبه را فضای نمونه‌ای محدود شده در نظر بگیریم و تعداد مهره‌های قرمز در جعبه‌ی A_2 را بر آن تقسیم کنیم، به عدد $\frac{3}{4+3}$ یا $\frac{3}{7}$ می‌رسیم که با عدد حاصل از استفاده از قانون بیز مطابقت ندارد!

فکر می‌کنید چه عاملی باعث شده است تا دو جواب با هم برابر نباشند؟ البته جوابی که با استفاده از قانون بیز به دست آورده‌ایم، یعنی $\frac{9}{25}$، همواره درست است.

با کمی دقت ملاحظه می‌کنیم که تفاوت این مسئله با مثال قبل در این است که در جعبه‌ی A_1، ۶ مهره و در A_2، ۸ مهره وجود دارد. بنابراین احتمال برداشت هر مهره از A_1 برابر است با $\frac{1}{6}$. در صورتی که در A_2 این احتمال $\frac{1}{8}$ است.

یعنی فضاهای نمونه‌ای در این دو جعبه هم‌شانس نیستند و بنابراین نمی‌توان در فضاهای غیر هم‌شانس، از رابطه‌ی $P(A|B)=\frac{n(A\cap B)}{n(B)}$ استفاده کرد. ولی شاید این سؤال به ذهن شما برسد که آیا می‌توان فضاها را هم‌شانس کرد و از همان روش ساده برای محاسبه‌ی احتمال شرطی استفاده کرد؟

پاسخ به این سؤال مثبت است. ما این کار را انجام می‌دهیم و شما ملاحظه خواهید کرد که به روشی بسیار ساده، این عمل (هم‌شانس سازی فضاها) انجام می‌پذیرد. برای هم‌شانس سازی فضاها کافی است، کوچک‌ترین مضرب مشترک تعداد مهره‌ها در دو جعبه، یعنی ک م م دو عدد ۶ و ۸ را به دست آوریم و مهره‌های هر جعبه را در عددی ضرب کنیم تا تعداد آن‌ها به ک م م برسد. یعنی در همین مسئله‌ی قبل، چون ۲۴ = [۸ , ۶]، باید مهره‌های جعبه‌ی A_1 را (هم مهره‌های قرمز و هم مهره‌های آبی) در $\frac{24}{6}=4$ و مهره‌های جعبه‌ی A_2 را در $\frac{24}{8}=3$ ضرب کنیم. در این صورت دو جعبه‌ی جدید به صورت زیر خواهیم داشت که در هر کدام ۲۴ مهره وجود دارد و فضاهای آن‌ها هم شانس است.

A_1: ۴ قرمز و ۲ آبی $\xrightarrow{\times 4}$ B_1: ۱۶ قرمز و ۸ آبی

A_2: ۳ قرمز و ۵ آبی $\xrightarrow{\times 3}$ B_2: ۹ قرمز و ۱۵ آبی

حال یکی از دو جعبه‌ی B_1 و B_2 را به تصادف انتخاب و ۱ مهره از آن خارج و مشاهده می‌کنیم که قرمز است. چه‌قدر احتمال دارد از B_2 باشد؟

چون در هر جعبه ۲۴ مهره وجود دارد، لذا می‌توان فضای نمونه‌ای را، تعداد کل مهره‌های قرمز در دو جعبه‌ی B_1 و B_2 در نظر گرفت که تعدادشان ۲۵ است. تعداد مهره‌های قرمز در B_2، ۹ است که با تقسیم ۹ بر ۲۵، به همان عدد $\frac{9}{25}$ که با روش قاعده‌ی بیز به دست آورده‌ایم، می‌رسیم!

شما به عنوان تمرین مسئله‌ی زیر را حل کنید (از روش هم‌شانس‌سازی):

در جعبه‌ی A_1، ۲ مهره‌ی قرمز، ۳ مهره‌ی آبی و ۱ مهره‌ی سبز، در جعبه‌ی A_2، ۳ مهره‌ی قرمز، ۲ مهره‌ی آبی و ۳ مهره‌ی سبز، و در جعبه‌ی A_3، ۳ مهره‌ی قرمز، ۳ مهره‌ی آبی و ۴ مهره‌ی سبز وجود دارد. یکی از این سه جعبه را به تصادف انتخاب و مهره‌ای از آن خارج می‌کنیم. مهره سبز است. چه‌قدر احتمال دارد این مهره از جعبه‌ی A_2 باشد؟

جواب: $\frac{45}{48+45+20}=\frac{45}{113}$

تجزیه

● احمد قندهاری

تجزیه‌ی یک عبارت جبری، یعنی تبدیل آن عبارت به حاصل ضرب چند عامل نسبت به هم اول. این عمل به کمک فاکتورگیری و اتحادها صورت می‌گیرد. به مثال‌های زیر توجه فرمایید.

مثال۱. عبارت $A = x^4 - 81y^4$ را تجزیه کنید.

حل: بنابر اتحاد مزدوج می‌توان نوشت:

$$A = x^4 - 81y^4 = (x^2)^2 - (9y^2)^2$$

$$A = \underbrace{(x^2 - 9y^2)}_{\text{اتحاد مزدوج}}(x^2 + 9y^2) \Rightarrow A = (x - 3y)(x + 3y)(x^2 + 9y^2)$$

مثال۲. عبارت $A = y^2 - x^2 - 4(y - 1)$ را تجزیه کنید.

حل:

$$A = y^2 - x^2 - 4y + 4 \Rightarrow \underbrace{y^2 - 4y + 4}\, - x^2$$

$$A = \underbrace{(y - 2)^2 - x^2}_{\text{اتحاد مزدوج}} = (y - 2 - x)(y - 2 + x)$$

مثال۳. عبارت $A = m^4 + 4$ را تجزیه کنید.

حل: در اتحادها داریم: $a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab$. پس:

$$A = (m^2)^2 + (2)^2 = (m^2 + 2)^2 - 4m^2$$

با استفاده از اتحاد مزدوج: $A = (m^2 + 2 - 2m)(m^2 + 2 + 2m)$

مثال۴. عبارت $A = y^2 + 7y + 10$ را تجزیه کنید.

حل:

با استفاده از اتحاد $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$، برای تجزیه‌ی عبارت A، دو عدد هم‌علامت می‌یابیم که مجموع آن‌ها ۷ و حاصل ضرب آن‌ها ۱۲ باشد. به سادگی می‌توان گفت که این دو عدد ۳ و ۴ هستند.

$$A = y^2 + 7y + 10 = (y + 3)(y + 4)$$

مثال۵. عبارت $A = 2x^2 + 11x + 12$ را تجزیه کنید.

حل:

$$2A = 4x^2 + 11(2x) + 24 = (2x)^2 + 11(2x) + 24$$

فرض می‌شود: $2x = y$. پس داریم:

$$2A = y^2 + 11y + 24$$

حال بنابر اتحاد مثال (۴)، دو عدد هم‌علامت می‌یابیم که مجموع آن‌ها ۱۱ و حاصل ضرب آن‌ها ۲۴ باشد. به سادگی می‌توان دریافت که این دو عدد ۳ و ۸ هستند. پس:

$$2A = y^2 + 11y + 24 = (y + 8)(y + 3)\ ,\ \ y = 2x$$

$$2A = (2x + 8)(2x + 3) \Rightarrow 2A = 2(x + 4)(2x + 3)$$

$$\Rightarrow A = (x + 4)(2x + 3)$$

مثال۶. عبارت $A = 6x^2 + 13x - 5$ را تجزیه کنید.

حل:

$$6A = 36x^2 + 13(6x) - 30$$

$$6A = (6x)^2 + 13(6x) - 30$$

فرض می‌شود: $6x = y$. پس داریم:

$$6A = y^2 + 13y - 30$$

حال دو عدد مختلف‌العلامت می‌یابیم که مجموع آن‌ها ۱۳ و حاصل ضرب آن‌ها ۳۰- باشد. این دو عدد ۱۵ و ۲- هستند. پس:

$$6A = y^2 + 13y - 30 = (y + 15)(y - 2)\ ,\ \ y = 6x$$

$$6A = (6x + 15)(6x - 2) = 3(2x + 5)(2)(3x - 1)$$

$$6A = 6(2x + 5)(3x - 1) \Rightarrow A = (2x + 5)(3x - 1)$$

مثال۷. عبارت $A = n^4 + 4n^2 - 32$ را تجزیه کنید.

حل:

$$A = n^4 + 4n^2 - 32$$

فرض می‌شود: $n^2 = y$. پس داریم:

$$A = y^2 + 4y - 32$$

حال دو عدد مختلف‌العلامت می‌یابیم که مجموع آن‌ها ۴ و حاصل ضرب آن‌ها ۳۲- باشد. این دو عدد ۸ و ۴- هستند. پس:

$$A = y^2 + 4y - 32 = (y - 4)(y + 8)\ ,\ \ n^2 = y$$

$$A = (n^2 - 4)(n^2 + 8) \Rightarrow A = (n - 2)(n + 2)(n^2 + 8)$$

مثال۸. عبارت $A = x^4 - 13x^2 + 36$ را تجزیه کنید.

حل:

$$A = x^4 - 13x^2 + 36$$

فرض می‌شود: $y = x^2$. پس داریم:

$$A = y^2 - 13y + 36$$

حال دو عدد هم‌علامت می‌یابیم که مجموع آن‌ها ۱۳- و حاصل‌ضرب آن‌ها ۳۶ باشد. این دو عدد ۴- و ۹- هستند. پس:

$$A = y^2 - 13y + 36 = (y-9)(y-4) \ , \ y = x^2$$

$$A = (x^2-9)(x^2-4) = (x-3)(x+3)(x-2)(x+2)$$

مثال۹. عبارت $A = x^6 - 9x^3 + 8$ را تجزیه کنید.

حل: $A = x^6 - 9x^3 + 8$

فرض می‌شود: $y = x^3$. پس داریم:

$$A = y^2 - 9y + 8$$

حال دو عدد مختلف‌العلامت می‌یابیم که مجموع آن‌ها ۹- و حاصل‌ضرب آن‌ها ۸ باشد. این دو عدد ۱- و ۸ هستند. پس:

$$A = y^2 - 9y + 8 = (y-1)(y-8) \ , \ y = x^3$$

$$A = (x^3-1)(x^3-8)$$

بنابر اتحاد $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$ می‌توان نوشت:

$$A = (x-1)(x^2+x+1)(x-2)(x^2+2x+4)$$

مثال۱۰. عبارت $A = (a-b)^3 + (b-c)^3 + (c-a)^3$ را تجزیه کنید.

حل: فرض می‌کنیم:

$$(c-a) = z \ , \ (b-c) = y \ , \ (a-b) = x$$

$$x + y + z = a - b + b - c + c - a = 0$$

دو طرف را به توان ۳ می‌رسانیم:

$$\Rightarrow x + y + z = 0 \Rightarrow x + y = -z$$

$$\Rightarrow (x+y)^3 = (-z)^3$$

$$\Rightarrow x^3 + y^3 + 3xy(x+y) = -z^3 \ , \ x + y = -z$$

$$\Rightarrow x^3 + y^3 + 3xy(-z) = -z^3 \Rightarrow x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$$

$$\Rightarrow A = (a-b)^3 + (b-c)^3 + (c-a)^3 = 3(a-b)(b-c)(c-a)$$

مثال۱۱. عبارت $A = (x^2-1)^2 - 11x^2 + 35$ را تجزیه کنید.

حل: $A = (x^2-1)^2 - 11(x^2-1+1) + 35$

$(x^2-1) = y$ فرض می‌شود:

$$A = y^2 - 11(y+1) + 35$$

$$\Rightarrow A = y^2 - 11y + 24$$

حال دو عدد مختلف‌العلامت می‌یابیم که مجموع آن‌ها ۱۱- و حاصل‌ضرب آن‌ها ۲۴ باشد. این دو عدد ۳- و ۸- هستند. پس:

$$A = y^2 - 11y + 24 = (y-3)(y-8) \ , \ y = x^2 - 1$$

$$A = (x^2-1-3)(x^2-1-8) = (x^2-4)(x^2-9)$$

$$\Rightarrow A = (x-2)(x+2)(x-3)(x+3)$$

مثال۱۲. عبارت زیر را تجزیه کنید.

$$A = (x+1)(x+3)(x+5)(x+7) + 15$$

حل:

$$A = \underbrace{(x+1)(x+7)}\underbrace{(x+3)(x+5)} + 15$$

(فرض می‌شود) $x^2 + 8 = y$ و

$$A = (x^2+8x+7)(x^2+8x+15) + 15$$

$$A = (y+7)(y+15) + 15 \Rightarrow A = y^2 + 22y + 105 + 15$$

$$A = y^2 + 22y + 120$$

حال دو عدد هم‌علامت می‌یابیم که مجموع آن‌ها ۲۲ و حاصل‌ضرب آن‌ها ۱۲۰ باشد. این دو عدد ۱۰ و ۱۲ هستند.

$$A = y^2 + 22y + 120 = (y+10)(y+12) \text{ و } y = x^2 + 8x$$

$$A = (x^2+8x+10)(x^2+8x+12)$$

$$A = (x^2+8x+10)(x+6)(x+2)$$

مثال۱۳. عبارت $A = x^3(x^2-7)^2 - 36x$ را تجزیه کنید.

حل:

$$A = x\left[\underbrace{x^2(x^2-7)^2 - 36}_{\text{اتحاد مزدوج}}\right]$$

$$A = x\left[x(x^2-7) - 6\right]\left[x(x^2-7) + 6\right]$$

$$A = x\left[x^3 - 7x - 6\right]\left[x^3 - 7x + 6\right]$$

$$A = x\left[x^3 - x - 6x - 6\right]\left[x^3 - x - 6x + 6\right]$$

$$A = x\left[x(x^2-1) - 6(x+1)\right]\left[x(x^2-1) - 6(x-1)\right]$$

$$A = x[x(x-1)(x+1) - 6(x+1)][x(x-1)(x+1) - 6(x-1)]$$

$$A = x(x+1)\left[x^2 - x - 6\right](x-1)\left[x^2 + x - 6\right]$$

$$A = x(x+1)(x-1)[(x-3)(x+2)][(x+3)(x-2)]$$

$$A = x(x+1)(x-1)(x-3)(x+2)(x+3)(x-2)$$

مثال۱۴. کسر $A = \frac{(a^2+b^2-c^2)^2 - (a^2-b^2+c^2)^2}{4ab^2 + 4abc}$ را ساده کنید.

حل: در صورت کسر از اتحاد مزدوج استفاده می‌کنیم:

$$A = \frac{(a^2+b^2-c^2-a^2+b^2-c^2)(a^2+b^2-c^2+a^2-b^2+c^2)}{4ab(b+c)}$$

$$A=\frac{(2b^2-2c^2)(2a^2)}{4ab(b+c)}=\frac{2(b^2-c^2)(2a^2)}{4ab(b+c)}$$
$$=\frac{2(b-c)(b+c)(2a^2)}{4ab(b+c)}$$

$$A=\frac{4a^2(b-c)(b+c)}{4ab(b+c)},\ b+c\neq 0,\ a\neq 0\Rightarrow A=\frac{a(b-c)}{b}$$

مثال۱۵ . کسر $A=\dfrac{x^5-ax^4-a^4x+a^5}{x^4-ax^3-a^2x^2+a^3x}$ را ساده کنید.

حل:

$$A=\frac{x^4(x-a)-a^4(x-a)}{x^3(x-a)-a^2x(x-a)}=\frac{(x-a)(x^4-a^4)}{x(x-a)(x^2-a^2)}$$

$$x\neq\pm a,\ \ A=\frac{x^4-a^4}{x(x^2-a^2)}=\frac{(x^2-a^2)(x^2+a^2)}{x(x^2-a^2)}$$

$$\Rightarrow A=\frac{x^2+a^2}{x}$$

تجزیه‌ی رادیکال‌ها

تبدیل عبارت داخل یک رادیکال به عبارت ساده‌تر را تجزیه رادیکال‌ها گویند. فرض کنید می‌خواهیم عبارت $\sqrt{A\pm\sqrt{B}}$ را به عبارت‌های ساده‌تر تبدیل کنیم. فرض می‌کنیم این عبارت را به‌صورت $\sqrt{A\pm\sqrt{B}}=\sqrt{x}\pm\sqrt{y}$ درآوردیم.

می‌توان نوشت: $\sqrt{A\pm\sqrt{B}}=\sqrt{x}\pm\sqrt{y}$

دو طرف را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$A\pm\sqrt{B}=x+y\pm 2\sqrt{xy}\Rightarrow\begin{cases}A=x+y\\ \sqrt{B}=2\sqrt{xy}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x+y=A\\ 4xy=B\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x+y=A=S\\ xy=\dfrac{B}{4}=P\end{cases}$$

حال معادله‌ی درجه‌ی دومی تشکیل می‌دهیم که مجموع دو ریشه‌ی آن A و حاصل ضرب دو ریشه‌ی آن $\frac{B}{4}$ باشد. از حل معادله‌ی حاصل x و y به‌دست می‌آید.

$$Z^2-SZ+P=0\Rightarrow Z^2-AZ+\frac{B}{4}=0$$

$$Z=\frac{A\pm\sqrt{A^2-B}}{2}$$

فرض می‌کنیم: $\sqrt{A^2-B}=C$. داریم:

$$\Rightarrow Z=\frac{A\pm C}{2}\ \text{یا}\ x=\frac{A+C}{2}\ \text{و}\ y=\frac{A-C}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\sqrt{A\pm\sqrt{B}}=\sqrt{\frac{A+C}{2}}\pm\sqrt{\frac{A-C}{2}},\ C=\sqrt{A^2-B}}$$

فرمول تجزیه‌ی رادیکال‌ها

مثال۱ . عبارت $P=\sqrt{30-12\sqrt{6}}$ را به رادیکال‌های ساده‌تر تبدیل کنید.

حل:

$$P=\sqrt{30-12\sqrt{6}}=\sqrt{30-\sqrt{12^2\times 6}}=\sqrt{30-\sqrt{864}}$$

$$\begin{cases}A=30\\ B=864\end{cases}\ \ C=\sqrt{A^2-B}=\sqrt{900-864}=\sqrt{36}=6$$

$$\sqrt{A-\sqrt{B}}=\sqrt{\frac{A+C}{2}}-\sqrt{\frac{A-C}{2}}$$

$$\sqrt{30-\sqrt{864}}=\sqrt{\frac{30+6}{2}}-\sqrt{\frac{30-6}{2}}=\sqrt{18}-\sqrt{12}$$
$$=3\sqrt{2}-2\sqrt{3}$$

پس: $P=\sqrt{30-12\sqrt{6}}=3\sqrt{2}-2\sqrt{3}$

مثال۲ . رادیکال $\sqrt[4]{17+12\sqrt{2}}$ را تجزیه کنید.

حل: ابتدا $\sqrt{17+12\sqrt{2}}$ را تجزیه می‌کنیم. یعنی در واقع عبارت اصلی را به‌صورت $\sqrt{\sqrt{17+12\sqrt{2}}}$ می‌نویسیم. سپس جواب‌ها را داخل رادیکال اولی قرار می‌دهیم.

$$\sqrt{17+12\sqrt{2}}=\sqrt{17+\sqrt{144\times 2}}=\sqrt{17+\sqrt{288}}$$

$$\begin{cases}A=17\\ B=288\end{cases}\ \ C=\sqrt{A^2-B}=\sqrt{289-288}=\sqrt{1}=1$$

$$\sqrt{A+\sqrt{B}}=\sqrt{\frac{A+C}{2}}+\sqrt{\frac{A-C}{2}}$$

$$\sqrt{17+\sqrt{288}}=\sqrt{\frac{17+1}{2}}+\sqrt{\frac{17-1}{2}}=\sqrt{9}+\sqrt{8}=3+\sqrt{8}$$

$$\sqrt[4]{17+12\sqrt{2}}=\sqrt{\sqrt{17+\sqrt{288}}}=\sqrt{3+\sqrt{8}}\quad\begin{cases}A=3\\ B=8\end{cases}$$

$$C=\sqrt{A^2-B}=\sqrt{9-8}=1$$

$$\sqrt{A+\sqrt{B}}=\sqrt{\frac{A+C}{2}}+\sqrt{\frac{A-C}{2}}$$

$$\sqrt{3+\sqrt{8}}=\sqrt{\frac{3+1}{2}}+\sqrt{\frac{3-1}{2}}=\sqrt{2}+\sqrt{1}=\sqrt{2}+1$$

$$\Rightarrow\sqrt[4]{17+12\sqrt{2}}=\sqrt{2}+1$$

مقدمه‌ای بر نظریه‌ی مجموعه‌های فازی

● دکتر محمدعلی فریبرزی عراقی
عضو هیئت علمی دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکزی

اشاره

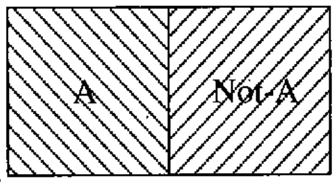
یکی از شاخه‌های ریاضیات کاربردی در سطح عالی، گرایش منطق فازی است. از آن‌جا که در دو دهه‌ی اخیر کاربرد فراوانی از این رشته را در صنعت داشته‌ایم و با توجه به این‌که مؤلف محترم مقاله، چند سالی است که در این زمینه تحقیق می‌کنند، به پیشنهاد دست‌اندرکاران مجله، ایشان به نگارش مجموعه مقالاتی در این زمینه پرداخته‌اند. إن شاءا... مورد استفاده خوانندگان مجله قرار گیرد.

تا قبل از پیدایش منطق فازی در سال ۱۹۶۵، قوانین حاکم بر علومی چون ریاضیات، بر پایه‌ی منطق دوارزشی یا منطق ارسطویی استوار بود. **ارسطو** معتقد بود، هر شیء، یا هست یا نیست و تفکری سیاه و سفید داشت. در حدود دو قرن قبل از او، بودا در هندوستان بیان داشت که جهان سراسر تناقض است و لذا در جهان مفهومی به صورت هم A و هم نه A را داریم. در واقع تفکر خاکستری (نه فقط سیاه و سفید)، مدت‌ها قبل از ارسطو وجود داشت.

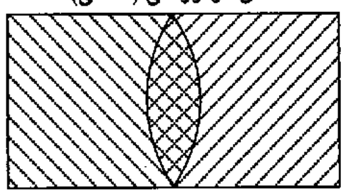
آلبرت اینشتین نیز دیدگاهی شبیه بودا داشت. به‌عقیده‌ی وی، جهان خاکستری است، ولی علم سیاه و سفید است و حقیقت چیزی بین صفر و یک است. به عبارت دیگر، حقایق چندارزشی هستند،

نه دوارزشی. جهانی که ما در آن زندگی می‌کنیم، فازی است، ولی ما توصیفی غیر فازی از آن داریم. اینشتین می‌گفت، جایی که قوانین ریاضیات به واقعیات مربوط می‌شوند، مطمئن نیستند و آن‌جا که مطمئن هستند، نمی‌توانند به واقعیت اشاره داشته باشند.

به این ترتیب ما با دو منطق مواجه هستیم: یکی منطق دوارزشی یا «قطعی»[1] که همان منطق ارسطویی است و بیان می‌دارد که هر چیزی یا هست یا نیست، چه در حال و چه در آینده، و دیگری منطق چندارزشی یا «فازی»[2] به معنای مبهم یا نامطمئن که بیان می‌دارد، هر چیزی دارای درجه‌ای از ابهام است. برتراندراسل نیز معتقد بود، همه چیز شامل این قاعده‌ی ثابت که آن چیز درست یا غلط است نمی‌شود و نباید برای روشن‌شدن این موضوع سعی کنیم. **ماکس بلک**[3] نیز به این اصل اعتقاد داشت که هر چیزی تا حدودی A و تا حدودی Not-A است.



منطق دو ارزشی (قطعی)



منطق چندارزشی (فازی)

«نظریه‌ی مجموعه‌های فازی» در سال ۱۹۶۵ توسط پروفسور **لطفی** عسگرزاده در آمریکا ارائه شد. وی با چاپ اولین مقاله‌ی خود در مجله‌ی «اطلاعات و کنترل»، دنیای علم را وارد این مقوله کرد که چگونه می‌توان تفکر دوارزشی را به چندارزشی تعمیم داد. ایشان در سال ۱۹۲۱ در شهر باکو متولد شد و تحصیلات دوره‌ی کارشناسی خود را در رشته‌ی مهندسی برق در سال ۱۹۴۲ در دانشگاه تهران به پایان رساند. سپس برای ادامه‌ی تحصیل به آمریکا رفت و در سال ۱۹۴۶، کارشناسی ارشد مهندسی برق را از دانشگاه MIT و در سال ۱۹۵۱، دکترای مهندسی برق را از دانشگاه کلمبیا اخذ کرد. وی در سال ۱۹۶۳، ریاست گروه مهندس برق دانشگاه UC برکلی کالیفرنیا را برعهده گرفت.

دیدگاه‌های این دانشمند ایرانی‌الاصل درخصوص منطقی که بنیان‌گذار آن بود، چنین است که برای توصیف ابهام از اعداد بین صفر و یک استفاده می‌کنیم. اصولاً تفکر و استدلال انسان فازی است، لذا باید ماشین‌هایی را ساخت که به قدرت استدلال انسان نزدیک‌تر باشند. حالت دوارزشی، ساده ولی کم‌دقت است و افزایش دقت به معنای افزایش فازی است. منطق فازی موجب هوشمندی ماشین‌ها می‌شود.

مخالفان نظریه‌ی عسگرزاده، در بدو ارائه‌ی نظریه‌ی وی اعلام کردند که این نظریه کاربردی ندارد و هیچ ماشینی با منطق فازی کار نمی‌کند. آن‌ها حذف منطق دوارزشی را ناممکن و علم دوارزشی را حقیقت و علم فازی را غیر علم می‌دانستند.

درحالی که واقعیت خاکستری است. مفاهیمی چون درست‌کاری، جوانی، خوش‌حالی، خوش‌بختی، سلامتی و... برای هر شخصی متفاوت است و نمی‌توان تنها با دو حالت ۰ و ۱ آن‌ها را توصیف کرد. حتی زندگی و مرگ هم مفاهیمی فازی دارند و باید به آن‌ها درجه داد. برای مثال، بیمارستانی را در نظر بگیرید که در آن شش مریض با امراض به‌ترتیب ناراحتی دستگاه گوارش، شکستگی استخوان پا، مسمومیت غذایی، عفونت ریه، سکته‌ی قلبی و مرگ مغزی در آن‌جا بستری هستند. اگر مفهوم زندگی را برای این افراد در نظر بگیریم، واضح است که زندگی آن‌ها توأم با نوعی ابهام و عدم‌اطمینان است و می‌توانیم درجات متفاوتی را برای آن منظور کنیم. یعنی بسته به آن‌که شدت مریضی چه‌قدر باشد، می‌توانیم مقادیر بین ۰ و ۱ را به زندگی آن فرد نسبت دهیم. به این ترتیب، نمونه‌ای از توصیف زندگی کردن برای این مجموعه از افراد به صورت زیر است:

{(۱,۰/۸),(۲,۰/۷),(۳,۰/۷),(۴,۰/۶),(۵,۰/۳),(۶,۰/۱)}

که در آن، مؤلفه‌ی اول شماره‌ی مریض و مؤلفه‌ی دوم درجه‌ای است که به زندگی کردن وی نظیر کرده‌ایم. هرقدر نوع مریضی خطر بیشتری داشته است، درجه‌ی زندگی فرد را ضعیف‌تر منظور کرده‌ایم. البته این درجات بسته به نظر افراد گوناگون می‌توانند متفاوت باشد. به عنوان مثالی دیگر، لامپی را در نظر بگیرید که سوسو می‌کند. اگر مفهوم سالم بودن مورد نظر باشد، نمی‌توان گفت این لامپ صددرصد سالم یا صددرصد خراب است و باید درجه‌ای به سالم بودن لامپ داد و مثلاً گفت: این لامپ با درجه‌ی ۰/۴ سالم است.

برخلاف نظر مخالفان منطق فازی که معتقد بودند، برای این منطق کاربردی وجود ندارد، کمتر از ده سال پس از ارائه‌ی این منطق توسط عسگرزاده در سال ۱۹۷۴، برای اولین‌بار منطق فازی در زمینه‌ی کنترل یک موتور بخار ساده در انگلستان توسط **ابراهیم محمدانی** به کار گرفته شد. پس از آن در دهه‌ی ۱۹۸۰، منطق فازی در کنترل اتوماتیک قطارهای زیرزمینی (مترو)، کنترل فرایند تصفیه‌ی آب و غیره به‌کار رفت. در سال ۱۹۸۴، «انجمن بین‌المللی سیستم‌های فازی» تأسیس شد. هم‌چنین، **سوگنو**[5] در ژاپن در سال ۱۹۷۲ از نظریات عسگرزاده برای ارائه‌ی مفاهیم اندازه و انتگرال فازی استفاده کرد. در سال ۱۹۹۰، منطق فازی در ساخت محصولات الکتریکی خانگی و برخی محصولات دیگر مورد بهره‌برداری قرار گرفت؛ از جمله در: ماشین لباس‌شویی، دوربین‌های عکاسی و فیلم‌برداری، مایکروویو، تلویزیون، بالگرد، تهویه‌ی مطبوع و قطار فازی.

در نظریه‌ی مجموعه‌های کلاسیک، یک مجموعه با یک ویژگی

کاملاً معین و قطعی مشخص می‌شود، لذا یک شیء، یا عضو یک مجموعه هست یا نیست. برای یک مجموعه‌ی قطعی چون A، تابع مشخصه‌ای به نام χ_A به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\chi_A(x)=\begin{cases}۱ & x\in A\\ ۰ & x\notin A\end{cases}$$

به این ترتیب، یک مجموعه‌ی قطعی با تابع مشخصه‌ی خود شناسایی می‌شود. در این حالت χ_A تابعی از X به $\{۰,۱\}$ است.

حال به تعریف یک مجموعه‌ی فازی می‌پردازیم:

تعریف: گیریم X مجموعه‌ی مرجع باشد. مجموعه‌ی فازی $\tilde{A}$ در X را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\tilde{A}=\left\{(x,\mu_{\tilde{A}}(x))\middle| x\in X\right\}$$

که در آن، $\mu_{\tilde{A}}:X\to[۰,۱]$ تابع عضویت مجموعه‌ی فازی $\tilde{A}$ نام درد. در این حالت، عدد $۰\le\mu_{\tilde{A}}(x)\le ۱$ درجه‌ی عضویت x در $\tilde{A}$ نامیده می‌شود. یک مجموعه‌ی فازی، منحصراً با تابع عضویت خودش مشخص می‌شود.

نمونه‌هایی از مجموعه‌های فازی عبارت‌اند از: اعداد تقریباً صفر، اعداد تقریباً بین ۲ و ۵، اعداد نزدیک ۱، اعداد خیلی کوچک، مردان بلند قد، اعداد خیلی بزرگ‌تر از ۱۰، اعداد بزرگ و... در هریک از این مجموعه‌ها، ابهام درخصوص معلوم نبودن عضویت یا عدم عضویت یک شیء در مجموعه وجود دارد. می‌توان گفت، مجموعه‌ی فازی حاصل توسعه‌ی مجموعه‌ی معمولی یا قطعی است؛ همان‌طوری که منطق فازی حاصل توسعه‌ی منطق چندارزشی است. برای مثال، مجموعه‌ی فازی کوچک بودن را روی مجموعه‌ی مرجع $X=\{۱,۲,۳,۴,۵\}$ در نظر می‌گیریم. تابع عضویت این مجموعه‌ی فازی را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\mu_{\tilde{A}}(x)=\begin{cases}۱ & x=۱\\ ۰/۶ & x=۲\\ ۰/۳ & x=۳\\ ۰/۱ & x=۴\\ ۰ & x=۵\end{cases}$$

لذا $\tilde{A}$ به این صورت قابل بیان است:

$$\tilde{A}=\{(۱,۱),(۲,۰/۶),(۳,۰/۳),(۴,۰/۱),(۵,۰)\}$$

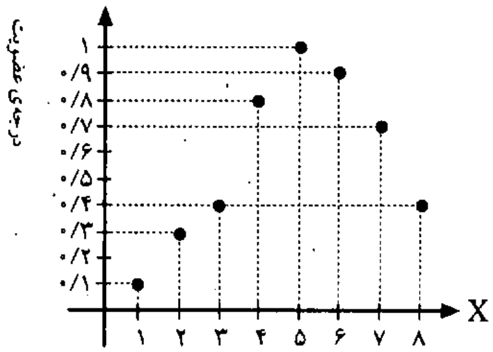
$\tilde{A}$ را به صورت زیر می‌نویسند:

$$\tilde{A}=\left\{\frac{۱}{۱},\frac{۰/۶}{۲},\frac{۰/۳}{۳},\frac{۰/۱}{۴},\frac{۰}{۵}\right\}$$

در این روش نمایش، علامت ــــ فقط یک نماد است و به معنای تقسیم نیست. در بالای این نماد مقدار درجه‌ی عضویت و زیر آن نام عضو مربوطه قرار می‌گیرد. هرقدر عدد کوچک‌تر باشد، درجه‌ی عضویت متناظر آن را بزرگ‌تر و هرقدر عدد بزرگ‌تر باشد، این درجه را کوچک‌تر در نظر می‌گیریم. به‌عنوان مثالی دیگر، مجموعه‌ی فازی تقریباً پنج را در نظر می‌گیریم. اگر $X=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶,۷,۸\}$ باشد، مجموعه‌ی $\tilde{B}$ در زیر توصیفی از این مجموعه‌ی فازی است:

$$\tilde{B}=\{(۱,۰/۱),(۲,۰/۳),(۳,۰/۴),(۴,۰/۸),(۵,۱),(۶,۰/۹),(۷,۰/۷),(۸,۰/۴)\}$$

نمودار زیر نیز این مجموعه را به نمایش درمی‌آورد:



مثلاً می‌گوییم ۴ با درجه‌ی عضویت ۰/۸ عضو $\tilde{B}$ است. در این حالت، هرقدر از ۵ دور می‌شویم، میزان عضویت عدد در این مجموعه کاهش می‌یابد. لازم به ذکر است، مقادیر درجه‌ی عضویت کاملاً سلیقه‌ای هستند و بسته به نظر افراد، می‌توانند مقادیر دیگری نیز باشند.

نظریه‌ی منطق فازی تاکنون گسترش زیادی یافته و با وجود آن‌که حدود چهار دهه از قدمت آن می‌گذرد، هم‌چنان در زمینه‌های گوناگون علمی مورد استفاده قرار می‌گیرد. نظریه‌ی مجموعه‌های فازی قادر است، بسیاری از مفاهیم مبهم را به صورت ریاضی مورد تحلیل قرار دهد و زمینه را برای استدلال و تصمیم‌گیری در شرایط عدم قطعیت فراهم آورد. در قسمت بعدی خوانندگان محترم را با اطلاعات بیشتری درخصوص منطق و مجموعه‌های فازی آشنا خواهیم کرد.

1. Crisp 2. Fuzzy 3. Black
4. Degrees-Grades 5. Sugeno

۱. تفکر فازی. بارت کاسکو. ترجمه‌ی دکتر علی غفاری و همکاران. دانشگاه خواجه نصیر طوسی. ۱۳۷۷.

۲. آشنایی با نظریه مجموعه‌های فازی. دکتر سیدمحمد طاهری. جهاد دانشگاهی. ۱۳۷۵.

۳. مقدمه‌ای بر منطق فازی برای کاربردهای عملی آن. کازوتاناکا. ترجمه‌ی دکتر علی وحیدیان کام‌یاد و دکتر حامدرضا طارقیان. دانشگاه فردوسی. مشهد. ۱۳۸۱.

هیچ مربعی منفی نیست

در این بخش، بعضی از کاربردهای ساده‌ترین نابرابری موجود در جبر، یعنی:

$$x^۲ \geq ۰$$

را بررسی می‌کنیم؛ رابطه‌ای که در آن برابری اگر و تنها اگر عدد حقیقی $x = ۰$ باشد، برقرار است. اینک اولین مثال:

● فرض می‌کنیم a عددی حقیقی باشد. ثابت کنید:

$$۴a - a^۴ \leq ۳$$

حل: این مسئله برای دانش‌آموزانی طرح شده بود که کتاب جامع و فاضل یا دیفرانسیل و انتگرال را، حتی ورق هم نزده بودند. نابرابری مورد بحث هم‌ارز

$$(a^۲ - ۱)^۲ + ۲(a - ۱)^۲ \geq ۰$$

است که به‌طور واضح برقرار است.

مثال دوم از المپیادهای ریاضی رومانیایی ۱۹۸۱ است که توسط آندریسکو[۱] طرح شده است.

● معین کنید، تابع یک به یک $f = R \to R$ با این ویژگی که به ازای هر x،

$$f(x^۲) - f^۲(x) \geq \frac{۱}{۴}$$

موجود است یا خیر.

حل: نشان می‌دهیم چنین تابعی موجود نیست. روش کار بسیار ساده است. به دو عددی می‌نگریم که با مربعاتشان برابرند؛ یعنی، $x = ۰$ و $x = ۱$، که در مورد آن‌ها $f(x)$ و $f(x^۲)$ برابرند. با قرار دادن $x = ۰$ در رابطه‌ی مفروض، به‌دست می‌آوریم:

$$f(۰) - f^۲(۰) \geq \frac{۱}{۴}$$

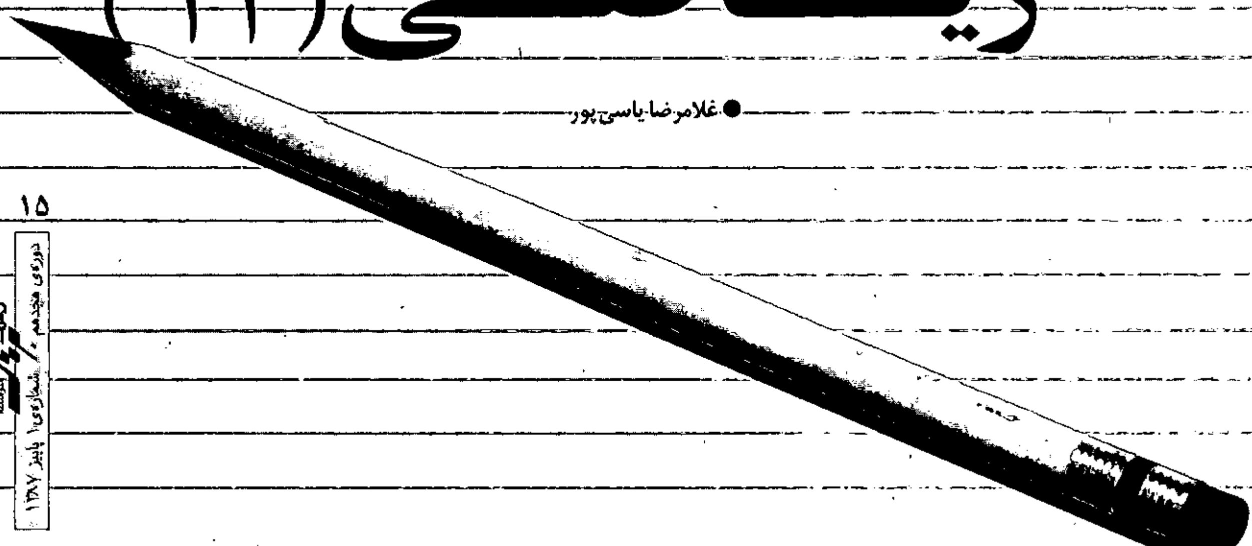
با بردن تمام عبارات به سمت راست، خواهیم داشت:

$$۰ \geq \left(f(۰) - \frac{۱}{۲}\right)^۲$$

این رابطه مستلزم آن است که $f(۰) = \frac{۱}{۲}$. به همین ترتیب، اگر

با راهیان المپیادهای ریاضی (۱۱)

● غلامرضا یاسی‌پور



$x=1$ را قرار دهیم، به دست می‌آوریم $f(1)=\frac{1}{2}$ که مانند $f(0)$ است. به این ترتیب f نمی‌تواند یک به یک باشد.

در ادامه مسائلی را آورده‌ایم که می‌توان آن‌ها را با همین روش حل کرد.

۱. فرض می‌کنیم a، b، c و d اعدادی حقیقی باشند. ثابت کنید تمام اعداد $a-b^2$، $b-c^2$، $c-d^2$ و $d-a^2$ نمی‌توانند بزرگ‌تر از $\frac{1}{4}$ باشند.

۲. جمیع جواب‌های حقیقی دستگاه معادلات زیر را بیابید.

$$x+y=\sqrt{4z-1}$$
$$y+z=\sqrt{4x-1}$$
$$z+x=\sqrt{4y-1}$$

۳. فرض می‌کنیم، x و y اعدادی در بازه‌ی $(0,1)$ با این ویژگی باشند که عدد مثبت متفاوت a‌ای از آن چنان موجود باشد که:

$$\log_x a+\log_y a=4\log_{xy} a$$

ثابت کنید: $x=y$.

۴. جمیع سه‌تایی‌های حقیقی (x,y,z) را بیابید که در رابطه‌ی زیر صدق می‌کند:

$$x^4+y^4+z^4-4xyz=-1$$

۵. جمیع سه‌تایی‌های اعداد حقیقی x، y و z صادق در:

$$2xy-z^2\ge 1$$
$$z-|x+y|\ge -1$$

را بیابید.

۶. فرض می‌کنیم a، b و c اعدادی حقیقی و چنان باشند که:

$$a^2+c^2\le 4b$$

ثابت کنید به ازای هر $x\in R$:

$$x^4+ax^3+bx^2+cx+1\ge 0$$

۷. ثابت کنید به ازای جمیع اعداد حقیقی x، y و z، نابرابری زیر برقرار است:

$$x^2+y^2+z^2-xy-yz-xz\ge\frac{3}{4}(x-y)^2$$

۸. اعداد حقیقی x_1، x_2، ...، x_n صادق در رابطه‌ی زیر را بیابید.

$$\sqrt{x_1-1^2}+2\sqrt{x_2-2^2}+\cdots+n\sqrt{x_n-n^2}=\frac{1}{2}(x_1+x_2+\cdots+x_n)$$

۹. الف) فرض می‌کنیم a، b و c اعدادی حقیقی و نامنفی باشند. ثابت کنید:

$$ab+bc+ca\ge\sqrt{3abc(a+b+c)}$$

ب) فرض می‌کنیم a، b و c اعدادی حقیقی و نامنفی چنان باشند که: $a+b+c=1$. ثابت کنید:

$$a^2+b^2+c^2+\sqrt{12abc}\le 1$$

۱۰. $f:N\to R$ را چنان معین کنید که به ازای هر k، m و n:

$$f(km)+f(kn)-f(k)f(mn)\ge 1$$

۱۱. فرض می‌کنیم a، b و c طول‌های یال‌های یک متوازی‌السطوح قائم و d طول قطر آن باشد. ثابت کنید:

$$a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\ge abcd\sqrt{3}$$

۱۲. ثابت کنید در مثلث ABC نابرابری زیر برقرار است:

$$\cos A\cos B\cos C\le\frac{1}{8}$$

۱۳. اگر a_1، a_2، ...، a_n اعدادی حقیقی باشند، نشان دهید:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} ij\cos(a_i-a_j)\ge 0$$

حل مسائل

۱. اگر نابرابری‌های

$$a-b^2>\frac{1}{4}\text{ و }b-c^2>\frac{1}{4}\text{ و }c-d^2>\frac{1}{4}\text{ و }d-a^2>\frac{1}{4}$$

به طور هم‌زمان برقرار باشند، با جمع کردن آن‌ها نابرابری زیر را به دست می‌آوریم:

$$a+b+c+d-(a^2+b^2+c^2+d^2)>1$$

با بردن جمیع مقادیر به سمت راست و تکمیل مربع‌ها داریم:

$$(\frac{1}{2}-a)^2+(\frac{1}{2}-b)^2+(\frac{1}{2}-c)^2+(\frac{1}{2}-d)^2<0$$

که تناقض است.

(Revista Matematică din Timisoara (Timisoara Mathematics Reviews), proposed by T. Andreescu)

۲. مانند مسئله‌ی قبل، سه نابرابری را جمع می‌کنیم و عبارت را به صورت مجموع مربعات بازنویسی می‌کنیم. با جمع و بردن جمیع مقادیر به سمت چپ، به دست می‌آوریم:

$$2x+2y+2z+\sqrt{4x-1}+\sqrt{4y-1}+\sqrt{4z-1}=0$$

می‌خواهیم این عبارت را به صورت مجموع سه مربع، یکی تنها وابسته به x، یکی تنها وابسته به y، و یکی تنها وابسته به z، بنویسیم. طرفین آن را بر ۲ تقسیم و به $x+\sqrt{x-\frac{1}{4}}$ توجه می‌کنیم. حضور $\frac{1}{4}$ زیر ریشه‌ی دوم، جمع و تفریق $\frac{1}{4}$ را مطرح می‌کند. در این صورت داریم:

$$x-\frac{1}{4}+\sqrt{x-\frac{1}{4}}+\frac{1}{4}=\left(\sqrt{x-\frac{1}{4}}-\frac{1}{2}\right)^2$$

با بازگشت به مسئله‌ی اصلی داریم:

$$\left(\sqrt{x-\frac{1}{4}}-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\sqrt{y-\frac{1}{4}}-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\sqrt{z-\frac{1}{4}}-\frac{1}{2}\right)^2=0$$

بنابراین، هریک از این مربعات باید برابر ۰ باشد و نتیجه می‌گیریم:

$$x=y=z=\frac{1}{2}$$

تنها جواب دستگاه مفروض است.

(مسابقه‌ی ریاضی رومانی، طرح از T. Andreescu)

۳. از آن‌جا که $a>0$ و $a\neq 1$، نابرابری را می‌توان به صورت:

$$\frac{1}{\log_a x}+\frac{1}{\log_a y}=\frac{4}{\log_a xy}$$

بازنویسی کرد که هم‌ارز:

$$\frac{\log_a x+\log_a y}{\log_a x\log_a y}=\frac{4}{\log_a x+\log_a y}$$

است. با حذف مخرج‌ها به دست می‌آوریم:

$$(\log_a x+\log_a y)^2=4\log_a x\log_a y$$

که مستلزم:

$$(\log_a x-\log_a y)^2=0$$

است. پس رابطه، تنها اگر $x=y$، می‌تواند برقرار باشد.

(مسابقه‌ی ریاضی رومانی، طرح از T. Andreescu)

۴. اگر بکوشیم، مربع شامل دو جمله‌ی اول سمت چپ را کامل کنیم، عبارت زیر را به دست می‌آوریم:

$$(x^2-y^2)^2+2x^2y^2+z^4-4xyz$$

حضور $2x^2y^2$ و $-4xyz$، امکان افزودن $2z^2$ و سپس تکمیل مربعی دیگر را مطرح می‌کند. در این مرحله، ملاحظه‌ی این مطلب مشکل نیست که معادله را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$(x^2-y^2)^2+(z^2-1)^2+2(xy-z)^2=0$$

این معادله تنها اگر جمیع سه مربع برابر صفر باشند، می‌توانند برقرار باشد. از:

$$z^2-1=0$$

داریم: $z=\pm 1$. پس از تحلیلی سریع نتیجه می‌گیریم که جواب‌ها عبارت‌اند از:

$$(1,-1,-1)\text{ و }(-1,1,-1)\text{ و }(1,1,1)$$

(Revista Matematică din Timisoara (Timisoara Mathematics Reviews), proposed by T. Andreescu)

۵. از نابرابری دوم به دست می‌آوریم:

$$z\geq |x+y|-1$$

از استفاده از آن در نابرابری اول حاصل می‌شود:

$$2xy-(1-|x+y|)^2\geq 1$$

به ازای انتخابی از علامت‌های بعلاوه و منها داریم:

$$2xy-(1+|x+y|)^2=2xy-|x+y|^2+2|x+y|-1$$
$$=2xy-x^2-y^2-2xy+2(\pm x\pm y)-1$$
$$=-x^2-y^2+2(\pm x\pm y)-1$$

از نابرابری تحویل‌یافته‌ی فوق نتیجه می‌گیریم:

$$0\geq x^2+y^2-2(\pm x\pm y)+1+1=(1\pm x)^2+(1\pm y)^2$$

هر دو مربع حاصل باید برابر صفر باشند. درنتیجه، x و y، می‌توانند تنها مقادیر ۱ یا ۱− را داشته باشند. گذشته از این، در فوق ملاحظه می‌کنیم که xy مثبت است، بنابراین باید x و y علامت یکسان داشته باشند. به ازای $x=y=1$ یا $x=y=-1$ دو مورد:

$$2-z^2\geq 1 \text{ و } z-2\geq -1$$

را به دست می‌آوریم و درنتیجه: $z^2\leq 1$ و $z\geq 1$.

تنها z صادق در دو نابرابری، $z=1$ است. درنتیجه، برای مسئله‌ی ما دو جواب:

$$x=y=z=1$$

و:

$$x=y=-1 \text{ و } z=1$$

موجود است.

(T. Andreescu)

۶. با تکمیل مربع‌ها به دست می‌آوریم:

$$x^4+ax^3+bx^2+cx+1$$
$$=(x^2+\frac{a}{2}x)^2+(b-\frac{a^2+c^2}{4})x^2+(x+1)^2$$

در این صورت، نابرابری از این مطلب نتیجه می‌شود که:

$$b\geq (a^2+c^2)/4$$

(Revista Matematică din Timisoara (Timisoara Mathematics Reviews), proposed by T. Andreescu)

۷. نابرابری مطلوب، هم‌ارز با نابرابری زیر است:

$$\frac{1}{2}\left[(x-y)^2+(x-z)^2+(z-x)^2\right]\geq\frac{3}{4}(x-y)^2$$

یا:

$$3\left[(x-z)^2+(z-x)^2\right]\geq (x-y)^2$$

این نابرابری، با قرار دادن $a=y-z$ و $b=z-x$ به صورت:

$$2(a^2+b^2)\geq (a+b)^2$$

درمی‌آید، که به $(a-b)^2\geq 0$ تحویل می‌شود.

۸. سعی می‌کنیم، معادله را به مجموع دو مربع برابر با صفر تبدیل کنیم. به این منظور، برابری را در ۲ ضرب می‌کنیم، مقادیر

را به سمت راست می‌بریم و مربع‌ها را کامل می‌کنیم. در این صورت داریم:

$$(x_1+x_2+\cdots+x_n)-2\sqrt{x_1-1}-4\sqrt{x_2-2^2}-\cdots-2n\sqrt{x_n-n^2}$$

$$=(x_1-1-2\sqrt{x_1-1}+1)+(x_2-2^2-4\sqrt{x_2-2^2}+2^2)+\cdots$$

$$+(x_n-n^2-2n\sqrt{x_n-n^2}+n^2)=(\sqrt{x_1-1}-1)^2$$

$$+(\sqrt{x_2-2^2}-2)+\cdots+(\sqrt{x_n-n^2}-n)^2$$

مجموع این مربع‌ها، بنا به فرض، باید برابر ۰ باشد. درنتیجه جمیع مربع‌ها برابر ۰ هستند. به این ترتیب:

$$\sqrt{x_1-1}=1,\ \sqrt{x_2-2^2}=2,\ldots,\ \sqrt{x_n-n^2}=n$$

پاسخ منحصر به فرد معادله عبارت است از:

$$x_1=2,\ x_2=8,\ \ldots,\ x_n=2n^2$$

(Gazeta Matematică (Mathematics Gazette, Bucharest), proposed by T. Andreescu)

۹. الف) با مربع کردن دو طرف به دست می‌آوریم:

$$a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+2abc(a+b+c)\ge 3abc(a+b+c)$$

که هم‌ارز با نابرابری زیر است:

$$\frac{1}{2}\left[(ab-bc)^2+(bc-ca)^2+(ca-ab)^2\right]\ge 0$$

ب) نابرابری هم‌ارز با نابرابری زیر است:

$$\sqrt{12abc}\le(a+b+c)^2-(a^2+b^2+c^2)$$

که با نابرابری زیر همسان است:

$$\sqrt{12(a+b+c)abc}\le 2(ab+bc+ca)$$

و به نابرابری پیشین تحویل می‌شود.

(قسمت ب در المپیاد ریاضی اتریش ۱۹۸۴ آمده است.)

۱۰. هم‌چون مثال مقدمه، مقادیر خاصی برای m، n و k در معادله‌ی مفروض وارد می‌کنیم. با فرض:

$$m=n=k=0$$

نابرابری:

$$2f(0)-f^2(0)\ge 1$$

را به دست می‌آوریم. درنتیجه:

$$0\ge(f(0)-1)^2$$

که مستلزم $f(0)=1$ است. به ازای:

$$m=n=k=1$$

همین استدلال نشان می‌دهد که: $f(1)=1$. به ازای:

$$m=n=0$$

نابرابری زیر را به دست می‌آوریم:

$$2-f(k)\ge 1$$

درنتیجه، به ازای هر k، $f(k)\le 1$. و نیز، به‌ازای $k=1$ و $m=0$ نابرابری:

$$1+f(n)-1\ge 1$$

را به دست می‌آوریم که مستلزم $f(n)\ge 1$، به ازای جمیع مقادیر n است. در این صورت، نتیجه می‌گیریم که به ازای هر n: $f(n)=1$.

(D. M. Bătinetu)

۱۱. از آن‌جا که در متوازی‌السطوح قائم، قطر توسط فرمول:

$$d=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$$

مشخص می‌شود، نابرابری مورد بحث با نابرابری زیر هم‌ارز است:

$$(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)^2\ge 3a^2b^2c^2(a^2+b^2+c^2)$$

این نابرابری، پس از تجدید دسته‌بندی جملات، به صورت زیر درمی‌آید:

$$\frac{c^4}{2}(a^2-b^2)^2+\frac{a^4}{2}(b^2-c^2)^2+\frac{b^4}{2}(c^2-a^2)^2\ge 0$$

توجه داشته باشید که برابری، اگر و تنها اگر $a=b=c$، برقرار است؛ یعنی اگر متوازی‌السطوح مورد بحث مکعب باشد.

(Pîrsan, L., Lazanu, C. G., Probleme de algebră si trigonometrie (Problems in algebra and trigonometry), Facla, Timisoara, 1983)

۱۲. باید نشان دهیم که:

$$1-8\cos A\cos B\cos C\ge 0$$

سمت چپ را با استفاده از اتحادهای مثلثاتی به مجموع مربع‌ها تبدیل می‌کنیم. فرمول ضرب به جمع حاصل‌ضرب کسینوس‌ها می‌دهد:

$$1-8\cos A\cos B\cos C=1-4\cos A(\cos(B-C)$$
$$+\cos(B+C))$$

توجه داشته باشید:

$$\cos(B+C)=-\cos(\pi-B-C)=-\cos A$$

و:

$$\sin^2(B-C)+\cos^2(B-C)=1$$

عبارت فوق برابر است با:

$$\sin^2(B-C)+\cos^2(B-C)-4\cos A\cos(B-C)$$
$$+4\cos^2 A=(\sin(B-C))^2+(\cos(B-C)-2\cos A)^2$$

و مورد اخیر، به طور واضح نامنفی است.

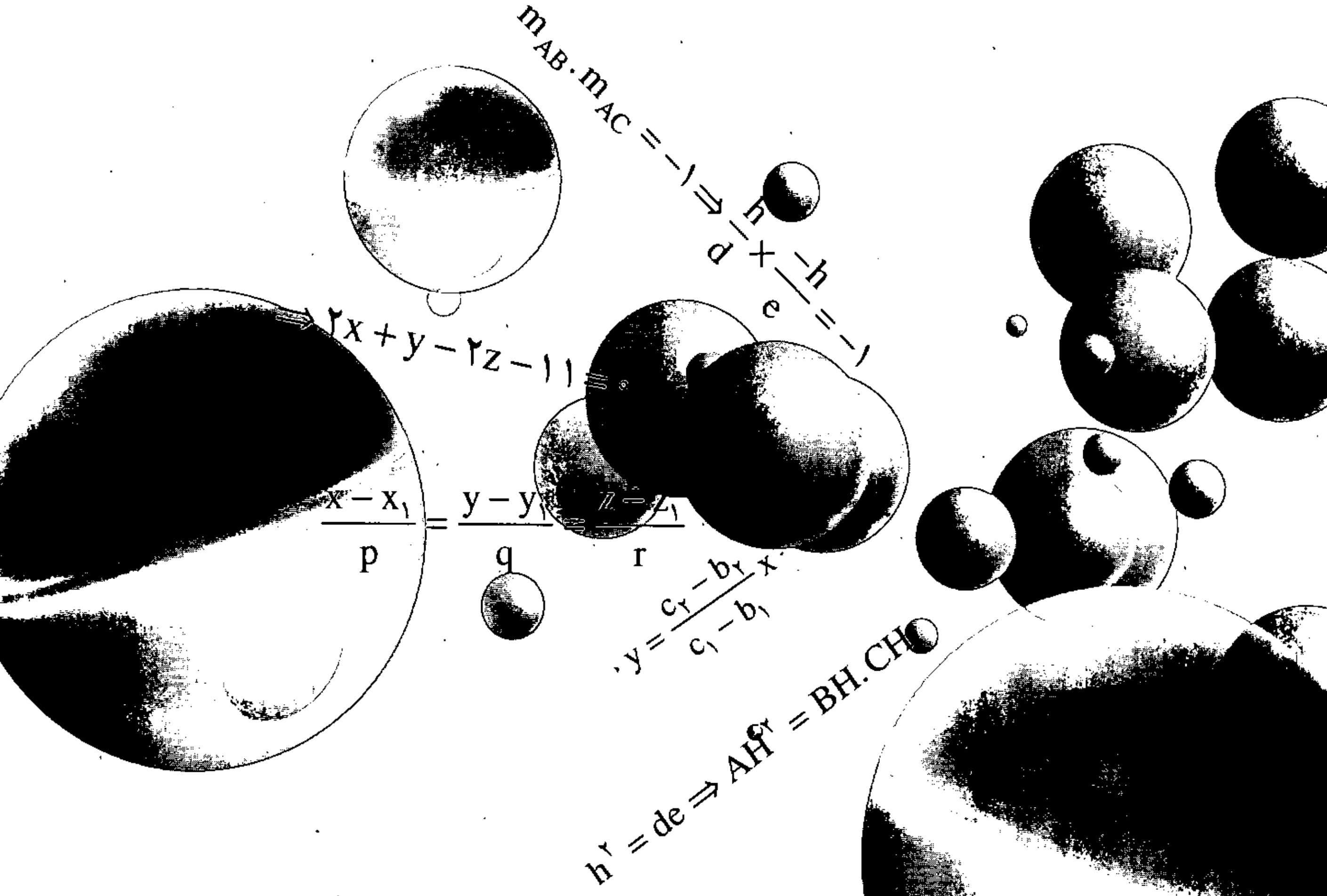
۱۳. با استفاده از فرمول جمع کسینوس به دست می‌آوریم:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} ij\cos(a_i-a_j)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(ij\cos a_i\cos a_j+ij\sin a_i\sin a_j)$$

$$=\sum_{i=1}^{n} i\cos a_i\sum_{j=1}^{n} j\cos a_j+\sum_{i=1}^{n} i\sin a_i\sum_{j=1}^{n} j\sin a_j$$

$$=(\sum_{i=1}^{n} i\cos a_i)^2+(\sum_{i=1}^{n} i\sin a_i)^2\ge 0$$

1. Andreescu



رویکرد هندسی- رویکرد جبری در آموزش هندسه (۴)

● محمدهاشم رستمی

اشاره

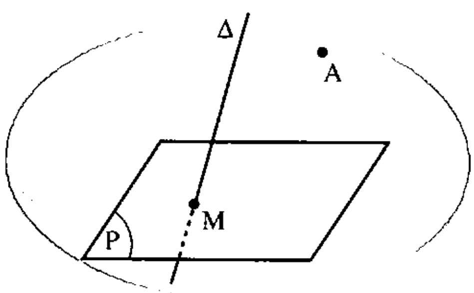
در شماره های قبل راجع به رویکرد هندسی و رویکرد جبری در آموزش هندسه بحث شد و مسائلی با هر دو رویکرد در فضاهای دو بعدی و سه بعدی اقلیدوس حل شده، اینک در ادامه به حل مسائلی در فضای سه بعدی با هردو رویکرد خواهیم پرداخت.

مثال۳. نقطه‌ی A، خط Δ و صفحه‌ی P داده شده‌اند. از نقطه‌ی A خطی رسم کنید که با صفحه‌ی P موازی باشد و خط Δ را قطع کند.

حل:

الف) روش هندسی

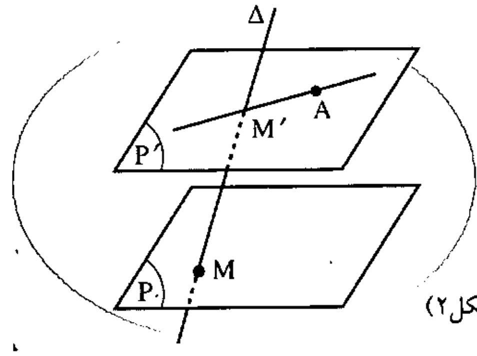
چون در صورت مسئله برای وضع نقطه‌ی A، خط Δ و صفحه‌ی P نسبت به هم، شرطی در نظر گرفته نشده است، پس مسئله حالت‌های متفاوتی می‌تواند داشته باشد. ما مسئله را در حالت کلی حل می‌کنیم؛ یعنی حالتی را در نظر می‌گیریم که نقطه‌ی A روی خط Δ و صفحه‌ی P قرار نداشته باشد و خط Δ موازی صفحه‌ی P نباشد.



(شکل۱)

در این صورت، خط Δ صفحه‌ی P را در نقطه‌ای مانند M قطع خواهد کرد (شکل۱).

برای حل مسئله در این حالت، از این راهبرد (استراتژی) استفاده می‌کنیم که مسئله را حل شده در نظر می‌گیریم.



(شکل۲)

فرض می‌کنیم، مسئله حل شده و خط AM′ جواب مسئله است؛ یعنی خطی است که از نقطه‌ی A گذشته، با صفحه‌ی P موازی است و خط Δ را در نقطه‌ی M′ قطع کرده است. چون تمام خط‌هایی که از یک نقطه مانند A موازی صفحه‌ی P رسم می‌شوند، در یک صفحه مانند P′ قرار دارند که از نقطه‌ی A موازی صفحه‌ی P رسم می‌شود، پس خط AM′ نیز خطی متعلق به این صفحه است. از طرف دیگر، نقطه‌ی M′ که محل برخورد خط Δ با خط AM′ است، روی صفحه‌ی P′ قرار دارد. یعنی در واقع نقطه‌ی M′ محل برخورد صفحه‌ی P′ با خط Δ است. بنابراین برای حل مسئله چنین عمل می‌کنیم:

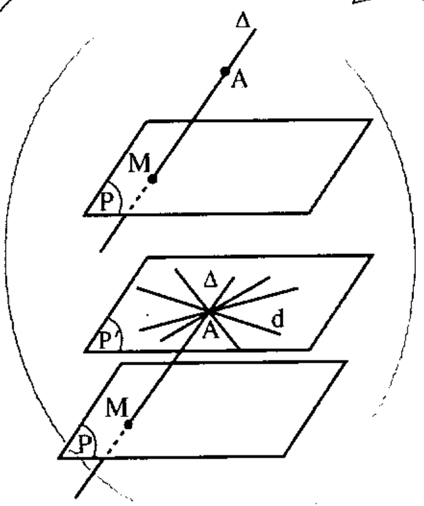
- صفحه‌ی P′، یعنی مکان هندسی خط‌هایی را که از نقطه‌ی A موازی صفحه‌ی P رسم می‌شوند، رسم می‌کنیم.

- نقطه‌ی برخورد خط Δ با صفحه‌ی P′ را M′ می‌نامیم (در این حالت که در نظر گرفته‌ایم، خط Δ حتماً صفحه‌ی P′ را قطع می‌کند. زیرا می‌دانیم که اگر دو صفحه موازی باشند و خطی یکی از این دو صفحه را قطع کند، دیگری را نیز قطع خواهد کرد).

- از نقطه‌ی A به نقطه‌ی M′ وصل می‌کنیم. خط منحصر به فرد AM′ جواب مسئله است. زیرا خطی است که از نقطه‌ی A گذشته است، خط Δ را در نقطه‌ی M′ قطع کرده است و موازی صفحه‌ی P نیز می‌باشد (اگر دو صفحه موازی باشند، هر خط واقع در یک صفحه با صفحه‌ی دیگر موازی است).

بحث:

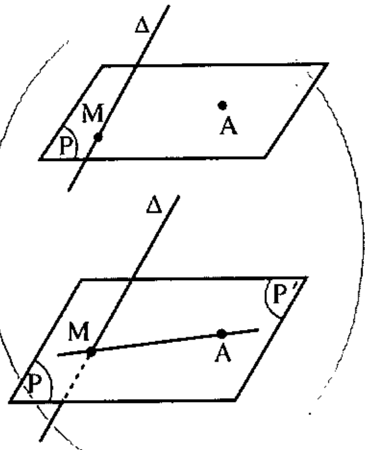
۱. اگر نقطه‌ی A روی خط Δ باشد و خط Δ موازی صفحه‌ی P نباشد (شکل۳)، صفحه‌ی P′ که از نقطه‌ی A موازی صفحه‌ی P رسم می‌شود، خط Δ را در همان نقطه‌ی A قطع می‌کند. در این حالت، هر خطی مانند d که از نقطه‌ی A در صفحه‌ی P′ رسم شود، جواب مسئله است؛ یعنی بی‌شمار خط جواب مسئله است (شکل۴).



(شکل۳)

(شکل۴)

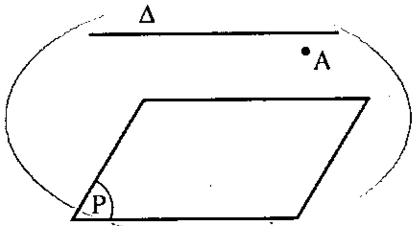
۲. اگر نقطه‌ی A فقط روی صفحه‌ی P باشد و خط Δ موازی صفحه‌ی P نباشد (شکل۵)، صفحه‌ی P′ بر صفحه‌ی P منطبق خواهد شد. پس اگر نقطه‌ی برخورد خط Δ با صفحه‌ی P را M بنامیم، خط AM جواب مسئله است، زیرا: از نقطه‌ی A می‌گذرد، خط Δ را در نقطه‌ی M قطع کرده و موازی صفحه‌ی P است؛ چون روی این صفحه است. این جواب منحصر به فرد است (شکل۶).



(شکل۵)

(شکل۶)

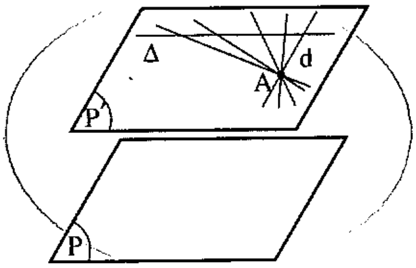
۳. اگر نقطه‌ی A روی صفحه‌ی P و خط Δ نباشد، اما خط Δ موازی صفحه‌ی P باشد (شکل۷)، در این حالت صفحه‌ی P′ که از نقطه‌ی A موازی صفحه‌ی P رسم می‌شود، نسبت به خط Δ دو حالت می‌تواند پیدا کند:



(شکل۷)

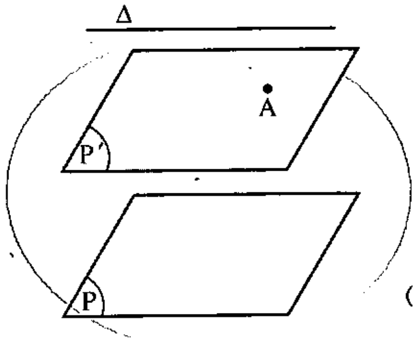
الف) خط Δ روی صفحه‌ی P′ قرار گیرد (شکل۸). در این صورت، هر خطی مانند d که از نقطه‌ی A در صفحه‌ی P′

رسم شود و خط Δ را قطع کند، جواب مسئله است و مسئله بی‌شمار جواب دارد.



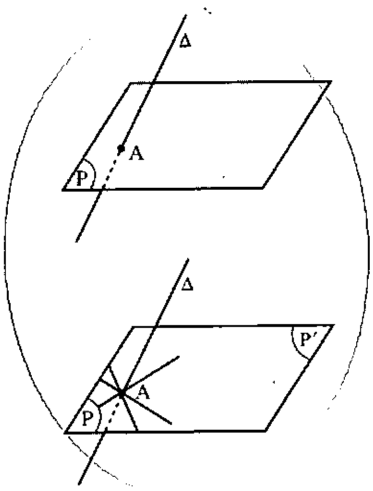
(شکل۸)

ب) خط Δ روی صفحه‌ی P' قرار نگیرد. در این صورت، خط Δ موازی صفحه‌ی P' خواهد بود و در این حالت مسئله جواب ندارد. یعنی هیچ خطی وجود ندارد که از نقطه‌ی A بگذرد، موازی صفحه‌ی P باشد و خط Δ را قطع کند (شکل۹).



(شکل۹)

۴. اگر خط Δ با صفحه‌ی P متقاطع باشد و نقطه‌ی برخورد آن‌ها همان نقطه‌ی A باشد (شکل۱۰)، صفحه‌ی P' که از نقطه‌ی A موازی صفحه‌ی P رسم می‌شود، بر صفحه‌ی P منطبق است و در این حالت هر خطی که از نقطه‌ی A در صفحه‌ی P رسم شود، جواب مسئله است و مسئله بی‌شمار جواب دارد (شکل۱۱).

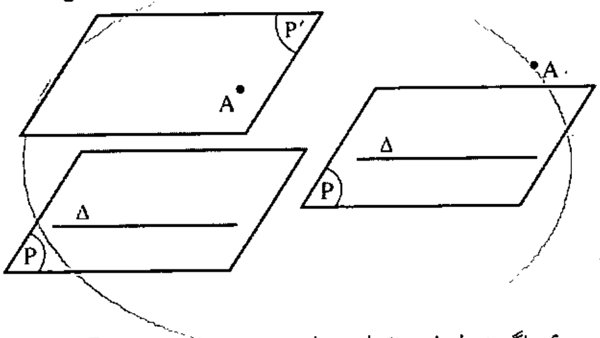


(شکل۱۰)

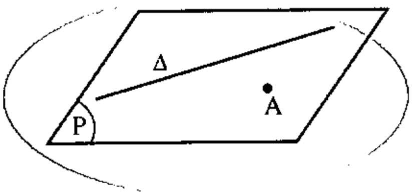
(شکل۱۱)

۵. اگر خط Δ روی صفحه‌ی P باشد و نقطه‌ی A روی صفحه‌ی P نباشد (شکل۱۲)، در این صورت صفحه‌ی P' که از نقطه‌ی A موازی صفحه‌ی P رسم شده است، با خط Δ موازی خواهد بود و هر خطی که از این نقطه در صفحه‌ی P' رسم شود، خط Δ را قطع نخواهد کرد. پس مسئله دارای جواب نیست.

(شکل۱۲) (شکل۱۳)

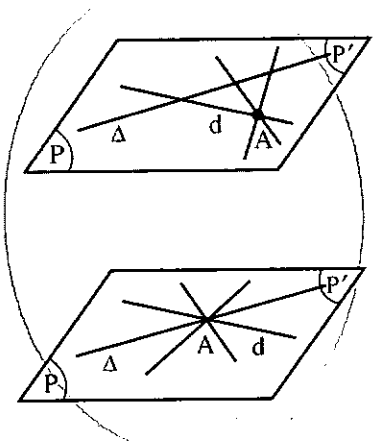


۶. اگر خط Δ و نقطه‌ی A هر دو روی صفحه‌ی P باشند (شکل۱۴)، صفحه‌ی P' بر صفحه‌ی P منطبق خواهد بود. در این حالت هر خطی مانند d از صفحه‌ی P که از نقطه‌ی A بگذرد و خط Δ را قطع کند، جواب مسئله است و مسئله در این حالت بی‌شمار جواب دارد.



(شکل۱۴)

در این حالت نقطه‌ی A می‌تواند روی خط Δ باشد که در این صورت، همه‌ی خط‌هایی از صفحه‌ی P که از نقطه‌ی A متقاطع با خط Δ رسم می‌شوند، جواب مسئله هستند.



(شکل۱۵)

(شکل۱۶)

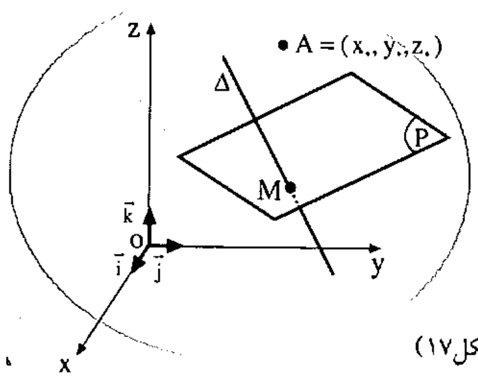
بدیهی است که مسئله بی‌شمار جواب دارد (شکل۱۶).

سؤال: آیا مسئله حالت دیگری نیز می‌تواند داشته باشد؟

ب) روش جبری

دستگاه مختصات قائم o-xyz را که از سه محور دو به دو عمود برهم x′ox ، y′oy و z′oz به ترتیب با بردارهای یکه‌ی i ، j و

$\vec{k}$ تشکیل شده است، در نظر می‌گیریم. در این صورت:



(شکل ۱۷)

- نقطه‌ی A به مختصات $A=(x_\circ,y_\circ,z_\circ)$؛
- صفحه‌ی P به معادله‌ی $ax+by+cz+d=\circ$؛
- خط Δ به معادله‌ی $\frac{x-x_1}{p}=\frac{y-y_1}{q}=\frac{z-z_1}{r}$،

خواهند بود.

اکنون می‌خواهیم معادله‌ی خطی را بنویسیم که از نقطه‌ی $A=(x_\circ,y_\circ,z_\circ)$ می‌گذرد، با صفحه‌ی $P: ax+by+cz+d=\circ$ موازی است و خط $D: \frac{x-x_1}{p}=\frac{y-y_1}{q}=\frac{z-z_1}{r}$ را قطع می‌کند.

با توجه به این که مکان هندسی خط‌هایی که از یک نقطه موازی یک صفحه رسم می‌شوند، صفحه‌ای است که از آن نقطه موازی آن صفحه رسم می‌شود، باید معادله‌ی صفحه‌ی P' را که از نقطه‌ی A موازی صفحه‌ی P رسم می‌شود، بنویسیم. می‌دانیم معادله‌ی تمامی صفحه‌هایی که موازی صفحه‌ی $P: ax+by+cz+d=\circ$ هستند، به صورت $ax+by+cz+d'=\circ$ است. برای این که این صفحه از نقطه‌ی $A=(x_\circ,y_\circ,z_\circ)$ بگذرد، باید مختصات این نقطه در معادله‌ی آن صدق کند؛ یعنی داشته باشیم:

$$ax_\circ+by_\circ+cz_\circ+d'=\circ \Rightarrow d'=-(ax_\circ+by_\circ+cz_\circ)$$

پس صفحه‌ی P' به معادله‌ی زیر است:

$$P': ax+by+cz-(ax_\circ+by_\circ+cz_\circ)=\circ$$

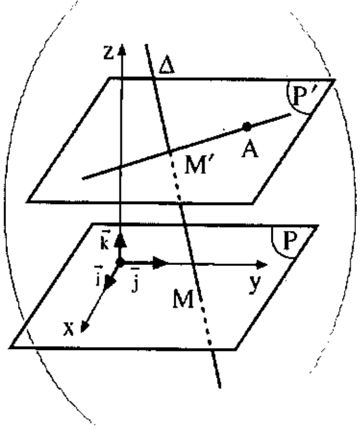
اکنون مختصات نقطه‌ی M'، محل برخورد صفحه‌ی P' با خط Δ را، با حل دستگاه سه معادله‌ی سه مجهولی زیر به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} P': ax+by+cz-(ax_\circ+by_\circ+cz_\circ)=\circ \\ \Delta: \frac{x-x_1}{p}=\frac{y-y_1}{q}=\frac{z-z_1}{r}=t \end{cases} \Rightarrow M'=(x_2,y_2,z_2)$$

با داشتن مختصات دو نقطه‌ی $A=(x_\circ,y_\circ,z_\circ)$ و $M'=(x_2,y_2,z_2)$، معادله‌ی خط AM' را به این صورت می‌نویسیم:

$$AM': \frac{x-x_\circ}{x_2-x_\circ}=\frac{y-y_\circ}{y_2-y_\circ}=\frac{z-z_\circ}{z_2-z_\circ}$$

نکته‌ی مهم ۱. بحث در وجود جواب برای مسئله و تعداد جواب‌های مسئله (در صورت وجود) در رویکرد جبری برای حل مسئله، همانند راه‌حل هندسی آن است. شما خود می‌توانید آن‌ها را بررسی کنید.



(شکل ۱۸)

نکته‌ی مهم ۲. برای حل مسئله به روش جبری-مختصاتی، ما می‌توانیم دستگاه مختصات قائم o-xyz را چنان اختیار کنیم که صفحه‌ی xoy همان صفحه‌ی P باشد. در این صورت خواهیم داشت:

- صفحه‌ی P به معادله‌ی $z=\circ$
- نقطه‌ی A به مختصات $A=(x_\circ,y_\circ,z_\circ)$
- خط Δ به معادله‌ی $\frac{x-x_1}{p}=\frac{y-y_1}{q}=\frac{z-z_1}{r}$

در این دستگاه مختصات، صفحه‌ی P' به معادله‌ی $z=z_\circ$ خواهد بود و مختصات نقطه‌ی M' از دستگاه سه معادله‌ی سه مجهولی:

$$\begin{cases} P': z=z_\circ \\ \Delta: \frac{x-x_1}{p}=\frac{y-y_1}{q}=\frac{z-z_1}{r} \end{cases}$$

به صورت:

$$M'\begin{cases} x=p(\frac{z_\circ-z_1}{r})+x_1 \\ y=q(\frac{z_\circ-z_1}{r})+y_1 \\ z=z_\circ \end{cases}$$

محاسبه می‌شود که پس از آن، با داشتن مختصات دو نقطه‌ی A

و M'، معادله‌ی خط AM' را می‌توان نوشت.

نکته‌ی مهم ۳. همان‌طور که قبلاً هم ذکر شد، هر مسئله یا قضیه‌ی هندسه را می‌توان با رویکردهای هندسی و جبری-مختصاتی حل کرد، اما باید توجه کنیم که کدام روش ساده‌تر است. در انتخاب رویکرد جبری-مختصاتی، نکته‌ی مهمی که حتماً باید به آن توجه داشته باشیم، چگونگی انتخاب دستگاه مختصات است.

اینک چند مثال از رویکرد جبری-مختصاتی مسئله‌ی داده شده را می‌بینیم:

مثال اول. نقطه‌ی $A=(2,5,-1)$ و خط $\Delta: \frac{x}{4}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z+2}{3}$ و صفحه‌ی P به معادله‌ی $2x+y-2z-3=0$ داده شده است. معادله‌ی خطی را بنویسید که از نقطه‌ی A می‌گذرد، با صفحه‌ی P موازی است و خط Δ را قطع می‌کند.

حل: نخست می‌توانیم وضع نقطه‌ی A، خط Δ و صفحه‌ی P را نسبت به هم مشخص کنیم، اما نیازی به این کار نیست. ما راه‌حل کلی را که برای روش جبری-مختصاتی بیان کردیم، به‌کار می‌بریم. به این ترتیب که نخست معادله‌ی صفحه‌ی P' را که از نقطه‌ی A موازی صفحه‌ی P رسم می‌شود، می‌نویسیم. سپس نقطه‌ی برخورد P' با خط Δ را به‌دست می‌آوریم و M' می‌نامیم. آن‌گاه معادله‌ی خط AM'، یعنی خط خواسته شده را می‌نویسیم. داریم:

معادله‌ی کلی صفحه‌های موازی صفحه‌ی P $\quad 2x+y-2z+d=0$

$$A=(2,5,-1)\xrightarrow{\text{در معادله‌ی بالا}}2(2)+(5)-2(-1)+d=0\Rightarrow d=-11$$

$$\Rightarrow 2x+y-2z-11=0 \qquad \text{معادله‌ی صفحه‌ی } P'$$

$$\begin{aligned}P'&:\begin{cases}2x+y-2z-11=0\\ \frac{x}{4}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z+2}{3}=t\end{cases}\Rightarrow x=4t,\ y=-t-1,\ z=3t-2\\ \Delta&:\end{aligned}$$

$$\Rightarrow 2(4t)+(-t-1)-2(3t-2)-11=0\Rightarrow t=8$$
$$\Rightarrow M'=(32,-9,22)\ ,\ A=(2,5,-1)$$
$$\Rightarrow AM': \frac{x-2}{32-2}=\frac{y-5}{-9-5}=\frac{y+1}{22+1}\Rightarrow\frac{x-2}{30}=\frac{y-5}{-14}=\frac{y+1}{23}$$

معادله‌ی خط AM'

نکته: معادله‌ی صفحه‌ی P' نشان می‌دهد که نقطه‌ی A روی صفحه‌ی P نیست. زیرا اگر نقطه‌ی A روی صفحه‌ی P قرار داشت، معادله‌ی صفحه‌ی P' همان معادله‌ی صفحه‌ی P به دست می‌آمد. به‌علاوه، نقطه‌ی A روی خط Δ نیست. زیرا اگر چنین بود، مختصات نقطه‌ی M' همان مختصات نقطه‌ی A به دست می‌آمد. و این نشان می‌دهد که نیازی به بررسی وضع نقطه‌ی A، خط Δ و صفحه‌ی P نسبت به هم نیست.

مثال دوم. معادله‌ی خطی را بنویسید که از نقطه‌ی $A=(2,-1,1)$ می‌گذرد، با صفحه‌ی $P: x+y+2z+1=0$ موازی است و خط $P: \frac{x+1}{3}=\frac{y+3}{2}=\frac{z}{1}$ را قطع می‌کند.

حل: داریم:

معادله‌ی کلی صفحه‌ی موازی صفحه‌ی P

$$x+y+2z+d=0$$

$$A=(2,-1,1)\xrightarrow{\text{در معادله‌ی بالا}}2-1+2+d=0\Rightarrow d=-3$$
$$\Rightarrow x+y+2z-3=0 \qquad \text{معادله‌ی صفحه‌ی } P'$$

$$\begin{cases}x+y+2z-3=0\\ \frac{x+1}{3}=\frac{y+3}{2}=\frac{z}{1}=t\Rightarrow x=3t-1,\ y=2t-3,\ z=t\end{cases}$$

$$\Rightarrow 3t-1+2t-3+2t-3=0\Rightarrow t=1$$
$$\Rightarrow M'=(2,-1,1)=A$$

معادله‌ی صفحه‌ی P' نشان می‌دهد که نقطه‌ی A روی صفحه‌ی P نیست، اما مختصات نقطه‌ی M' همان مختصات نقطه‌ی A است. پس نقطه‌ی A بر خط Δ قرار دارد. بنابراین، هر خطی که از نقطه‌ی A یا همان M' در صفحه‌ی P' رسم شود، جواب مسئله است. برای نوشتن معادله‌ی هریک از این خط‌ها کافی است، یک نقطه‌ی دل‌خواه از P' را به‌دست آوریم و معادله‌ی خط گذرنده از این نقطه و نقطه‌ی A را بنویسیم. مثلاً داریم:

$$x=0,\ y=0\xrightarrow{\text{در معادله‌ی } P'}0+0+2z-3=0\Rightarrow z=\frac{3}{2}$$

$$B=(0,0,\tfrac{3}{2})\in P'$$

$$\Rightarrow AB: \frac{x-0}{2-0}=\frac{y-0}{-1-0}=\frac{z-\frac{3}{2}}{1-\frac{3}{2}}\Rightarrow\frac{x}{2}=\frac{y}{-1}=\frac{z-\frac{3}{2}}{-\frac{1}{2}}$$

معادله‌ی یکی از خط‌های جواب مسئله

$$x=0,\ z=0\xrightarrow{\text{در معادله‌ی } P'}0+y+0-3=0\Rightarrow y=3$$
$$\Rightarrow C=(0,3,0) \qquad \text{نقطه‌ی دیگری از صفحه‌ی } P'$$
$$AC: \frac{x-0}{2-0}=\frac{y-3}{-1-3}=\frac{z-0}{1-0}\Rightarrow\frac{x}{2}=\frac{y-3}{-4}=\frac{z}{1}$$

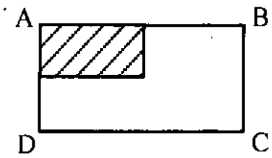
یک خط دیگر جواب مسئله

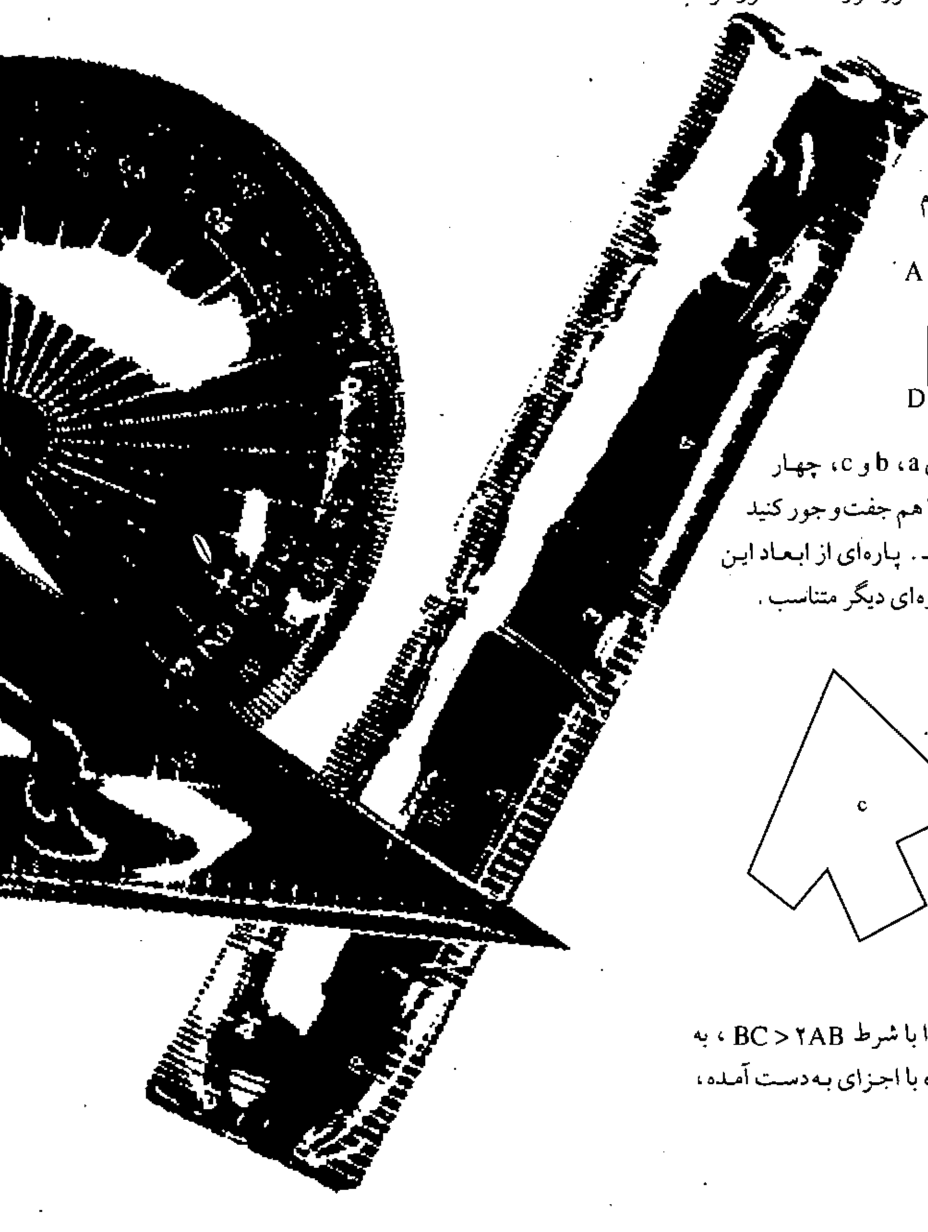
هندسـ فکرکنیـ

در مجله‌ی «برهان» به شماره‌ی ۵۱، پاییز سال ۱۳۸۵، در سرفصل مطلبی به نام «هندسی فکر کنیم»، گرافیست خوش‌ذوق مجله برای موضوع سؤال، چاهی در زمین چهارگوشی رسم کرده بود که دو نفر در طرفین آن به فکر نشسته بودند تا درخصوص تقسیم زمین مثلث‌شکلی بین سه نفر به قسمت‌های معادل، چاره‌ای بیندیشند و طوری عمل کنند که چاه در مرز مشترک صاحبان زمین قرار گیرد، تا هریک از آنان بتواند، در زمین سهمیه‌ی خود از آب چاه استفاده کند. این ذوق و سلیقه‌ی تحسین‌برانگیز رسام شما بنده را بر آن داشت تا در مورد این زمین چهارگوش هم مسئله‌ای مشابه را مطرح کنم.

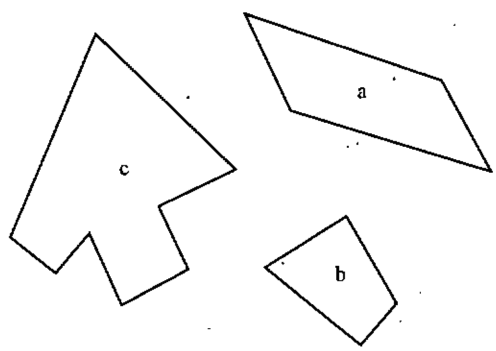
اینک آن سؤال: در زمین چهارگوش محدّب دلخواهی، چاه در نقطه‌ای حفر شده است که چون از آن نقطه دو خط به موازات قطرهای چهارضلعی رسم کنند، هریک از آن خط‌ها از وسط یک قطر آن چهار ضلعی می‌گذرد. آیا می‌توانید این زمین را بین چهار نفر به قسمت‌های معادل چنان تقسیم کنید که چاه در نقطه‌ی مشترک مرزها قرار گیرد و هرکس در زمین خود به آب چاه دست‌رسی داشته باشد؟

سؤال دیگر: زمینی است به شکل مربع مستطیل ABCD. صاحب زمین، $\frac{1}{4}$ این زمین را (قسمت هاشورخورده) محصور کرد و بقیه را به چهار فرزندش سپرد تا بین خود به طور مساوی تقسیم کنند؛ آن‌طور که حدود زمین‌ها موازی ابعاد مستطیل باشد. این تقسیم را چگونه انجام می‌دهید؟

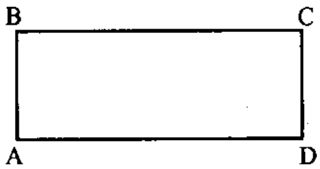




سؤال سوم: از هریک از شکل‌های a، b و c، چهار نمونه‌ی مشابه انتخاب و آن‌ها را طوری با هم جفت‌وجور کنید که یک هشت ضلعی منتظم به‌دست آید. پاره‌ای از ابعاد این شکل‌ها در مقایسه با هم مساوی‌اند و پاره‌ای دیگر متناسب.



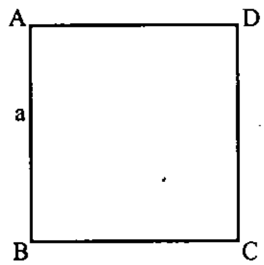
سؤال چهارم: مستطیل ABCD را با شرط $BC > 2AB$، به اجزایی چند تجزیه و تقسیم کنید و آن‌گاه با اجزای به‌دست آمده، مربعی معادل با آن بسازید.



این سؤال از مونتو کلا[1] (۱۷۷۸ م) است که آن را در جلد نوزدهم «آشنایی با ریاضیات» (خردادماه ۱۳۶۷) به سردبیری آقای **شهریاری** هم به چاپ رسانده‌ام.

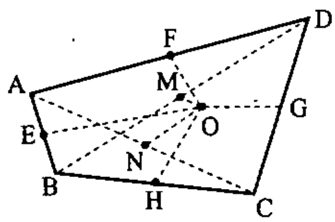
سؤال پنجم: سطح مربع ABCD به ضلع a را به سه قسمت متعادل تقسیم کنید، به نحوی که جاده‌ای به عرض l از بین دو قسمت متعادل بگذرد و سه قسمت را به هم مرتبط سازد.

این سؤال از **ابوالوفا بوزجانی** است که راه‌حلی هم برای آن ارائه داده است.



راهنمایی در مورد سؤال اول:

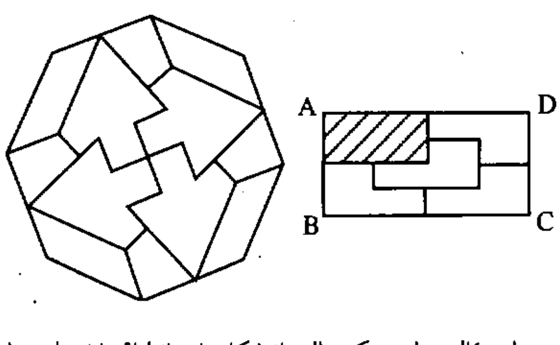
کافی است از O محل حفر چاه، خطوطی به وسط اضلاع چهارضلعی وصل شود.



استدلال معادل بودن شکل‌های حاصل را به عهده‌ی دانش‌آموز می‌گذارم؛ مثلاً:

$$S_{OEAF} = \frac{۱}{۴} S_{BADC}$$

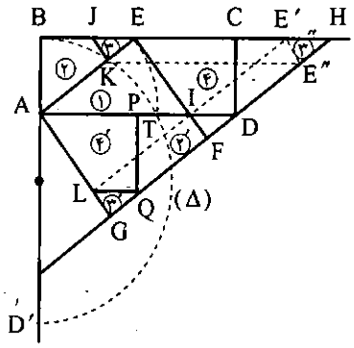
در مورد سؤال‌های دوم و سوم، فقط به رسم شکل اکتفا می‌کنم.



حل سؤال چهارم: یک حالت از شکل را در انطباق با شرط مسئله در این جا نشان داده‌ام. می‌توان با شرایط دیگری نیز مسئله را حل کرد. هم‌چنین به توضیح شکل و راهنمایی بسنده کرده‌ام. ارائه‌ی



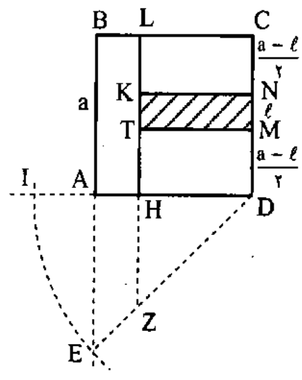
دلیل و استنتاج ساده است.



$AD' = BC$ در امتداد BA است و AT واسطه‌ی هندسی بین BA و BC. نقطه‌ی T با دوران به مرکز A و به شعاع AT، به نقطه‌ی E روی BC منتقل شده است. مربعی که روی AE ساخته شده، یعنی AEFG، جواب سؤال است و پیداست که ترکیبی از اجزای مستطیل است.

اما برای تجزیه‌ی مستطیل، خط (Δ) از رأس D را موازی AE رسم می‌کنیم. EF عمود بر Δ، ضلع AD را در I بین A و D قطع می‌کند. نقطه‌ی E را روی BC و امتدادش به اندازه‌ی AI در جهت B به C، هر چند تا که ممکن است، انتقال می‌دهیم؛ به طوری که از H (محل تلاقی Δ با BC) نگذرد (در این شکل این کار فقط یک بار میسر است و E′ به دست می‌آید). پس $EE' = AI$. از E′ آخرین نقطه‌ی انتقال یافته، عمود E′E″ را بر Δ رسم می‌کنیم. $EK = HE''$ و KJ عمود بر AE است. اجزای مستطیل در شکل با شماره‌های ۱ و ۲ و ۳ و ۴ نموده شده‌اند. همین اجزا در ترکیب مربع نیز مشخص‌اند (قطعه‌ی ′۲ = ۲ و قطعه‌ی ′۳ = ۳ و...).

حل سؤال پنجم: روی ضلع CD، دو طول NC و DM را مساوی $\frac{a-1}{۲}$ انتخاب می‌کنیم؛ پس: $MN = 1$. ضلع DA را تا I به اندازه‌ی $AI = DM$ امتداد می‌دهیم. قوسی به مرکز D و به شعاع DI امتداد ضلع BA را در E قطع می‌کند. EZ را مساوی DM روی DE جدا می‌کنیم و خط ZHL را موازی AB می‌کشیم. با توجه به موازی‌های NK و MT، سه قطعه‌ی مطلوب و معادل، KLCN و HTMD و ABLH هستند و جاده‌ی مورد نظر قسمت هاشورخورده است (محاسبه کنید).



1. Montucla

معرفی سایت‌های ریاضی جهان

The Math Forum @ Drexel

● احسان یارمحمدی

ادامه‌ی مطالب صفحه ۶

۳. **مسائل هفتگی مجله‌ی ریاضی** (Math Forum Problems of the Week)

این بخش شامل مسائل ریاضیاتی است که در موضوعات زیر دسته‌بندی شده‌اند و هر هفته ارائه می‌گردند:

۱. مبانی ریاضی (Math Fundamentals)
۲. جبر مقدماتی (Pre-Algebra)
۳. جبر (Algebra)
۴. هندسه (Geometry)

۴. **مسائل بیشتر و معماها**
(More problems and Puzzles)

تعدادی از عنوان‌های ارائه شده در این قسمت عبارت‌اند از:

۱. **مسئله‌ی هفتگی مقدماتی**
(Elementary problem of the Week)
۲. **مسئله‌ی هفتگی دوره‌ی راهنمایی**
(Middle School Problem of the Week)
۳. **مسئله‌ی هفتگی مثلثات و حساب دیفرانسیل و انتگرال**
(Trigonometry & Calculus of the Week)
۴. **مسئله‌ی هفتگی ریاضیات گسسته**
(Discrete Math problem of the Wee)
۵. **پروژه‌ی ماهیانه ی هندسه**
(Geometry Project of the Month)
۶. **مسئله‌ی هفتگی کالج مک‌آلیستر**
(Macalester College Problem of the Week)
۷. **مسائل هفتگی تهیه شده به وسیله‌ی دیگران**
(Problems of the Week Administerd by Others)

صفحه‌ی اصلی سایت The Math Forum @Drexel نیز دارای قسمتی با عنوان مشاهده‌ی بایگانی (Browse the Archive) است، شال موضوعات زیر:

۱. **اغلب پرسش‌های پاسخ داده شده**
(FAQ که مخفف Frequently Asked Questions است.)
۲. **فرمول‌ها** (Formulas)
۳. **پاسخ‌های انتخاب شده** (Selected Answers)
۴. **دوره‌ی ابتدایی** (Elementary School)
۵. **دوره‌ی راهنمایی** (Midlle School)
۶. **دوره‌ی متوسطه**(High School)
۷. **کالج و بالاتر** (College & Beyond)

جمع چیست؟

● میر شهرام صدر

اشاره

از هر کسی سؤال کنید: حاصل ۳+۲ چند می‌شود، بلافاصله می‌گوید: ۵. اگر دوباره از همان شخص بپرسید: آیا می‌توان به جای عمل جمع، بین دو عدد ۲ و ۳ عمل دیگری انجام داد و در این صورت، حاصل چه می‌شود، با کمی تأمل پاسخ می‌دهد، به جای عمل جمع، می‌توان عمل ضرب را بین دو عدد قرار داد و آن را به صورت ۳×۲ نوشت که حاصل آن برابر با ۶ می‌شود.

اگر این سؤال را دوباره تکرار کنید، ممکن است بگویند، عمل‌های تفریق و تقسیم را هم می‌توان بین این دو عدد انجام داد. درنتیجه خواهیم داشت:

$$۲-۳=-۱$$

$$۲\div۳=\frac{۲}{۳}$$

حال اگر همان سؤال قبلی را دوباره تکرار کنیم که: آیا می‌توان بین ۲ و ۳ عمل دیگری را انجام داد؟ ناگهان طرف مقابل پاسخ خواهد داد که: «**ما فقط چهار عمل اصلی را روی اعداد به کار می‌بریم و عمل دیگری را نمی‌شناسیم!**»

حق با اوست. در این مقاله سعی خواهیم کرد که مفهوم عمل بین دو عدد (یا دو عضو یک مجموعه) را بیان کنیم. سپس به غیر از چهار عمل اصلی، عمل‌های دیگری را بین دو عضو یک مجموعه تعریف می‌کنیم تا شما نیز بتوانید، خودتان عملیات دیگری را بین اعضای یک مجموعه تعریف کنید.

قبل از این‌که وارد بحث اصلی شویم، سؤالی دیگر را مطرح می‌کنیم که انگیزه‌ی اصلی از نگارش این مقاله است. معمولاً وقتی این سؤال را در کلاس درس از دانش‌آموزان می‌پرسیم، نسبت به آن اظهار بی‌اطلاعی می‌کنند. قبل از پاسخ به این سؤال، ابتدا باید چند مفهوم را برایشان شرح دهیم تا دید دانش‌آموزان نسبت به عمل بین دو عضو یک مجموعه، باز شود. حال این شما و این هم سؤال!

جمع یعنی چه؟

یعنی این عمل جمع که بین ۲ و ۳ انجام دادیم و گفتیم حاصل آن ۵ می‌شود. چه معنی دارد؟ برای پاسخ‌گویی به این سؤال، ابتدا مفهوم تابع را بیان می‌کنیم.

مفهوم تابع

تکامل مفهوم تابع حدود دو قرن به طول انجامید. دیریکله، ریاضی‌دان آلمانی (۱۸۵۹-۱۸۰۵ م) در اواسط قرن نوزدهم، تعریف امروزی تابع را به صورتی روشن بیان کرد و گفت: «y تابعی از متغیر x در بازه‌ی $a < x < b$ است؛ به شرطی که هر مقدار x از این بازه، با مقدار معین و مشخص از y متناظر باشد؛ البته این تناظر می‌تواند به هر ترتیب دل‌خواهی باشد.»

پیش از این تعریف، برای نخستین بار، مقدار متغیر (تابع) در قرن هفدهم و در نوشته‌های هندسی فرما (۱۶۵۵-۱۶۰۱ م) و دکارت، ریاضی‌دان فرانسوی، مطرح شد.

برای مثال، دکارت در کتاب هندسه‌ی خود، مفهوم تابع را به عنوان «تغییر عرض درنتیجه‌ی تغییر طول» بررسی می‌کند.

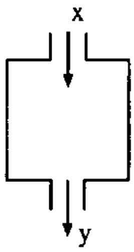
در قرن هجدهم، **یوهان برنولی** (۱۷۴۸-۱۶۶۷ م) دیدگاه جدیدی را نسبت به تابع مطرح می‌کند. او می‌گوید: «تابع دستوری است که مقدار یک متغیر را با مقدار متغیر دیگر درنظر می‌گیرد.»

در سال ۱۷۴۸، **لئوناردا ویلر، شاگرد یوهان برنولی**، نماد f (Function) را برای تابع درنظر گرفت و آن را از دیدگاه تحلیلی به این صورت مطرح کرد:

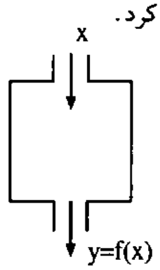
«تابع یک متغیر عبارت است از یک عبارت تحلیلی که به نحوی از این مقدار متغیر و از عددها یا مقدارهای ثابت تشکیل شده است.»

همان‌طور که ملاحظه کردید، تعریف تابع به صورت امروزی بین ریاضی‌دانان رایج نبود، بلکه همه‌ی آنان تصویر ذهنی مشترکی از این مفهوم داشتند. بهتر است برای بیان مفهوم تابع، از آن تصور ذهنی استفاده کنیم و مانند آن‌ها با مفهوم تابع درگیر شویم.

این تصور چنین بود که تابع مانند یک ماشین عمل می‌کند؛ به طوری که یک x را از ورودی می‌گیرد و تنها یک مقدار y از خروجی بیرون می‌دهد. پس می‌توان ابتدا از مدل زیر برای بیان مفهوم تابع استفاده کرد:



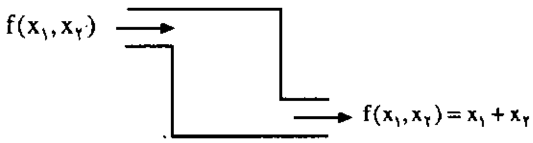
چون ماشین f عملی را روی x انجام می‌دهد، می‌توان عمل انجام‌شده روی x را با $f(x)$ نمایش داد. بنابراین می‌توان در خروجی به جای y از نماد $f(x)$ استفاده کرد.



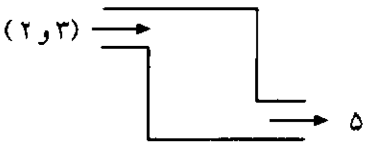
اکنون به این سؤال پاسخ می‌دهیم که جمع یعنی چه؟

تابعی مانند ماشین زیر را درنظر بگیرید؛ به طوری که از ورودی آن دو عدد x_1 و x_2 وارد ماشین می‌شوند. سپس ماشین عملی به نام جمع را روی x_1 و x_2 انجام می‌دهد. عمل انجام‌شده روی x_1 و x_2 را با نماد $f(x_1,x_2)$ یا $+(x_1,x_2)$ نمایش می‌دهیم.

از خروجی ماشین عددی بیرون می‌آید که حاصل جمع $x_1 + x_2$ است.



برای مثال، اگر دو عدد ۲ و ۳ را وارد ماشین کنیم، در خروجی عدد ۵ را ملاحظه خواهیم کرد.

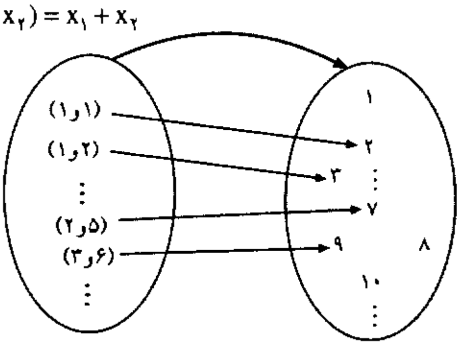


$$f(۲,۳) = +(۲,۳) = ۲ + ۳ = ۵$$

این ماشین را تابع جمع یا ماشین جمع می‌نامیم.

مجموعه‌ی اعداد طبیعی $\mathbb{N}$ را درنظر بگیرید. اگر هر دو عدد طبیعی x_1 و x_2 وارد ماشین جمع شوند، آن‌گاه از خروجی یک عدد طبیعی بیرون می‌آید که برابر با $x_1 + x_2$ است. درنتیجه، عمل جمع روی مجموعه‌ی $\mathbb{N}$ یک تابع است. یعنی برای هر $(x_1x_2) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}$، یک عدد طبیعی به صورت $(x_1 + x_2) \in \mathbb{N}$ وجود دارد که متناظر با آن است. بنابراین، تابع جمع را روی $\mathbb{N}$ می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\begin{cases} +: \mathbb{N}\times\mathbb{N} \to \mathbb{N} \\ +(x_1,x_2) = x_1 + x_2 \end{cases}$$



$$f(۱,۱) = +(۱,۱) = ۱ + ۱ = ۲$$
$$f(۱,۲) = +(۱,۲) = ۱ + ۲ = ۳$$
$$\vdots$$
$$f(۲,۵) = +(۲,۵) = ۲ + ۵ = ۷$$
$$f(۳,۶) = +(۳,۶) = ۳ + ۶ = ۹$$
$$\vdots$$

به طور کلی، تابع جمع را روی مجموعه‌ی $\mathbb{N}$ یک عمل دوتایی می‌نامیم. عمل دوتایی در مجموعه‌ی A، به ازای هر زوج مرتب از مجموعه‌ی $A \times A$، طبق دستور (ضابطه‌ی تابع) عضوی منحصر به فرد از A را مشخص می‌کند.

عمل دوتایی

تعریف: هر تابع $f: A \times A \to A$ را یک عمل دوتایی روی A می‌گوییم. یعنی عمل دوتایی f روی A، به هر زوج مرتب (x,y) از $A \times A$، عضو منحصربه‌فرد $z = f(x, y)$ از A را نسبت می‌دهد.

مثال: مجموعه‌ی $A = \{-۱,۰,۱\}$ را درنظر بگیرید:

الف) آیا عمل ضرب معمولی روی A یک عمل دوتایی است؟

ب) آیا عمل جمع معمولی روی A یک عمل دوتایی است؟

حل:

الف) ابتدا $A \times A$ را تشکیل می‌دهیم:

$$A \times A = \{-1,0,1\} \times \{-1,0,1\}$$
$$= \{(-1,-1),(-1,0),(-1,1),(0,-1),(0,0),(0,1),(1,-1),(1,0),(1,1)\}$$

اکنون عمل ضرب معمولی را روی هر زوج مرتب (x,y) از $A \times A$ اعمال می‌کنیم. بنابراین داریم:

$$\times(-1,-1) = (-1)\times(-1) = 1 \in A$$
$$\times(-1,0) = (-1)\times 0 = 0 \in A$$
$$\vdots \qquad \vdots$$
$$\times(1,1) = 1\times 1 = 1 \in A$$

ملاحظه می‌کنیم که برای هر (x,y) از $A \times A$، داریم:

$$\times(x,y) = x \times y = z \in A$$

در نتیجه، عمل ضرب معمولی روی A یک عمل دوتایی است، یا مجموعه‌ی A نسبت به عمل ضرب معمولی بسته است.

تذکر: اگر عملی روی مجموعه‌ی A یک عمل دوتایی باشد، آن‌گاه مجموعه‌ی A نسبت به آن عمل دوتایی بسته است.

ب) برای این منظور، عمل جمع معمولی را روی هر زوج مرتب (x,y) از $A \times A$ اعمال می‌کنیم:

$$+(-1,-1) = (-1)+(-1) = -2 \notin A$$

چون به یک مثال نقض رسیدیم، پس عمل جمع معمولی روی A یک عمل دوتایی نیست. به عبارت دیگر، مجموعه‌ی A نسبت به عمل جمع بسته نیست.

خلاصه

برای این که نشان دهیم، تابع f روی مجموعه‌ی A یک عمل دوتایی است، مراحل زیر را انجام می‌دهیم:

مرحله‌ی اول: مجموعه‌ی $A \times A$ را تشکیل می‌دهیم.

مرحله‌ی دوم: تابع f را روی هر زوج مرتب $(x,y) \in A \times A$ اعمال می‌کنیم. در صورتی که همواره حاصل $z = f(x,y)$ عضوی از A باشد، آن‌گاه f روی A یک عمل دوتایی است.

تذکر: اگر حتی یک مثال نقض پیدا شود که $z = f(x,y)$ عضوی از A نباشد، آن‌گاه f روی A یک عمل دوتایی نیست.

مثال: آیا عمل تفریق و عمل تقسیم روی مجموعه‌ی اعداد صحیح یک عمل دوتایی است؟

عمل تفریق روی Z یک عمل دوتایی است، زیرا برای هر زوج مرتب $(x,y) \in Z \times Z$ داریم:

$$f(x,y) = -(x,y) = x - y \in Z$$

اما عمل تقسیم روی Z یک عمل دوتایی نیست، زیرا: $(2,3) \in Z \times Z$ ؛ در حالی که:

$$f(2,3) = \div(2,3) = \frac{2}{3} \notin Z$$

همان‌طور که گفتیم ذکر یک مثال نقض برای رد کردن دوتایی بودن عمل تقسیم کافی است.

سؤال: به نظر شما عمل تقسیم روی چه مجموعه‌ای عمل دوتایی است؟

فعالیت ۱. مجموعه‌ی $A = \{1,2,3\}$ را درنظر بگیرید. یک عمل روی A تعریف کنید.

مرحله‌ی اول: مجموعه‌ی $A \times A$ را تشکیل دهید.

$$A \times A = \{(1,1),(1,2),\cdots,(3,3)\}$$

مرحله‌ی دوم: تابعی از $A \times A$ در A تعریف کنید؛ برای مثال:

$$(1,1) \xrightarrow{f} 1$$
$$(1,2) \xrightarrow{f} 1$$
$$(1,3) \xrightarrow{f} 1$$
$$\vdots \qquad \vdots$$
$$(3,2) \xrightarrow{f} 3$$
$$(3,3) \xrightarrow{f} 3$$

ضابطه‌ی این تابع را می‌توان به صورت $f(x,y) = x$ درنظر گرفت. درنتیجه، تابع با ضابطه‌ی $f(x,y) = x$ یک عمل دوتایی روی A است.

سؤال: آیا شما می‌توانید عمل‌های دوتایی دیگری را روی A تعریف کنید؟

دیدیم که عمل‌های جمع معمولی و ضرب معمولی روی $\mathbb{N}$ عمل‌های دوتایی هستند. اعمال دوتایی دیگری را می‌توان روی $\mathbb{N}$ تعریف کرد که معمولاً آن‌ها را با علامت‌های $*$، $\bigcirc$، $\oplus$، $\otimes$ و نظایر آن نمایش می‌دهیم. در این صورت به جای $f(x,y)$ می‌توان $*(x,y)$ یا $x*y$ را نوشت.

برای مثال عمل $x*y = 2x + y + 1$ روی مجموعه‌ی $\mathbb{N}$ یک عمل دوتایی است، زیرا برای هر زوج مرتب $(x,y) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}$، وقتی عمل $*$ روی (x,y) اثر می‌کند، حاصل آن یعنی $2x + y + 1$ یک عدد طبیعی است.

اما عمل $x \oplus y = x - y + 1$ روی $\mathbb{N}$ یک عمل دوتایی نیست؛ زیرا برای زوج مرتب $(2,3) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ طبق عمل $\oplus$ می‌توان نوشت:

$$\oplus(2,3) = 2 \oplus 3 = 2 - 3 + 1 = 0 \notin \mathbb{N}$$

همان‌طور که ملاحظه می‌کنید $(2,3) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}$، اما: $\oplus(2,3) \notin \mathbb{N}$. پس عمل $\oplus$ روی $\mathbb{N}$ یک عمل دوتایی نیست یا مجموعه‌ی اعداد طبیعی نسبت به عمل $\oplus$ بسته نیست.

مثال: عمل $*$ را روی مجموعه‌ی اعداد طبیعی به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\begin{cases} *: \mathbb{N}\times\mathbb{N} \to \mathbb{N} \\ *(x,y) = [x,y] \end{cases}$$

منظور از $[x,y]$ همان ک.م.م دو عدد y و x است. آیا $*$

روی $\mathbb{N}$ یک عمل دوتایی است؟

حل: بله، زیرا برای هر $(x,y)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ داریم:

$$*(x,y)=[x,y]\in\mathbb{N}$$

برای مثال می‌توان نوشت:

$$*(15,6)=30\in\mathbb{N}$$
$$*(2,3)=6\in\mathbb{N}$$
$$*(a,a)=a\in\mathbb{N}$$

مثال: مجموعه‌ی اعداد گنگ نسبت به عمل جمع و ضرب معمولی بسته نیست، زیرا برای مثال:

$$(1-\sqrt{2},1+\sqrt{2})\cup Q^c\times Q^c$$

این در حالی است که:

$$(1+\sqrt{2})+(1-\sqrt{2})=2\notin Q^c$$
$$(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})=1-2=-1\notin Q^c$$

فعالیت ۲. آیا جمع و ضرب معمولی روی هر یک از مجموعه‌های Z، Q و $\mathbb{R}$ عمل‌های دوتایی هستند؟

مثال: فرض کنیم: $A=\{1,2\}$. آیا دو عمل اجتماع و اشتراک روی مجموعه‌ی توانی A (مجموعه‌ی همه‌ی زیرمجموعه‌های A که آن را با نماد $P(A)$ نمایش می‌دهیم)، عمل‌های دوتایی هستند؟

حل: واضح است که:

$$P(A)=\{\varnothing,\{1\},\{2\},\{1,2\}\}$$

مرحله‌ی اول: $P(A)\times P(A)$ را تشکیل می‌دهیم:

$$\begin{aligned}P(A)\times P(A)=\{&(\varnothing,\varnothing),(\varnothing,\{1\}),(\varnothing,\{2\}),(\varnothing,\{1,2\})\\&(\{1\},\varnothing),(\{1\},\{1\}),(\{1\},\{2\}),(\{1\},\{1,2\})\\&(\{2\},\varnothing),(\{2\},\{1\}),(\{2\},\{2\}),(\{2\},\{1,2\})\\&(\{1,2\},\varnothing),(\{1,2\},\{1\}),(\{1,2\},\{2\}),(\{1,2\},\{1,2\})\}\end{aligned}$$

مرحله‌ی دوم: اکنون اگر هریک از عمل‌های اجتماع یا اشتراک را در هریک از زوج‌های مرتب مجموعه‌ی $P(A)\times P(A)$ اعمال کنیم، ملاحظه خواهید کرد که حاصل آن در مجموعه‌ی $P(A)$ قرار دارد. بنابراین مجموعه‌ی $P(A)$ نسبت به عمل‌های اشتراک و اجتماع بسته است.

برای مثال:

$$\cup(\{1\},\{2\})=\{1\}\cup\{2\}=\{1,2\}\in P(A)$$
$$\cup(\varnothing,\{1\})=\varnothing\cup\{1\}=\{1\}\in P(A)$$
$$\cap(\{2\},\{1,2\})=\{2\}\cap\{1,2\}=\{2\}\in P(A)$$
$$\cap(\{1\},\{2\})=\{1\}\cap\{2\}=\varnothing\in P(A)$$

فعالیت ۳: عمل‌های اجتماع و اشتراک را روی بقیه‌ی زوج‌های مرتب مجموعه‌ی $P(A)\times P(A)$ اعمال کنید.

نکته: فرض کنیم A مجموعه‌ی ناتهی و $P(A)$ مجموعه‌ی توانی A باشد. در این صورت، عمل‌های اجتماع و اشتراک روی $P(A)$ عمل‌هایی دوتایی هستند.

مثال: در هر یک از حالت‌های زیر مشخص کنید، آیا عمل داده شده روی مجموعه‌ی مفروض دوتایی است یا خیر؟

الف) $S=Z;\ a\oplus b=a+b^2$

ب) $S=Z;\ aOb=\dfrac{a^2+2ab+b^2}{a-b}$

ج) $S=\{1,-2,3,2,-4\};\ a\otimes b=|b|$

حل:

الف)
$$\begin{cases}\oplus: Z\times Z\to Z\\ \oplus\ (a,b)=a+b^2\end{cases}$$

برای هر $(a,b)\in Z\times Z$ ملاحظه خواهیم کرد:

$$\oplus\ (a,b)=a\oplus b=(\underbrace{a}_{\in Z}+\underbrace{b^2}_{\in Z})\in Z$$

درنتیجه عمل $\oplus$ روی Z دوتایی است.

ب)
$$\begin{cases}O: Z\times Z\to Z\\ O\ (a,b)=\dfrac{a^2+2ab+b^2}{a-b}\end{cases}$$

برای $(-3,5)\in Z\times Z$ ملاحظه خواهیم کرد:

$$O\ (-3,5)=-3O5=\frac{(-3)^2+2(-3)(5)+5^2}{-3-5}$$
$$=\frac{4}{-8}=-\frac{1}{2}\notin Z$$

بنابراین، عمل O روی Z دوتایی نیست.

ج)
$$\begin{cases}*: S\times S\to S\\ *\ (a,b)=|b|\end{cases}$$

برای $(2,-4)\in S\times S$، داریم:

$$*(2,-4)=2*(-4)=|-4|$$
$$=4\notin S$$

لذا عمل $*$ روی S دوتایی نیست.

فعالیت ۴. فرض کنیم $M_{2\times2}$ مجموعه‌ی ماتریس‌های مربعی 2×2 با درایه‌های حقیقی باشند. بررسی کنید آیا عمل‌های جمع و ضرب ماتریس‌ها روی $M_{2\times2}$ عمل‌های دوتایی هستند یا خیر؟

راهنمایی:

$$M_{2\times2}=\left\{\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}\middle| a,b,c,d\in R\right\}$$

نشان دهید:

$$\left(\begin{bmatrix}a_1&b_1\\c_1&d_1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}a_2&b_2\\c_2&d_2\end{bmatrix}\right)\in M_{2\times2}$$

$$\left(\begin{bmatrix}a_1&b_1\\c_1&d_1\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}a_2&b_2\\c_2&d_2\end{bmatrix}\right)\in M_{2\times2}$$

تا این‌جا متوجه شدیم که به جز چهار عمل اصلی روی اعداد، می‌توان عمل‌های دوتایی دیگری را تعریف کرد. اکنون لازم می‌دانیم شما را با مفهومی دیگر آشنا کنیم. می‌دانید که عدد صفر عضو بی‌اثر عمل جمع اعداد است؛ یعنی: $a+0=0+a=a$.

هم‌چنین واضح است که عدد ۱ عضو بی‌اثر عمل ضرب معمولی اعداد است؛ به‌طوری که: $a\times ۱=۱\times a=a$.

اکنون این سؤال پیش می‌آید که عضو بی‌اثر عمل دوتایی زیر چیست؟

$$\begin{cases}\oplus Z\times Z\to Z\\ \oplus(a,b)=a+b-۱\end{cases}$$

برای این منظور، عضو بی‌اثر یک عمل دوتایی را روی مجموعه‌ی مفروض A به صورت زیر بیان می‌کنیم.

عضو بی‌اثر

فرض کنیم که * روی مجموعه‌ی A یک عمل دوتایی باشد. اگر برای هر $a\in A$ ، عضو منحصر به فردی مانند $e\in A$ موجود باشد، به‌طوری که:

$$a*e=e*a=a$$

در این صورت e را عضو بی‌اثر عمل دوتایی * روی مجموعه‌ی A می‌گوییم.

قضیه: عمل دوتایی * را روی مجموعه‌ی A در نظر بگیرید. ثابت کنید عضو بی‌اثر این عمل دوتایی منحصربه‌فرد است.

اثبات (برهان خلف): فرض کنیم $e_۱$ و $e_۲$ هر دو عضو بی‌اثر عمل * روی مجموعه‌ی A باشند (فرض خلف). در این صورت چون $e_۱$ عضو بی‌اثر عمل * است، داریم:

$$e_۲*e_۱=e_۱*e_۲=e_۲ \qquad (۱)$$

از طرفی $e_۲$ هم عضو بی‌اثر عمل * است. پس داریم:

$$e_۱*e_۲=e_۲*e_۱=e_۱ \qquad (۲)$$

از رابطه‌های ۱ و ۲ نتیجه می‌گیریم که: $e_۱=e_۲$. درنتیجه، فرض خلف باطل و عضو بی‌اثر عمل * روی A منحصربه‌فرد است.

مثال: عضو بی‌اثر عمل دوتایی زیر چیست؟

$$\begin{cases}\oplus Z\times Z\to Z\\ \oplus(a,b)=a+b-۱\end{cases}$$

حل: فرض کنیم $e\in Z$ عضو بی‌اثر این عمل دوتایی باشد. بنابراین داریم:

$$\oplus(a,e)=\oplus(e,a)=a$$

$$\oplus(a,e)=a\Rightarrow a\oplus e=a$$

$$\Rightarrow a+e-۱=a\Rightarrow e=۱\in Z \qquad (۱)$$

از طرف دیگر:

$$\oplus(e,a)=a\Rightarrow e\oplus a=a\Rightarrow e+a-۱=a\Rightarrow e=۱\in Z \qquad (۲)$$

با توجه به روابط ۱ و ۲ ملاحظه می‌کنیم که $e=۱$ منحصربه‌فرد است. پس e عضو بی‌اثر این عمل دوتایی روی Z است. برای مثال ملاحظه می‌کنیم:

$$۴\oplus ۱=۴+۱-۱=۴\Rightarrow ۴\oplus ۱=۴$$

$$-۷\oplus ۱=-۷+۱-۱=-۷\Rightarrow -۷\oplus ۱=-۷$$

مثال: آیا عمل تقسیم روی مجموعه‌ی اعداد Q^+ عضو بی‌اثر دارد؟

حل: اگر $e\in Q^+$ عضو بی‌اثر عمل تقسیم روی Q^+ باشد، آن‌گاه داریم:

$$\div(a,e)=\div(e,a)=a$$

$$\div(a,e)=a\Rightarrow a\div e=a\Rightarrow \frac{a}{e}=a\Rightarrow e=۱ \qquad (۱)$$

از طرف دیگر:

$$\div(e,a)=a\Rightarrow e\div a=a\Rightarrow \frac{e}{a}=a\Rightarrow e=a^۲ \qquad (۲)$$

با توجه به روابط ۱ و ۲ ملاحظه می‌کنیم که عضو بی‌اثر منحصربه‌فرد نیست، پس عمل تقسیم روی Q^+ عضو بی‌اثر ندارد.

مثال: عضو بی‌اثر عمل دوتایی زیر چیست؟

$$\begin{cases}*Q^+\times Q^+\to Q^+\\ *(a,b)=\frac{ab}{۲}\end{cases}$$

حل: فرض کنیم $e\in Q^+$ عضو بی‌اثر این عمل دوتایی باشد. بنابراین داریم:

$$*(a,e)=*(e,a)=a$$

$$*(a,e)=a\Rightarrow \frac{ae}{۲}=a\Rightarrow e=۲ \qquad (۱)$$

از طرف دیگر:

$$*(e,a)=a\Rightarrow \frac{ea}{۲}=a\Rightarrow e=۲ \qquad (۲)$$

با توجه به روابط ۱ و ۲ ملاحظه می‌کنیم، $e=۲$ منحصربه‌فرد و عضو بی‌اثر عمل * روی Q^+ است.

مثال: عمل دوتایی زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases}*:(Z-\{۱\})\times(Z-\{۱\})\to(Z-\{۱\})\\ *(m,n)=m+n-mn\end{cases}$$

الف) عضو بی‌اثر این عمل را بیابید.

ب) معادله‌ی $۲*(۳*x)=۵$ را حل کنید.

حل:

الف) فرض کنیم $e\in(Z-\{۱\})$ ، عضو بی‌اثر این عمل دوتایی باشد. بنابراین داریم:

$$*(a,e)=*(e,a)=a$$

$$*(a,e)=a\Rightarrow a*e=a$$

$$\Rightarrow a+e-ae=a$$

$$\Rightarrow e(۱-a)=۰\xrightarrow{a\neq ۱}e=۰ \qquad (۱)$$

از طرف دیگر:

$$*(e,a)=a\Rightarrow e*a=a$$

$$\Rightarrow e+a-ea=a\Rightarrow e=۰ \qquad (۲)$$

از روابط ۱ و ۲ نتیجه می‌گیریم که $e=۰$ منحصربه‌فرد است. پس عضو بی‌اثر این عمل دوتایی است.

ب) $۲*(۳*x)=۵$

$$\Rightarrow ۲*(۳+x-۳x)=۵ \Rightarrow ۲*(۳-۲x)=۵$$
$$\Rightarrow ۲+(۳-۲x)-۲(۳-۲x)=۵$$
$$\Rightarrow ۵-۲x-۶+۴x=۵ \Rightarrow x=۳$$

فعالیت ۵. آیا عمل تفاضل (تفریق) روی مجموعه‌ی Z دارای عضو بی‌اثر است؟

فعالیت ۶. عضو بی‌اثر هریک از عمل‌های دوتایی زیر را روی مجموعه‌ی مفروض بیابید.

الف) مجموعه‌ی ماتریس‌های ۲ × ۲ $(M_{۲\times۲})$ با عمل دوتایی جمع ماتریس‌ها.

راهنمایی: فرض کنید $A=\begin{bmatrix} a_۱ & a_۲ \\ a_۳ & a_۴ \end{bmatrix}$، در صورتی که $E=\begin{bmatrix} e_۱ & e_۲ \\ e_۳ & e_۴ \end{bmatrix}$ عضو بی‌اثر عمل جمع ماتریس‌ها باشد، داریم:

$$A+E=E+A=A$$

ب) مجموعه‌ی ماتریس‌های ۲×۲ با عمل دوتایی ضرب ماتریس‌ها.

راهنمایی: از رابطه‌ی زیر ماتریس E را پیدا کنید.

$$\begin{bmatrix} a_۱ & a_۲ \\ a_۳ & a_۴ \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} e_۱ & e_۲ \\ e_۳ & e_۴ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_۱ & a_۲ \\ a_۳ & a_۴ \end{bmatrix}$$

ج) هرگاه A یک مجموعه باشد، مجموعه‌ی توانی A با عمل اشتراک.

راهنمایی: اگر $E\in P(A)$ عضو بی‌اثر عمل اشتراک باشد، برای هر $B\in P(A)$، باید داشته باشیم: $B\cap E=E\cap B=B$.

اجازه بدهید در این قسمت شما را با مفهومی دیگر آشنا کنیم. می‌دانید که اگر a یک عدد حقیقی باشد، a− عضو متقابل (قرینه‌ی) a نسبت به عمل جمع اعداد است؛ به‌طوری که:

$$a+(-a)=-a+a=۰$$

هم‌چنین واضح است که با شرط $a\neq۰$، عدد $\frac{۱}{a}$ عضو متقابل (معکوس) عددحقیقی a نسبت به عمل ضرب معمولی اعداد است؛ یعنی:

$$a\times\frac{۱}{a}=\frac{۱}{a}\times a=۱ \quad (a\neq۰)$$

اکنون این سؤال پیش می‌آید که عضو متقابل عمل دوتایی زیر چیست؟

$$\begin{cases} \oplus Z\times Z\to Z \\ \oplus(a,b)=a+b-۱ \end{cases}$$

برای این منظور مفهوم عضو متقابل را به این صورت بیان می‌کنیم.

عضو متقابل

فرض کنیم * روی مجموعه‌ی A یک عمل دوتایی با عضو بی‌اثر e باشد. اگر برای هر $a\in A$، عضو منحصربه‌فردی مانند $a'\in A$ موجود باشد، به‌طوری‌که:

$$a*a'=a'*a=e$$

در این صورت a' را عضو متقابل a نسبت به عمل دوتایی * روی مجموعه‌ی A می‌گوییم.

مثال: عمل دوتایی زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} *:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ *(a,b)=a+b+۲ \end{cases}$$

الف) عضو بی‌اثر این عمل را بیابید.

ب) عضو متقابل هر عضو مانند $a\in\mathbb{R}$ را بیابید.

ج) معادله‌ی $x*(۳*۲)'=۳$ را حل کنید.

حل:

الف) اگر e عضو بی‌اثر این عمل باشد، داریم:

$$a*e=e*a=a$$
$$a*e=a\Rightarrow a+e+۲=a\Rightarrow e=-۲ \qquad (۱)$$

از طرف دیگر:

$$e*a=a\Rightarrow e=-۲ \qquad (۲)$$

با توجه به روابط ۱ و ۲ ملاحظه می‌کنیم، $e=-۲$ منحصربه‌فرد و عضو بی‌اثر این عمل دوتایی است.

ب) اگر a' عضو متقابل عدد $a\in R$ باشد، داریم:

$$a*a'=a'*a=e$$
$$a*a'=e\Rightarrow a+a'+۲=-۲\Rightarrow a'=-۴-a \qquad (۱)$$

از طرف دیگر:

$$a'*a=e\Rightarrow a'+a+۲=-۲\Rightarrow a'=-۴-a \qquad (۲)$$

با توجه به روابط ۱ و ۲ ملاحظه می‌کنیم، $a'=-۴-a$ منحصربه‌فرد و عضو متقابل عدد $a\in R$ نسبت‌به عمل دوتایی * است.

ج)

$$x*(۳*۲)'=۳\Rightarrow x*(۳+۲-۲)'=۳$$
$$\Rightarrow x*(۳)'=۳$$

چون $a'=-۴-a$، پس $(۳)'=-۴-۳=-۷$. درنتیجه داریم:

$$x*(۳)'=۳\Rightarrow x*(-۷)=۳\Rightarrow x+(-۷)+۲=۳\Rightarrow x=۸$$

تمرین: در هر یک از حالت‌های زیر مشخص کنید، آیا عمل داده شده روی مجموعه‌ی مفروض دوتایی است یا خیر؟ در صورتی که عمل دوتایی باشد، عضو بی‌اثر و متقابل هر عضو مانند a را به‌دست آورید.

الف) $S=Z;\ a*b=ab^۲$

ب) $S=Z;\ a*b=\frac{a}{a^۲+b^۲}$

ج) $S=Z;\ a*b=a+b-ab$

د) $S=R;\ a*b=\sqrt{a}$

---

۱. نخستین درس در جبر مجرد. ترجمه‌ی دکتر مسعود فرزان. مرکز نشر دانشگاهی.

۲. مباحثی در جبر. ترجمه‌ی دکتر علی‌اکبر عالم‌زاده. مؤسسه‌ی نشر علوم نوین.

3. Abstract Algebra, Afirst Course/ Dan Saracino

تولد یک مجله (قسمت اول)



بسم‌الله الرحمن الرحیم: خدمت جناب آقای امیری هستیم، سردبیر محترم مجله‌ی رشد برهان متوسطه

آقای امیری با سلام و خسته‌نباشید خدمت شما و هم‌چنین آقای صدر که زحمت کشیدند و تشریف آوردند. اولین سؤالی که معمولاً در این‌گونه مصاحبه‌ها مطرح می‌کنند این است که محل تولد، سن و خانواده پدری شما چیست؟

■ بسم‌الله الرحمن الرحیم. خیلی خوش حالم که خدمت شما هستم و این فرصت دست داد که در خدمت دوستان باشیم. من سال ۱۳۴۲ در تهران متولد شدم. اصلیتم ـ پدر و مادرم ـ از استان مرکزی دهستان خورهه، از توابع شهرستان همیشه گل محلات هستند.

● دوره‌های دبستان، دبیرستان و دانشگاه را در تهران گذرانده‌اید؟

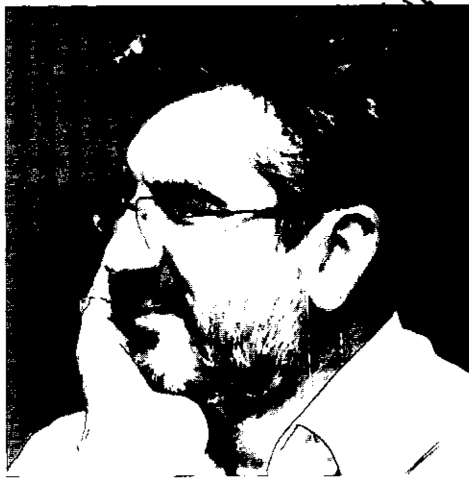
■ بله، دبستان دماوند، «خیابان جیهون، مدرسه راهنمایی «باربد»، خیابان هاشمی چهارراه‌کارون، در واقع غرب تهران، دبیرستان «دکتر هشترودی» منطقه‌ی ۶ که الآن شهید مطهری است. همان دبیرستانی که دو سال (اول و دوم) در میدان فلسطین بود و دو سال هم خیابان طالقانی جای دبستان فردوسی سابق. دیپلم را خرداد ۱۳۶۰ از آن‌جا گرفتم. سالی که انقلاب فرهنگی شده بود و دانشگاه‌ها تعطیل بودند و چون جنگ شروع شده بود، به خدمت سربازی اعزام شدیم. سالی که کنکور برگزار شد، چون من در خدمت سربازی بودم، مجاز نبودم امتحان بدهم. مثل الآن نبود. سال ۱۳۶۴ اولین سالی بود که می‌توانستم کنکور بدهم. من بهمن ۶۳ از خدمت سربازی مرخص شدم. همان سال کلاس کنکور هم می‌رفتم. یادم می‌آید اوایل که کلاس کنکور می‌رفتم. چون چند سالی می‌شد که از درس دور بودیم. هیچ‌چیز یادم نبود. یکی از دبیرهای ما وقتی می‌نوشت $y = x^۲$ و بعد مشتق می‌گرفت و می‌نوشت $y' = ۲x$ من فکر می‌کردم که فرمول جدیدی وارد ریاضی شده است؛ یعنی اصلاً هیچ سابقه‌ی ذهنی نسبت به آن نداشتم. چون این چهار سال، واقعاً از درس دور بودیم و در اوج جنگ و کار و... ولی من چون ناچار بودم خودم را به این قافله برسانم. از بهمن ۶۳ تقریباً چهارماه وقت داشتم که درس چهار سال دبیرستان را پس از چهار سال دوری از درس بخوانم به‌طور متوسط روزی ۱۸ ساعت درس خواندم. همان سال چون به ریاضی علاقه داشتم، رشته‌ی ریاضی را انتخاب کردم. اگرچه با رتبه‌هایی که آورده بودم، در تهران هر رشته مهندسی که می‌خواستم قبول می‌شدم. ولی به‌دلیل این‌که دوست داشتم نزدیک پدر و مادرم باشم،

رشته‌ی ریاضی دانشگاه اراک را انتخاب کردم. چهار سال آن‌جا بودم. بعد کارشناسی ارشد دانشگاه آزاد واحد تهران شمال تهران قبول شدم. سال ۷۱، بعد از آن هم به دلایل و مشکلات مالی تقریباً نزدیک به اواخر تحصیل، آن را رها کردم.

● کی تشکیل خانواده دادید؟

■ سال ۶۶ که دانشجوی سال دوم بودم، ازدواج کردم و با همسرم در اراک مقیم شدیم. یادم نمی‌رود که ما آن موقع سه هزار تومان در اراک کرایه‌ی خانه می‌دادیم؛ خانه‌ای خیلی خوب بود که همه‌ی امکانات را داشت. از این سه هزار تومان، دو هزار و هشتصد تومان را کمک هزینه‌ی دانشجویی می‌گرفتم و برای تأمین دویست تومان دیگر با همه‌ی استادهایم صحبت کرده بودم و هر امتحان داخلی آخر ترم و میان‌ترم می‌گرفتند، ورقه‌هایشان را من صحیح می‌کردم. ورقه‌ای فکر می‌کنم دو تومان می‌گرفتم. البته پدر و مادرم و پدر و مادر همسرم خیلی کمک می‌کردند و امورات می‌گذشت. الآن که نگاه می‌کنم، ساده‌تر از الآن هم می‌گذشت! سال ۱۳۶۸ فارغ‌التحصیل شدم و به تهران آمدم.

همان سال شروع به تدریس کردم و در دبیرستان امام صادق(ع) در سه راه آذری درس می‌دادم. بعد هم آموزشگاه‌ها و دبیرستان‌های دیگر؛ دبیرستان البرز و دبیرستان علامه حلی (تیزهوشان) که سال‌های ۶۹ و ۷۰ آن‌جا درس می‌دادم. سال ۶۹ توسط معاون آموزشی دبیرستان تیزهوشان آقای محمدی که معاون انتشارات مدرسه شده بود با انتشارات مدرسه آشنا شدم و من را به همکاری دعوت کردند و عملاً اوایل سال ۶۹ در انتشارات مدرسه، مسئولیت گروه ریاضی را به عهده گرفتم.



● آغاز دبیری‌تان را هم می‌خواستیم بپرسیم که شما خودتان گفتید.

■ البته، من از سال ۶۵، یعنی در دوران دانشجویی، تدریس می‌کردم.

● تعداد آثارتان را بفرمائید.

■ اولین کتابم را سال ۷۰ در انتشارات رزمندگان به‌چاپ رساندم. کتابی با عنوان ریاضیات جدید. این کتاب شامل همه‌ی مباحث ریاضیات جدید چهار سال دبیرستان می‌شد. بعد از آن کتابی ترجمه کردم به نام «روش‌هایی از جبر»، که خود جناب عالی خیلی کمک کردید، و این کتاب اولین کتاب کوچک ریاضی بود.

● شما بنیان‌گذار کتاب‌های کوچک ریاضی هستید؟

■ بله، فکر اولیه‌اش از همین کتاب شروع شد و من به فکر افتادم، کتاب‌هایی موضوعی چاپ کنیم. این کار چهار ویژگی مثبت داشت. یکی این‌که اگر کسی در موضوعی اشکال داشت، نیاز نبود یک کتاب قطور بخرد که مثلاً یک فصلش ماتریس باشد. کتاب ماتریس را می‌خرید. دوم این‌که خواننده پول کمتری می‌پرداخت و سوم این‌که من به‌عنوان مؤلف دستم خیلی بازتر بود، به‌جای این‌که یک فصل از یک کتاب را به ماتریس اختصاص بدهم، یک کتاب ۱۲۰ صفحه‌ای درباره‌ی ماتریس می‌نوشتم حق کلام ادا و تمام اشکال‌ها برطرف می‌شد. این ویژگی را هم داشت که پیش‌نیاز لازم نداشت، یعنی با این ساختار، کاری نداشتیم که موضوع تابع در کتاب دوم هست یا سوم یا پیش‌دانشگاهی. ما همه‌ی مفهوم تابع را از ابتدا تا انتها در یک کتاب می‌گفتیم. بنابراین مخاطبان وسیع‌تری را پوشش می‌داد، اولین کتاب از این مجموعه، همان ترجمه‌ی کتاب «روش‌هایی از جبر» بود و تا الآن که چهلمین کتابم به اسم ریاضیات گسسته و جبر و احتمال توسط انتشارات محراب قلم به چاپ رسید.

● مجله‌ی ریاضی برهان که شما سردبیرش هستید، از کی آغاز شد، و هسته‌ی اولیه آن را چه کسانی تشکیل دادند و تا حالا سرنوشتش به کجا کشیده شده است؟

■ خب وقتی من می‌خواهم از برهان صحبت کنم، دقیقاً مثل این است که می‌خواهم راجع به بچه‌ی خودم حرف بزنم...

● از بچه‌هایتان صحبت نکردید. تعداد بچه‌هایتان را نمی‌گویید؟

■ سه فرزند دارم. فرزند بزرگم، دختر است و امسال دوره‌ی پیش‌دانشگاهی را در رشته‌ی ریاضی می‌گذراند. و ان شاءا... تا این مصاحبه چاپ شود دانشجوی رشته‌ی ریاضی است.

می‌خواهد در دانشگاه هم رشته‌ی ریاضی بخواند. پسرم کلاس اول راهنمایی است و دختر کوچکم به کلاس چهارم می‌رود. بله برهان، هم در واقع فرزند من است. چون واقعاً به آن علاقه دارم و به آن وابسته هستم. سالی که من دیپلم گرفتم و قبل از آن، همیشه این خلأ را احساس می‌کردم. چون اگر یادتان باشد، مجله‌ی ریاضی یکان حدوداً سال‌های قبل از انقلاب تعطیل شد.

● بله، قبل از انقلاب تعطیل شد.

■ یعنی سالی که ما دانش‌آموز بودیم، سال‌های ۵۶ و ۵۷، اصلاً مجله‌ی ریاضی وجود نداشت. از زمان دانش‌آموزی من همیشه از این موضوع رنج می‌بردم که هیچ منبعی نداشتیم. در سال ۶۹ که مسئولیت گروه ریاضی انتشارات مدرسه را به‌عهده گرفتم، به فکر انتشار مجله افتادم. مجله یکان را می‌شناختم. با این که زمان ما نبود، ولی دست معلمانم آن را دیده بودم. بعد پی‌گیری کردم و یکی دو شماره‌اش را از این طرف و آن طرف گرفتم. هنوز هم آن دو شماره را دارم و به این فکر افتادم که مجله‌ای شبیه به مجله‌ی یکان داشته باشیم. به حاج آقا



فریدون که آن موقع مدیرعامل انتشارات مدرسه بودند و الآن مدیرعامل انتشارات محراب قلم هستند، پیشنهاد کردم، ایشان گفتند کار سختی است و امکانات ما کم است آن موقع، کل کارکنان انتشارات مدرسه ده نفر بودند. گفتند که باید با حاج آقا چینی فروشان، صحبت کنیم. بعد از این که حاج آقا فریدون با ایشان که الان مدیر کانون پرورش فکری است صحبت کرد، ایشان بنده را خواست و گفت می خواهی چه کار کنی؟ کار را شرح دادم و ایشان گفت: من صد در صد این کار و طرح را قبول دارم و حتماً تو را پشتیبانی می کنم. رشته ی تحصیلی ایشان هم ریاضی بود. خیلی به ریاضی علاقه داشت و توجه آقای چینی فروشان واقعاً جای تشکر دارد. یعنی اگر ایشان آن زمان پشتیبانی نمی کرد مجله ی برهان پا نمی گرفت.

منتها آن زمان من دست تنها بودم. نه مدیر داخلی داشتیم نه حروف چین. شما خاطرتان هست سال های ۶۹ و ۷۰ حروف چینی رایانه ای نبود و دستی بود. لی آت و صفحه آرایی هم دستی بود. می بریدند و می چسباندند و خیلی مکافات داشت. من که اصلاً سابقه ی این کار را نداشتم. یعنی واقعاً با توکل به خدا این کار را شروع کردیم، بلافاصله به دنبال اعضای هیئت تحریریه بودم.

● یعنی فکر تأسیس مجله ی برهان از خود شما بود. خود شما پیشنهاد کردید و آن ها هم گفتند به شرط این که خودتان این کار را انجام بدهید، ما پشتیبانی می کنیم، منتها حرفی. چون اغلب کارها را شما خودتان انجام می دادید. بعد رفتید دنبال هیئت تحریریه. سال ۱۳۶۹ بود؟

■ بله، فکر می کنم آبان ۶۹ این کار شروع شد.

● در سن ۲۷ سالگی؟

■ بله، ۲۷ سالگی.

● این طور که شما فرمودید، شما خیلی جوان بودید.

■ من به دلیل همان سه چهار ماه حضورم در انتشارات مدرسه، با یک گروهی از مؤلفان آشنایی داشتم. آقای رستمی را می شناختم. همین طور خود شما را، ما افتخار داشتیم که خدمتتان باشیم.

آموزشگاهی درس می دادم به نام علامه، روبه روی دبیرستان البرز، در خیابان انقلاب. آن جا با آقای قندهاری آشنا شدم. البته در زمان دانش آموزی ام کتاب های ایشان را خوانده بودم و با ایشان آشنا بودم. همین طور آقای سید موسوی را از علامه حلی می شناختم.

آقای شهریاری را هم که کتاب هایشان را می خواندیم و با ایشان آشنایی داشتیم.

فکر می کنم که خود شما بعد از این سه نفر تشریف آوردید. از همان اول اعتقاد داشتم کسانی باید به هیئت تحریریه ی مجله ی ریاضی برهان بیایند که به مجله اعتبار بدهند، نه این که از مجله اعتبار بگیرند، کسانی که دیگر نیاز نباشد به خاطر شهرت، به خاطر پول، به خاطر این که اسمشان مشخص بشود، مقاله بنویسند. این ها همه کسانی بودند که همه ی ایران می شناختند و الحمدا... این جریان پا گرفت. اولین جلسه ای که گذاشتیم سه نفر بودیم؛ من و آقای شهریاری و آقای رستمی. وقتی به آقای شهریاری گفتم که می خواهم چنین مجله ای را شروع کنم، و گفتم مجله ای نداریم، گفتند که یک مجله چاپ می شود. اما دانش آموزی نیست. پرسیدیم چه مجله ای؟ گفتند «آشنایی با ریاضیات» که خود ایشان سردبیرش بود. ایشان گفت: اگر این مجله که شما می گویید، شروع به کار بکند و کارش را ادامه دهد، من مجله ام را تعطیل می کنم. چون این مجله همه ی آن اهداف را می تواند داشته باشد. یکی دو شماره از برهان هم که چاپ شد، ایشان دیگر مجله اش را تعطیل کرد و ادامه ی آن برایش سخت بود، چون با پول شخصی خودش آن را منتشر می کرد و دست تنها هم بود. برای اسم مجله هم چند پیشنهاد دادیم که آقای شهریاری پیشنهاد برهان را دادند، برهان خیلی به دل من نشست، چون هم وجهه ریاضی دارد و هم وجهه مذهبی. برهان اصلاً کلمه قرآنی است و در قرآن چند بار آمده است. و ما موافقت کردیم و اولین شماره در زمستان ۱۳۷۰ چاپ شد. آن موقع اعضای

هیئت تحریریه عبارت بودند از آقای رستمی - آقای سید موسوی- آقای هاشمی موسوی- بنده و خود شما. تا دو شماره هم آقای سید موسوی بودند ولی به دلایل شخصی کناره گیری کردند و ما از دوستان دیگر برای هیئت تحریریه استفاده کردیم. می توان گفت، هسته ی مرکزی هیئت تحریریه ما غیر از آقای سید موسوی که خواست از جمع ما خارج شود، تا این لحظه هیچ تغییری نکرده است، فقط یکی دو نفر به آن اضافه شده اند، یکی آقای صدر که الآن مدیر داخلی مجله هم هستند و یکی هم آقای شرقی.

● افراد جوان تر را به گروه تزریق کردید، چون به هرحال هیئت تحریریه داشتند پیر می شدند و...

■ نه، به هر صورت ما در کنار تجربه و علم بقیه، دوست داشتیم از نیروهای جوان هم استفاده کنیم.

● واقعاً انتخاب شایسته ای کرده اید. هم آقای صدر و هم آقای شرقی، هر دو افراد فاضلی هستند.

■ در شماره ی ۱۵ مجله، آقای صدر مقاله ای چاپ کردند که ما از ایشان خواهش کردیم به کمک ما بیایند. البته حساب کنید تا چند شماره این مجله را دنبالش بودیم که شماره ۱۵ شما چاپش کردید.

ایشان برای شماره ی ۹ یا ۱۰ مقاله ای به مجله دادند که ما آن را تغییراتی دادیم. بالاخره مقاله ای نوشتند که در شماره ۱۵ به چاپ رسید و از همان جا همکاری ما با ایشان بیشتر شد.

● موضوع بعدی در رابطه با چاپ مجله ی برهان است. یادم می آید گاهی شمارگان این مجله خیلی زیاد بود. بفرمایید بیشترین تعدادش چه قدر بوده و بعد هم تأثیر آن در آموزش ریاضی دبیرستان و پیش دانشگاهی چه قدر است.

■ خب مجله ی ریاضی برهان وقتی پا به عرصه ی وجود گذاشت، بی رقیب بود. حتی مجله ای هم که آقای شهریاری چاپ می کردند، تعطیل شد. بنابراین آن موقع با اقبال خوبی روبه رو شد.

یادم می آید، شماره های دوم و سوم مجله ی ما پنج بار چاپ شد. گاهی شمارگان مجله به ۵۰ یا ۶۰ هزار هم می رسید. بعد با مشکل کاغذ روبه روشدیم. یکی دیگر از مشکلات ما این بود که مجله را انتشارات مدرسه چاپ می کرد و سیستم انتشارات مدرسه طوری بود که به مجله تقریباً به چشم کتاب نگاه می کرد.

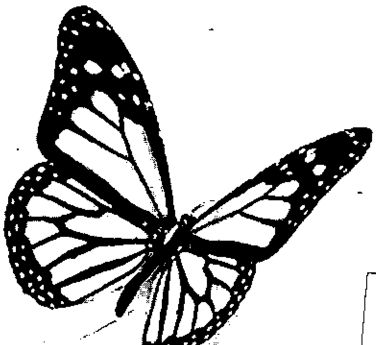
● برایشان صرف نمی کرد، ۵۰ هزار نسخه مجله چاپ کنند. به جای آن می توانستند ۱۰ عنوان کتاب چاپ کنند.

■ بله چون سیستم آن ها مجله ای نبود، دیر و زود هم می شد. یعنی تاریخ انتشار مجله تاریخی نمی شد که ما می خواستیم. فصل نامه باید حداقل ۲۰ روز قبل از آغاز فصل به بازار بیاید تا پخش شود. ولی ما معمولاً یا آخر فصل می رسیدیم یا مجبور می شدیم دو شماره یکی کنیم. این مشکل روی شمارگان مجله تأثیر می گذاشت. به خصوص این که بعضی از مقالات مان دنباله دار بود یا جواب مسئله های این شماره، در شماره ی بعدی قرار می گرفت. مخاطب هرچه می نشست می دید بعدی در کار نیست و همان جا ناامید می شد. عده ای از دوستان کوشیدند این مشکل را با جابه جایی چاپ مجله از انتشارات مدرسه به دفتر انتشارات کمک آموزشی، همین دفتری که الآن مجلات رشد را چاپ می کند تا اندازه ای حل کنند. منتهی هنوز هم ما در دفتر مشکل داریم. مجله ی ما مجله ای تخصصی حساب می شود. مجلات تخصصی مثل رشد آموزش ریاضی یا رشد آموزش فیزیک است، اما مجله ی ما تخصصی نیست. از نظر مبحث و موضوع تخصصی هستیم، اما از نظر مخاطب تخصصی نیستیم. مخاطب ما دانش آموز است. در دفتر تمام مجلات دانش آموزی، مجلات عمومی نامیده می شوند؛ مثل رشد جوان، رشد نوجوان، و این ها شمارگان بالای ۲۰۰ هزار دارند. اما به دلیل این که مجله ما تخصصی محسوب می شود، شمارگان آن فعلاً پایین است. هنوز خیلی ها آشنا نیستند و شناخت کافی روی آن ندارند. به خصوص این که مثلاً مخاطبان مجله ی رشد ریاضی معلمان هستند. معلمین ثابت اند، اگر کسی یک بار مجله ی رشد ریاضی را بخرد و بخواند و خوشش بیاید، همیشه آن را می خرد، اما مخاطبان ما متغیرند. یعنی دانش آموزی است که دانشجو می شود. بعد دانش آموزان جدیدی می آیند که برهان را نمی شناسند. الآن فکر می کنم که تیراژ متوسط مجله ۲۵ هزار باشد که امیدواریم به صدهزار برسد.

در مورد تأثیر مجله هم دیگران باید نظر بدهند. در حدی که خودم اطلاع دارم و نامه هایی که به دستمان می رسد، آن زمان که مجله در انتشارات مدرسه چاپ می شد، بچه ها می آمدند نمایشگاه و می گفتند، انتشارات برهان. یعنی ناشر را به نام مجله ی ما می شناختند. وقتی هم می خواستند آن را به ثبت برسانند، اسمش شد انتشارات مدرسه برهان! این تأثیر به نظر من بسیار زیاد بوده است. چون هنوز همکارانی که جدیداً وارد شغل معلمی می شوند، بدون استثنا همه مجله ی برهان را می شناسند. ما خوانندگانی داشتیم که دانش آموز بودند و برایمان مقاله می فرستادند و هنوز هم که هنوز است، برایمان مقاله می فرستند. نامه هایی که به دست ما می رسند و رسیده اند، از تأثیر بسیار خوب برهان، هم بین دانش آموزان، هم در جامعه ی معلمان حکایت دارند تقریباً همه ی معلمان ریاضی با مجله ریاضی برهان آشنا هستند.

چون ما سعی کرده ایم همه ی مقالات از دو وجه برخوردار باشند: یک وجه این که دانش آموز از آن استفاده کند. وجه دیگر این که برای دبیران محترم ریاضی نیز مفید باشد. کسی که این مقاله را می نویسد، در واقع دارد روش تدریس خود را ارائه می دهد. این نوعی انتقال تجربه است و روش تدریس به درد معلم هم می خورد و استفاده می کنند.

ادامه دارد...



هم‌نهشتی و کاربردهای آن

قسمت ۴

● سید محمدرضا هاشمی موسوی
hashemi – moosavi@yahoo.com

اشاره

در سه قسمت قبل، با مفهوم و تعریف و قوانین محاسبات هم‌نهشتی و هم‌چنین، با قضیه‌های اساسی و مهم هم‌نهشتی که در حل مسئله‌های متفاوت نقش بسیار مهمی را برعهده دارند، آشنا شدید. اینک در این شماره و شماره‌های آتی مجله، به برخی از کاربردهای مهم و اساسی هم‌نهشتی، مانند قواعد تعیین باقی مانده‌ها در تقسیم، محاسبه‌ی رقم یکان و باقی‌مانده‌های تقسیم اعداد توانی و اعداد شامل فاکتوریل، حل معادله‌ها و دستگاه‌های هم‌نهشتی، حل معادله‌های سیاله‌ی خطی، غیرخطی و درجه‌ی n ام k مجهولی به توسط قضیه‌ی کوچک فرما، اویلر و ویلسن و حل دیگر مسائل به کمک این قضایای کاربردی و مهم می‌پردازیم که خلاقیت و ابتکار عمل زیادی را طلب می‌کند.

در آخر هر مبحث و مقاله، تعدادی تمرین مطابق مثال‌های متن آورده می‌شود که می‌توانید با مراجعه به هر مثال، تمرین نظیر آن را حل کنید.

قواعد تعیین باقی‌مانده‌ی تقسیم بر ۲، ۵، ۴، ۲۵، ۸ و ۱۲۵

۱. باقی‌مانده‌ی تقسیم هر عدد بر ۲ (یا ۵) برابر با باقی‌مانده‌ی

تقسیم رقم یکان عدد مفروض بر ۲(یا۵) است؛ زیرا:

$$\overline{a_n a_{n-1}\cdots a_2 a_1 a_0} = 10(\overline{a_n a_{n-1}\cdots a_2 a_1}) + a_0 \overset{2\ (\text{یا } 5)}{\equiv} 0 + a_0 = a_0$$

واضح است که باقی‌مانده‌ی هر عدد بر ۲ (یا۵)، معادل باقی‌مانده‌ی یکان آن عدد بر ۲(یا۵) است.

۲. باقی‌مانده‌ی تقسیم هر عدد بر ۴ (یا۲۵) برابر با باقی‌مانده‌ی تقسیم دو رقم سمت راست عدد مفروض بر ۴ (یا۲۵) است؛ زیرا:

$$\overline{a_n a_{n-1}\cdots a_2 a_1 a_0} = \overline{a_n a_{n-1}\cdots a_2}\times 100 + \overline{a_1 a_0} \overset{4\ (\text{یا } 25)}{\equiv} 0 + \overline{a_1 a_0} = \overline{a_1 a_0}$$

۳. باقی‌مانده‌ی تقسیم هر عدد بر ۸ (یا۱۲۵) برابر با باقی‌مانده‌ی تقسیم سه رقم سمت راست عدد مفروض بر ۸(یا۱۲۵) است؛ زیرا:

$$\overline{a_n a_{n-1}\cdots a_3 a_2 a_1 a_0} = \overline{a_n a_{n-1}\cdots a_3}\times 1000 + \overline{a_2 a_1 a_0} \overset{8\ (\text{یا } 125)}{\equiv} \overline{a_2 a_1 a_0}$$

مثال: باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد ۲۰۰۸۱۳۸۷ را بر ۲، ۵، ۴، ۲۵، ۸ و۱۲۵ تعیین کنید.

حل: با توجه به قاعده‌ی ۱، باقی‌مانده‌ی عدد مفروض بر ۲و۵ به ترتیب ۱و۲ می‌شود. با توجه به قاعده‌ی ۲، باقی‌مانده‌ی عدد مفروض بر۴و۲۵ به ترتیب معادل باقی‌مانده‌ی عدد ۸۷ بر ۴ و ۲۵، یعنی ۳ و ۱۲ است.

با توجه به قاعده‌ی ۳، باقی‌مانده‌ی عدد مفروض بر ۸ و ۱۲۵ به ترتیب معادل باقی‌مانده‌ی عدد ۳۸۷ بر ۸ و ۱۲۵، یعنی ۳و۱۲ است.

قاعده‌ی تعیین باقی‌مانده‌ی تقسیم بر ۳و۹

۴. باقی‌مانده‌ی تقسیم هر عدد بر ۳ (یا۹) برابر با باقی‌مانده‌ی تقسیم مجموع ارقام آن عدد بر ۳(یا۹) است؛ زیرا:

$$\overline{a_n a_{n-1}\cdots a_1 a_0} = a_0 + 10a_1 + \cdots + 10^n a_n \overset{3\ (\text{یا } 9)}{\equiv} a_0 + a_1 + \cdots + a_n$$

مثال: اگر باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد مفروض $\overline{200n13n7}$ بر ۳(یا۹) برابر۲ باشد، n را بیابید.

حل: با توجه به قاعده‌ی ۴ کافی است مجموع ارقام عدد مفروض را بر ۳(یا۹) تقسیم و باقی‌مانده را تعیین کنیم.

$$7+n+3+1+n+0+0+2 \overset{3\ (\text{یا } 9)}{\equiv} 2\ ;\ 2n+13 \overset{3\ (\text{یا } 9)}{\equiv} 2$$

$$2n \overset{3\ (\text{یا } 9)}{\equiv} -11\ ;\ 2n \overset{3\ (\text{یا } 9)}{\equiv} -9-2\ ;$$

$$2n \overset{3\ (\text{یا } 9)}{\equiv} -2\ ;\ n \overset{3\ (\text{یا } 9)}{\equiv} -1$$

در این جا دو حالت را در نظر می‌گیریم:

$$n \overset{3}{\equiv} -1\ ;\ n \overset{3}{\equiv} -1+3\ ;\ n \overset{3}{\equiv} 2$$

$$n \overset{9}{\equiv} -1\ ;\ n \overset{9}{\equiv} 9-1\ ;\ n \overset{9}{\equiv} 8$$

بنابراین، عدد مفروض به پیمانه‌ی ۳برابر ۲۰۰۲۱۳۲۷ و به پیمانه‌ی ۹برابر ۲۰۰۸۱۳۸۷ است.

قاعده‌ی تعیین باقی‌مانده‌ی تقسیم بر ۲۷ و ۳۷

۵. باقی‌مانده‌ی تقسیم هر عدد بر ۲۷(یا۳۷) برابر با باقی‌مانده‌ی عددی است که از سمت راست عدد مفروض، سه رقم سه رقم جدا و باهم جمع کرده‌ایم؛ زیرا با توجه به هم‌نهشتی $1 \overset{27\ (37)}{\equiv} (1000)^n$ می‌توان نوشت:

$$\overline{a_n a_{n-1} a_{n-2}\cdots a_5 a_4 a_3 a_2 a_1 a_0} = \overline{a_2 a_1 a_0} + \overline{a_5 a_4 a_3}(1000) +$$

$$\overline{a_8 a_7 a_6}(1000)^2 + \overline{a_{11} a_{10} a_9}(1000)^3 + \cdots \overset{27\ (\text{یا } 37)}{\equiv} \overline{a_2 a_1 a_0} +$$

$$\overline{a_5 a_4 a_3} + \overline{a_8 a_7 a_6} + \overline{a_{11} a_{10} a_9} + \cdots = N \overset{27\ (\text{یا } 37)}{\equiv} ?$$

مثال: باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد ۲۰۰۸۱۳۸۷۸ را بر ۲۷و۳۷ تعیین کنید.

حل: از سمت راست عدد مفروض را سه رقم سه رقم جدا و اعداد جدا شده را با هم جمع می‌کنیم:

$$200813878 \overset{27\ (\text{یا } 37)}{\equiv} 878+813+200=1891$$

$$1891 \overset{27}{\equiv} 891+1=892 \overset{27}{\equiv} 1\ ;\ 1891 \overset{37}{\equiv} 891+1=892 \overset{37}{\equiv} 4$$

بنابراین، باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد مفروض بر ۲۷برابر ۱ و بر ۳۷ برابر ۴ است.

قاعده‌ی تعیین باقی‌مانده‌ی تقسیم بر ۷، ۱۱ و۱۳

۶. با توجه به هم‌نهشتی $-1 \overset{7\ (\text{یا } 11 \text{ یا } 13)}{\equiv} (1000)$ و باتوجه به قاعده‌ی ۵ برای تعیین باقی‌مانده‌ی تقسیم یک عدد بر ۷(یا۱۱ یا۱۳)،

از سمت راست عدد را سه رقم سه رقم جدا و اعداد جدا شده را جمع جبری می‌کنیم. سپس باقی‌مانده‌ی عدد حاصل را بر ۷(یا ۱۱ یا ۱۳) به دست می‌آوریم.

$$\overline{a_n a_{n-1} a_{n-2}\cdots a_5 a_4 a_3 a_2 a_1 a_0} = \overline{a_2a_1a_0} + \overline{a_5a_4a_3}(۱۰۰۰) +$$

$$\overset{۷(\text{یا ۱۱ یا ۱۳})}{\equiv} \overline{a_2a_1a_0} - \overline{a_5a_4a_3} + \cdots = N \overset{۷(\text{یا ۱۱ یا ۱۳})}{\equiv} ?$$

مثال: باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد ۲۰۰۸۱۳۸۷۸ را بر ۷، ۱۱ و ۱۳ تعیین کنید.

حل: از سمت راست عدد مفروض را سه رقم سه رقم جدا و اعداد جدا شده را باهم جمع جبری می‌کنیم:

$$۲۰۰۸۱۳۸۷۸ \overset{۷(\text{یا ۱۱ یا ۱۳})}{\equiv} ۸۷۸ - ۸۱۳ + ۲۰۰ = ۲۶۵$$

$$۲۶۵ \overset{۷}{\equiv} ۶ ,\quad ۲۶۵ \overset{۱۱}{\equiv} ۱ ,\quad ۲۶۵ \overset{۱۳}{\equiv} ۵$$

تبصره: باقی‌مانده‌ی تقسیم بر ۱۱ را به صورت ساده‌تری نیز می‌توان به دست آورد. ($۱۰^n \overset{۱۱}{\equiv} (-۱)^n$):

$$\overline{a_n\cdots a_1a_0} = a_0 + ۱۰a_1 + ۱۰^۲a_2 + \cdots + ۱۰^n a_n \overset{۱۱}{\equiv} a_0 - a_1 + a_2 - \cdots + (-۱)^n a_n$$

مثال: باقی‌مانده‌ی تقسیم $۱۳۸۷^{۲۰۰۸}$ بر ۱۱ را بیابید.

حل: (باقی‌مانده‌ی تقسیم)

$$۱۳۸۷^{۲۰۰۸} \overset{۱۱}{\equiv} (۷-۸+۳-۱)^{۲۰۰۸} \overset{۱۱}{\equiv} (۱)^{۲۰۰۸} = ۱$$

مثال: باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد N را بر ۷ بیابید.

$$N = (۲۰۰۳)^{۱۳۸۳}.(۳۰۰۴)^{۱۳۸۴}.(۴۰۰۵)^{۱۳۸۵}.(۷۰۰۶)^{۱۳۸۷}.(۸۰۰۷)^{۱۳۸۷}.(۹۰۰۸)^{۱۳۸۹}$$

حل: باقی‌مانده‌ی هر عامل را بر ۷ تعیین می‌کنیم:

$$(۲۰۰۳)^{۱۳۸۳} \overset{۷}{\equiv} (۳-۲)^{۱۳۸۳} = ۱ ,\quad (۳۰۰۴)^{۱۳۸۴} \overset{۷}{\equiv} (۴-۳)^{۱۳۸۴} = ۱$$

$$(۴۰۰۵)^{۱۳۸۵} \overset{۷}{\equiv} (۵-۴)^{۱۳۸۵} = ۱$$

$$(۷۰۰۶)^{۱۳۸۷} \overset{۷}{\equiv} (۶-۷)^{۱۳۸۷} = -۱ \overset{۷}{\equiv} ۶$$

$$(۸۰۰۷)^{۱۳۸۷} \overset{۷}{\equiv} (۷-۸)^{۱۳۸۷} = -۱ \overset{۷}{\equiv} ۶$$

$$(۹۰۰۸)^{۱۳۸۹} \overset{۷}{\equiv} (۸-۹)^{۱۳۸۹} = -۱ \overset{۷}{\equiv} ۶$$

پس:

(باقی‌مانده) $N \overset{۷}{\equiv} (۱)(۱)(۱)(۶)(۶)(۶) = ۶^۳ \overset{۷}{\equiv} (-۱)^۳ = -۱ \overset{۷}{\equiv} ۶$

مثال: باقی‌مانده‌ی تقسیم $(۹۸۷۶۵۴۳۲۱)^{۴۰۰۸}$ را بر ۱۳ بیابید.

حل:

$$(۹۸۷۶۵۴۳۲۱)^{۴۰۰۸} \overset{۱۳}{\equiv} (۳۲۱-۶۵۴+۹۸۷)^{۴۰۰۸} \overset{۱۳}{\equiv} (۶۵۴)^{۴۰۰۸}$$

(باقی‌مانده)

$$(۶۵۴)^{۴۰۰۸} \overset{۱۳}{\equiv} ۴^{۴۰۰۸} = (۴^۳)^{۱۳۳۶} = ۶۴^{۱۳۳۶} \overset{۱۳}{\equiv} (-۱)^{۱۳۳۶} = ۱$$

مثال: باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد N را بر ۳۷ بیابید.

$$N = (۱۰۳۵)^{۲۰۰۳}.(۳۰۰۳)^{۲۰۰۴}.(۱۰۰۵)^{۲۰۰۴}.(۴۳۶۵)^{۲۰۰۶}.(۲۰۰۴)^{۲۰۰۸}$$

حل: باقی‌مانده‌ی هر عامل را بر ۳۷ تعیین می‌کنیم:

$$(N \overset{۳۷}{\equiv} (-۱)(۱)(۱)(۱)(۱)(۱) = -۱ \overset{۳۷}{\equiv} ۳۶)$$

$$(۱۰۳۵)^{۲۰۰۳} \overset{۳۷}{\equiv} (۰۳۵+۱)^{۲۰۰۳} = ۳۶^{۲۰۰۳} \overset{۳۷}{\equiv} (-۱)^{۲۰۰۳} = -۱ ,$$

$$(۳۰۰۳)^{۲۰۰۴} \overset{۳۷}{\equiv} (۰۰۳+۳)^{۲۰۰۴} = ۶^{۲۰۰۴}$$

$$۶^{۲۰۰۴} = ۳۶^{۱۰۰۲} \overset{۳۷}{\equiv} (-۱)^{۱۰۰۲} = ۱ ,$$

$$(۱۰۰۵)^{۲۰۰۴} \overset{۳۷}{\equiv} (۰۰۵+۱)^{۲۰۰۴} = ۶^{۲۰۰۴} \overset{۳۷}{\equiv} ۱$$

$$(۴۳۶۵)^{۲۰۰۶} \overset{۳۷}{\equiv} (۳۶۵+۴)^{۲۰۰۶} = ۳۶۹^{۲۰۰۶} \overset{۳۷}{\equiv} (-۱)^{۲۰۰۶} = ۱ ,$$

$$(۲۰۰۴)^{۲۰۰۸} \overset{۳۷}{\equiv} (۰۰۴+۲)^{۲۰۰۸} = ۳۶^{۱۰۰۴} \overset{۳۷}{\equiv} ۱$$

مثال: باقی‌مانده‌ی تقسیم $N = (۱۳۸۷)^{۲۰۰۸}.(۲۰۰۸)^{۱۳۸۷}$ را بر ۹ بیابید.

حل:

$$(۲۰۰۸)^{۱۳۸۷} \overset{۹}{\equiv} (۸+۰+۰+۲)^{۱۳۸۷} = ۱۰^{۱۳۸۷} \overset{۹}{\equiv} ۱$$

$$(۱۳۸۷)^{۲۰۰۸} \overset{۹}{\equiv} (۷+۸+۳+۱)^{۲۰۰۸} = ۱۹^{۲۰۰۸} \overset{۹}{\equiv} ۱ ;\quad N \overset{۹}{\equiv} ۱\times۱ = ۱$$

مثال: باقی‌مانده‌ی تقسیم $N = ۳^{۳۱} + ۳^{۳۲} + ۳^{۳۳} + ۳^{۳۴}$ را بر ۱۳ بیابید.

حل:

$$N = ۳^{۳۰}\times۳ + ۳^{۳۰}\times۳^۲ + ۳^۳(۳^{۳۰} + ۳\times۳^{۳۰})$$

$$۳^{۳۰} = (۳^۳)^{۱۰} = (۲۷)^{۱۰} \overset{۱۳}{\equiv} (۱)^{۱۰} = ۱ ;\quad ۳^{۳۰} \overset{۱۳}{\equiv} ۱$$

$$N \overset{۱۳}{\equiv} (۱)(۳) + (۱)(۹) + (۱)(۱+(۳)(۱)) = ۳+۹+۱+۳ = ۱۶ \overset{۱۳}{\equiv} ۳$$

(باقی مانده)

مثال: باقی‌مانده‌ی تقسیم بر N را بر ۲۵ بیابید.

$$N = 7^2 + 7^n + 7^{n+1} + 7^{n+2} + 7^{n+3}$$

حل: $N = 49 + 7^n(1+7+7^2+7^3) = 49 + 7^n(400)$

$$N = 49+7^n(400) \overset{25}{\equiv} 49 + 7^n(16\times25) \overset{25}{\equiv} 49 \overset{25}{\equiv} -1 \equiv 24$$

(باقی مانده)

مثال: اگر x، y و z مضرب ۶ باشند، باقی‌مانده‌ی تقسیم $N=(x^3+y^3+z^3+x^3y^3z^3-1)^{1387}$ را بر عدد ۷۲ بیابید.

حل:

$$6|x ;\ 2\times3|x;\ 2^3\times3^3|x^3;\ 2^3\times3^2|x^3;\ 72|x^3;$$

$$x^3 \overset{72}{\equiv} 0,\ y^3\overset{72}{\equiv}0,\ z^3\overset{72}{\equiv}0,\ \begin{cases} x^3+y^3+z^3 \overset{72}{\equiv} 0 \\ x^3y^3z^3 \overset{72}{\equiv} 0\end{cases}$$

$$N = (x^3+y^3+z^3+x^3y^3z^3-1)^{1387} \overset{72}{\equiv} (0+0-1)^{1387}$$

$= -1 \overset{72}{\equiv} 71$ (باقی مانده)

مثال: باقی‌مانده‌ی تقسیم $N = 1!+2!+3!+\cdots+n!$ را بر عدد ۲۴ بیابید.

حل: با توجه به برابری‌های ۱=!۱، ۲=!۲، ۶=!۳، ۲۴=!۴، $5!=(4!)5$ و...

(برای $n\geq4$ داریم: $n! \overset{24}{\equiv} 0$):

$$N = 1!+2!+3!+4!+\cdots+n! \overset{24}{\equiv} 1+2+6+0+0+\cdots+0 = 9$$

(باقی مانده)

مثال: باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد $2^{9^{25}}$ را بر عدد ۱۵ بیابید.

حل: $9 \overset{4}{\equiv} 1;\ 9^{25} \overset{4}{\equiv} 1;\ 9^{25}-1 = 4q;\ 9^{25} = 4q+1$

$$2^{9^{25}} = 2^{4q+1} = (2^4)^q \times 2^1 = 16^q\times 2 \overset{15}{\equiv} (1)^q\times 2 = 2$$

مثال: باقی‌مانده‌ی تقسیم $7^{9^{1387}}$ را بر عدد ۱۲ بیابید.

حل: (۹ به هر توانی برسد، عددی فرد است)

$$9^{1387} \overset{2}{\equiv} 1^{1387} = 1;\ 9^{1387} = 2q+1$$

$$7^{9^{1387}} = 7^{2q+1} = (7^2)^q\times 7 = (49)^q \times 7 \overset{12}{\equiv} (1)^q\times 7 = 7$$

مثال: باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد $N=(64\times65\times66)^{1387}$ را بر ۱۳ بیابید.

حل: $64 \overset{13}{\equiv} -1,\ 65\overset{13}{\equiv}0,\ 66\overset{13}{\equiv}1$

$$N = (64\times65\times66)^{1387} \overset{13}{\equiv} ((-1)(0)(1))^{1387} = (0)^{1387} = 0$$

مثال: اگر باقی‌مانده‌ی تقسیم A بر ۷ برابر ۳ باشد و داشته باشیم:

$$(A\overset{7}{\equiv}3)\qquad B = A^3+3A^2+4A+7$$

باقی‌مانده‌ی B را بر ۷ بیابید.

حل: $B = A^3+3A^2+3A+1+A+6$

$$=(A+1)^3 + A + 6 \overset{7}{\equiv} 4^3+3+6$$

$$B \overset{7}{\equiv} 73 \overset{7}{\equiv} 3,\ B\overset{7}{\equiv}3$$

پس A و B هم باقی‌مانده به ۷ هستند.

مثال: اگر باقی‌مانده‌ی تقسیم k بر ۷ و ۸ به ترتیب برابر ۴ و ۳ باشد، باقی‌مانده‌ی تقسیم k بر ۵۶ را بیابید.

حل:

$$\begin{cases} k\overset{7}{\equiv}4;\ 8k \overset{8\times7}{\equiv} 8\times4;\ 8k\overset{56}{\equiv}32 \\ k\overset{8}{\equiv}3;\ 7k\overset{8\times7}{\equiv}7\times3;\ 7k\overset{56}{\equiv}21 \end{cases}$$

$$8k-7k\overset{56}{\equiv}32-21;\ k\overset{56}{\equiv}11\Rightarrow r=11$$

مثال: باقی‌مانده‌ی تقسیم 7^{1387} را بر عدد ۱۹ بیابید.

حل: $7^{1387} = (7^3)^{462}\times7 = 343^{462}\times 7 \overset{19}{\equiv}(1)^{462}\times 7 = 7$

مثال: باقی‌مانده‌ی تقسیم 11^{1387} را بر عدد ۶۱ بیابید.

حل:

$$11^{1387} = (11^2)^{693}\times 11 = (121)^{693}\times11 \overset{61}{\equiv}(-1)^{693}\times 11$$

$$=-11\overset{61}{\equiv}50$$

مثال: باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد $N=(13^{75}+19^{57})^4$ را بر ۱۷ بیابید.

حل:

$$k = 13^{75}+19^{57} \overset{17}{\equiv} (-4)^{75} + 2^{57} \equiv (-4)(-4)^{74} + (2^4)^{14}(2)$$

$$k = (-4)(16)^{37} + (16)^{14}(2) \equiv (-4)(-1)^{37}$$

$$+(-1)^{14}(2) \overset{17}{\equiv} 4+2 = 6$$

$$N \overset{17}{\equiv} k^4 \overset{17}{\equiv} 6^4 = 1296 \equiv 4;\ N\overset{17}{\equiv}4$$

مثال: باقی‌مانده‌ی تقسیم 6^{1387} را بر عدد ۴۸ (یا ۵۴) بیابید.

حل:

$$\begin{cases}6=2\times3\\48=3\times2^4\\54=2\times3^3\end{cases} ; \quad \left.\begin{matrix}6^4=2^4\times3^4\\48=2^4\times3\end{matrix}\right\} ; \ 48|6^4 ; \ 6^4\overset{48}{\equiv}0$$

$$\left.\begin{matrix}54=2\times3^3\\6^3=2^3\times3^3\end{matrix}\right\} ; \ 54|6^3 ; \ 6^3\overset{54}{\equiv}0$$

پس:

$$6^4\times6^{1383}\overset{48}{\equiv}0 ; \ 6^{1387}\overset{48}{\equiv}0 , \ 6^3\times6^{1384}\overset{54}{\equiv}0 ; \ 6^{1387}\overset{54}{\equiv}0$$

توجه: باقی‌مانده‌ی عدد مفروض در تقسیم بر ۴۸ (یا ۵۴) برابر صفر است (اگر $a^n\overset{m}{\equiv}0$ ، $k>n$ ، آن‌گاه $a^k\overset{m}{\equiv}0$).

مثال: باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد $N=(1+2+3+\cdots+1382)^{1382}$ را بر ۱۳۸۲ بیابید:

حل: با توجه به این‌که ۱۳۸۲ بر ۴ باقی‌مانده‌ی ۲ می‌دهد:

$$(1+2+3+\cdots+1382)^{1382}\overset{1382}{\equiv}\frac{1382}{2}=691$$

مثال: باقی‌مانده‌ی $7a$ بر ۴۳ برابر ۶ است، باقی‌مانده‌ی $3a^4$ را بر ۴۳ بیابید.

حل:

$$7a\overset{43}{\equiv}6 ; \ 7a\overset{43}{\equiv}6+43 ; \ 7a\overset{43}{\equiv}49 ; \ a\overset{43}{\equiv}7$$

$$a^4\overset{43}{\equiv}7^4 ; \ 3a^4\overset{43}{\equiv}3\times49\times49\overset{43}{\equiv}3\times6\times6=108\overset{43}{\equiv}22$$

مثال: باقی‌مانده‌ی تقسیم 3^{4439} را بر ۷۳ بیابید.

حل:

$$3^6=729\overset{73}{\equiv}-1 ; \ (3^6)^{740}\overset{73}{\equiv}(-1)^{740}=1 ; \ 3^{4440}\overset{73}{\equiv}1 ;$$

$$3^{4440}\overset{73}{\equiv}1-73=-72 ; \ (3,73)=1$$

(دو طرف هم‌نهشتی را به ۳ ساده می‌کنیم)

$$3^{4439}\overset{73}{\equiv}-24 ; \ 3^{4439}\overset{73}{\equiv}-24+73=49$$

توجه: در این دو مثال، از قاعده‌ی زیر استفاده شد:

$$ac\overset{m}{\equiv}bc ; \ a\overset{\frac{m}{(m,c)}}{\equiv}b , \ \begin{cases}ac\overset{m}{\equiv}bc\\(m,c)=1\end{cases} ; \ a\overset{m}{\equiv}b$$

مثال: از هم‌نهشتی زیر نتیجه بگیرید که y مضرب ۳ است:

$$(1+2+3+\cdots+1386)x\overset{4161}{\equiv}(1+2+3+\cdots+1387)y$$

حل: با توجه به برابری $1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$ ، خواهیم داشت:

$$\frac{1386\times1387}{2}x\overset{3\times1387}{\equiv}\frac{1387\times1388}{2}y ; \ 693x\overset{3}{\equiv}694y$$

$$(693\overset{3}{\equiv}0) \quad 693x\overset{3}{\equiv}(693+1)y ; \ y\overset{3}{\equiv}0 ; \ y=3k$$

مثال: باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد N را بر عدد ۴ تعیین کنید (با فرض این‌که $n\geq100$):

$$N=(87-n)^{1387}+(86-n)^{1387}+(85-n)^{1387}+(84-n)^{1387}$$

حل: با توجه به این نکته که k عدد متوالی در تقسیم بر k، به تعداد k باقی‌مانده‌ی متمایز به صورت $(0,1,2,3,\dots,(k-1))$ را خواهند داد (البته نه صرفاً با همین ترتیب)، خواهیم داشت:

$$N=(87-n)^{1387}+(86-n)^{1387}+(85-n)^{1387}$$

$$+(84-n)^{1387}\overset{4}{\equiv}(0)^{1387}+(1)^{1387}+(2)^{1387}+(3)^{1387}$$

$$N\overset{4}{\equiv}1+2^{1387}+(-1)^{1387}=1+2^{1387}-1=2^{1387}$$

$$=2^2\times2^{1385}=4\times2^{1385}\overset{4}{\equiv}0$$

مثال: باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد M را بر عدد ۶ تعیین کنید:

$$M=(m+1381)^3+(m+1382)^3+\cdots+(m+1386)^3$$

حل: از تقسیم k عدد متوالی بر k، k باقی‌مانده‌ی متمایز $(0,1,2,\dots,k-1)$ حاصل می‌شود. بنابراین، از تقسیم ۶ عدد متوالی سمت راست بر ۶، باقی‌مانده‌ها حاصل می‌شوند؛ پس:

$$M\overset{6}{\equiv}(0)^3+(1)^3+(2)^3+(3)^3+(4)^3+(5)^3$$

$$=\left(\frac{5(5+1)}{2}\right)^2=225\overset{6}{\equiv}3$$

مثال: باقی‌مانده‌ی تقسیم $N=3^{1387}+4^{1387}+5^{1387}+6^{1387}$ را بر ۱۲ بیابید.

حل:

$$N=3^{1387}+4^{1387}+5^{1387}+6^{1387}\overset{3}{\equiv}(0)^{1387}$$

$$+(1)^{1387}+(-1)^{1387}+(0)^{1387}=0$$

$$N=3^{1387}+4^{1387}+5^{1387}+6^{1387}\overset{4}{\equiv}(-1)^{1387}+(0)^{1387}$$

$$+(1)^{1387}+(0)^{1387}=0$$

با توجه به ۱=(۳,۴) و $N\overset{۳}{\equiv}۰$, $N\overset{۴}{\equiv}۰$ ، خواهیم داشت:

$$N=۳^{۱۳۸۷}+۴^{۱۳۸۷}+۵^{۱۳۸۷}+۶^{۱۳۸۷}\overset{۱۲}{\equiv}۰$$

پس N بر ۱۲ بخش‌پذیر است؛ زیرا: $N\overset{۱۲}{\equiv}۰$.

تمرین

۱. باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد ۱۲۳۴۵۶۷۸۹ را بر ۳، ۵، ۴، ۲۵، ۸و۱۲۵ بیابید (بدون عمل تقسیم).

۲. اگر باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد مفروض $\overline{۱۳n۷۲۰۰n}$ بر ۳(یا۹) برابر ۲ باشد، n را بیابید.

۳. باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد ۱۳۸۷۲۰۰۸ را بر ۲۷ و ۳۷ بیابید (بدون عمل تقسیم).

۴. باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد ۲۰۰۸۱۳۸۷۱۳۸۷ را بر ۷، ۱۱و۱۳ بیابید (بدون عمل تقسیم).

۵. باقی‌مانده‌ی تقسیم $۲۰۰۸^{۱۳۸۷}$ را بر ۱۱ بیابید.

۶. باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد N را بر ۷ بیابید.

$$N=(۳۰۰۲)^{۱۳۸۲}(۴۰۰۳)^{۱۳۸۳}(۵۰۰۴)^{۱۳۸۴}(۶۰۰۵)^{۱۳۸۵}(۷۰۰۶)^{۱۳۸۶}(۸۰۰۷)^{۱۳۸۷}$$

۷. باقی‌مانده‌ی تقسیم $(۱۲۳۴۵۶۷۸۹۹۹۹)^{۲۰}$ را بر ۱۳ بیابید.

۸. باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد M را بر ۳۷ بیابید.

$$M=(۲۰۰۴)^{۱۳۸۷}(۴۳۶۵)^{۱۳۸۸}(۱۰۰۵)^{۱۳۸۹}(۳۰۰۳)^{۱۳۹۰}(۱۰۳۵)^{۱۳۹۱}$$

۹. باقی‌مانده‌ی تقسیم $N=(۲۰۰۸)^{۲۰۰۸}.(۱۳۸۷)^{۱۳۸۷}$ را بر ۹ بیابید.

۱۰. باقی‌مانده‌ی تقسیم $M=(۳^{۳۲}+۳^{۳۳}+۳^{۳۴})^{۱۳۸۸}$ را بر ۱۳ بیابید.

۱۱. باقی‌مانده‌ی تقسیم Nرا بر ۲۵ بیابید.

$$N=(۷^{۸}+۷^{n+۳}+۷^{n+۲}+۷^{n+۱}+۷^{n})^{۲۰۰۹}$$

۱۲. اگر x، y وz مضرب ۶ باشند، باقی‌مانده‌ی تقسیم $M=(x^۳+y^۳+z^۳+x^۳y^۳z^۳-۶۶۶۵)^{۲۰۰۹}$ را بر عدد ۷۲ بیابید.

۱۳. باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد $N=(۱^۳+۲^۳+۳^۳+...+n^۳)^n$ را بر n بیابید.

۱۴. باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد $M=(۱!+۲!+۳!+...+n!+۲۳۰)^{۱۳۸۸}$ را بر ۲۴ یابید.

۱۵. باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد $N=۲^{۹^{۲۰۰۹}}+۲^{۹^{۱۳۸۹}}$ را بر ۱۵ بیابید.

۱۶. باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد $M=۷^{۹^{۲۰۰۹}}+۱۷۲۸^{۲۰۰۹^{۱۳۸۸}}$ را بر ۱۲ بیابید.

۱۷. باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد $N=(۴۱۶۰)^{۱۳۸۷}+(۴۲۲۴)^{۱۳۸۸}+(۴۲۹۰)^{۱۳۸۹}$ را بر ۱۳ بیابید.

۱۸. باقی‌مانده‌ی تقسیم A بر ۷برابر ۵ است. باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد B را بر ۷ بیابید.

$$B=(A^۳+۳A^۲+۴A+۱۲)^۴$$

۱۹. اگر باقی‌مانده‌ی تقسیم k بر ۷و۸ به ترتیب ۵و۶ باشد، باقی‌مانده‌ی تقسیم k بر ۵۶ را بیابید.

۲۰. باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد $۷^{۲۰۰۸}$ را بر ۱۹ بیابید.

۲۱. باقی‌مانده‌ی تقسیم $۱۱^{۲۰۰۹}$ را بر ۶۱ بیابید.

۲۲. باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد $M=(۱۳^{۸۷}+۱۹^{۸۹})^{۲۰۰۸}$ را بر ۱۷ بیابید.

۲۳. باقی‌مانده‌ی تقسیم $۶^{۲۰۰۹}$ را بر عدد ۴۸ (یا۵۴) بیابید.

۲۴. باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد $N=(۱^۳+۲^۳+...+۱۳۸۲^۳)^{۱۳۸۲}$ را بر ۱۳۸۲ بیابید.

۲۵. باقی‌مانده‌ی تقسیم $M=۳^{۱۳۸۸}+۳^{۲۰۰۹}$ را بر ۷۳ بیابید.

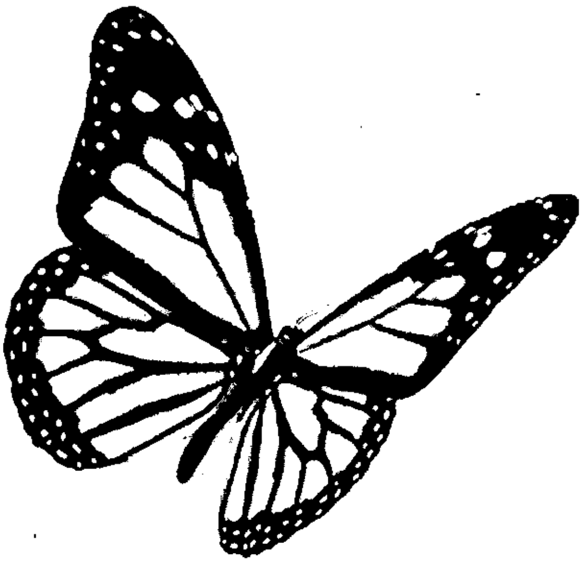
۲۶. از هم‌نهشتی زیر نتیجه بگیرید که y مضربی از ۳ است:

$$(۱^۳+۲^۳+۳^۳+...+۱۳۸۶)^۳x\overset{۳(۱۳۸۷)^۲}{\equiv}(۱^۳+۲^۳+۳^۳+...+۱۳۸۷^۳)y$$

۲۷. باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد N را بر عدد ۶ بیابید.

$$N=(m+۲۰۰۴)^۳+(m+۲۰۰۵)^۳+...+(m+۲۰۰۹)^۳$$

۲۸. باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد $M=۳^{۲۰۰۹}+۴^{۲۰۰۹}+۵^{۲۰۰۹}+۶^{۲۰۰۹}$ را بر ۱۲ بیابید.



روش یافتن جمله‌ی عمومی یک دنباله‌ی خاص با استفاده از «تفاضلات تقسیم شده» و «تفاضلات پیشرو»

● گردآورنده: سیمین اکبری‌زاده،
دبیر ریاضی اراک

اشاره

به‌نام خدایی که مجموعه‌ی نعمت‌هایش ناشمار است و آن‌چه نصیب آفریده‌هایش می‌کند، دنباله‌ای است صعودی و بی‌پایان. در این مقاله بیان شده است که با در دست داشتن چند جمله از جملات یک دنباله و با فرض آن که ضابطه‌ی دنباله یک چند جمله‌ای باشد، می‌توانیم جمله‌ی عمومی دنباله را بیابیم. به این منظور دو روش بیان شده است:

روش اول: استفاده از تفاضلات پیشرو. این روش هنگامی قابل استفاده است که چند جمله‌ی دنباله را به ترتیب، یک در میان، دو در میان و... و j در میان داشته باشیم.

روش دوم: استفاده از تفاضلات تقسیم شده. این روش همیشه و به خصوص هنگامی قابل استفاده است که فاصله‌ی بین اندیس جملات داده شده برابر نباشد.

تعریف: اگر $\{a_n\}_{n\geq j}$ دنباله‌ای باشد که فاصله‌ی هر دو اندیس متوالی آن h باشد، یعنی: $\{a_n\}_{n\geq j}: a_j, a_{j+h}, a_{j+2h}, \ldots$
آن‌گاه:

$$\begin{cases} a_i \text{ تفاضل پیشرو مرتبه‌ی صفرم } : \Delta^0 a_i = a_i \\ a_i \text{ تفاضل پیشرو مرتبه‌ی nام } : \Delta^n a_i = \Delta^{n-1} a_{i+h} - \Delta^{n-1} a_i \quad , \quad i = j, j+h, j+2h \end{cases}$$

در حالت خاص، اگر $\{a_n\}_{n\geq 0}$ یک دنباله باشد با جملات $a_0, a_1, a_2, \ldots$ $(j=0 \; , \; h=1)$، آن‌گاه:

$$\begin{cases} a_i \text{ تفاضل پیشرو مرتبه‌ی صفرم } : \Delta^0 a_i = a_i \\ a_i \text{ تفاضل پیشرو مرتبه‌ی nام } : \Delta^n a_i = \Delta^{n-1} a_{i+1} - \Delta^{n-1} a_i \quad , \quad i = 0, 1, 2, 3, \ldots \end{cases}$$

مثال۱. جدول۱، جدول تفاضلات پیشروی دنباله ...و۱۰و۵و۲و۱و۲ است، با فرض آن که جملات با $a_0, a_1, a_2, \ldots$ نام‌گذاری شده باشند.

i	a_i	$\Delta^1 a_i$	$\Delta^2 a_i$	$\Delta^3 a_i$
۰	۲	۱-	۲	۰
۱	۱	۱	۲	۰
۲	۲	۳	۲	
۳	۵	۵		
۴	۱۰			

جدول ۱

نتیجه: در مثال۱، تفاضلات پیشروی مرتبه‌ی دوم دنباله، ثابت و تفاضلات مرتبه‌ی سوم به بعد آن صفر است.

روش اول: استفاده از تفاضلات پیشرو

اگر در دنباله‌ی $\{a_n\}_{n\ge j}$، (برای $k>p$) $\Delta^p a_j \neq 0, \Delta^k a_j = 0$ (به‌عبارت دیگر تفاضلات پیشروی مرتبه‌ی pام دنباله ثابت باشد)، آن‌گاه جمله‌ی عمومی دنباله $\{a_n\}$، یک جمله‌ای درجه‌ی p به‌صورت زیر است:

فرمول(۱)

$$a_n = a_j + \Delta a_j\binom{\theta}{1} + \Delta^2 a_j\binom{\theta}{2}+\cdots+\Delta^p a_j\binom{\theta}{p} \qquad \theta=\frac{n-j}{h}$$

در این فرمول $\binom{\theta}{p}=\frac{\theta(\theta-1)(\theta-2)\cdots(\theta-p+1)}{p!}$ است. در ضمن فرض بر این است که فاصله‌ی اندیس‌های هر دو جمله‌ی متوالی دنباله برابر و h باشد و اندیس جمله‌ی اول دنباله‌ی j باشد.

در حالت خاص، اگر جملات دنباله‌ی $\{a_n\}$ را با $a_0,a_1,a_2,\ldots$ نمایش دهیم، داریم: $h=1$, $j=0$. لذا: $\theta=n$.

پس:

فرمول(۲)
$$a_n=a_0+\Delta a_0\binom{n}{1}+\Delta^2a_0\binom{n}{2}+\cdots+\Delta^pa_0\binom{n}{p}$$

مثال۲. جمله‌ی عمومی دنباله‌ای با جملات ...۱۱و۸و۵و۲ با توجه به جدول۲ و ثابت بودن تفاضلات پیشروی مرتبه‌ی اول آن $a_n=a_0+\Delta a_0\binom{n}{1}=2+3n\ (n\ge0)$ خواهد بود.

i	a_i	$\Delta^1 a_i$	$\Delta^2 a_i$
۰	۲	۳	۰
۱	۵	۳	۰
۲	۸	۳	۰
۳	۱۱		

جدول ۲

مثال۳. جمله‌ی عمومی دنباله‌ای با جملات ...و۱۰و۵و۲و۱و۲. با فرض آن‌که جملات با $a_0,a_1,a_2,\ldots$ نام‌گذاری شده باشند، با توجه به جدول۱ و فرمول ۲ به شکل زیر به‌دست خواهد آمد:

$$a_0=2,\ \Delta a_0=-1,\ \Delta^2a_0=2\Rightarrow a_n=2-1\binom{n}{1}+2\binom{n}{2}\Rightarrow$$

$$a_n=n^2-2n+2\ (n\ge0)$$

طبق ضابطه به‌دست آمده:

$$a_0=2,a_1=1,a_2=2,a_3=5,a_4=10$$

مثال۴. جمله‌ی عمومی دنباله‌ای با جملات ...و۱۰و۵و۲و۱و۲، با فرض آن‌که جملات با $a_1,a_2,\ldots$ نام‌گذاری شده باشند، با توجه به جدول ۱ و فرمول۱ به شکل زیر به‌دست خواهد آمد. داریم: $h=1$, $j=1$. لذا در فرمول ۱ به‌جای θ، $n-1$ قرار می‌دهیم. خواهیم داشت:

$$a_n=a_1+\Delta a_1\binom{n-1}{1}+\Delta^2a_1\binom{n-1}{2}\Rightarrow a_n=2-1\binom{n-1}{1}+2\binom{n-1}{2}=n^2-4n+5\quad (n\ge1)$$

مثال۵. جمله‌ی عمومی دنباله‌ی

...و۱۰و□و□و۵و□و□و۲و□و□و۱و□و□و۲و□و□

را به‌دست می‌آوریم. در واقع می‌خواهیم جمله‌ی عمومی دنباله‌ای را به‌دست آوریم که جملات آن را دو در میان می‌دانیم و:

$$a_2=2,a_5=1,a_8=2,a_{11}=5,a_{14}=10,\ldots$$

پس جملات دنباله‌ی...و۱۰و۵و۲و۱و۲ را با $a_2,a_5,a_8,a_{11},a_{14},\ldots$ نام‌گذاری می‌کنیم. اگر بخواهیم مستقیماً از فرمول۱ استفاده می‌کنیم، با توجه به آن‌که $h=3$ و $j=2$، داریم: $\theta=\frac{n-2}{3}$. لذا:

$$a_n=a_2+\Delta a_2\binom{\frac{n-2}{3}}{1}+\Delta^2a_2\binom{\frac{n-2}{3}}{2}\Rightarrow$$

$$a_n=2-\frac{n-2}{3}+2\times\frac{\left(\frac{n-2}{3}\right)\left(\frac{n-2}{3}-1\right)}{2!}=$$

$$a_n=\frac{n^2}{9}-\frac{10}{9}n+\frac{34}{9}$$

در غیر این صورت، با توجه به قاعده‌ی لغزاندن حدود کافی است، در فرمول به‌دست آمده در مثال۳، به‌جای n، $\frac{n-2}{3}$ قرار دهیم.

اینک ببینیم اگر فاصله‌ی اندیس‌های جملات دنباله برابر نباشد، چگونه می‌توان جمله‌ی عمومی دنباله را یافت.

تعریف: اگر $\{a(l_n)\}: a(l_0),a(l_2),\ldots,a(l_n),\ldots$ یک دنباله باشد،

$$\begin{cases} a(l_i) & \text{تفاضل تقسیم‌شده‌ی مرتبه‌ی صفرم}: R_i^{\circ} = a(l_i) \\ a(l_i) & \text{تفاضل تقسیم شده مرتبه nام}: R_i^{n} = \dfrac{R_{i+1}^{n-1} - R_i^{n-1}}{L_{i+n} - L_i} \end{cases}$$

نکته‌ی قابل توجه آن است که چون امکان دارد اندیس‌های جملات هم فاصله نباشند، به‌جای آن که آن‌ها را با i نمایش دهیم، با L_i نمایش داده‌ایم.

در حالت خاص، اگر $\{a_n\}_{n\geq \circ}$ یک دنباله باشد، با جملات $a_{\circ}, a_1, a_2, \ldots$

$$\begin{cases} a_i & \text{تفاضل تقسیم شده مرتبه صفرم}: R_i^{\circ} = a_i \\ a_i & \text{تفاضل تقسیم شده مرتبه nام}: R_i^{n} = \dfrac{R_{i+1}^{n-1} - R_i^{n-1}}{n} \end{cases}$$

مثال۶. جدول ۳، جدول تفاضلات تقسیم دنباله ...و۱۰و۵و۲و۱و۲ است، با فرض آن‌که جملات با $a_{\circ}, a_1, a_2, \ldots$ نام‌گذاری شوند.

i	L_i	$a(L_i) = a_i = R_i^{\circ}$	R_i^1	R_i^2	R_i^3
۰	۰	۲	۱=-۱/(۱-۲)	۱=۲/((۱-)-۱)	۰
۱	۱	۱	۱=۱/(۱-۲)	۱=۲/(۱-۳)	۰
۲	۲	۲	۳=۱/(۲-۵)	۱=۲/(۳-۵)	
۳	۳	۵	۵=۱/(۵-۱۰)		
۴	۴	۱۰			

جدول۳

در این مثال، اندیس L_i همان i است، زیرا طبق نام‌گذاری: $L_{\circ} = \circ,\ L_1 = 1,\ L_2 = 2, \cdots$.

نتیجه: در مثال۶، تفاضلات تقسیم‌شده‌ی مرتبه‌ی دوم دنباله ثابت است.

مثال۷. جدول۴، جدول تفاضلات تقسیم شده‌ی دنباله‌ی ...و۵و۲و۱و۲ است، با فرض آن‌که جملات با $a_1, a_5, a_7, a_8, \cdots$ نام‌گذاری شوند.

i	L_i	$a(L_i) = R_i^{\circ}$	$R_i^1 = \frac{R_{i+1}^{\circ} - R_i^{\circ}}{L_{i+1} - L_i}$	$R_i^2 = \frac{R_{i+1}^1 - R_i^1}{L_{i+2} - L_i}$	$R_i^3 = \frac{R_{i+1}^2 - R_i^2}{L_{i+3} - L_i}$
۰	۱	۲	$\frac{1-2}{5-1} = -\frac{1}{4}$	$\frac{\frac{1}{2} - (-\frac{1}{4})}{7-1} = \frac{1}{8}$	$\frac{\frac{5}{6} - \frac{1}{8}}{8-1} = \frac{17}{168}$
۱	۵	۱۰	$\frac{2-1}{7-5} = \frac{1}{2}$	$\frac{3-\frac{1}{2}}{8-5} = \frac{5}{6}$	
۲	۷	۲	$\frac{5-2}{8-7} = 3$		
۳	۸	۵			

جدول ۴

نتیجه: در مثال۷ هیچ یک از تفاضلات تقسیم شده‌ی مرتبه‌ی اول و دوم ثابت نیست، ولی می‌توان جملات بعد را چنان انتخاب کرد که تفاضلات تقسیم‌شده‌ی مرتبه‌ی سوم ثابت باشد.

روش دوم: استفاده از تفاضلات تقسیم شده

اگر در دنباله‌ی

$$R_{\circ}^P \neq \circ,\ R_{\circ}^K = \circ (K > P).\, a(L_{\circ}), a(L_1), a(L_2), \cdots$$

(به‌عبارت دیگر، تفاضلات تقسیم شده مرتبه‌ی pام دنباله‌ی ثابت باشد)، آن‌گاه جمله‌ی عمومی دنباله‌ی $\{a_n\}$، یک چند جمله‌ای درجه‌ی p به صورت زیر است:

فرمول۳

$$a_n = a(L_{\circ}) + R_{\circ}^1(n - L_{\circ}) + R_{\circ}^2(n - L_{\circ})(n - L_1) + \cdots + R_{\circ}^P(n - L_{\circ})(n - L_1)\cdots(n - L_{p-1})$$

مثال۸. جمله‌ی عمومی دنباله‌ی ۱۰و۵و۲و۱و۲، با فرض آن‌که جملات با $a_{\circ}, a_1, a_2, \cdots$ نام‌گذاری شده باشند، با توجه به جدول۳ به شکل زیر است:

داریم:

$$L_{\circ} = \circ,\ L_1 = 1,\ L_2 = 2,\ a(L_{\circ}) = 2,\ R_{\circ}^1 = -1,\ R_{\circ}^2 = 1$$

پس:

$$a_n = 2 - 1(n - \circ) + 1(n - \circ)(n - 1) = n^2 - 2n + 2 \quad n \geq \circ$$

که همان جواب به‌دست آمده در مثال۳ است.

مثال۹. جمله‌ی عمومی دنباله‌ی ...و۵و۲و□و۱و□و□و□و۲ را به‌دست می‌آوریم. در واقع می‌خواهیم ضابطه‌ی دنباله‌ای را به‌دست آوریم که: $a_1 = 2,\ a_5 = 1,\ a_7 = 2,\ a_8 = 5$. در این مثال، چون اندیس‌ها هم فاصله نیستند، نمی‌توان از فرمول۱ استفاده کرد و باید از فرمول۳ بهره گرفت. با توجه به جدول۴ و با فرض ثابت بودن تفاضلات تقسیم‌شده‌ی مرتبه‌ی سوم دنباله، a_n یک چند جمله‌ای درجه‌ی ۳ است که:

$$L_{\circ} = 1,\ L_1 = 5,\ L_2 = 7,\ L_3 = 8,\ a(L_{\circ}) = 2,$$
$$R_{\circ}^1 = \frac{-1}{4},\ R_{\circ}^2 = \frac{1}{8},\ R_{\circ}^3 = \frac{17}{168}$$

پس:

$$a_n = 2 - \frac{1}{4}(n-1) + \frac{1}{8}(n-1)(n-5) + \frac{17}{168}(n-1)(n-5)(n-7)$$

نتیجه: با فرض آن‌که ضابطه‌ی یک دنباله چند جمله‌ای باشد و

با در دست داشتن r تا از جملات، می‌توان جمله‌ی عمومی دنباله را بر حسب n با حداکثر درجه‌ی r-۱ به‌دست آورد. بدین‌منظور، در صورتی‌که فاصله‌ی اندیس جملات برابر باشد، از روش تفاضلات پیشرو و در غیراین صورت، از روش تفاضلات تقسیم شده استفاده می‌کنیم و حداکثر تا تفاضل مرتبه‌ی r-۱ پیش می‌رویم. اگر تفاضل مرتبه‌ی pام $(1 \le p \le r-2)$ ثابت باشد، آن‌گاه جمله‌ی عمومی دنباله، چند جمله‌ای درجه‌ی p است. و در غیر این صورت، با فرض ثابت بودن تفاضل مرتبه‌ی r-۱ام، جمله‌ی عمومی دنباله، چند جمله‌ای درجه‌ی r-۱ خواهد بود.

تمرین

۱. ضابطه‌ی دنباله‌ای را بیابید که به ترتیب، جمله‌ی اول، دوم، سوم و چهارم آن ۲ , ۱۰ ، ۸ و ۴- باشد.

حل: Δ^2 ثابت است و:

$$a_1 = 2,\ \Delta a_1 = 8,\ \Delta^2 a_1 = -10 \Rightarrow a_n = 2 + 8\binom{n-1}{1} - 10\binom{n-1}{2} \Rightarrow a_n = -5n^2 + 23n - 16 \ (n \ge 1)$$

۲. ضابطه‌ی دنباله‌ای را بیابید که به ترتیب، جمله‌ی سوم، پنجم، هفتم و نهم آن ۲ ، ۱۰ ، ۸ و ۴-باشد.

$$j = 3,\ h = 2 \Rightarrow \theta = \frac{n-3}{2}$$

$$a_n = 2 + 8\binom{\frac{n-3}{2}}{1} - 10\binom{\frac{n-3}{2}}{2}$$

$$= 2 + 8\left(\frac{n-3}{2}\right) - 5\left(\frac{n-3}{2}\right)\left(\frac{n-5}{2}\right)$$

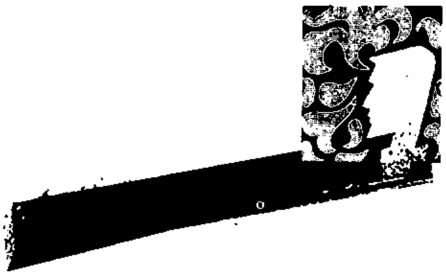
۳. ضابطه‌ی دنباله‌ای را بیابید که به ترتیب جمله‌ی سوم، پنجم، ششم و دهم آن ۲ ، ۱۰ ، ۸ و ۴- باشد.

حل: داریم:

$$L_0 = 3,\ L_1 = 5,\ L_2 = 6,\ L_3 = 10,\ a(L_0) = 2,$$
$$R_0^1 = 4,\ R_0^2 = -2,\ R_0^3 = \frac{9}{35}$$

و با فرض ثابت بودن R^3 داریم:

$$a_n = 2 - 4(n-3) - 2(n-3)(n-5) + \frac{9}{35}(n-3)(n-5)(n-6)$$



اعداد جالب ریاضی

در ستِ به این اعمال ضرب توجه کنید.

۲۱×۲۴=۵۰۴
۱۲×۴۲=۵۰۴

۶۳×۱۲=۷۵۶
۳۶×۲۱=۷۵۶

۱۳×۱۳=۱۶۹
۳۱×۳۱=۹۶۱

۶۲×۱۳=۸۰۶
۲۶×۳۱=۸۰۶

۹۶×۲۳=۲۲۰۸
۶۹×۳۲=۲۲۰۸

۸۴×۱۲=۱۰۰۸
۴۸×۲۱=۱۰۰۸

۳۶×۸۴=۳۰۲۴
۶۳×۴۸=۳۰۲۴

۴۲×۳۶=۱۵۱۲
۲۴×۶۳=۱۵۱۲

۸۴×۲۴=۲۰۱۶
۴۸×۴۲=۲۰۱۶

۹۳×۲۶=۲۴۱۸
۳۹×۶۲=۲۴۱۸

۹۶×۴۶=۴۴۱۶
۶۹×۶۴=۴۴۱۶

مسابقه‌های ریاضی در کشورهای گوناگون دنیا(۱۰)

مسابقه‌ی ریاضی آمریکا ـ ۱۹۸۳

● ترجمه و تألیف: هوشنگ شرقی

اشاره

همان گونه که در یکی از شماره‌های پیشین مجله‌ی برهان متذکر شدیم، مسابقات ریاضی مدارس آمریکا در دو سطح متفاوت مقدماتی (AHSME) و پیشرفته (AIME) برگزار می‌شود. برگزیدگان مسابقه‌ی AIME به مرحله‌ی المپیاد ریاضی دعوت می‌شوند. در این شماره و شماره‌ی آینده، سؤالات مسابقه‌ی ریاضی AIME سال ۱۹۸۳ آمریکا همراه با راه‌حل آن‌ها را ارائه می‌دهیم. تعداد سؤالات آزمون ۱۵ سؤال بوده است.

صورت مسائل

۱. فرض کنید x و y و z بزرگ‌تر از ۱، و w عددی مثبت باشد،

به‌طوری که:

$\log_x^w = ۲۴$ و $\log_y^w = ۴۰$ و $\log_{xyz}^w = ۱۲$

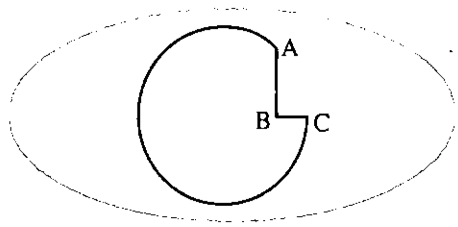
مقدار $\log_z^w$ را به‌دست آورید.

۲. فرض کنید: $f(x)=|x-p|+|x-۱۵|+|x-p-۱۵|$، به‌طوری که $۰ < p < ۱۵$. مینی‌فم مقدار $f(x)$ را به ازای $p \le x \le ۱۵$ به‌دست آورید.

۳. حاصل‌ضرب ریشه‌های معادله‌ی زیر را به‌دست آورید:

$$x^۲+۱۸x+۳۰ = ۲\sqrt{x^۲+۱۸x+۴۵}$$

۴. یک ماشین‌افزار به شکلی شبیه یک دایره‌ی برش‌خورده به‌صورت زیر است. شعاع دایره $\sqrt{۵۰}$ سانتی‌متر، AB، ۶ سانتی‌متر، BC، ۲ سانتی‌متر و زاویه‌ی ABC قائمه است. مربع فاصله‌ی B تا مرکز دایره را (با واحد سانتی‌متر) به‌دست آورید.



۵. فرض کنید مجموع مربعات دو عدد مختلط مساوی ۷ و مجموع مکعبات آن‌ها ۱۰ باشد. بیشترین مقدار حقیقی $x + y$ چیست؟

۶. فرض کنید $a_n = ۶^n + ۸^n$. باقی‌مانده‌ی تقسیم $a_{۸۳}$ را بر ۴۹ به‌دست آورید.

۷. ۲۵ نفر از شوالیه‌های آرتورشاه دور میزگرد همیشگی خودشان نشسته‌اند.[۱] ۳ نفر از آن‌ها انتخاب شده‌اند ـ شانس هر ۳ نفر از این جمع برای انتخاب یکسان بوده است ـ تا برای به قتل رساندن یک اژدهای مزاحم اعزام شوند. فرض کنید p احتمال آن باشد که لااقل ۲ نفر از این ۳ نفر، کنار هم نشسته باشند. هرگاه p به‌صورت یک کسر تحویل‌ناپذیر نوشته شود، مجموع صورت و مخرج آن چیست؟

۸. بزرگ‌ترین عامل اول دو رقمی عدد صحیح $n = \binom{۲۰۰}{۱۰۰}$ چیست؟

حل مسائل

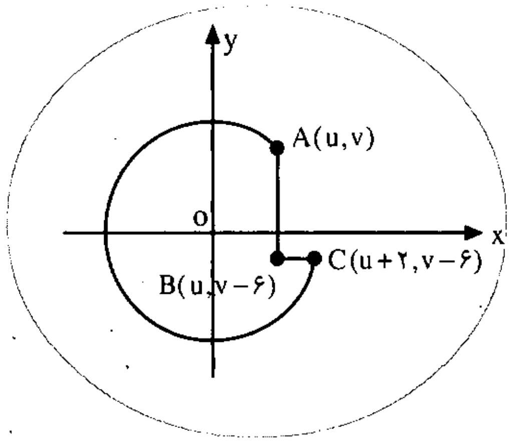
۱. از قضیه‌ی $\log_b^a = \frac{۱}{\log_a^b}$ استفاده می‌کنیم:

$$\log_w^x = \frac{۱}{۲۴} \ , \quad \log_w^y = \frac{۱}{۴۰} \ , \quad \log_w^{xyz} = \frac{۱}{۱۲}$$

$$\Rightarrow \log_w^x + \log_w^y + \log_w^z = \frac{۱}{۱۲} \Rightarrow \frac{۱}{۲۴} + \frac{۱}{۴۰} + \log_w^z = \frac{۱}{۱۲}$$

$$\Rightarrow \log_w^z = \frac{۱}{۶۰} \Rightarrow \log_z^w = ۶۰$$

۲. به سادگی روشن است که $x - p \ge ۰$ و درنتیجه:



$|x-p| = x-p$ و $x-۱۵ \le ۰$ و $|x-۱۵| = ۱۵-x$ و $x < ۱۵+p$. بنابراین: $x-p-۱۵ \le ۰$ و $|x-p-۱۵| = ۱۵+p-x$. از آن‌جا:

$$f(x) = x-p+۱۵-x+۱۵+p-x = ۳۰-x$$

و مینیمم $f(x)$ به ازای ماکزیمم x به‌دست می‌آید:

$$\min f = ۳۰-۱۵ = ۱۵$$

۳.

$$x^۲+۱۸x+۳۰ = t$$

$$\Rightarrow t = ۲\sqrt{t+۱۵} \Rightarrow t^۲ = ۴t+۶۰ \Rightarrow t^۲-۴t-۶۰ = ۰$$

$$\Rightarrow (t-۱۰)(t+۶) = ۰ \Rightarrow t = ۱۰$$ یا $t = -۶$ غیرقابل قبول (چرا؟)

$$\Rightarrow x^۲+۱۸x+۳۰ = ۱۰$$

$$\Rightarrow x^۲+۱۸x+۲۰ = ۰$$

و حاصل‌ضرب ریشه‌های معادله‌ی اخیر مساوی ۲۰ است.

۴. مسئله را به روش تحمیلی حل می‌کنیم. دایره را مطابق شکل در یک دستگاه مختصات قرار می‌دهیم، به‌طوری که مرکز آن در مبدأ مختصات باشد. فرض می‌کنیم $A(u,v)$ باشد. با توجه به اطلاعات مسئله، $B(u,v-۶)$ و $C(u+۲,v-۶)$ است و معادله‌ی دایره به صورت $x^۲+y^۲ = ۵۰$ خواهد بود. چون C و A روی دایره هستند، بنابراین: $u^۲+v^۲ = ۵۰$ و $(u+۲)^۲+(v-۶)^۲ = ۵۰$ و از این دو معادله مقادیر u و v را به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} u^2+v^2=50 \\ u^2+v^2+4u-12v=10 \Rightarrow 4u-12v=-40 \end{cases}$$

$$\Rightarrow u-3v+10=0 \Rightarrow u=3v-10 \Rightarrow v^2+(3v-10)^2=50$$

$$\Rightarrow v^2-6v+5=0 \Rightarrow v=1 \text{ یا } v=5$$

$$\Rightarrow (u,v)=(-7,1) \text{ یا } (5,5)$$

و چون A در ناحیه‌ی اول مختصات است، پس $A(5,5)$ و $B(5,-1)$ و مربع فاصله‌ی B از مرکز دایره برابر است با: $oB^2=26$

۵. دو عدد را x و y فرض می‌کنیم. طبق مفروضات مسئله داریم:

$$x^2+y^2=7\ ,\ x^3+y^3=10$$

با فرض $x+y=s$ و $xy=p$ خواهیم داشت:

$$s^2-2p=7 \text{ و } s^3-3sp=10 \text{ و } p=\frac{s^2-7}{2}$$

$$\Rightarrow s^3-3s\left(\frac{s^2-7}{2}\right)=10 \Rightarrow s^3-21s+20=0$$

$$\Rightarrow s^3-s-20s+20=0 \Rightarrow s(s-1)(s+1)-20(s-1)=0$$

$$\Rightarrow (s-1)(s^2+s-20)=0 \Rightarrow (s-1)(s-4)(s+5)=0$$

$$\Rightarrow s=1 \text{ یا } s=4 \text{ یا } s=-5 \text{ و } Max(s)=4$$

۶. از بسط دوجمله‌ای نیوتون استفاده می‌کنیم:

$$a_{83}=6^{83}+8^{83}=(7-1)^{83}+(7+1)^{83}$$

$$=7^{83}-\binom{83}{1}7^{82}+\binom{83}{2}7^{81}-\dots+\binom{83}{82}7-1+$$

$$7^{83}+\binom{83}{1}7^{82}+\binom{83}{2}7^{81}+\dots+\binom{83}{82}7+1$$

$$=2\left(7^{83}+\binom{83}{2}7^{81}+\dots+\binom{83}{82}7\right)$$

$$=2\times 49\left(7^{81}+\binom{83}{2}7^{79}+\dots+\binom{83}{80}\right)+14\times 83$$

$$\Rightarrow a_{83}=49k+1162 \Rightarrow a_{83}\overset{49}{\equiv}1162\overset{49}{\equiv}35$$

۷. بهتر است مسئله را در حالت کلی که n شوالیه دور میزگرد باشند، حل کنیم. ابتدا توجه می‌کنیم که n سه‌تایی می‌توان انتخاب کرد که هر سه نفر کنار هم نشسته باشند (کافی است هر نفر را درنظر بگیریم و در جهت حرکت عقربه‌های ساعت، او و دو نفر مجاورش را یک سه‌تایی فرض کنیم. در این صورت n سه‌تایی خواهیم داشت که هر سه کنار هم باشند). سپس باید سه‌تایی‌هایی را بشماریم که فقط دو نفر آن‌ها همسایه‌ی هم باشند. به این منظور فرض می‌کنیم، A و B دو شوالیه‌ی مجاور باشند. اگر C و D دو نفر کناری دیگر آن‌ها باشند، تمام سه‌تایی‌هایی را می‌خواهیم که شامل A و B باشند و شامل هیچ‌یک از C و D نباشند. بنابراین $n-4$ سه‌تایی می‌توان به این صورت تشکیل داد. با درنظر گرفتن همه‌ی دوتایی‌های به‌همین شکل، نتیجه می‌گیریم که $n(n-4)$ سه‌تایی هم به این صورت وجود دارد. بنابراین: $n(A)=n+n(n-4)=n(n-3)$ و بدیهی است که: $n(s)=\binom{n}{3}$. لذا:

$$p(A)=\frac{x(A)}{x(s)}=\frac{x(n-3)}{\binom{n}{3}}=\frac{6(8-3)}{(x-1)(x-2)}$$

و در این حالت خاص:

$$p=\frac{6\times 22}{24\times 23}=\frac{11}{46}\Rightarrow 11+46=57$$

۸. می‌توانیم بنویسیم:

$$\binom{200}{100}=\frac{200!}{(100!)^2}=\frac{101\times 102\times 103\times\dots\times 200}{1\times 2\times 3\times\dots\times 100}$$

$$=\frac{101\times 103\times 105\times\dots\times 199}{1\times 2\times 3\times\dots\times 50}\times 2^{50}$$

حال باکمی دقت درمی‌یابیم که صورت این کسر بر مخرج آن بخش‌پذیر و برابر با یک عدد صحیح است. ولی با شرط $A=\frac{101\times 103\times 105\times\dots\times 199}{1\times 2\times 3\times\dots\times 50}$ واضح است که صورت A شامل هیچ عدد زوجی نیست و لذا در صورت این کسر نمی‌توان دو برابر یک عدد اول دو رقمی را داشت. پس به دنبال سه برابر یک عدد اول دو رقمی می‌گردیم؛ یعنی $3p\leq 200$. درنتیجه $p<\frac{200}{3}$ و بزرگ‌ترین عدد اولی که در این شرط صدق می‌کند، $p=61$ است. در واقع: $61\times 3=183$ و لذا بزرگ‌ترین عامل اول دو رقمی این عدد، ۶۱ است.

---

۱. اشاره به کتاب معروف «آرتورشاه و شوالیه‌های میزگرد».

همرسی سه میانه‌ی مثلث

● دکتر احمد شرف‌الدین

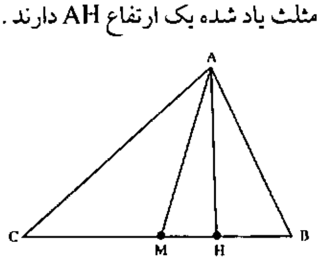
چکیده:

در مقاله‌ی حاضر، پنج برهان برای «قضیه‌ی همرسی سه میانه‌ی مثلث» می‌نویسیم. مطالعه‌ی این مقاله برای دانش‌آموزان سودمند است. برهان‌های اول، دوم و سوم اثر نگارنده است. برهان‌های چهارم و پنجم را از کتاب‌های هندسه نقل می‌کنم.

قضیه: سه میانه‌ی هر مثلث از یک نقطه می‌گذرند (به عبارت دیگر همرس‌اند).

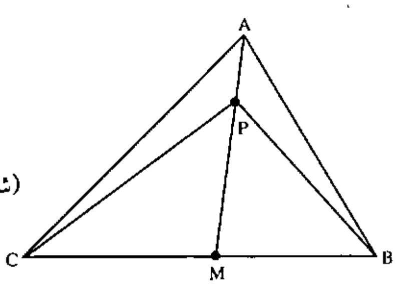
برهان اول:

الف) مثلث ABC و میانه‌ی AM را که رأس A را به نقطه‌ی M وسط ضلع BC وصل می‌کند، درنظر می‌گیریم. می‌گوییم مساحت‌های دو مثلث AMB و AMC برابرند، زیرا MB=MC و به‌علاوه، دو مثلث یاد شده یک ارتفاع AH دارند.



(شکل ۱)

ب) روی میانه‌ی AM نقطه‌ی دل‌خواه P را در نظر می‌گیریم. می‌گوییم مساحت‌های دو مثلث PMB و PMC برابرند (بنابر حکم الف). پس مساحت‌های دو مثلث PAB و PAC برابرند.



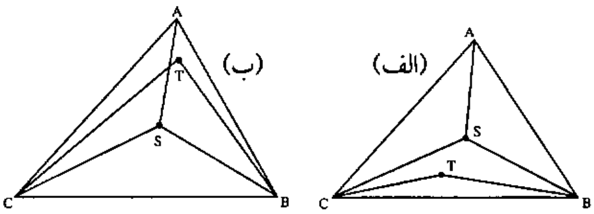
(شکل ۲)

پ) اکنون نقطه‌ی P را روی میانه‌ی AM، بسیار نزدیک به نقطه‌ی A می‌گیریم. در این وضع نقطه‌ی P، مساحت دو مثلث PAB و PAC بسیار به صفر نزدیک است. نقطه‌ی P را روی میانه‌ی AM به سوی نقطه‌ی M حرکت می‌دهیم. با حرکت نقطه‌ی P به سوی نقطه‌ی M، مساحت‌های دو مثلث PAB و PAC به تدریج زیاد می‌شوند. وقتی نقطه‌ی P به نقطه M می‌رسد، مساحت‌های دو مثلث یاد شده برابر نصف مساحت مثلث ABC می‌شوند. پس

روی میانه‌ی AM نقطه‌ای چون A' وجود دارد، به طوری که:
مساحت مثلث $A'AB$ = مساحت مثلث $A'CA$ = مساحت مثلث $A'BC$

ت) اکنون می‌گوییم که داخل مثلث ABC فقط یک نقطه وجود دارد، به طوری که مساحت‌های سه مثلث SAB، SBC و SCA مساوی باشند.

برای اثبات چنین می‌گوییم: داخل مثلث ABC، نقطه‌ی S را درنظر می‌گیریم، به طوری که مساحت سه مثلث SAB، SBC و SCA مساوی باشند (بنابر آن‌چه در سطرهای پیشین گفتیم، چنین نقطه‌ای وجود دارد). اگر نقطه‌ی $T \neq S$، نقطه‌ای داخل مثلث ABC باشد، آن‌گاه مساحت‌های سه مثلث TAB، TBC و TCA نمی‌توانند مساوی باشند، زیرا مساحت یکی از این مثلث‌ها یا دو تا از آن‌ها از یک سوم مساحت مثلث ABC کمتر می‌شود (در دو مثلث الف و ب در شکل۳ این مطلب به وضوح معلوم است).



(شکل۳)

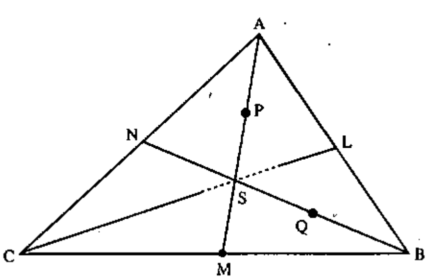
از مطالب یاد شده نتیجه می‌شود، سه میانه‌ی مثلث بر یک نقطه می‌گذرند و جای نقطه‌ی برخورد سه میانه چنان است که اگر از آن نقطه به سه رأس مثلث وصل کنیم، سه مثلث هم‌مساحت به‌دست می‌آید.

برهان دوم: مثلث ABC و میانه‌ی AM را درنظر می‌گیریم. می‌گوییم خط AM مکان هندسی نقاطی چون P است؛ به طوری که:

مساحت مثلث PAC = مساحت مثلث PAB (۱)

(این حکم در اوایل برهان اول ثابت شده است). میانه‌ی مربوط به ضلع AC را BN می‌نامیم. می‌گوییم خط BN مکان هندسی نقاطی چون Q است، به طوری که:

مساحت مثلث QBC = مساحت مثلث QAB (۲)



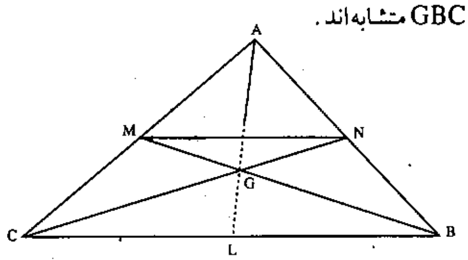
محل برخورد دو میانه‌ی AM و BN را با S نشان می‌دهیم. از دو رابطه‌ی (۱) و (۲) نتیجه می‌شود:

مساحت مثلث SBC = مساحت مثلث SAC (۳)

از رابطه‌ی ۳ نتیجه می‌شود که نقطه‌ی S روی میانه‌ی CL قرار دارد.

برهان سوم: این برهان در کتاب «هندسه‌ی تحلیلی چندمحوری»، اثر نگارنده، آمده است (صفحه‌های ۶۸ و ۶۹).

برهان چهارم: این برهان در کتاب‌های هندسه چنین بیان شده است: مثلث ABC و دو میانه‌ی BM و CN را در نظر می‌گیریم و نقطه‌ی برخورد آن‌ها را G می‌نامیم. خط MN وسط‌های دو ضلع AB و AC را به هم وصل می‌کند، پس موازی ضلع BC است و طول پاره‌خط BC دو برابر طول پاره‌خط MN است. پس دو مثلث GMN و GBC متشابه‌اند.



از تشابه دو مثلث یاد شده نتیجه می‌شود:

$$\frac{GC}{GN}=\frac{GB}{GM}=\frac{BC}{MN}$$

وچون $BC=۲MN$، پس: $GC=۲GN$ و $GB=۲GM$.
نقطه‌ی برخورد میانه‌ی AL و میانه‌ی BM را k می‌نامیم. بنابر برهانی که هم‌اکنون یاد کردیم، تساوی زیر محقق است:

$$kB=۲kM$$

از تساوی اخیر نتیجه می‌شود که نقطه‌ی k بر نقطه‌ی G منطبق است. پس سه میانه‌ی هر مثلث از یک نقطه می‌گذرند.

برهان پنجم: قضیه‌ی «سوا» را به‌کار می‌بریم.

قضیه‌ی سوا: اگر سه نقطه‌ی M و N و P به ترتیب بر اضلاع BC، AC و AB مثلث ABC طوری قرار داشته باشند که رابطه‌ی زیر برقرار باشد، آن‌گاه سه خط AM، BN و CP همرس‌اند و برعکس.

$$\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}}\cdot\frac{\overline{NC}}{\overline{NA}}\cdot\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}}=-۱$$

($\overline{MB}$ و $\overline{MC}$ اندازه‌های جبری بردارهای $\overrightarrow{MB}$ و $\overrightarrow{MC}$ روی محوری منطبق بر خط BC هستند. جهت این محور دل‌خواه است، زیرا مقدار نسبت $\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}}$ به جهت محور منطبق بر خط BC بستگی ندارد. بر دو خط CA و AB محورهایی اختیار و توضیحات اخیر را تکرار می‌کنیم.)

اگر AM، BN و CP میانه‌های مثلث ABC باشند، چنین داریم:

$$\overline{MB}=-\overline{MC} \quad و \quad \overline{NC}=-\overline{NA} \quad و \quad \overline{PA}=-\overline{PB}$$

اندازه‌های شش مقدار اخیر در رابطه (۱) صدق می‌کنند، پس سه میانه‌ی هر مثلث همرس‌اند.



رسم نمودار تابع

(درجه‌ی دوم، درجه‌ی سوم، هموگرافیک و مثلثاتی)

● احمد قندهاری

ضابطه‌ی تابع درجه‌ی دوم در حالت کلی به صورت $y = ax^2 + bx + c$ است.

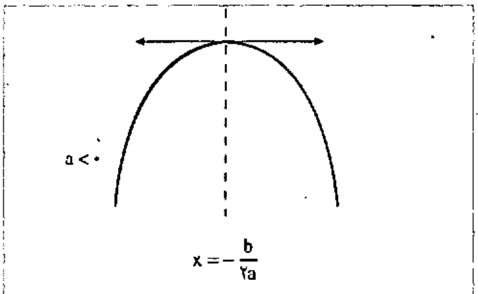
۱. اگر $a > 0$، آن‌گاه نمودار تابع یک مینی‌مم نسبی، و اگر $a < 0$، نمودار تابع یک ماکزی‌مم نسبی دارد.

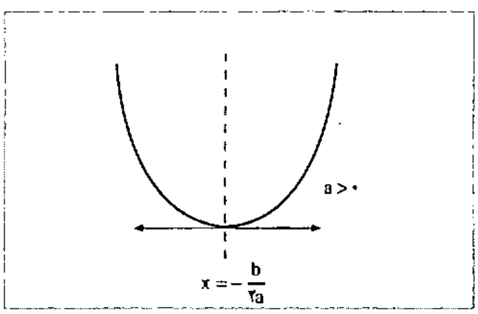
۲. $x = -\frac{b}{2a}$ طول اکسترمم نسبی و $y = \frac{4ac - b^2}{4a}$ عرض اکسترمم نسبی است.

۳. خط به معادله‌ی $x = -\frac{b}{2a}$ معادله‌ی محور تقارن نمودار تابع است.

۴. اگر خط y=m نمودار تابع با ضابطه‌ی $y = ax^2 + bx + c$ را در نقاط A و B قطع کند، مکان هندسی نقطه‌ی C وسط AB، قسمتی از خط $x = -\frac{b}{2a}$ است که درون کاسه‌ی منحنی است.

۵. شکل کلی این تابع به صورت‌های زیر است:





برای رسم نمودار تابع چنین عمل می‌کنیم:

الف) ریشه‌ی معادله‌ی $y'_x = 0$ را محاسبه می‌کنیم.

ب) به x صفر می‌دهیم و y را محاسبه می‌کنیم و به y صفر می‌دهیم، xها را محاسبه می‌کنیم.

چنان‌چه معادله‌ی $y = 0$، ریشه‌های حقیقی نداشته باشد یا ریشه‌های آن کسری یا رادیکالی باشد، از نقاط کمکی برای رسم استفاده می‌کنیم.

ج) جدول تغییرات تابع را تشکیل می‌دهیم. در سطر اول xها را می‌نویسیم و در سطر دوم y'_x را تعیین علامت می‌کنیم. سپس جدول را کامل می‌کنیم. به کمک جدول و مطالب فوق، نمودار تابع را رسم می‌کنیم.

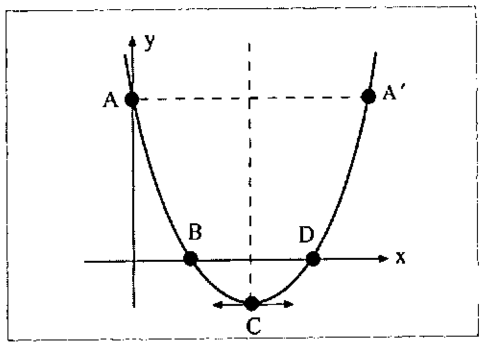
مسئله‌ی ۱. مطلوب است رسم جدول و نمودار هریک از تابع‌های به معادله‌های زیر:

۱) $y = x^2 - 4x + 3$

$y'_x = 2x - 4 = 0 \Rightarrow x = 2$ طول نقطه‌ی مینی‌مم نسبی

$x = 0 \Rightarrow y = 3\ ,\ y = 0 \Rightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow x = 1\ ,\ x = 3$

$x \to \pm\infty \Rightarrow y \to +\infty\ ,\ x = 2 \Rightarrow y = 4 - 8 + 3 = -1$



x	$-\infty$	0	1	2	3	$+\infty$
y'_x	−	−	−	0 +	+	+
y	$+\infty$ ↘	3 ↘	0 ↘	−1 ↗	0 ↗	$+\infty$
		A	B	C	D	

۲) $y = 2x^2 - 4x - 1$

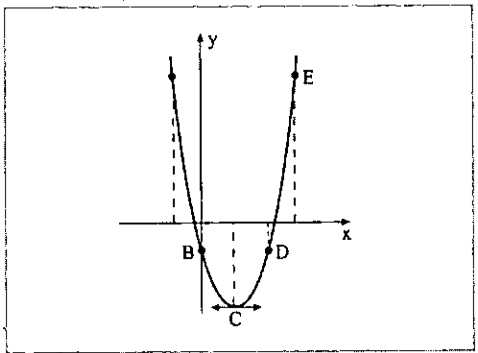
$y'_x = 4x - 4 = 0 \Rightarrow x = 1$ طول مینی‌مم نسبی

$x = 0 \Rightarrow y = 1$

از حل معادله‌ی $y = 0$ صرف‌نظر می‌کنیم، زیرا جواب‌های معادله‌ی $y' = 0$ رادیکالی است. برای بهتر رسم کردن منحنی، دو عدد ۲ و ۳ در سمت راست جواب مشتق و دو عدد ۰ و ۱- در سمت چپ جواب مشتق به‌عنوان xهای کمکی می‌نویسیم.

$x \to \pm\infty \Rightarrow y \to +\infty$

		کمکی			کمکی		
x	$-\infty$	−1	0	1	2	3	$+\infty$
y'_x	−	−	−	0 +	+	+	
y	$+\infty$ ↘	5 ↘	−1 ↘	−3 ↗	−1 ↗	5 ↗	$+\infty$
		A	B	C	D	E	



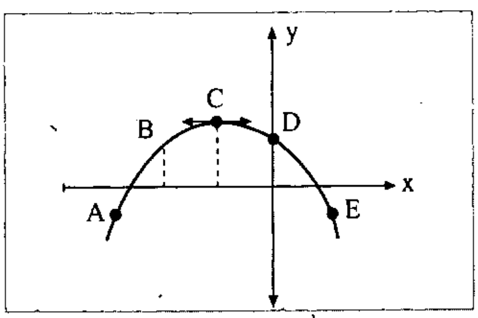
۳) $y = -\frac{x^2}{2} - x + 1$

$y'_x = -x - 1 = 0 \Rightarrow x = -1$ طول نقطه‌ی ماکزی‌مم نسبی

$x = 0 \Rightarrow y = 1$

$x \to \pm\infty \Rightarrow y \to -\infty$

		کمکی			کمکی		
x	$-\infty$	−3	−2	−1	0	1	$+\infty$
y'_x	+	+	+	0 −	−	−	
y	$-\infty$ ↗	$-\frac{1}{2}$ ↗	1 ↗	$\frac{3}{2}$ ↘	1 ↘	$-\frac{1}{2}$ ↘	$-\infty$
		A	B	C	D	E	



مسئله‌ی ۲. در تابع با ضابطه‌ی $y = ax^2 + bx + c$، a، b و c را چنان بیابید که نمودار تابع، محور yها را در نقطه‌ای به عرض (۱) قطع کند و نقطه‌ی (۱- و ۱) اکسترمم نسبی تابع باشد.

حل: نقطه‌ی تقاطع منحنی با محور yها $A(0,1)$

نقطه‌ی اکسترمم نسبی $M(1,-1)$

$A(0,1) \xrightarrow{\text{در معادله‌ی تابع}} 1 = 0 + 0 + c \Rightarrow c = 1$

$x = -\frac{b}{2a} = 1 \Rightarrow b = -2a$

$y=\frac{۴ac-b^{۲}}{۴a}=-۱ \Rightarrow \frac{۴a-b^{۲}}{۴a}=-۱ \Rightarrow -۴a=۴a-b^{۲}$

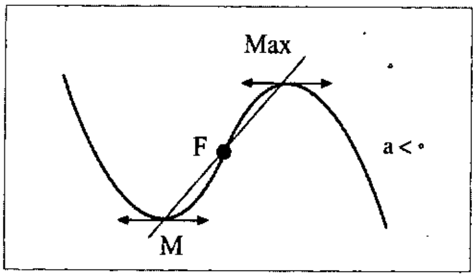
$\Rightarrow b^{۲}-۸a=۰ \Rightarrow ۴a^{۲}-۸a=۰ \Rightarrow ۴a(a-۲)=۰\ ,\ a\neq ۰$

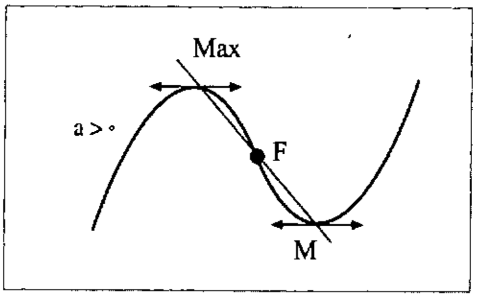
$\Rightarrow a-۲=۰ \Rightarrow a=۲\ ,\ b=-۲a \Rightarrow b=-۴$

رسم نمودار تابع درجه‌ی سوم

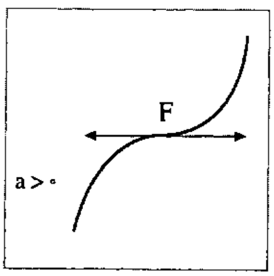
این تابع در حالت کلی به‌صورت $y=ax^{۳}+bx^{۲}+cx+d$ است.

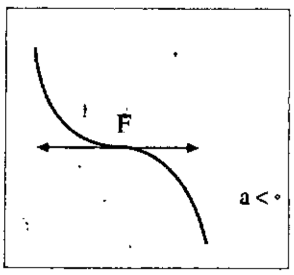
۱ . اگر معادله‌ی $y'_x=۰$ دو ریشه‌ی حقیقی متمایز داشته باشد، نمودار تابع یک ماکزی‌مم نسبی و یک مینی‌مم نسبی دارد که نقطه‌ی عطف به‌طول $x=-\frac{b}{۳a}$ در وسط آن‌ها قرار دارد و مرکز تقارن نمودار تابع است.



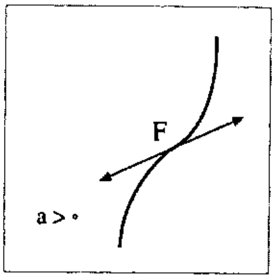


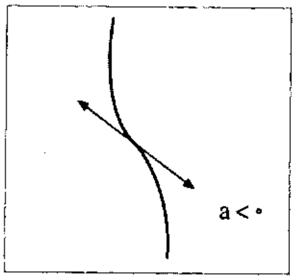
۲ . اگر معادله‌ی $y'_x=۰$ ریشه‌ی حقیقی مضاعف داشته باشد، آن ریشه طول نقطه‌ی عطف است و نمودار تابع، نقاط اکسترمم نسبی ندارد.





۳ . اگر معادله‌ی $y'_x=۰$ ریشه‌ی حقیقی نداشته باشد، باز هم منحنی تابع نقاط اکسترمم نسبی دارد.





برای رسم نمودار تابع درجه‌ی سوم، ابتدا معادله‌ی $y'_x=۰$ را حل و ریشه‌های آن را محاسبه می‌کنیم. چنان‌چه معادله‌ی $y'_x=۰$ ریشه‌ی حقیقی نداشته باشد، از ریشه‌ی $y''=۰$ به‌عنوان نقطه‌ی اصلی منحنی استفاده می‌کنیم. البته ریشه‌ی $y''=۰$ طول نقطه‌ی عطف است. سپس مانند تابع درجه‌ی دوم حل را ادامه می‌دهیم.

مسئله: مطلوب است رسم جدول و منحنی نمایش تغییرات هر یک از تابع‌های به معادله‌های زیر:

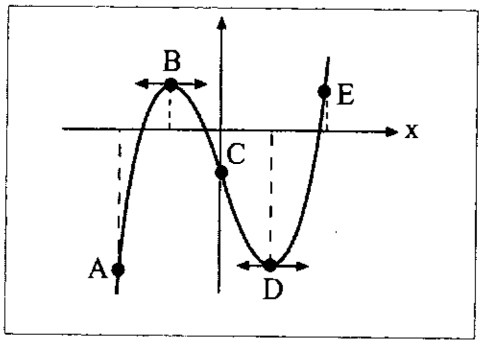
۱) $y=x^{۳}-۳x-۱$

طول‌های اکسترمم نسبی

$y'_x=۳x^{۲}-۳=۰ \Rightarrow x^{۲}=۱ \Rightarrow x=\pm ۱$

$x=۰ \Rightarrow y=-۱\ ,\ x\to\pm\infty \Rightarrow y\to\pm\infty$

x	-∞		-۲		-۱		۰		۱		۲		+∞
y'_x		+		+	۰	−		−	۰	+		+	
y	-∞	↗	-۳	↗	۱	↘	-۱	↘	-۳	↗	۱	↗	+∞
			A		B		C		D		E		



۲) $y=-x^{۳}+۳x^{۲}-۲$

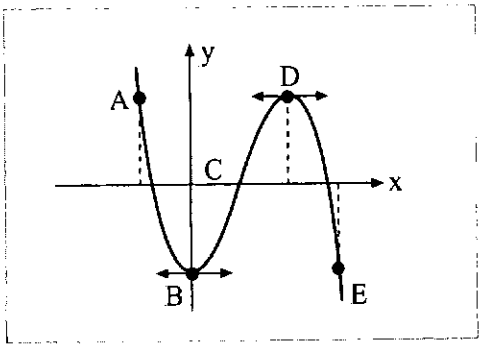
طول‌های اکسترمم نسبی

$y'_x=-۳x^{۲}+۶x=۰ \Rightarrow -۳x(x-۲)=۰ \Rightarrow x=۰\ ,\ x=۲$

$x\to\pm\infty \Rightarrow y\to\mp\infty$

$x=۰ \Rightarrow y=-۲$

x	-∞		-۱		۰		۱		۲		۳		+∞
y'_x		−		−	۰	+		+	۰	−		−	
y	+∞	↘	۲	↘	-۲	↗	۰	↗	۲	↘	-۲	↘	-∞
			A		B		C		D		E		

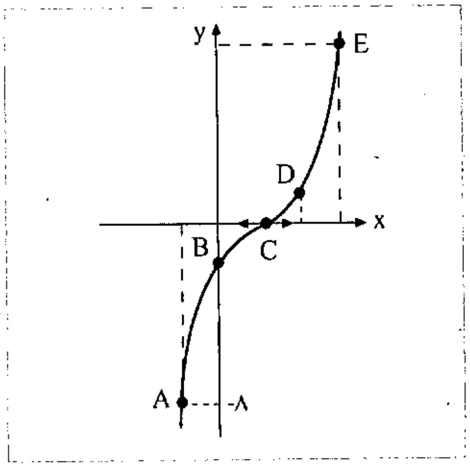


معادله ریشه‌ی مضاعف دارد، پس $x = ۱$ طول نقطه‌ی عطف است.

۳) $y = (x-۱)^۳$

$y'_x = ۳(x-۱)^۲ = ۰ \Rightarrow x = ۱$

$x \to \pm\infty \Rightarrow y \to \pm\infty$



x	-∞		-۱		۰		۱		۲		۳		+∞
y'_x		+		+		+	۰	+		+		+	
y	-∞	↗	-۸	↗	-۱	↗	۰	↗	۱	↗	۸	↗	+∞
			A		B		C		D		E		

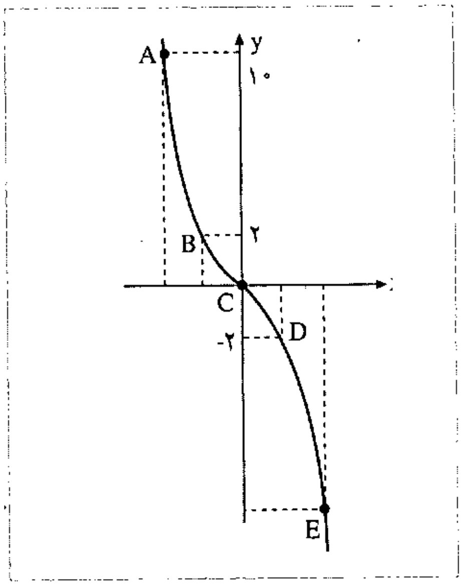
معادله‌ی $y'_x = ۰$ ریشه‌های حقیقی ندارد.

۴) $y = -x^۳ - x$

$y'_x = -۳x^۲ - ۱ = ۰ \Rightarrow x^۲ = -\frac{۱}{۳}$

$y'_x = -۶x = ۰ \Rightarrow x = ۰$

$x \to \pm\infty \Rightarrow y \to \mp\infty$

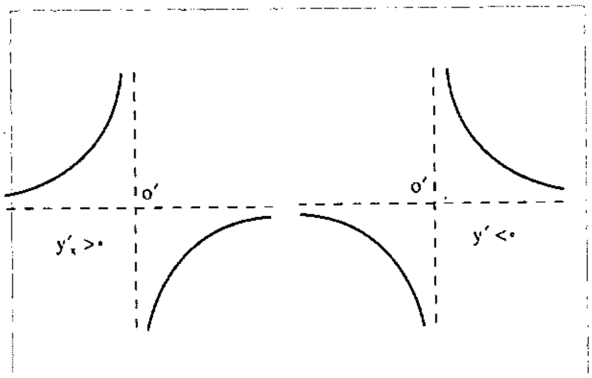


x	-∞		-۲		-۱		۰		۱		۲		+∞
y'_x		−		−		−		−		−		−	
y	+∞	↘	۱۰	↘	۲	↘	۰	↘	-۲	↘	-۱۰	↘	-∞
			A		B		C		D		E		

رسم نمودار تابع هموگرافیک

ضابطه‌ی تابع هموگرافیک در حالت کلی به صورت $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ ، $c \neq ۰$ است. نمودار این تابع یک مجانب قائم به معادله‌ی $x = -\frac{d}{c}$ و یک مجانب افقی به معادله‌ی $y = \frac{a}{c}$ دارد.

اگر $y'_x > ۰$ ، تابع اکیداً صعودی و اگر $y'_x < ۰$ ، تابع اکیداً نزولی است.



محل تلاقی مجانب‌ها یعنی نقطه‌ی $O'(-\frac{d}{c}, \frac{a}{c})$ مرکز تقارن منحنی است. برای رسم جدول تغییرات و نمودار تابع، ابتدا معادله های مجانب‌های قائم و افقی را به‌دست می‌آوریم و سپس y'_x را محاسبه می‌کنیم. برای رسم دقیق نمودار، در دست داشتن

یک نقطه از منحنی کافی است. زیرا محل تلاقی مجانب‌ها مرکز تقارن منحنی است. جدول تغییرات را تشکیل می‌دهیم و پس از آن نمودار تابع را رسم می‌کنیم.

مسئله‌ی ۱. جدول تغییرات و نمودار هریک از تابع‌های باضابطه‌ی زیر را بیابید.

$$1)\quad y=\frac{2x+1}{2x-1}$$

معادله‌ی مجانب قائم

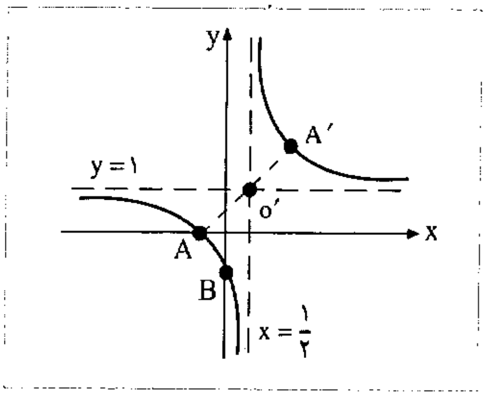
مجانب قائم : $y \to \pm\infty \Rightarrow 2x-1=0 \Rightarrow x=\frac{1}{2}$

معادله‌ی مجانب افقی

مجانب افقی : $x \to \pm\infty \Rightarrow y=\frac{2}{2} \Rightarrow y=1$

$x=0 \Rightarrow y=-1$ و $y=0 \Rightarrow 2x+1=0 \Rightarrow x=-\frac{1}{2}$

$$y'_x=\frac{-4}{(2x-1)^2}<0$$



x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
y'_x		$-$		$-$		$-$	‖	$-$	
y	1	↘	0 (A)	↘	-1 (B)	↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	1

$$2)\quad y=\frac{\sqrt{2}x}{x+1}$$

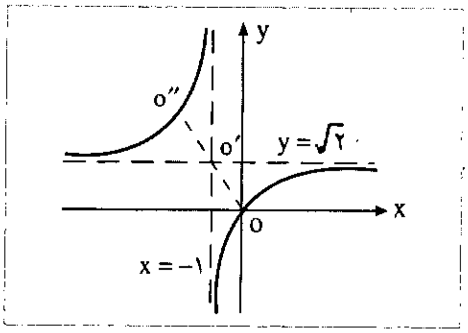
معادله‌ی مجانب قائم

مجانب قائم : $y \to \pm\infty \Rightarrow x+1=0 \Rightarrow x=-1$

معادله‌ی مجانب افقی

مجانب افقی : $x \to \pm\infty \Rightarrow y=\frac{\sqrt{2}}{1} \Rightarrow y=\sqrt{2}$

$x=0 \Rightarrow y=0$ و $y'_x=\frac{\sqrt{2}}{(x+1)^2}>0$



x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
y'_x		$+$	‖	$+$		$+$	
y	$\sqrt{2}$	↗ $+\infty$	‖	$-\infty$ ↗	0	↗	$\sqrt{2}$

مسئله‌ی ۲. در تابع با ضابطه‌ی $y=\frac{ax+b}{cx+d}$، اگر نمودار تابع از مبدأ مختصات بگذرد و نقطه‌ی $O'(1,2)$ مرکز تقارن نمودار تابع باشد، معادله‌ی تابع را بیابید.

حل:

$$O(0,0)\xrightarrow{\text{در معادله‌ی تابع}} 0=\frac{b}{d} \Rightarrow b=0$$

مجانب افقی و : $y=\frac{a}{c}=2 \Rightarrow a=2c$

مجانب قائم : $x=-\frac{d}{c}=1 \Rightarrow d=-c$

و $c \neq 0 \Rightarrow y=\frac{2x}{x-1}$

$$y=\frac{ax+b}{cx+d} \Rightarrow y=\frac{2cx+0}{cx-c} \Rightarrow y=\frac{2cx}{c(x-1)}$$

رسم نمودار تابع‌های با ضابطه‌ی مثلثاتی

الف) معادله‌ی $y'_x=0$ را حل می‌کنیم و جواب‌های آن را در بازه‌ی داده شده محاسبه می‌کنیم.

ب) مختصات نقاط تقاطع نمودار تابع را با محورهای مختصات به‌دست می‌آوریم.

ج) جدول تغییرات تابع را تشکیل می‌دهیم و پس از تکمیل آن، نمودار تابع را در بازه‌ی داده شده رسم می‌کنیم.

مسئله: مطلوب است رسم جدول و نمودار هریک از تابع‌های به معادله‌های زیر:

$$1)\quad y=\sin^2 x-\sin x \qquad 0 \le x \le 2\pi$$

$$y'_x=2\cos x\sin x-\cos x=0 \Rightarrow \cos x(2\sin x-1)=0$$

$$\cos x=0 \Rightarrow x=2k\pi \pm \frac{\pi}{2} \Rightarrow x=\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}$$

$$2\sin x-1=0 \Rightarrow \sin x=\frac{1}{2}=\sin\frac{\pi}{6}$$

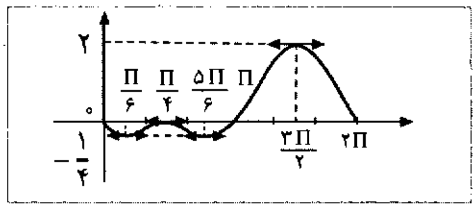
$$\Rightarrow \begin{cases} x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۶} \Rightarrow x = \frac{\pi}{۶} \\ x = ۲k\pi + \pi - \frac{\pi}{۶} \Rightarrow x = \frac{۵\pi}{۶} \end{cases}$$

$x = ۰$ یا $۲\pi \Rightarrow y = \sin^۲ ۰ - \sin = ۰$

$y = ۰ \Rightarrow \sin^۲ x - \sin x = ۰ \Rightarrow \sin x(\sin x - ۱) = ۰$
$\Rightarrow \sin x = ۰ \Rightarrow x = k\pi$

$\Rightarrow x = ۰, \pi, ۲\pi,\ \sin = ۱ \Rightarrow x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۲} \Rightarrow x = \frac{\pi}{۲}$

x	۰		$\frac{\pi}{۶}$		$\frac{\pi}{۲}$		$\frac{۵\pi}{۶}$		π		$\frac{۳\pi}{۲}$		۲π
y'_x		−	۰	+	۰	−	۰	+		+	۰	−	
y	۰	↘	$-\frac{۱}{۴}$	↗	۰	↘	$-\frac{۱}{۴}$	↗	۰	↗	۲	↘	۰



۲) $y = \cos^۲ x + \cos x - ۲ \qquad ۰ \le x \le ۲\pi$

$y'_x = -۲\sin x \cos x - \sin x = ۰ \Rightarrow -\sin x(۲\cos x + ۱) = ۰$

$\sin x = ۰ \Rightarrow x = k\pi \Rightarrow x = ۰, \pi, ۲\pi,$

$۲\cos x + ۱ = ۰ \Rightarrow \cos x = -\frac{۱}{۲}$

$\cos x = \cos\frac{۲\pi}{۳} \Rightarrow x = ۲k\pi \pm \frac{۲\pi}{۳} \Rightarrow x = \frac{۲\pi}{۳}, \frac{۴\pi}{۳}$

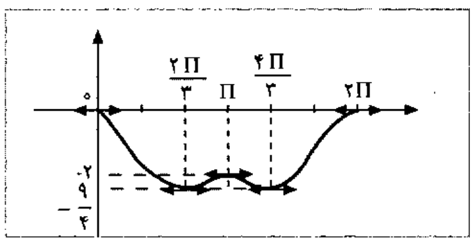
$x = ۰$ یا $۲\pi \Rightarrow y = \cos^۲ ۰ + \cos ۰ - ۲ = ۱ + ۱ - ۲ = ۰$

$y = ۰ \Rightarrow \cos^۲ x + \cos x - ۲ = ۰$ مجموع ضرائب صفر است

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos x = ۱ \\ \cos x = -۲ \text{ غیرممکن} \end{cases}$$

$\cos x = ۱ \Rightarrow x = ۲k\pi \Rightarrow x = ۰, ۲\pi$

x	۰		$\frac{۲\pi}{۳}$		π		$\frac{۴\pi}{۳}$		۲π
y'_x	۰	−	۰	+	۰	−	۰	+	۰
y	۰	↘	$-\frac{۹}{۴}$	↗	-۲	↘	$-\frac{۹}{۴}$	↗	۰





اعداد جالب ریاضی

۱۰۲×۱۰۲=۱۰۴۰۴
۲۰۱×۲۰۱=۴۰۴۰۱

۱۰۳×۱۰۳=۱۰۶۰۹
۳۰۱×۳۰۱=۹۰۶۰۱

به مربع اعداد هم توجه کنید.

$۱۰۳^۲$=۱۰۶۰۹
$۳۰۱^۲$=۹۰۶۰۱

$۱۱۲^۲$=۱۲۵۴۴
$۲۱۱^۲$=۴۴۵۲۱

$۱۳^۲$=۱۶۹
$۱۴^۲$=۱۹۶

$۱۱۳^۲$=۱۲۷۶۹
$۳۱۱^۲$=۹۶۷۲۱

$۱۲۲^۲$=۱۴۸۸۴
$۲۲۱^۲$=۴۸۸۴۱

$۱۵۷^۲$=۲۴۶۴۹
$۱۵۸^۲$=۲۴۹۶۴

$۹۱۳^۲$=۸۳۳۵۶۹
$۹۱۴^۲$=۸۳۵۳۹۶

$۱^۳+۵^۳+۳^۳$=۱۵۳
$۳^۳+۷^۳+۰^۳$=۳۷۰
$۳^۳+۷^۳+۱^۳$=۳۷۱
$۴^۳+۰^۳+۷^۳$=۴۰۷
$۴۸^۲+۵۳^۲+۶۲^۲=۸۴^۲+۳۵^۲+۲۶^۲$

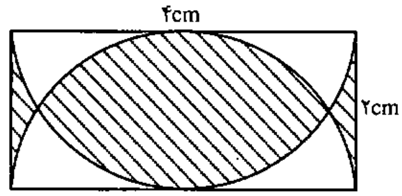
یک مسئله و چند راه حل

● مهدی منیری بیدگلی
دبیر ریاضی شهرستان چادگان

مسئله‌ها قلب ریاضیات هستند و حل مسئله، قلب یادگیری ریاضی است. فایده‌ی حل یک مسئله از چند راه متفاوت چیست؟ می‌دانیم حل یک مسئله از چند راه متفاوت، نوعی مطالعه‌ی ریاضیات است و مطالعه‌ی ریاضیات، دستگاه ذهن را توسعه می‌دهد. پس حل یک مسئله با چند روش، ذهن را فعال می‌کند و باعث بروز ابتکار و خلاقیت می‌شود.

چندی پیش، یکی از دانش‌آموزان مسئله‌ای را مطرح کرد که با روش‌ها و ابزارهای متفاوت قابل حل است و لذا می‌توان آن را در پایه‌های گوناگون تحصیلی مطرح کرد. در مقاله‌ی حاضر، چند راه‌حل متفاوت برای این مسئله ارائه شده است. شما نیز بکوشید راه‌های دیگری برای حل آن بیابید.

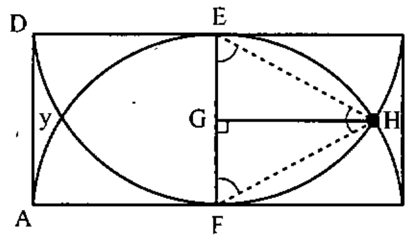
مسئله: در شکل (۱)، مساحت قسمت هاشور خورده را بیابید.



(شکل ۱)

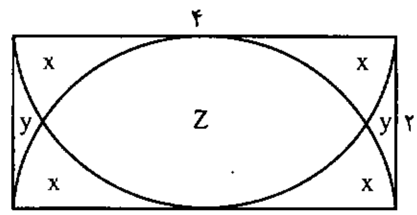
روش اول

با توجه به تقارن موجود در شکل ۱، مسئله را حل می‌کنیم. ابتدا قسمت‌های گوناگون شکل را نامگذاری می‌کنیم. بنابراین داریم:



(شکل ۲)

در مورد کل مساحت شکل، رابطه‌ی $۴x + ۲y + z = ۸$ و در مورد نیم‌دایره‌ها، رابطه‌ی $۲x + z = ۲\pi$ را می‌توان نوشت. حال از خواص قطاع دایره و مساحت آن استفاده می‌کنیم. قطاع EFH را از نیم‌دایره‌ی AEB در نظر می‌گیریم (شکل ۳).



(شکل ۳)

اگر مساحت مثلث قائم‌الزاویه‌ی GHF را از مساحت قطاع EFH کم کنیم، مساحت $\frac{۱}{۴}z$ به‌دست می‌آید که راهگشای حل مسئله است.

می‌دانیم مثلث EFH متساوی‌الاضلاع است (چرا؟). لذا اندازه‌ی هر زاویه‌ی آن ۶۰ درجه است. چون مساحت قطاع مورد نظر برابر با $\frac{۱}{۲}R^۲\theta$ است که در آن θ برحسب رادیان است، لذا داریم:

$$\text{مساحت قطاع} = \frac{۱}{۲} \times ۲^۲ \times \frac{\pi}{۳} = \frac{۲\pi}{۳}$$

مساحت مثلث قائم‌الزاویه‌ی FHG برابر است با:

$$\frac{۱}{۲}GH \times FG$$

می‌دانیم $FG = ۱$ و $FH = ۲$. پس از رابطه‌ی فیثاغورس داریم: $GH = \sqrt{۳}$

بنابراین مساحت مثلث FHG برابر است با $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$.

در این صورت مساحت $\frac{۱}{۴}z$ به‌دست می‌آید: $\frac{۲\pi}{۳} - \frac{\sqrt{۳}}{۱}$. و از آن‌جا مساحت z برابر است با $\frac{۸\pi}{۳} - ۲\sqrt{۳}$.

حال دستگاه مقابل را حل می‌کنیم:

$$\begin{cases} ۴x + ۲y + z = ۸ \\ ۲x + z = ۲\pi \\ z = \frac{۸\pi}{۳} - ۲\sqrt{۳} \end{cases}$$

پس از حل دستگاه، مقادیر زیر برای x و y به‌دست می‌آیند:

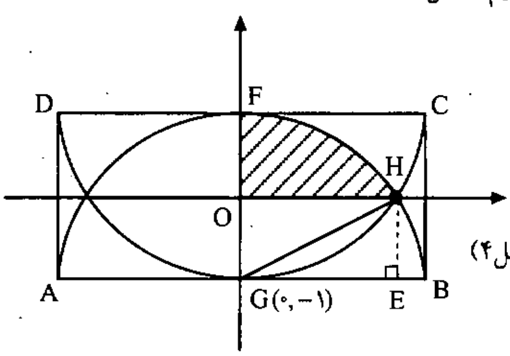
$$x = \sqrt{۳} - \frac{\pi}{۳} \quad \text{و} \quad y = ۴ - \frac{۲\pi}{۳} + \sqrt{۳}$$

پس، مساحت قسمت هاشورخورده برابر است با:

$$۲y + z = ۸ + \frac{۴\pi}{۳} - ۴\sqrt{۳}$$

روش دوم

در این روش، مبدأ مختصات را منطبق بر مرکز مستطیل قرار می‌دهیم (شکل ۴).



(شکل ۴)

سطح محصور بین محورهای مختصات، با مساحت $\frac{۱}{۴}z$ برابر است و به‌منظور محاسبه‌ی آن، طبق قضیه‌ی فیثاغورس داریم:

$$GE = \sqrt{GH^۲ - EH^۲} = \sqrt{۳} \Rightarrow a = x_H = \sqrt{۳}$$

هم‌چنین معادله‌ی منحنی FH را می‌نویسیم. مرکز این دایره نقطه‌ی $G(۰,-۱)$ و شعاع ۲ است. پس خواهیم داشت:

$$(x-0)^2+(y+1)^2=4 \Rightarrow y=\sqrt{4-x^2}-1$$

با استفاده از انتگرال داریم:

$$S_z=\int_0^a y\,dx = 4\int_0^a(-1+\sqrt{4-x^2})dx$$

$$=4\int_0^a -1dx+4\int_0^a\sqrt{4-x^2}dx$$

$$=-4a+4\int_0^a\sqrt{4-x^2}dx \qquad (1)$$

با تغییر متغیر $x=2\sin\theta$ انتگرال اخیر را محاسبه می‌کنیم:

$$\int_0^a\sqrt{4-x^2}dx=\int_0^{\frac{\pi}{3}}4\cos^2\theta d\theta=2\int_0^{\frac{\pi}{3}}(1+\cos2\theta)d\theta$$

$$=\frac{2\pi}{3}+\sin2\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{3}}=\frac{2\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}$$

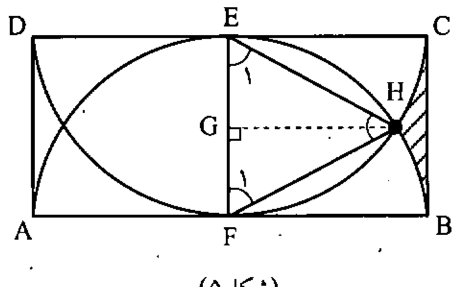
حال با جای‌گذاری در رابطه‌ی ۱ داریم:

$$S_Z=-4\sqrt{3}+4\left(\frac{2\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{8\pi}{3}-2\sqrt{3}$$

در ادامه، همانند روش اول، دستگاه معادلات را حل می‌کنیم و مقدار $2y+z=8+\frac{4\pi}{3}-4\sqrt{3}$ را می‌یابیم.

روش سوم

از تقارن موجود در شکل استفاده می‌کنیم و می‌دانیم مجموع مساحت قطاع‌های EHC و FHB، به‌علاوه‌ی مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع EFH برابر است با $4-y$ (مقدار y همان مساحت قسمت هاشورخورده در شکل ۵ است).



(شکل۵)

چون مثلث FEH متساوی‌الاضلاع است، پس اندازه‌ی هر زاویه‌ی آن ۶۰ درجه است. در این صورت، متمم‌های زاویه‌های F_1 و E_1 برابر ۳۰ درجه هستند. پس مساحت قطاع‌های نام‌برده را می‌یابیم:

$$S_{FBH}=S_{EHC}=\frac{\pi}{3}$$

چون طبق قضیه‌ی فیثاغورس $GH=\sqrt{3}$ است، مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع EFH نیز برابر است با $\sqrt{3}$. بنابراین:

$$4-y=\frac{2\pi}{3}+\sqrt{3}\Rightarrow y=4-\frac{2\pi}{3}-\sqrt{3}$$

حال طبق شکل ۱ می‌توان نوشت:

$$y+x=4-\pi\Rightarrow x=-\frac{\pi}{3}+\sqrt{3}$$

و در نهایت مساحت z به‌دست می‌آید که برابر است با:

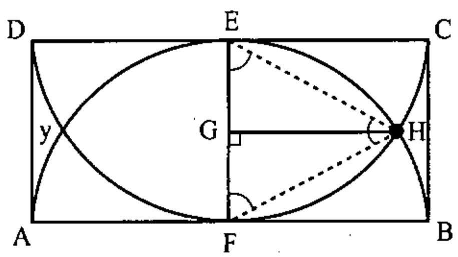
$$\frac{8\pi}{3}-2\sqrt{3}$$

با تمام این یافته‌ها، مساحت قسمت هاشورخورده در شکل ۱ به‌دست می‌آید:

$$2y+z=8+\frac{4\pi}{3}-4\sqrt{3}$$

روش چهارم

از تقارن موجود در شکل استفاده می‌کنیم و می‌دانیم مانند شکل ۶، مساحت قسمت z تشکیل شده است از مساحت یک لوزی و مساحت چهار قطاع اطراف آن (شکل ۶). برای یافتن مساحت لوزی، ابتدا از مثلث قائم‌الزاویه‌ی EGH که مساحتش ربع مساحت لوزی است، داریم:



(شکل۶)

چون EH شعاع دایره است، پس $EH=2$ و لذا از قضیه‌ی فیثاغورس به‌دست می‌آوریم:

$$GH^2=EH^2-EG^2=4-1=3\Rightarrow GH=\sqrt{3}$$

پس نصف قطر بزرگ لوزی به‌دست می‌آید. در این صورت

$$KH=2GH=2\sqrt{3} \qquad (1)$$

بنابراین، $\frac{۲\pi}{۳} = \frac{۱}{۲} \times ۴ \times \frac{\pi}{۳} =$ مساحت قطاع EFH به مرکز F

مساحت قطاع EH که یکی از چهار قطاع اطراف لوزی است، برابر است با:

$$S_{EH} = \frac{۲\pi}{۳} - S_{\overset{\triangle}{EFH}} = \frac{۲\pi}{۳} - \sqrt{۳} \qquad (۲)$$

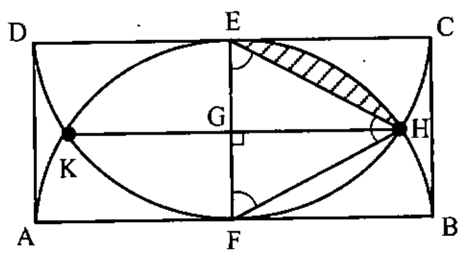
با توجه به روابط ۱ و ۲، مساحت قسمت z به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$z = \text{مساحت لوزی} \; ۴S_{EH} = ۲\sqrt{۳} + ۴\left(\frac{۲\pi}{۳} - \sqrt{۳}\right)$$

پس $z = \frac{۸\pi}{۳} - ۲\sqrt{۳}$. حال می‌توانیم از روابط موجود در روش اول، نسبت به محاسبه‌ی مقادیر x و y اقدام کنیم. بعد از محاسبه، مقدار مساحت قسمت هاشورخورده برابر با $۲y + z = ۸ + \frac{۴\pi}{۳} - ۴\sqrt{۳}$ به‌دست خواهد آمد.

روش پنجم

در این روش نیز مانند روش‌های قبل، تمام مسئله، یافتن مقدار z است. یک راه دیگر برای یافتن مقدار z به این صورت است که: مساحت ربع دایره به مرکز E که در شکل زیر ECF نام‌گذاری شده است را بیابیم و مساحت‌های قطاع EHC و مثلث EGH و سطح GFH را از آن کم کنیم.



(شکل۷)

برای این منظور داریم:

(مساحت قطاع EHC + مساحت مثلث EGH) - مساحت ربع دایره = مساحت سطح GFH

پس:

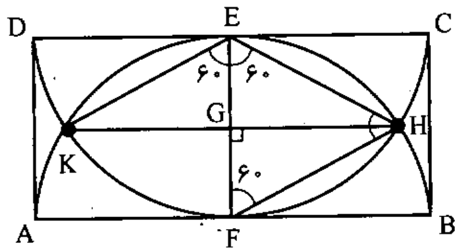
$S_{GFH} = \pi - \left(\frac{\sqrt{۳}}{۲} + \frac{\pi}{۳}\right) = \frac{۲\pi}{۳} - \frac{\sqrt{۳}}{۲}$ بنابراین:

$$\frac{۱}{۴}z = \frac{۲\pi}{۳} - \frac{\sqrt{۳}}{۲} \Rightarrow z = \frac{۸\pi}{۳} - ۲\sqrt{۳}$$

حال مانند روش اول، مقادیر x و y را محاسبه می‌کنیم. بعد از محاسبه، مقدار مساحت قسمت هاشورخورده برابر با $۲y + z = ۸ + \frac{۴\pi}{۳} - ۴\sqrt{۳}$ به‌دست خواهد آمد.

روش ششم

می‌توانیم برای محاسبه‌ی مقدار z از قضیه‌ی کسینوس‌ها استفاده کنیم. در شکل ۸، مثلث KEH را در نظر بگیرید. می‌خواهیم مانند روش چهارم، از مساحت لوزی و چهار قطاع اطراف آن استفاده کنیم. ولی این‌بار برای پیدا کردن قطر بزرگ لوزی، به قضیه‌ی کسینوس‌ها متوسل می‌شویم. مثلث EFH متساوی‌الاضلاع است و طبق تقارنی که در مسئله وجود دارد، زاویه‌ی KEH برابر ۱۲۰ درجه خواهد بود.



(شکل۸)

حال داریم: $KH^۲ = EK^۲ + EH^۲ - ۲EK.EH.\cos ۱۲۰^\circ$ و

$$KH^۲ = ۴ + ۴ - ۲\times۲\times۲\times\frac{۱}{۲} = ۱۲ \Rightarrow KH = ۲\sqrt{۳}$$

هم‌چنین مساحت قطاع EH که یکی از چهار قطاع اطراف لوزی است، به روش زیر محاسبه می‌شود:

$$\text{مساحت قطعه‌ی EH} = \frac{۱}{۲}R^۲(\alpha - \sin\alpha) = \frac{۱}{۲}\times۴\times\left(\frac{\pi}{۳} - \sin\frac{\pi}{۳}\right)$$

$$= \frac{۲\pi}{۳} - \sqrt{۳}$$

بنابراین مساحت لوزی برابر با $۲\sqrt{۳}$ و مساحت تمام قسمت z برابر با $z = \text{مساحت لوزی} + ۴S_{EH} = ۲\sqrt{۳} + ۴\left(\frac{۲\pi}{۳} - \sqrt{۳}\right)$ خواهد شد. حال می‌توانیم مانند قسمت‌های قبل به محاسبه‌ی مقادیر x و y بپردازیم و بعد از محاسبه‌ی این مقادیر، مساحت قسمت هاشورخورده مساوی $۲y + z = ۸ + \frac{۴\pi}{۳} - ۴\sqrt{۳}$ به‌دست می‌آید. ◻

---

۱. برگزیده مسائل هندسه، گروهی از ریاضی‌دانان شوروی. ترجمه‌ی عادل ارشقی. انتشارات رسا.

۲. رشد آموزش ریاضی.

یک نامساوی ساده

• حمیدرضا کریمی

ثابت می‌کنیم وقتی که $n \to \infty$، آن‌گاه $n^{\frac{1}{n}} \to 1$. این اثباتی ساده و نسبتاً جدید است. برای $x \geq 0$ و $0 < a < 1$، $f(x)$ را طوری تعریف کنید که $f'(x) = a - ax^{a-1}$ و $f''(x) = a(1-a)x^{a-2}$ باشد. ملاحظه می‌کنیم که $f(x)$ در $x = 1$ مقدار می‌نیمم خود را به‌دست می‌آورد. بنابراین داریم:

$$x^a \leq ax + (1-a) \qquad (1)$$

هرگاه: $x = \sqrt{n}$ و $a = \frac{1}{n}$، درصورتی که $n \to \infty$ خواهیم داشت:

$$(\sqrt{n})^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n}} + 1 - \frac{1}{n} \to 1$$

اما $(\sqrt{n})^{\frac{1}{n}} > 1$، هرگاه $n > 1$ باشد. بنابراین وقتی $n \to \infty$ داریم:

$$(\sqrt{n})^{\frac{1}{n}} \to 1$$

چون $(\sqrt{n})^{\frac{1}{n}} = \sqrt{n^{\frac{1}{n}}}$، پس:

$$\lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}} = 1$$

برای مشاهده‌ی کاربردهای دیگر نامساوی(۱)، x را مساوی $\frac{a}{b}$ قرار دهید و دو طرف نامساوی (۱) را در b ضرب کنید تا نامساوی میانگین حسابی ـ هندسی برای دو متغیر به‌دست آید. اگر a و b و α و β مثبت باشند و $\alpha + \beta = 1$ باشد، آن‌گاه:

$$a^{\alpha}b^{\beta} \leq \alpha a + \beta b \qquad (2)$$

و تساوی برقرار است، اگر و فقط اگر $a = b$ باشد.

فرض کنید که a_i و b_i اعداد مثبت $(1 \leq i \leq n)$، $\sum a_i = 1$ و $\sum b_i = 1$ باشد. اگر نامساوی (۲) را n مرتبه بنویسیم و آن‌ها را جمع کنیم:

$$\sum a_i^{\alpha} b_i^{\beta} \leq \alpha \sum a_i + \beta \sum b_i = \alpha + \beta = 1$$

اگر x_i و y_i اعداد مثبت باشند، می‌توان نوشت:

$$a_i = \frac{x_i^{\frac{1}{\alpha}}}{x_1^{\frac{1}{\alpha}} + \cdots + x_n^{\frac{1}{\alpha}}} \quad , \quad b_i = \frac{y_i^{\frac{1}{\beta}}}{y_1^{\frac{1}{\beta}} + \cdots + y_n^{\frac{1}{\beta}}}$$

و خواهیم داشت:

$$\sum x_i y_i \leq (\sum x_i^{\frac{1}{\alpha}})^{\alpha} + (\sum y_i^{\frac{1}{\beta}})^{\beta}$$

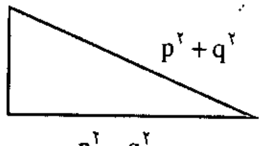
ALAN BEHRDON Department of Pure Mathematics, University of Cambridge.

یک خاصیت مساحت در مثلث قائم‌الزاویه

در بررسی خواص سه‌گانه‌ی فیثاغورث، فرمول زیر را برای سطح A از یک مثلث قائم‌الزاویه کشف کردم. هرگاه نصف محیط s و ارتفاع a داده شده باشد، داریم:

$$A = s(s-a) \qquad (1)$$

هر یک از خواص سه‌گانه‌ی فیثاغورث را می‌توان به صورت $p^2 + q^2$، $2pq$ و $p^2 - q^2$ نوشت. در این صورت، $a = p^2 + q^2$ برابر است با ارتفاع یک مثلث قائم‌الزاویه، هرگاه اضلاع آن $p^2 - q^2$ و $2pq$ باشند.



(شکل ۱)

نصف محیط از فرمول $s = \frac{1}{2}\left[(p^2+q^2)+(p^2-q^2)+2pq\right]$ به‌دست می‌آید که پس از ساده شدن به این صورت درمی‌آید:

$$s = p(p+q) \qquad (2)$$

هم‌چنین:

$$s - a = p^2 + pq - (p^2 + q^2) = q(p-q) \qquad (3)$$

از ترکیب رابطه‌های (۲) و (۳) فرمول زیر نتیجه می‌شود:

$$s(s-a) = p(p+q) \times q(p-q) = pq(p^2 - q^2) \qquad (4)$$

فرمول متداول برای به‌دست آوردن مساحت مثلث عبارت است از:

مساحت = $\frac{1}{2}$ قاعده × ارتفاع

با استفاده از فرمول فوق و رابطه‌ی (۴) خواهیم داشت:

$$A = \frac{1}{2}(p^2 - q^2) \times 2pq = pq(p^2 - q^2) = s(s-a)$$

سپس متوجه شدم، در صورتی که اضلاع اعداد صحیح باشند، نیازی به استفاده از اجزای سه‌گانه فیثاغورث نیست، بلکه تنها به قضیه‌ی فیثاغورث نیاز است. در حقیقت فرمول (۱) عملی است، اگر و تنها اگر مثلث قائم‌الزاویه باشد.

اگر فرمول (۱) برقرار باشد، می‌توان با استفاده از «فرمول هرون» برای به‌دست آوردن مساحت مثلثی با اضلاع a، b و c چنین نوشت:

$$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

داریم:

$$\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = s(s-a)$$

از به توان ۲ رساندن دو طرف و تقسیم آن بر $s(s-a)$ خواهیم داشت:

$$(s-b)(s-c) = s(s-a)$$

پس از ضرب و جابه‌جایی عوامل خواهیم داشت:

$$bc = s(b+c-a)$$

هرگاه $2s = a + b + c$ باشد، داریم:

$$2bc = (b+c+a)(b+c-a)$$

که به صورت زیر ساده می‌شود:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

با استفاده از عکس قضیه‌ی فیثاغورث، این مثلث قائم‌الزاویه است.

Rajeev George Mathew, Pupil at Marthoma Residential School Kerala, India.

فرمانروای بنمشه

امیر ابن الخوض، فرمانروای توانمند کشور قضیعبیه در خزانه ی خود نشسته بود و شادان و خندان دوازده جعبه ی در بسته را که در گوشه‌ای ردیف شده بودند، تماشا می‌کرد؛ جعبه‌های پر از شمش‌های زر، حاوی مالیات‌هایی که دوازده نماینده‌ی ویژه از دوازده استان کشور گردآوری کرده بودند. روی هر جعبه، نام استان و نام نماینده‌ی ویژه یادداشت شده بود. هر شمش یک کیلوگرم وزن داشت و جعبه‌ها که بیشتر آن‌ها پر بودند، مبلغ هنگفتی را نشان می‌دادند.

در این بین، دربانان امیر؛ مرد ژنده‌پوشی را به درون آوردند. مرد با دیدن امیر، خود را پیش پای وی انداخت، دست‌های خود را بلند کرد. فریادی از شادی برآورد و گفت:

ـ ای امیر، آمده‌ام تا موضوع مهمی را به اطلاعت برسانم.

ـ گوش می‌کنم، بگو.

ـ من کارگر یکی از نمایندگان تو بوده‌ام. آمده‌ام تا تو را از خیانت بزرگی که این نماینده نسبت به تو روا داشته است، آگاه کنم. او از هر یک از شمش‌هایی که برای تو آورده، از راه سایدن آن‌ها، مقداری را کم کرده است. من یکی از کارگرانی بودم که می‌بایست با کهنه پارچه‌های مویین زبر، هر شمش را بساییم تا از آن چیزی نزدیک به سی گرم زر به دست آید. ما اغفال شده بودیم. بعد که فهمیدم، نزد تو آمدم تا حقیقت را بگویم.

امیر، خشمناک و غران پرسید:

ـ کی تو را به این کار واداشته بود؟ سوگند به خدا که سر از تنش جدا خواهد شد و تو هم پاداش گرانبهایی دریافت خواهی کرد.

ـ فرستاده‌ی تو به استان...

مرد ژنده‌پوش بیش از این نتوانست چیزی بگوید. کاردی که کسی ناشناس پرتاب کرده بود، در پشت او فرو رُفت. مرد نقش بر زمین شد و جان به جان‌آفرین تسلیم کرد.

امیر ابن الخوض ریاضیات و بویژه مسأله‌های سرگرم‌کننده و اندیشه برانگیز ریاضی را دوست می‌داشت. از پیشامدهایی که با آن‌ها روبه‌رو می‌شد، یک مسأله می‌ساخت و از فرزند بزرگش می‌خواست تا درباره‌اش بیندیشد و آن را حل کند. از این راه، هم او را با شیوه‌ی کشورداری آشنا می‌کرد و هم اندیشه‌اش را پرورش می‌داد. در این باره هم به فرزندش چنین گفت:

ـ فرزندم، آنچه را گذشت، دیدی، اکنون برای شناسایی نماینده‌ی خیانت‌کار چه راهی را پیشنهاد می‌کنی؟

ـ موضوع خیلی ساده است. هر جعبه یک برچسب دارد که روی آن، هم نام استان و هم نام نماینده‌ی ویژه‌ی آن، یادداشت شده است. کافی است که از هر جعبه یک شمش را بیرون آورده و وزن کرد تا معلوم شود در کدام جعبه شمش‌ها سبک‌ترند. شاید هم شمش‌های چند جعبه دست‌کاری شده باشند. با این شیوه همه‌ی آن‌ها شناخته می‌شوند.

ـ بر آن‌چه گفتی، ایرادی وارد نیست، اما فرض را بر این می‌گذاریم که در یازده جعبه شمش‌ها همه سالم و یک‌کیلوگرمی‌اند و تنها در یک

جعبه، هر یک از شمش‌ها به اندازه‌ی ۳۰ گرم سبک‌تر از یک کیلوگرم است. حال فرزندم، بگو ببینم که چگونه می‌شود تنها با یک‌بار وزن کردن، جعبه‌ی شمش‌های سبک‌تر را شناسایی کرد؟

فرزند امیر به فکر فرورفت. دیگران هم که حاضر بودند، سکوت کرده بودند و هر کس در ذهن خودش راه‌حلی را بررسی می‌کرد. سرانجام وزیر بزرگ از امیر خواست تا همه‌ی حاضران را از راه‌حل مسأله آگاه سازد و امیر چنین توضیح داد:

❁ ❁ ❁

(خواننده گرامی، در این هنگام باید مجله را ببندید و برای حل مسأله اندیشه‌ی خود را به کار اندازید.)

اگر شمش‌های همه‌ی جعبه‌ها هم‌وزن باشند، یعنی هر کدام یک کیلوگرم باشد، هر تعداد از آن‌ها را به هرجور که در کفه‌ی ترازو بگذارند، وزن حاصل چند کیلوگرم کامل خواهد بود؛ اما اگر یکی از شمش‌ها سبک‌تر باشد، مثلاً ۹۷۰ گرم وزن داشته باشد، وزنی که ترازو نشان خواهد داد، به اندازه‌ی ۳۰ گرم کمتر از چند کیلوگرم کامل خواهد بود، و چنان‌چه در بین شمش‌ها دو شمش سبک‌تر، ۹۷۰ گرمی، سه شمش سبک‌تر، ...، یا این‌که دوازده شمش سبک‌تر وجود داشته باشد، وزنی که ترازو نشان خواهد داد، به اندازه‌ی ۶۰ گرم، ۹۰ گرم، ...، یا ۳۶۰ گرم از چند کیلوگرم کامل کمتر خواهد بود. از جعبه‌ی یکم یک شمش، از جعبه‌ی دوم دو شمش، از جعبه‌ی سوم سه شمش، ...، و سرانجام از جعبه‌ی دوازدهم، دوازده شمش برمی‌داریم و همه را با هم در کفه‌ی ترازو می‌گذاریم و معلوم می‌کنیم وزن آن‌ها روی هم از چند کیلوگرم کامل چند گرم کمتر است. این چند گرم که بر ۳۰ بخش شود، شماره‌ی جعبه‌ی با شمش‌های سبک‌تر به دست خواهد آمد.

دستور امیر را عمل کردند. شمش‌هایی که در ترازو گذاشته بودند ۷۷ کیلوگرم و ۷۹۰ گرم وزن داشتند که ۲۱۰ گرم می‌خواست تا چند کیلوگرم کامل شود. از تقسیم ۲۱۰ بر عدد ۳۰ عدد ۷ به دست آمد. روی جعبه‌ی هفتم نام فاروق بن‌خشیب به چشم می‌خورد. فردای آن روز، سر از تن جدا شده‌ی فاروق‌بن خشیب بر بالای دروازه‌ی شهر آویزان بود.

یادداشت مترجم: در حالت کلی اگر n مجموعه از چیزهای همانند، مثلاً n جعبه شامل گلوله‌های هم‌سان داشته باشیم که در $n-1$ جعبه هر گلوله به وزن a و در یک جعبه‌ی دیگر هر گلوله به وزن b و b کمی کمتر از a باشد، تنها با یک‌بار وزن کردن می‌توان جعبه‌ی شامل گلوله‌های سبک‌تر را شناسایی کرد: جعبه‌ها به‌ترتیب، از ۱ تا n شماره‌گذاری می‌شوند. از جعبه‌ی یکم یک گلوله، از جعبه‌ی دوم دو گلوله، از جعبه‌ی سوم سه گلوله، ... و سرانجام از جعبه‌ی nام، n گلوله برمی‌داریم و همه‌ی گلوله‌های برداشته شده را با هم وزن می‌کنیم. با توجه به فرمول

$$۱+۲+۳+۴+\cdots+n=\frac{n(n+۱)}{۲}$$

وزن گلوله‌های برداشته شده برابر خواهد شد با:

$$\frac{n(n+۱)a}{۲}-k$$

که k مضربی از b است و اگر q خارج قسمت تقسیم k بر b باشد، جعبه‌ی شماره‌ی q همان جعبه‌ی با گلوله‌های سبک‌تر خواهد بود.

برگرفته از کتاب داستانواره‌های ریاضی. مترجم: عبدالحسین مصحفی. انتشارات مدرسه. چاپ اول ۱۳۷۸

که بین ریاضی‌دانان دوره‌ی اسلامی به معادله‌ی ماهانی موسوم بوده است.

ماهانی در رساله‌ای که در تفسیر مقاله‌ی دوم از کتاب **ارشمیدس** درباره‌ی کره و استوانه نوشته، متذکر شده است که از نه مسئله‌ی این مقاله، هشت مسئله را حل کرده، ولی موفق به حل مسئله‌ی چهارم آن نشده است. این مسئله عبارت است از: «تقسیم کردن کره به وسیله‌ی یک صفحه به دو قطعه، به وجهی که نسبت به حجم آن‌ها مساوی با عدد معلومی باشد.» ماهانی کوشیده بود که این مسئله را به وسیله‌ی جبر و مقابله حل کند و معادله‌ی مذکور را به‌دست آورده بود.

آثار ریاضی موجود وی

۱. رساله فی المشکل من النسبة کتاب النسبه فی النسبه

چند نسخه‌ی خطی از این رساله موجود است که از آن جمله است، نسخه‌های شماره‌ی ۵۹۷ و ۶۹۰ مدرسه‌ی عالی سپهسالار تهران که در سال ۷۸۴هـ.ق کتابت شده و عنوان آن «المشکل من امر النسبه» است. به عقیده‌ی **سوتر** ممکن است این رساله تمام یا قسمتی از «شرح مقاله‌ی پنجم کتاب اصول» تألیف ماهانی باشد که از بین رفته است.

نکته‌ی مختصری از رساله‌ی «النسبة» در فرهنگ زندگی‌نامه‌ی علمی (جلد۹، صفحه‌ی ۲۱) آمده است.

۲. تفسیر المقالة العاشره من کتاب اقلیدس

نسخه‌ی خطی این رساله در کتاب‌خانه‌ی ملی پاریس به شماره‌ی ۲۴۵۷/۳۹ موجود است. مطلب مختصری از این رساله در مجله‌ی «تاریخ علوم عربی» (جلد ۲، سال ۱۹۷۸، صفحه‌ی ۷۹) آمده است.

آثار ریاضی مفقود ماهانی

۳. شرح مقاله‌ی پنجم کتاب اصول اقلیدس

نام این کتاب در «الفهرست» و «کشف الظنون» آمده است، اما نسخه‌ای از آن در دست نیست. چنان‌که قبلاً اشاره شد، به عقیده‌ی سوتر ممکن است «رساله فی امر النسبه» تمام یا قسمتی از این کتاب باشد.

۴. شرح مقاله‌ی دوم کتاب کره و استوانه‌ی ارشمیدس

خیام در کتاب جبر و مقابله‌ی خود، آن‌جا که از ماهانی نام برده، به این شرح اشاره کرده است، ولی نسخه‌ای از آن در دست نیست. شخصی که نام وی مجهول است و احیاناً **ابوسهل کوهی** است، توضیحی بر شکل چهارم این شرح نوشته است. **ویکه** این توضیح را از روی نسخه‌ی خطی موجود در لیدن (به شماره‌ی ۹۹۱) به زبان فرانسوی ترجمه کرده است.

۵. کتاب فی ستّ و عشرین شکلا من المقاله الاولی من اقلیدس التی لایحتاج فی شیء منها الی الخلف

یعنی: کتاب درباره‌ی بیست‌وشش قضیه از مقاله‌ی اول اقلیدس که بدون احتیاج داشتن به برهان خلف می‌توان آن‌ها را ثابت کرد. نام این کتاب در الفهرست آمده است، ولی نسخه‌ای از آن در دست نیست. به عقیده‌ی ویکه، این بیست‌وشش قضیه عبارت‌اند از: قضایای ۵، ۸، ۹، ۱۳، ۱۵ تا ۱۸ و ۲۰، ۲۱، ۲۴، ۲۸، ۳۰، ۳۲ تا ۳۸ و ۴۱ تا ۴۴ و ۴۷ و ۴۸ کتاب اصول اقلیدس.

۶. اصلاح کتاب مانالاوس فی الاشکال الکریه

کتاب أکر مانالاوس را **اسحاق بن حنین** به عربی ترجمه کرده بود و ماهانی آن ترجمه را فقط تا شکل دهم از مقاله‌ی دوم اصلاح کرد. زیرا در نسخه‌ی خطی کتاب اصلاح کتاب «مانالاوس فی الاشکال الکریه تألیف ابوالفضل هروی» (نسخه‌ی خطی شماره ی ۹۸۸ لیدن، پشت برگ ۹۸) آمده است: «والشکل العاشر من هذه المقاله هوالذی انتهی الیه الماهانی ولم یتجاوزه...»

نصیرالدین طوسی، نسخه‌ای از این کتاب را در اختیار داشته و در مقدمه‌ی تحریر اکر مانالاوس از آن نام برده است. در هر صورت، فعلاً نسخه‌ای از این کتاب در دست نیست.

۷. زیج

محمدبن ابوبکر فارسی در «زیج ممتحن مظفری» که نسخه‌ی آن در کمبریج موجود است، تألیف زیجی را به ماهانی نسبت داده است، ولی نسخه‌ای از این زیج در دست نیست.

منبع: زندگی نامه ریاضی دانان دوره ی اسلامی/ ابولقاسم قربانی/ مرکز نشر دانشگاهی

روش «طبری» برای ضرب اعداد
(روش شبکه‌ای)

	۷	۰	۸	۶	
۱	۱ / ۴	۰ / ۰	۱ / ۶	۱ / ۲	۲
۷	۳ / ۵	۰ / ۰	۴ / ۰	۳ / ۰	۵
۹	۲ / ۸	۰ / ۰	۳ / ۲	۲ / ۴	۴
	۹	۸	۴	۴	

$۷۰۸۶ \times ۲۵۴ = ۱۷۹۹۸۴۴$

این روش ضرب را از کتاب «شمار نامه»، تألیف محمد فرزند ایوب معروف به طبری برداشته‌ایم. طبری در سال‌های آخر سده‌ی چهارم و نیمه‌ی اول سده‌ی پنجم هجری قمری در منطقه آمل مازندران و در دوران حکومت ایرانی «آل بویه» می‌زیست. او ریاضی‌دان و اخترشناس مسلمان ایرانی بود و از نخستین کسانی است که به زبان فارسی کتاب علمی نوشته‌اند. در شمار نامه با این‌که واژه‌ها و اصطلاح های فراوان عربی دیده می‌شود، از واژه‌های فارسی بسیاری (که باید ابتکار خود مؤلف باشد) مثل «افزودن»، «زدن»، «کاستن و کاهانیدن»، «سه یک»، «چهار یک»، «به دو نیم کردن» و... استفاده شده است. طبری واژه‌ی شمار نامه را به جای «حساب» به‌کار برده است. شیوه‌ی ضرب عددها، با این روش، در جدول بالا مشاهده می‌شود.

ISSN:1735-4951
www.roshdmag.ir

وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش وبرنامه ریزی آموزشی
دفتر انتشارات کمک آموزشی

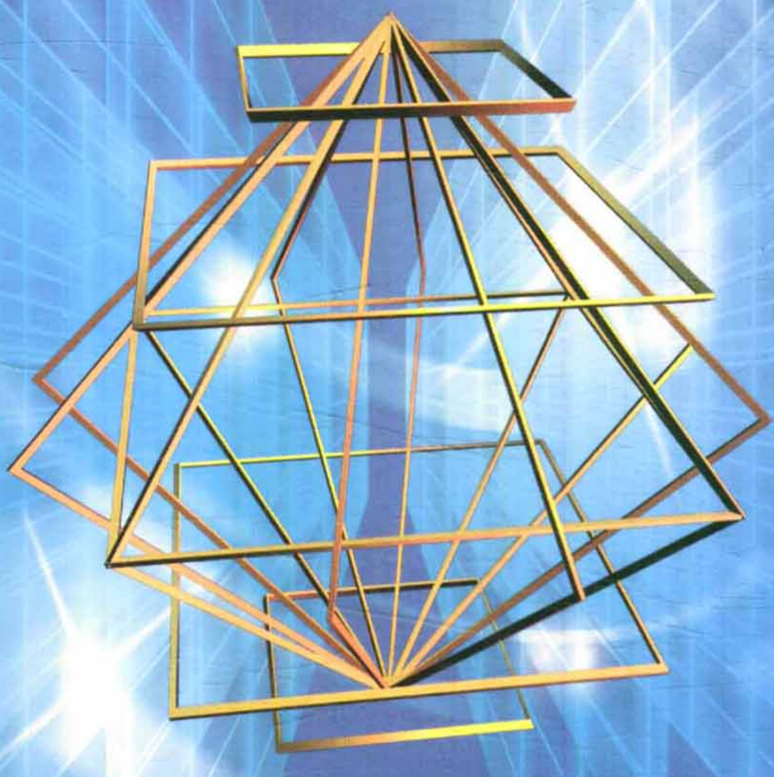
رشد برهان ۶۰

مجله ی ریاضی

دوره ی متوسطه

فصلنامه ی آموزشی، تحلیلی و اطلاع رسانی

• دوره‌ی هجدهم • شماره‌ی ۲ • زمستان ۱۳۸۷ • بها: ۴۰۰۰ ریال



ابوعلی حبوبی

ابوعلی حسن بن حارث حبوبی خوارزمی
فقیه و دانشمند و ریاضی‌دان مسلمان ایرانی
(نیمه‌ی دوم سده‌ی چهارم)

قاضی و فقیه و از دانشمندان نیمه‌ی دوم قرن چهارم و معاصر با ابونصر عراق و بوزجانی و بیرونی بوده و با آنان درباره‌ی مطالب علمی مکاتبه می‌کرده و در ریاضیات دست داشته است.

ابونصر عراق در رساله‌ی معرفة‌القسی الفلکیه از وی یاد کرده و بیرونی در کتاب استخراج الاوتار حل دو مسأله‌ی هندسی را از وی آورده است و کاشانی نیز در کتاب مفتاح‌الحساب روشی را که وی برای حل مسائل حساب فرایض به‌کار می‌برده در ضمن سه مثال آورده است.

ابوعلی حبوبی از بوزجانی دستوری برای محاسبه‌ی مساحت مثلث بر حسب اضلاع آن خواسته بوده و بوزجانی جواب او را طی رساله‌ی مختصری داده است. این دستور با رمزها و اصطلاحات کنونی چنین نوشته می‌شود: به فرض آن‌که طول‌های اضلاع مثلث a و b و c باشد مساحت مثلث مساوی است با

$$\sqrt{\left[\left(\frac{c+b}{۲}\right)^{۲}-\left(\frac{a}{۲}\right)^{۲}\right]\left[\left(\frac{c-b}{۲}\right)-\left(\frac{a}{۲}\right)^{۲}\right]}$$

اثر ریاضی موجود وی

کتاب الاستقصاء و التجنیس فی‌علم الحساب

در این کتاب کاربرد حساب خطأین و جبر در حل مسائل مربوط به وصایا مورد بحث قرار گرفته است. از این کتاب چند نسخه در مشهد و اروپا موجود است.

تبصره. مؤلف جلد سوم فهرست کتابخانه‌ی آستان قدس رضوی نوشته است که ابوعلی حسن‌بن حارث خوارزمی حبوبی کتاب استقصاء را در زمان آتسز خوارزمشاه تصنیف کرده و این اشتباه است وبر و کلمان هم همین اشتباه را تکرار کرده است. آتسزخوارزمشاه در ۵۲۱ تا ۵۵۱ یعنی در نیمه‌ی دوم قرن ششم هجری بوده و حال آن‌که ابوعلی حبوبی در حدود دویست سال پیش از آن تاریخ با بیرونی و بوزجانی مکاتبه می‌کرده است.

از طرف دیگر مؤلف جلد هشتم فهرست کتابخانه‌ی آستان قدس رضوی (ص۲۷) نسبت «حبوبی» را به زعم خود غلط انگاشته و نسبت او را «خیوقی» پنداشته و این نیز اشتباه است.

باید متذکر شوم که سوتر نیز از تاریخ زندگی ابوعلی حبوبی اطلاع نداشته و چون یک نسخه از کتاب استقصاء که در آکسفورد موجود است تاریخ کتابتش در سال ۶۳۹ هجری بوده سوتر نوشته است که ابوعلی حبوبی بیش از تاریخ ۶۳۹ می‌زیسته (که البته درست است).

منبع
زندگی‌نامه‌ی ریاضی‌دانان دوره‌ی اسلامی، ابوالقاسم قربانی، مرکز نشر دانشگاهی

بسم الله الرحمن الرحیم

رشد برهان ۶۰

مجله‌ی ریاضی

دوره‌ی متوسطه

فصلنامه ی آموزشی، تحلیلی واطلاع رسانی

دوره‌ی هجدهم /شماره‌ی ۲/ زمستان ۱۳۸۷/شمارگان: ۱۶۰۰۰ نسخه

• مدیر مسئول: علیرضا حاجیان زاده

• سردبیر: حمیدرضا امیری

• مدیر داخلی: میرشهرام صدر

• طراح گرافیک: آزیتا کوثری

• اعضای هیأت تحریریه: حمیدرضا امیری، محمد هاشم رستمی، احمد قندهاری، میرشهرام صدر، هوشنگ شرقی، سید محمدرضا هاشمی موسوی، غلامرضا یاسی‌پور و با تشکر از همکاری ارزنده‌ی استاد پرویز شهریاری

• ویراستار ادبی: کبری محمودی

• چاپ و صحافی: شرکت‌افست (سهامی عام)

ISSN 1735 - 4951 www.roshdmag.ir

صندوق الکترونیکی سردبیر: Borhanm@roshdmag.ir

پیام‌گیر نشریات رشد: ۸۸۳۰۱۴۸۲-۸۸۸۳۹۲۳۲

• نشانی دفتر مجله: تهران، صندوق پستی ۱۵۸۷۵/۶۵۸۵ تلفن دفتر مجله: ۸۸۳۰۵۸۶۲

تلفن امور مشترکین: ۷۷۳۳۶۶۵۶ ـ ۷۷۳۳۵۱۱۰

رشد برهان متوسطه، تمامی دبیران محترم و دانش‌آموزان عزیز

را در زمینه‌های زیر به همکاری دعوت می کند:

■ نگارش مقاله‌های کمک‌درسی (شرح و بسط و رفع مشکلات مبحث درسی کتاب‌های ریاضی دوره‌ی متوسطه و پیش‌دانشگاهی)

■ طرح مسائل کلیدی به همراه حل آن‌ها (برای دانش‌آموزان)

■ طرح مسائل مسابقه‌ای به همراه حل آن‌ها (برای دانش‌آموزان)

■ طرح معماهای ریاضی

■ نگارش یا ترجمه‌ی مقاله‌های عمومی ریاضی (مانند تاریخ ریاضیات، زندگینامه‌ی علمی و اجتماعی ریاضیدانان، نکته‌های تازه و لطیف ریاضیات، آموزش ریاضیات، آموزش کامپیوتر و ...)

رشد برهان متوسطه هر سه ماه، یکبار منتشر می شود.

مجلّه در حکّ، اصلاح، حذف و اضافه ی مقاله ها آزاد است.

مقاله های وارده ،باید خوانا و حتی الامکان کوتاه باشد.

مقاله های رسیده مسترد نمی شود.

رونویسی یا فهمیدن!

یادداشت سردبیر

H66Amiri@yahoo.com

در این مجال می‌خواهم به عنوان یک معلم ریاضی کمی درددل کنم و حتی کمی هم راهنمایی. شاید تعدادی از شما دانش‌آموزان عزیز این حرف‌ها را به گوش جان بخرید!

بهتر است کمی راجع به کمال و به کمال رسیدن انسان‌ها صحبت کنیم. اصولاً یکی از بارزترین ویژگی‌های انسان که به خوبی او را از همه‌ی موجودات دیگر جدا می‌کند، ویژگی یا قدرت یادگیری اوست. کسب علم و معرفت، از ویژگی‌هایی است که فقط انسان از آن برخوردار است. در قرآن کریم، در احادیث و روایات و حتی در ادبیات و شعر ایرانیان، همواره درباره‌ی کسب و طلب علم و دانش‌اندوزی، تأکید و تأیید فراوان می‌شود، اما آیا فقط کسب علم و دانش برای به کمال رسیدنِ انسان کافی است؟ البته که این علم‌اندوزی و دانش‌آموزی لازم است، ولی کافی نیست!

در واقع، برای پرواز به سمت کمال، دو بال لازم داریم که یکی از آن‌ها رسیدن به معرفت است، ولی بال دوم که در واقع مکمل این معرفت است، چیست؟ آیا برای رسیدن به این معرفت و پس از نیل به آن برای ادامه‌ی حرکت به سمت کمال که حرکتی است دنباله‌دار و مستمر، به تلاش، کوشش و پشتکار نیاز نداریم؛ همان که در آموزه‌های دینی ما به مجاهدت و سعی از آن نام برده‌اند.

آری، عزیزان دانش‌آموز، به قول شاعر بزرگ ایرانی، «نابرده رنج گنج میسر نمی‌شود». این جمله در واقع تفسیری است از آیه‌ی مبارکه‌ی «لیس للانسان الا ماسعی». باید برای رسیدن به معرفت و کسب علم تلاش کنید، پشتکار داشته باشید و پس از مشخص کردن هدف و برنامه‌ریزی برای رسیدن به آن، با تلاش و سخت‌کوشی و تمرین و ممارست، به هدف نزدیک شوید و به سمت تعالی و کمال حرکت کنید.

مشکلی که متأسفانه امروزه در مراکز آموزشی ما و بین بسیاری از دانش‌آموزان رواج پیدا کرده، راحت‌طلبی و به دنبال لقمه‌های حاضر و آماده و حتی جویده‌شده است. تا جایی که وقتی به مسئله‌ای تا حدی سخت در ریاضیات برخورد می‌کنند، یا به دنبال حل تشریحی آن هستند و یا بعد از کمی فکر کردن، آن را کنار می‌گذارند تا از معلم خود یا شخص دیگری سؤال کنند و اگر معلم جواب سؤال را ندهد و بخواهد فقط با راهنمایی، دانش‌آموز خود را به تأمل و تفکر وادارد تا خودش به جواب برسد و از حل آن لذت ببرد، معلم خوبی نیست. در واقع معلم خوب از نظر چنین دانش‌آموزانی، مساوی است با معلمی که حل مسئله را به راحتی در اختیار دانش‌آموزان خود قرار دهد، لقمه را بجود و در دهان آن‌ها بگذارد و حتی به جای آن‌ها قورت بدهد! کلاس‌های درس ریاضی بیشتر به کلاس‌های جزوه‌نویسی یا به اعتقاد من کلاس رونویسی تبدیل می‌شوند!

در یک کلاس، مسئله‌ای (مسئله‌ای در احتمال شرطی) را به سه روش حل کردم و به سه جواب متفاوت رسیدم. بعد از دانش‌آموزان خواستم، به صورت گروهی (دو یا سه نفری) روی این مسئله بحث و مشخص کنند، جواب درست کدام است و اگر به یکی از جواب‌ها رسیدند، دلیل نادرست بودنِ دو جواب دیگر را هم بیان کنند. پس از صرف حدود ۳۰ دقیقه زمان، دانش‌آموزان دو تا سه جواب دیگر را هم برای مسئله یافتند که با جواب‌های من فرق داشت. بعضی از گروه‌ها نیز دلایل بسیار جالبی برای رد یا قبول جواب‌های من پیدا کردند. با جمع‌بندی و بحث روی جواب‌های دانش‌آموزان، به سه چهار نتیجه و تذکر مهم دست پیدا کردیم.

شاید در شروع کلاس و پس از طرح مسئله از طرف من، بسیاری از دانش‌آموزان فکر می‌کردند چرا آقا جواب صحیح را بیان نمی‌کند؟ شاید خودش هم شک دارد و بلد نیست! ولی در آخر کلاس، همگی راضی بودند و تلاشی که برای تجزیه و تحلیل آن مسئله انجام شده بود، بسیاری از نقاط مبهم را در مسائلی شبیه به آن برطرف کرد. حتی بچه‌های کلاس عادت کرده‌اند، وقتی حل مسئله‌ای را روی تخته می‌نویسم، به دقت گوش دهند و اشکالات خود را بپرسند و وقتی کاملاً حل مسئله را فهمیدند، آن را در دفتر خود یادداشت کنند. ولی نه از روی تخته، بلکه بدون نگاه کردن به تخته و فقط با استفاده از یافته‌های خودشان. این نوع نوشتن، دیگر دیکته نوشتن یا رونویسی نیست، بلکه تمرینی است بر آن‌چه که آموخته‌اند.

پس بیایید از همین فردا در کلاس درس به صورت فعال و پرتلاش ظاهر شویم و فقط به دنبال آماده‌شده‌ها و راحت‌الحلقوم‌ها نباشیم!

ریاضیات در ایران (۲)

● پرویز شهریاری



گ فریدنتال، ریاضی دان هلندی، در جایی می گوید: «چرا باید ریاضیات را یاد گرفت؟ همه می گویند ریاضیات به ذهن آدمی نظم می بخشد و نیروی ذهنی را گسترش می دهد. این البته مبالغه ای آشکار است، ولی حقیقتی نیز در آن پنهان است. کسی که با ریاضیات سروکار دارد، اندوخته ای از تجربه ی ریاضی را با خود دارد و به طور طبیعی و حتی ناخودآگاه در هر گام و هر اقدام خود، از روش های اندیشیدن ریاضی استفاده می کند.»

این نوعی داوری منصفانه درباره ی ریاضیات است. فریدنتال همان کسی است که چند دهه ی پیش «لینکرس» را پیشنهاد کرد؛ زبانی که برای تماس با ساکنان احتمالی ستارگان دیگر است. این زبان به ما امکان می دهد تا گفت وگویی یک جانبه با موجودهای متفکری داشته باشیم که به هیچ کدام از زبان های زمینی آشنایی ندارند و در ضمن چیزی درباره ی زندگی زمینی نمی دانند. البته نمی توان منتظر پاسخ یا پرسش از گیرنده ی احتمالی پیام بود؛ چرا که رفتن و برگشتن پیام های رادیویی، چه بسا سده ها طول بکشد و به زندگی کوتاه ما دست ندهد. آدمی باید به طور عادی بر منطق مسلط باشد و غنی ترین تخیل را داشته باشد؛ شخصیتی خارق العاده داشته باشد. کوتاه سخن، ریاضی دان باشد تا بتواند در برابر خود، چنین مسئله ای را قرار دهد و از عهده ی حل آن برآید. حتی در این تلاش بلند پروازانه ی فریدنتال، با وجود این که درباره ی «منافع» آن حتی در آینده ی نزدیک نمی توان با خوش بینی اظهارنظر کرد، عنصر اساسی عبارت است از خدمت به انسان.

حق با کیست؟ هواداران ریاضیات خالص یا دوست داران ریاضیات کاربردی؟

این پرسش تازه نیست و از دیرباز مورد بحث ریاضی دانان و غیر ریاضی دانان بوده است. می دانیم دانشمندان و فیلسوفان «دوران طلایی یونان»، تنها به ریاضیات خالص، ریاضیاتی که هیچ گونه فایده ی عملی نداشته باشد، علاقه مند بودند. افلاطون تجربه را تحقیر می کرد و ارسطو، اگرچه در پیری به تجربه و مشاهده گرایش بیشتری پیدا کرد، با اتکا به استدلال های ذهنی و تلاش در مجرد کردن همه ی بنیان های اعتقادی، در واقع به نحوی با استاد خود افلاطون هم سویی داشت. فیثاغورس ابهام را چون زشتی و ظلمت، به بدی نسبت می داد و وضوح و تعبیر دقیق را تنها از راه کشف رمزهای عدد، که وسیله همه ی پدیده ها موجود است، میسر می دید.

آندره آروسفل، در سخن رانی خود در کنگره ی ریاضی دانان در «لیون» (فرانسه) در اوت ۱۹۶۹ یا شهریور ۱۳۴۸، علت سقوط دانش یونانی را همین مجردگرایی نمایندگان دانش یونانی قلمداد کرد. او گفت: «اصل اقلیدس، محصول سالیان دراز فعالیت های گوناگون بشری در طول بیش از ۱۸۰۰ سال در زمینه های مساحی، کشاورزی و اندازه گیری سطح و حجم و نماینده ی اوج اندیشه ی انسانی بوده است. ولی گرایش ریاضی دانان یونانی به ساختن ریاضیات مجرد و کوتاه شدن دست

فیزیک‌دانان در پدید آوردن رابطه‌های لازم برای اندیشه‌های خودشان، دانش یونانی را از پیشرفت بازداشت»

فه ایکس کلاین، ریاضی‌دان آلمانی، در سال ۱۸۹۳ در سخن‌رانی مقدماتی کنگره‌ی ریاضی‌دانان در شیکاگو، با زبان دیگری نگرانی خود را از تخصص گرایی ریاضی‌دانان و دور شدن آنان از دانش عمومی ابراز داشت. او گفت: «پیشینیان بزرگ ما، لاگرانژ و گوس، به همه‌ی مسئله‌های ریاضیات و کاربرد آن‌ها احاطه داشتند. کششی که در سده‌ی نوزدهم، به سمت ویژه‌کاری و تخصص به‌وجود آمد، موجب کم شدن علاقه‌ی ریاضی‌دانان به دانش عمومی شد. با وجود این در دوره‌های اخیر، تمایل به یکی کردن شاخه‌های به‌ظاهر گوناگون و دور از هم نظریه‌های ریاضی، دوباره پیدا شده است. به یاری مفهوم گروه، این امکان را به‌دست آوردیم که هندسه و نظریه‌ی عددها را که در دورانی طولانی هر کدام در مسیری یک بُعدی و مستقیم و با روش‌ها و مسئله‌های به‌کلی متفاوتی پیش می‌رفتند، به عنوان دو جنبه‌ی متفاوت از یک نظریه، بررسی کنیم.»

شاید بتوان نماینده‌ی مشخص ریاضیات خالص را در زمان ما، گروه **نیکلای بورباکی** در فرانسه دانست. این نام بیشتر یک عنوان حقوقی و یک نام مستعار است که گروهی از شایسته‌ترین ریاضی‌دانان فرانسوی را دربرگرفته و بیش از ۵۰ سال است که با ارزش‌ترین کتاب‌های نظری ریاضیات را زیر همین عنوان و با نام «مقدمه‌های ریاضیات» منتشر می‌کنند. ولی حتی این نمایندگان «جریان محض ریاضیات هم» اهمیت ریاضیات را در ساختمان پرشکوه آینده‌ی جامعه‌ی انسانی انکار نمی‌کنند. بورباکی نقش خود را هم‌چون معمار چیره‌دستی می‌داند که به تجدیدبنای مرکز قدیمی شهر مشغول است و لازم نمی‌بینند تا درباره‌ی کناره‌ها و حومه‌ی شهر صحبت کند؛ زیرا خود نیاز زندگی، کوی‌ها و ساختمان‌های تازه را ایجاد می‌کند.

«وظیفه‌ی ریاضی‌دان، تجدیدبنا و سازمان‌دهی مرکز شهری است که ریاضیات نام دارد». ساختمان این شهر با دامنه‌ی گسترده و به یاری کسان با استعداد در جریان است. ولی حتی آن که در مرکز شهر زندگی می‌کند، نمی‌تواند رابطه‌ی خود را با تمامی اطراف خود به‌کلی قطع کند. بسیاری از ریاضی‌دانان به تدریج از مرکز گذشته‌اند و به کناره‌ها رو آورده‌اند. جایی که هوا آفتاب بیشتری دارد و در همان جا در شهرها و کشورهای همسایه، آغاز به ساختن راه‌های تازه کرده‌اند؛ جایی که دورنمای گسترده‌تر و پهنه‌ی گشوده‌تر و آزادی و امکان بیشتر، الهام‌بخش فعالیت آن‌ها شده است. به همین دلیل است که اطراف و کناره‌ها جان می‌گیرند، محله‌هایی که به شهرهای زندگی نزدیک‌ترند و رابطه‌ی بیشتری با آن‌ها دارند، مسکونی‌تر می‌شوند. فیزیک، صنعت، اقتصاد، بیولوژی، پزشکی و مانند آن، و محله‌هایی که به کلی جوان‌اند، به‌وجود می‌آیند. به سختی می‌توان درباره‌ی هدف این محله‌ها و شهرک‌ها صحبت کرد؛ به‌ویژه که آگاهی بر همه‌ی آن‌ها کار ساده‌ای نیست».

با همه‌ی این‌ها، مضمون عینی آن ریاضیاتی که در دنیای قدیم و در سده‌های میانه به‌دست آمده است، هنوز و برای ریاضیات امروزی هم گنجینه‌ای پرارزش و ذخیره‌ای طلایی به شما می‌رود.

هرکسی استعداد یادگیری ریاضیات را دارد

ریاضیات هم مثل هر جنبه‌ی دیگری از شناخت آدمی، هم دانش است و هم هنر. ریشه‌های علمی و هنری در هر موجودی که با کار خلاق انسان سروکار دارد، دیده می‌شود. اگر بخشی از دانش را قابل آزمایش و هنر را نتیجه‌ی خلاقیت و استعداد خاص انسان بدانیم، معلوم می‌شود که در همه‌ی فعالیت‌های انسانی، دانش و هنر به‌هم پیوسته‌اند. تا آن‌جا که شما موسیقی را یاد می‌گیرید، دانش است، ولی از آن‌جا که می‌خواهید چیزی تازه ارائه کنید، هنر نام دارد. شما می‌توانید نُت‌خوانی را یاد بگیرید، روش به دست گرفتن ویولن را هم بیاموزید و حتی می‌توانید در اثر تمرین و آزمایش، بسیاری از آهنگ‌های موجود را بنوازید. تا این‌جا با جنبه‌هایی از موسیقی سروکار دارید که دارای قانون است و بنابراین هرکسی می‌تواند دیر یا زود آن‌ها را فرا بگیرید. ولی هرکسی که از این قانون‌ها آگاه شد، هنوز «آهنگ‌ساز» نیست. از این جاست که هنر آغاز می‌شود و استعدادهای هنری بروز می‌کنند.

این را هم بگوییم که هیچ معیاری وجود ندارد که از آغاز بتوان استعداد هنری را کشف کرد. چه‌بسیار کسانی که در میان مردم وجود دارند و اگر با قانون‌های موسیقی آشنا می‌شدند و امکانات لازم را در اختیار داشتند، می‌توانستند موسیقی‌دان هنرمندی از کار درآیند. طبعاً درباره‌ی ریاضیات هم به همین گونه است. تا آن‌جای ریاضیات که به قاعده درآمده و زاویه‌های گوناگون آن روشن شده است، «دانش» است و برای هرکسی قابل دست‌رس. ولی از آن‌جایی که به مرز ناشناخته‌ای از ریاضیات برمی‌خوریم، نیاز به خلاقیت دارد، استعداد می‌خواهد و هنر.

همین جا این مطلب را هم بگوییم که تدریس ریاضی هم از این قاعده جدا نیست. شرط لازم معلمی ریاضی دانستن است، یعنی روشن است که معلم ریاضی باید بر آن‌چه می‌خواهد درس بدهد، مسلط باشد، ولی این کافی نیست. معلم باید هنر معلمی داشته باشد؛ چیزی که بدون آن می‌تواند موجب سرخوردگی و سردرگمی بسیاری از دانش‌آموزان با استعداد شود. هرکسی که معلمی می‌کند باید بر موضوع‌های درس خود تسلط داشته باشد، ولی هرکس که تسلط کافی بر مسئله‌ها و قضیه‌های ریاضی داشته باشد، نمی‌تواند معلم خوبی باشد.

ادامه دارد...

حد در یک نقطه (۱)

● احمد قندهاری

۱. میل کردن x به سمت یک عدد

فرض کنید می‌خواهیم x را از سمت چپ عدد ۲، به ۲ نزدیک کنیم، ولی به آن نرسد؛ به صورت زیر:

$x = ۱,\cdots,۱/۴,\cdots,۱/۷,\cdots ۱/۹,۱/۹۹,۱/۹۹۹,۱/۹۹۹۹,\cdots$

ملاحظه می‌کنید که هر قدر تعداد ۹های سمت راست مُمیز را زیاد کنیم، عدد حاصل مرتباً به ۲ نزدیک و نزدیک‌تر می‌شود، ولی به آن نمی‌رسد. چون x از طرف اعداد کمتر از ۲ به آن نزدیک شده است، می‌نویسیم:

$x \to ۲^-$

حال x را از طرف اعداد بزرگ‌تر از ۲ به عدد آن نزدیک می‌کنیم؛ به صورت زیر:

$x = ۳,\cdots ۲/۷,\cdots,۲/۳,\cdots,۲/۱,۲/۰۱,۲/۰۰۱,۲/۰۰۰۱,۲/۰۰۰۰۱,\cdots$

باز هم ملاحظه می‌کنیم، هر قدر تعداد ۰ های بین ممیز و عدد ۱ را زیاد کنیم، عدد حاصل مرتباً به ۲ نزدیک و نزدیک‌تر می‌شود، ولی به آن نمی‌رسد. چون x از طرف اعداد بزرگ‌تر از ۲ به آن نزدیک شده است، می‌نویسیم:

$x \to ۲^+$

همسایگی

نامساوی $|x-۲| < ۱$ را درنظر می‌گیریم و آن را حل می‌کنیم؛ به صورت زیر:

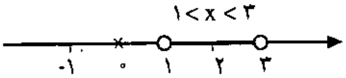
$|x-۲| < ۱ \Rightarrow -۱ < x-۲ < ۱ \Rightarrow ۱ < x < ۳$

عدد میانی بازه‌ی (۳و۱)، عدد ۲ است. فرض می‌کنیم $x = ۲$.

اگر x را مرکز قرار دهیم، آن‌گاه بازه‌ی (۳و۱) را یک همسایگی متقارن به مرکز $x = ۲$ به شعاع ۱ گوییم. چنان‌چه از بازه‌ی (۳و۱)، مرکز همسایگی را برداریم، یعنی $(۱,۳) - \{۲\}$، آن‌گاه این همسایگی را یک همسایگی متقارن محذوف (مرکز حذف‌شده) عدد ۲ به شعاع ۱ گوییم.

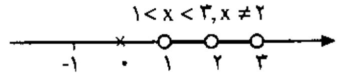
همسایگی متقارن عدد ۲ به شعاع ۱

$۱ < x < ۳$



همسایگی متقارن محذوف عدد ۲ به شعاع ۱

$۱ < x < ۳, x \neq ۲$



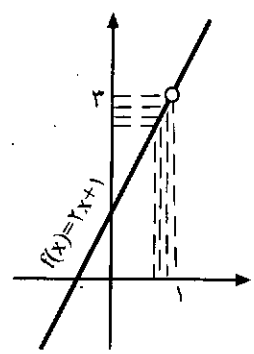
توجه: در حالت کلی، نامساوی $|x-a|<r$ یا $a-r<x<a+r$ را یک همسایگی متقارن به مرکز a و شعاع r گوییم.

حدّ چپ تابع

بررسی حدّ چپ تابع را با یک مثال شروع می‌کنیم. فرض کنید تابع f با ضابطه‌ی $f(x)=۲x+۱$ باشد. می‌خواهیم در این تابع x را از طرف اعداد کوچک‌تر از ۱ به ۱ نزدیک و رفتار تابع f را در این فرایند بررسی کنیم. برای درک بهتر، جدول زیر را تشکیل می‌دهیم.

x	۰/۹	۰/۹۹	۰/۹۹۹	۰/۹۹۹۹	۰/۹۹۹۹۹
f(x)	۲/۸	۲/۹۸	۲/۹۹۸	۲/۹۹۹۸	۲/۹۹۹۹۸

ملاحظه می‌کنیم، وقتی x از طرف اعداد کوچک‌تر از ۱ به آن نزدیک و نزدیک‌تر می‌شود، رفتار تابع نشان می‌دهد که f(x) به عدد ۳ نزدیک و نزدیک‌تر شده است. به نظر می‌رسد، وقتی $x\to ۱^-$، آن‌گاه حدّ f(x) برابر ۳ است. از این جدول نتایج زیر به دست می‌آید:



$$۰<۱-x<۰/۱ \Rightarrow |f(x)-۳|<۰/۲$$
$$۰<۱-x<۰/۰۱ \Rightarrow |f(x)-۳|<۰/۰۲$$
$$۰<۱-x<۰/۰۰۱ \Rightarrow |f(x)-۳|<۰/۰۰۲$$
$$۰<۱-x<۰/۰۰۰۱ \Rightarrow |f(x)-۳|<۰/۰۰۰۲$$
$$۰<۱-x<۰/۰۰۰۰۱ \Rightarrow |f(x)-۳|<۰/۰۰۰۰۲$$

این نتایج را به صورت زیر هم می‌توان نشان داد:

اگر بخواهیم $|f(x)-۳|<۰/۲$ باشد، باید: $۰<۱-x<۰/۱$

اگر بخواهیم $|f(x)-۳|<۰/۰۲$ باشد، باید: $۰<۱-x<۰/۰۱$

اگر بخواهیم $|f(x)-۳|<۰/۰۰۲$ باشد، باید: $۰<۱-x<۰/۰۰۱$

اگر بخواهیم $|f(x)-۳|<۰/۰۰۰۲$ باشد، باید: $۰<۱-x<۰/۰۰۰۱$

اگر بخواهیم $|f(x)-۳|<۰/۰۰۰۰۲$ باشد، باید: $۰<۱-x<۰/۰۰۰۰۱$

می‌توان گفت: f(x) را به حدّ خودش به هر اندازه که بخواهیم می‌توانیم نزدیک کنیم، به شرطی که x را به اندازه‌ی کافی به ۱ نزدیک کنیم.

مثال: تابع با ضابطه‌ی $f(x)=۲x+۱$ را در نظر می‌گیریم و $x\to ۱^-$. می‌خواهیم: $|f(x)-۳|<\frac{۱}{۲۵۰}$ باشد. تعیین کنید x را چه‌قدر باید به عدد ۱ نزدیک کنیم.

حل: چنین عمل می‌کنیم:

$$|f(x)-۳|<\frac{۱}{۲۵۰} \Rightarrow |(۲x+۱)-۳|<\frac{۱}{۲۵۰} \Rightarrow |۲x-۲|<\frac{۱}{۲۵۰}$$
$$\Rightarrow ۲|x-۱|<\frac{۱}{۲۵۰} \Rightarrow \underset{x\to ۱^-}{|x-۱|}<\frac{۱}{۵۰۰} \Rightarrow ۰<۱-x<\frac{۱}{۵۰۰}$$

یعنی x باید از سمت چپ عدد ۱ به عدد ۱ آن‌قدر نزدیک شود که فاصله‌اش تا عدد ۱ کمتر از $\frac{۱}{۵۰۰}$ باشد.

پس اگر بخواهیم f(x) به ۳ آن‌قدر نزدیک شود که فاصله‌ی f(x) از عدد ۳ کمتر از $\frac{۱}{۲۵۰}$ باشد، باید x را از سمت چپ به عدد ۱ آن‌قدر نزدیک کنیم که فاصله‌ی ۱ تا عدد x کمتر از $\frac{۱}{۵۰۰}$ شود.

تمرین: اگر در مثال بالا بخواهیم $|f(x)-۳|<\frac{۱}{۷۲۰}$ باشد، تعیین کنید x را از سمت چپ چه‌قدر باید به عدد ۱ نزدیک کنیم.

جواب: $۰<۱-x<\frac{۱}{۱۴۴۰}$

تعریف حدّ چپ تابع

فرض می‌کنیم تابع f در بازه‌ی $(a,x_۰)$ تعریف شده باشد. می‌گوییم حدّ چپ تابع f وقتی $x\to x_۰^-$، عدد حقیقی L است؛ اگر بتوان f(x) را به هر اندازه‌ی دل‌خواه به L نزدیک کنیم، به شرطی که $x<x_۰$ را به اندازه‌ی کافی به $x_۰$ نزدیک کنیم. در این صورت می‌نویسیم:

$$\lim_{x\to x_۰^-} f(x)=L$$

تمرین: می‌دانیم: $\lim_{x\to ۲^-}(۴x+۳)=۱۱$، می‌خواهیم $|(۴x+۳)-۱۱|<\frac{۱}{۴۰۰}$ باشد. تعیین کنید x را چه‌قدر باید از سمت چپ ۲ به عدد ۲ نزدیک کنیم.

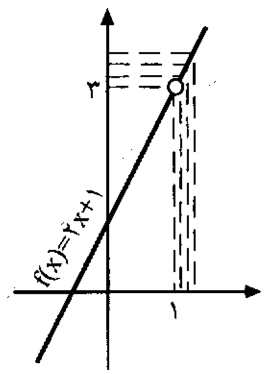
جواب: $۰<۲-x<\frac{۱}{۱۶۰۰}$

حدّ راست تابع

دوباره تابع با ضابطه‌ی $f(x)=۲x+۱$ را در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم، x از طرف اعداد بزرگ‌تر از ۱ به عدد ۱ نزدیک شود؛ یعنی $x\to ۱^+$. می‌خواهیم رفتار تابع f را بررسی کنیم. به این منظور جدول زیر را تشکیل می‌دهیم.

x	۱/۱	۱/۰۱	۱/۰۰۱	۱/۰۰۰۱	۱/۰۰۰۰۱
f(x)	۳/۲	۳/۰۲	۳/۰۰۲	۳/۰۰۰۲	۳/۰۰۰۰۲

ملاحظه می‌کنیم، وقتی $x > 1$ و به عدد ۱ نزدیک و نزدیک‌تر می‌شود، رفتار تابع نشان می‌دهد که مقدار تابع $(f(x))$ به عدد ۳ نزدیک و نزدیک‌تر شده است. به‌نظر می‌رسد که وقتی $x \to 1^+$، آن‌گاه حدّ $f(x)$ برابر ۳ است. از این جدول نتایج زیر به‌دست می‌آید:



$0 < x-1 < 0/1 \Rightarrow |f(x)-3| < 0/2$

$0 < x-1 < 0/01 \Rightarrow |f(x)-3| < 0/02$

$0 < x-1 < 0/001 \Rightarrow |f(x)-3| < 0/002$

$0 < x-1 < 0/0001 \Rightarrow |f(x)-3| < 0/0002$

$0 < x-1 < 0/00001 \Rightarrow |f(x)-3| < 0/00002$

این نتایج را به صورت زیر نیز می‌توان بیان کرد:

اگر بخواهیم $|f(x)-3| < 0/2$ باشد، باید: $0 < x-1 < 0/1$

اگر بخواهیم $|f(x)-3| < 0/02$ باشد، باید: $0 < x-1 < 0/01$

اگر بخواهیم $|f(x)-3| < 0/002$ باشد، باید: $0 < x-1 < 0/001$

اگر بخواهیم $|f(x)-3| < 0/0002$ باشد، باید: $0 < x-1 < 0/0001$

اگر بخواهیم $|f(x)-3| < 0/00002$ باشد، باید: $0 < x-1 < 0/00001$

می‌توان گفت: می‌توانیم $|f(x)-3|$ را به هر اندازه که بخواهیم، کوچک کنیم؛ به شرطی که x را از سمت راست به عدد ۱ به اندازه‌ی کافی نزدیک کنیم.

مثال: تابع با ضابطه‌ی $f(x) = 2x+1$ را در نظر می‌گیریم و $x \to 1^+$. می‌خواهیم $|f(x)-3| < \frac{1}{750}$ باشد. تعیین کنید x را چه‌قدر باید به عدد ۱ نزدیک کنیم.

حل:

$$|f(x)-3| < \frac{1}{750} \Rightarrow |2x+1-3| < \frac{1}{750} \Rightarrow |2(x-1)| < \frac{1}{750}$$

$$\Rightarrow 2|x-1| < \frac{1}{750} \Rightarrow \underset{x\to1^+}{|x-1|} < \frac{1}{1500} \Rightarrow 0 < x-1 < \frac{1}{1500}$$

پس x را از طرف اعداد بزرگ‌تر از ۱ به عدد ۱ آن‌قدر باید نزدیک کنیم که $x-1$ کمتر از $\frac{1}{1500}$ باشد.

تعریف حدّ راست تابع

فرض می‌کنیم تابع f در بازه‌ی (x_0, b) تعریف شده باشد. می‌گوییم حدّ راست تابع f وقتی $x \to x_0^+$، عدد حقیقی L است؛ اگر بتوان $f(x)$ را به هر اندازه‌ی دل‌خواه به L نزدیک کنیم، به شرطی که x را از طرف اعداد بزرگ‌تر از x_0 به اندازه‌ی کافی به x_0 نزدیک کنیم. در این صورت می‌نویسیم:

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = L$$

مثال: داریم: $\lim_{x\to1^+}(-4x+3) = -1$. می‌خواهیم: $|(-4x+3)+1| < \frac{1}{300}$. x را از طرف اعداد بزرگ‌تر از ۱ چه‌قدر باید به عدد ۱ نزدیک کنیم؟

حل:

$$|(-4x+3)+1| < \frac{1}{300} \Rightarrow |-4x+4| < \frac{1}{300} \Rightarrow |-4(x-1)| < \frac{1}{300}$$

$$\Rightarrow 4|x-1| < \frac{1}{300} \Rightarrow \underset{x\to1^+}{|x-1|} < \frac{1}{1200} \Rightarrow 0 < x-1 < \frac{1}{1200}$$

پس x را از طرف اعداد بزرگ‌تر از ۱ به عدد ۱ آن‌قدر باید نزدیک کنیم که $x-1$ کمتر از $\frac{1}{1200}$ باشد.

تعریف حدّ تابع در x_0

فرض می‌کنیم تابع f در یک همسایگی x_0 تعریف شده باشد (ممکن است تابع در خود x_0 تعریف نشده باشد). می‌گوییم حدّ $f(x)$ وقتی $x \to x_0$، برابر عدد حقیقی L است، اگر بتوان $f(x)$ را به هر اندازه‌ی دل‌خواه به L نزدیک کنیم؛ به شرطی که x را به اندازه‌ی کافی به x_0 نزدیک کنیم. در این صورت می‌نویسیم:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = L$$

به عبارت دیگر، حدّ $f(x)$ وقتی $x \to x_0$، برابر عدد حقیقی L است، اگر بتوان $|f(x)-L|$ را هر اندازه که بخواهیم کوچک کنیم؛ به شرطی که $|x-x_0|$ را به اندازه‌ی کافی کوچک کنیم.

مثال: تابع با ضابطه‌ی $f(x) = 3x-5$ را در نظر می‌گیریم. اگر $x \to 1$، آن‌گاه حدّ $f(x)$ برابر ۲- است. می‌خواهیم $|f(x)+2| < \frac{1}{100}$ باشد. x را چه‌قدر باید به عدد ۱ نزدیک کنیم؟

حل:

$$|f(x)+2| < \frac{1}{100} \Rightarrow |3x-5+2| < \frac{1}{100} \Rightarrow |3x-3| < \frac{1}{100}$$

$\Rightarrow |3(x-1)|<\frac{1}{100} \Rightarrow 3|x-1|<\frac{1}{100}$ یا $|x-1|<\frac{1}{300}$

$0<|x-1|<\frac{1}{300}$

پس x را آن قدر باید به عدد ۱ نزدیک کنیم که $|x-1|$ (که مثبت است) کوچک‌تر از $\frac{1}{300}$ بشود.

توجه: اگر $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=L$ و $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=L$ باشد، آن‌گاه می‌گوییم تابع f در x_0 حد دارد و حد آن برابر عدد حقیقی L است.

قضایای حد

قضیه‌ی ۱. فرض می‌کنیم a و b اعداد حقیقی و $n\in N$ باشد.

الف) $\lim\limits_{x\to a} b=b$

ب) $\lim\limits_{x\to a} x=a$

ج) $\lim\limits_{x\to a} x^n=a^n$

قضیه‌ی ۲. فرض می‌کنیم a، b و L اعداد حقیقی و $n\in N$ و $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L_1$ و $\lim\limits_{x\to a} g(x)=L_2$ باشد. آن‌گاه داریم:

الف) $\lim\limits_{x\to a}(f(x)\pm g(x))=L_1\pm L_2$

ب) $\lim\limits_{x\to a} b f(x)=bL_1$

ج) $\lim\limits_{x\to a} f(x).g(x)=L_1.L_2$

د) $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{L_1}{L_2}$ با شرط $L_2\neq 0$

قضیه‌ی ۳. اگر $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L_1\in\mathbb{R}$ و $\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$ باشد، آن‌گاه:

$\lim\limits_{x\to a} f(x).g(x)=L(0)=0$

قضیه‌ی ۴. اگر $f(x)=m_0x^n+m_1x^{n-1}+\cdots+m_n$ یک چندجمله‌ای از درجه‌ی n باشد، آن‌گاه:

$\lim\limits_{x\to a} f(x)=m_0a^n+m_1a^{n-1}+\cdots+m_n$

قضیه‌ی ۵. اگر $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$ باشد، آن‌گاه:

$\lim\limits_{x\to a}|f(x)|=|L|$

قضیه‌ی ۶. اگر $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$ و $L\geq 0$ و $n\in N$ باشد، آن‌گاه: $\lim\sqrt[n]{f(x)}=\sqrt[n]{L}$. اگر n فرد باشد، شرط $L\geq 0$ لازم نیست.

قضیه‌ی ۷. اگر $f(x)\leq g(x)$ و $\forall x\in\mathbb{R}$ و f و g در a حد داشته باشند، آن‌گاه: $\lim\limits_{x\to a} f(x)\leq\lim\limits_{x\to a} g(x)$.

قضیه‌ی ۸. حد یک تابع در $x=a$ در صورت وجود یکتاست.

مثال: به کمک قضیه‌ی حد، حدهای زیر را محاسبه کنید.

الف) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-8x}{x^3+4x-1}$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to 1}(x^2-8x)}{\lim\limits_{x\to 1}(x^3+4x-1)}=\frac{\lim\limits_{x\to 1}x^2-\lim\limits_{x\to 1}8x}{\lim\limits_{x\to 1}x^3+\lim\limits_{x\to 1}4x-\lim\limits_{x\to 1}1}=\frac{1-8}{1+4-1}=\frac{-7}{4}$$

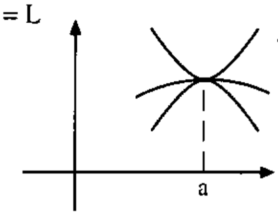
ب) $\lim\limits_{x\to 1}\sqrt[3]{\frac{x^2-x+4}{3x^2+x+4}}=\sqrt[3]{\frac{\lim\limits_{x\to 1}(x^2-x+4)}{\lim\limits_{x\to 1}(3x^2+x+4)}}$

$$=\sqrt[3]{\frac{\lim\limits_{x\to 1}x^2-\lim\limits_{x\to 1}x+\lim\limits_{x\to 1}4}{\lim\limits_{x\to 1}(3x^2)+\lim\limits_{x\to 1}x+\lim\limits_{x\to 1}4}}=\sqrt[3]{\frac{1-1+4}{3+1+4}}=\sqrt[3]{\frac{4}{8}}=\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$$

قضیه‌ی فشردگی

فرض می‌کنیم به ازای هر x در یک همسایگی a، $f(x)$ بین $g(x)$ و $h(x)$ باشد، هرگاه $g(x)$ و $h(x)$ وقتی $x\to a$، دارای حد $L\in\mathbb{R}$ باشند، آن‌گاه:

$\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$



مثال: اگر $f(x)=x\sin\frac{1}{x}$ باشد، می‌دانیم $-1\leq\sin\frac{1}{x}\leq 1$ و (با فرض $x>0$) داریم: $-x\leq x\sin\frac{1}{x}\leq x$

آن‌گاه: $\lim\limits_{x\to 0^+}(-x)\leq\lim\limits_{x\to 0^+}x\sin\frac{1}{x}\leq\lim\limits_{x\to 0^+}(x)$

$0\leq\lim\limits_{x\to 0^+}x\sin\frac{1}{x}\leq 0\Rightarrow\lim\limits_{x\to 0^+}x\sin\frac{1}{x}=0$

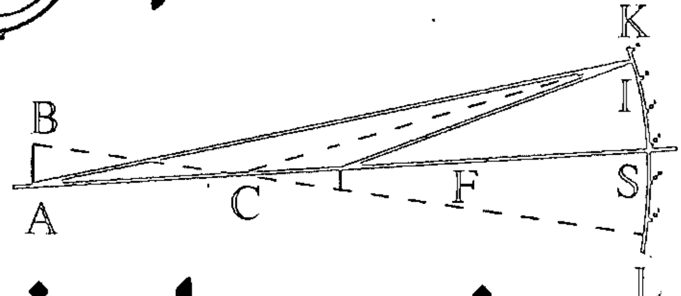
چنان‌چه $x<0$ باشد، داریم: $-x\leq x\sin\frac{1}{x}\leq x$ و:

$\lim\limits_{x\to 0^-}(x)\leq\lim\limits_{x\to 0^-}x\sin\frac{1}{x}\leq\lim\limits_{x\to 0^-}(-x)\Rightarrow 0\leq\lim\limits_{x\to 0^-}x\sin\frac{1}{x}\leq 0$

$\Rightarrow\lim\limits_{x\to 0^-}x\sin\frac{1}{x}=0$

پس: $\lim\limits_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=0$

□□□



قضیه‌ی نیم‌ساز مثلث و کاربردهایی از آن

●دکتر احمد شرف‌الدین

اشاره

در مقاله‌ی حاضر، قضیه‌ی نیم‌ساز مثلث و کاربردهایی از آن آمده است. اثبات قضیه‌ها از آن نگارنده است و امکان دارد، تازگی داشته باشد. فهرست مطالب را در این‌جا یاد می‌کنیم:

۱. اثبات‌های تازه برای قضیه‌ی نیم‌ساز مثلث (نیم‌ساز هر زاویه‌ی مثلث، ضلع روبه‌رو را به نسبت دو ضلع دیگر مثلث بخش می‌کند).

۲. اثبات تازه‌ای برای همرسی سه نیم‌ساز داخلی مثلث.

۳. قضیه‌ای درباره‌ی دو مثلث که دارای یک زاویه‌ی مساوی و یک زاویه‌ی مکمل‌اند.

۴. تعمیم قضیه‌ی نیم‌ساز مثلث در چهاروجهی.

۵. محاسبه‌ی طول نیم‌ساز مثلث با به‌کارگیری دستور دکارت در تقسیم توافقی.

۶. به‌کارگیری قضیه‌ی نیم‌ساز مثلث در اثبات فرمول‌های دکارت و نیوتن در آینه‌های کروی (برگرفته از یک کتاب فیزیک).

۷. کاربرد یک رابطه‌ی توافقی تازه در اثبات قضیه‌ی اساسی قطب و قطبی.

* * *

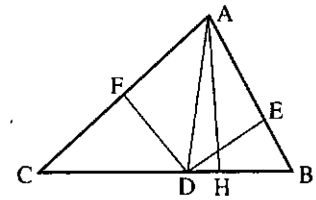
اثبات مطالب یاد شده در فهرست

۱. قضیه: نیم‌ساز هر زاویه‌ی مثلث، ضلع روبه‌رو را بر نسبت دو ضلع دیگر بخش می‌کند.

برهان نخست. مثلث ABC و نیم‌ساز AD را درنظر می‌گیریم. می‌خواهیم درستی تساوی بعد را ثابت کنیم:

$$\frac{\overline{DB}}{\overline{DC}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$$

برای اثبات، ارتفاع AH را رسم می‌کنیم و از نقطه‌ی D پای نیم‌ساز، دو عمود DE و DF را به ترتیب بر دو خط AB و AC فرود می‌آوریم.



مساحت‌های دو مثلث ADB و ADC را به ترتیب S_1 و S_2 می‌نامیم. دو رابطه زیر را می‌نویسیم:

$$\begin{cases} S_1 = \frac{1}{2}\overline{DB}.\overline{AH} \\ S_2 = \frac{1}{2}\overline{DC}.\overline{AH} \end{cases}$$

از دو تساوی بالا نتیجه می‌شود:

$$(a) \qquad \frac{S_1}{S_2} = \frac{\overline{DB}}{\overline{DC}}$$

نیز دو رابطه‌ی زیر محقق است:

$$\begin{cases} S_1 = \frac{1}{2}\overline{AB}.\overline{DE} \\ S_2 = \frac{1}{2}\overline{AC}.\overline{DF} \end{cases}$$

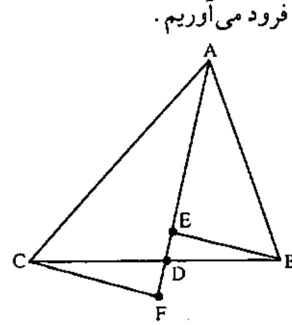
چون $\overline{DE} = \overline{DF}$ (زیرا نقطه‌ی D روی نیم‌ساز زاویه‌ی A قرار دارد) پس:

$$(b) \qquad \frac{S_1}{S_2} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$$

از دو رابطه‌ی (a) و (b)، رابطه‌ی مطلوب به‌دست می‌آید:

❁ ❁ ❁

برهان دوم: در مثلث ABC، از دو رأس B و C، دو عمود BE و CF را بر نیم‌ساز AD فرود می‌آوریم.



دو مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABE و ACF متشابه‌اند. زیرا زاویه‌های آن‌ها مساوی است (توجه می‌کنیم که خط AD نیم‌ساز زاویه‌ی A است). از تشابه دو مثلث یاد شده، رابطه‌ی زیر نتیجه می‌شود:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{BE}}{\overline{CF}}$$

دو مثلث DBE و DCF متشابه‌اند، زیرا دو خط BE و CF موازی‌اند. پس:

$$\frac{\overline{DB}}{\overline{DC}} = \frac{\overline{BE}}{\overline{CF}}$$

از مقایسه‌ی دو رابطه‌ی اخیر نتیجه می‌شود:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{DB}}{\overline{DC}}$$

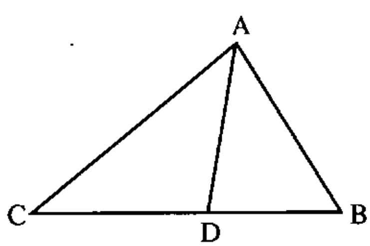
❁ ❁ ❁

برهان سوم: نخست قضیه‌ی سینوس‌ها را در مثلث یادآوری می‌کنیم:

قضیه‌ی سینوس‌ها: در مثلث ABC، رابطه‌ی زیر برقرار است:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

c ،b ،a طول‌های اضلاع روبه‌رو به زاویه‌های C ،B ،A هستند.



با به‌کارگیری قضیه‌ی سینوس‌ها، در مثلث ADB چنین می‌نویسیم:

$$\frac{\overline{AB}}{\sin(ADB)} = \frac{\overline{DB}}{\sin(BAD)}$$

و نیز در مثلث ADC می‌نویسیم:

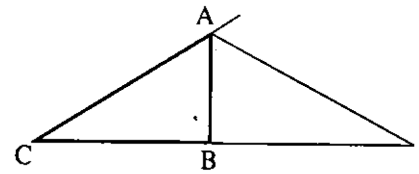
$$\frac{\overline{AC}}{\sin(ADC)} = \frac{\overline{DC}}{\sin(DAC)}$$

از دو رابطه‌ی اخیر نتیجه می‌شود:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{DB}}{\overline{DC}}$$

(توجه کنیم که چون دو زاویه‌ی ADC و ADB مکمل‌اند، سینوس‌های مساوی دارند.)

تمرین: قضیه‌ی ۱ را درباره‌ی نیم‌ساز خارجی مثلث ثابت کنید.

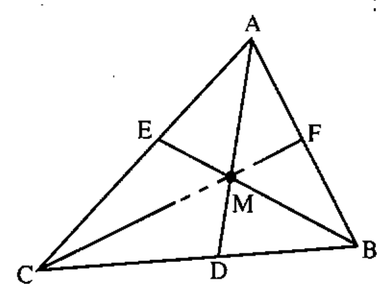


$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}=\frac{\overline{EB}}{\overline{EC}}$$

* * *

۲. قضیه: نیم‌سازهای داخلی هر مثلث همرس‌اند.

برهان: در مثلث ABC نیم‌سازهای داخلی AD ، BE و CF را درنظر می‌گیریم:



نقطه‌ی برخورد دو نیم‌ساز AD و BE را M و نقطه‌ی برخورد دو نیم‌ساز AD و CF را N می‌نامیم. ثابت می‌کنیم که دو نقطه‌ی M و N برهم منطبق‌اند و از آن نتیجه می‌گیریم که سه نیم‌ساز داخلی هر مثلث همرس‌اند.

خط BE نیم‌ساز زاویه‌ی B در مثلث ABD است. بنابر قضیه‌ی (۱) می‌توان نوشت:

$$\frac{\overline{BA}}{\overline{BD}}=\frac{\overline{MA}}{\overline{MD}}$$

خط CF نیم‌ساز زاویه‌ی C از مثلث ACD است. بنابر قضیه‌ی (۱) می‌توان نوشت:

$$\frac{\overline{CA}}{\overline{CD}}=\frac{\overline{NA}}{\overline{ND}}$$

خط AD نیم‌ساز زاویه‌ی A از مثلث ABC است. بنابر قضیه‌ی (۱) می‌توان نوشت:

$$\frac{\overline{BA}}{\overline{BD}}=\frac{\overline{CA}}{\overline{CD}}$$

از سه رابطه‌ی اخیر نتیجه می‌شود:

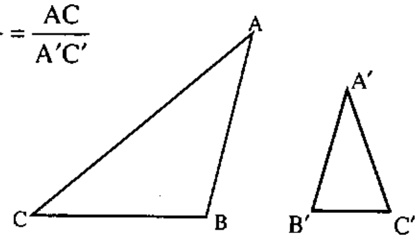
$$\frac{\overline{MA}}{\overline{MD}}=\frac{\overline{NA}}{\overline{ND}}$$

از این رابطه نتیجه می‌گیریم که نقطه‌ی M بر نقطه‌ی N منطبق است و صحت قضیه‌ی مورد نظر ثابت می‌شود.

* * *

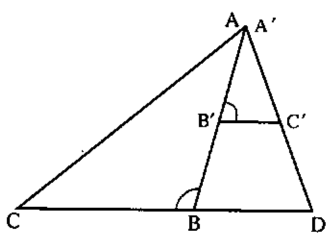
۳. قضیه: اگر در دو مثلث ABC و A′B′C′ ، دو زاویه‌ی A و A′ مساوی و دو زاویه‌ی B و B′ مکمل باشند، آن‌گاه چنین داریم:

$$\frac{BC}{B'C'}=\frac{AC}{A'C'}$$



یعنی نسبت اضلاع مقابل به دو زاویه‌ی مساوی، برابر است با نسبت اضلاع مقابل به دو زاویه‌ی مکمل

برهان: دو مثلث ABC و A′B′C′ را مانند شکل زیر پهلوی هم می‌گذاریم:



نقطه‌ی برخورد دو خط BC و A′C′ را D می‌نامیم. چون دو زاویه‌ی B و B′ مکمل‌اند، پس دو خط BD و B′C′ موازی‌اند. چون دو زاویه‌ی A و A′ مساوی‌اند، پس خط AB نیم‌ساز زاویه‌ی CAD در مثلث ACD است. از تشابه دو مثلث A′B′C′ و A′BD رابطه‌ی زیر به‌دست می‌آید:

$$\frac{A'C'}{A'D}=\frac{B'C'}{BD}$$

بنابر قضیه‌ی (۱) درباره‌ی نیم‌ساز، می‌توان چنین نوشت:

$$\frac{A'D}{BD}=\frac{AC}{BC}$$

از دو رابطه‌ی اخیر رابطه‌ی زیر که مطلوب است، حاصل می‌شود:

$$\frac{A'C'}{AC}=\frac{B'C'}{BC}$$

* * *

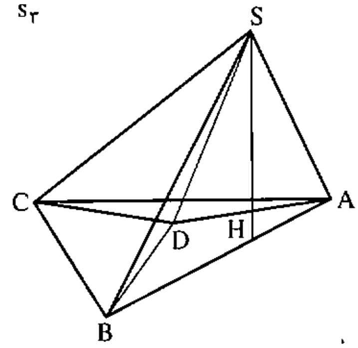
۴. تعمیم قضیه‌ی نیم‌ساز مثلث به صورت قضیه‌ی نیم‌ساز در چهاروجهی (طرح نگارنده)

در چهاروجهی SABC، نیم‌ساز سه‌وجهی SABC را SD

می‌نامیم.

مساحت‌های سه مثلث SAB، SBC و SCA را به ترتیب S_1، S_2، و S_3 می‌نامیم. مساحت‌های سه مثلث DAB، DBC، و DCA را به ترتیب s_1، s_2 و s_3 می‌نامیم. می‌خواهیم ثابت کنیم تساوی‌های زیر برقرار است:

$$\frac{S_1}{s_1}=\frac{S_2}{s_2}=\frac{S_3}{s_3}$$



برهان: قضیه‌ی نیم‌ساز مثلث را یادآور می‌شویم: اگر خط AD نیم‌ساز زاویه‌ی A از مثلث ABC باشد، چنین داریم:

$$\frac{AB}{AC}=\frac{DB}{DC}$$

این تساوی را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\frac{AB}{DB}=\frac{AC}{DC}$$

تساوی اخیر ما را رهنمون می‌شود که قضیه‌ی مذکور در بالا، یعنی قضیه‌ی نیم‌ساز در چهاروجهی را حدس بزنیم. برای اثبات قضیه، ارتفاع AH و نیم‌ساز AD را رسم می‌کنیم (یادآور می‌شویم که نیم‌ساز یک سه‌وجهی خطی است که فاصله‌ی هر نقطه از آن، از سه وجه آن سه‌وجهی یکسان باشد). حجم‌های سه چهاروجهی SDAB، SDBC و SDCA را به ترتیب V_1، V_2، و V_3 می‌نامیم. رابطه‌های زیر را می‌نویسیم:

$$\text{I}\begin{cases}V_1=\frac{1}{3}s_1.\overline{AH}\\ V_2=\frac{1}{3}s_2.\overline{AH}\\ V_3=\frac{1}{3}s_3.\overline{AH}\end{cases}$$

از نقطه‌ی D پای نیم‌ساز AD، عمودهای DH_1، DH_2، و DH_3 را به ترتیب بر سه وجه SAB، SBC، و SCA رسم می‌کنیم و می‌نویسیم:

$$\text{II}\begin{cases}V_1=\frac{1}{3}S_1.\overline{DH_1}\\ V_2=\frac{1}{3}S_2.\overline{DH_2}\\ V_3=\frac{1}{3}S_3.\overline{DH_3}\end{cases}$$

از رابطه‌های I و II، رابطه‌های زیر نتیجه می‌شود:

$$\text{III}\begin{cases}\frac{S_1}{s_1}=\frac{\overline{DH_1}}{\overline{AH}}\\ \frac{S_2}{s_2}=\frac{DH_2}{AH}\\ \frac{S_3}{s_3}=\frac{DH_3}{AH}\end{cases}$$

اما: $\overline{DH_1}=\overline{DH_2}=\overline{DH_3}$ (زیرا خط SD، نیم‌ساز سه‌وجهی SABC است و لذا فاصله‌ی نقطه‌ی D از سه وجه سه‌وجهی SABC مساوی است). از تساوی‌های III نتیجه می‌شود:

$$\frac{S_1}{s_1}=\frac{S_2}{s_2}=\frac{S_3}{s_3}$$

✲ ✲ ✲

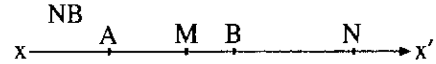
نقش نیم‌سازهای مثلث در اثبات قضیه‌های تقسیم توافقی

در سطرهای آینده از تقسیم توافقی یاد می‌کنیم. سپس فرمول دکارت و فرمول نیوتن را در تقسیم توافقی می‌نویسیم. در شماره‌ی ۵، دستور دکارت را در تقسیم توافقی، برای محاسبه‌ی طول نیم‌ساز مثلث به‌کار می‌بریم. در شماره‌ی ۶، قضیه‌ای از تقسیم توافقی را مطرح و اثبات می‌کنیم و از این قضیه در شماره‌ی ۷ بهره می‌گیریم. در شماره‌ی ۷، کاربرد دستور دکارت و نیوتن را در آینه‌های کروی یاد می‌کنیم (در این شیوه‌ی اثبات، از قضیه‌ای مربوط به نیم‌سازهای داخلی و خارجی مثلث بهره گرفته شده است). مطلب شماره‌ی ۷ را از کتاب فرانسوی «تصویرها در علم نور»[1] اثر فلوری[2] و ماتیو[3] برگرفته‌ام. در شماره‌ی ۸، یک دستور تازه در تقسیم توافقی عرضه کرده‌ام و آن را برای اثبات یکی از قضیه‌های اساسی هندسه به‌کار برده‌ام.

الف) تعریف تقسیم توافقی: بر محور $x'x$، دو نقطه‌ی A و B اختیار می‌کنیم. دو نقطه‌ی M و N را روی محور $x'x$ طوری انتخاب می‌کنیم که تساوی بعد برقرار باشد. در این صورت می‌گوییم

پاره‌خط AB به وسیله‌ی دو نقطه‌ی M و N به توافق تقسیم شده است و نیز می‌گویند چهار نقطه‌ی A، B، C و D تشکیل تقسیم توافقی می‌دهند.

$$\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} = -\frac{\overline{NA}}{\overline{NB}}$$



ب) دستور دکارت و نیوتن در تقسیم توافقی: اگر چهار نقطه‌ی A، B، C، و D تشکیل تقسیم توافقی بدهند، دو رابطه‌ی زیر محقق‌اند:

دستور دکارت $\quad \frac{2}{\overline{AB}} = \frac{1}{\overline{AM}} + \frac{1}{\overline{AN}}$

دستور نیوتن $\quad \overline{OA}^2 = \overline{OB}^2 = \overline{OM}.\overline{ON}$

(نقطه‌ی O وسط پاره‌خط AB است)

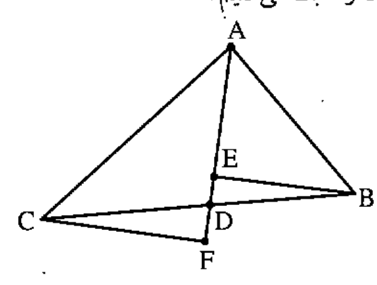
***

۵. محاسبه‌ی طول نیم‌ساز مثلث (با به‌کارگیری دستور دکارت). در مثلث ABC، طول نیم‌ساز داخلی زاویه‌ی A که آن را به AD نشان می‌دهیم، از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید:

$$\frac{2\cos\frac{A}{2}}{\overline{AD}} = \frac{1}{\overline{AB}} + \frac{1}{\overline{AC}}$$

(محاسبه‌ی طول نیم‌ساز زاویه‌ی A بر حسب اندازه‌ی زاویه‌ی A و طول‌های دو ضلع دو طرف زاویه‌ی A).

این فرمول، در کتاب‌های مثلثات ثابت شده است. در سطرهای زیر، با به‌کارگیری فرمول دکارت در تقسیم توافقی، درستی فرمول یاد شده در بالا را ثابت می‌کنیم.



برای اثبات مطلب، دو عمود BE و CF را بر نیم‌ساز AD وارد می‌کنیم. ابتدا ثابت می‌کنیم که چهار نقطه‌ی A، D، E و F تشکیل تقسیم توافقی می‌دهند. از تشابه دو مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABE و ACF رابطه‌ی زیر به‌دست می‌آید:

$$\frac{BE}{AE} = \frac{CF}{AF}$$

از تشابه دو مثلث قائم‌الزاویه‌ی BDE و CDF رابطه‌ی ذیل به‌دست می‌آید:

$$\frac{BE}{DE} = \frac{CF}{DF}$$

از مقایسه‌ی دو رابطه‌ی اخیر، رابطه‌ی زیر به‌دست می‌آید:

$$\frac{\overline{DE}}{\overline{DF}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{AF}}$$

بنابر رابطه‌ی اخیر، چهار نقطه‌ی A، D، E، و F تشکیل تقسیم توافقی می‌دهند. پس رابطه‌ی زیر محقق است:

رابطه‌ی دکارت $\quad \frac{2}{\overline{AD}} = \frac{1}{\overline{AE}} + \frac{1}{\overline{AF}}$

از سوی دیگر چنین داریم:

$$\overline{AE} = \overline{AB}.\cos\frac{A}{2}$$

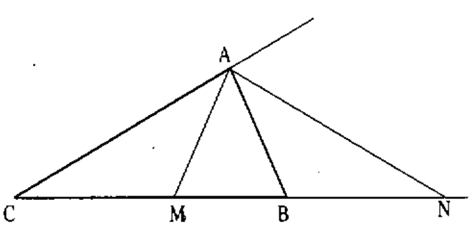
$$\overline{AF} = \overline{AC}.\cos\frac{A}{2}$$

از سه رابطه‌ی اخیر، رابطه‌ی مطلوب به‌دست می‌آید.

***

۶. بهره‌گیری از خاصیت نیم‌سازهای مثلث در تقسیم توافقی. در مثلث ABC، اگر دو نقطه‌ی M و N به ترتیب پاهای نیم‌سازهای داخلی و خارجی زاویه‌ی A باشند، آن‌گاه چهار نقطه‌ی C، B، M، و N تشکیل تقسیم توافقی می‌دهند.

برهان. چون Am نیم‌ساز داخلی زاویه‌ی A است، پس بنابه قضیه‌ی ۱ چنین داریم:



$$\frac{MB}{MC} = \frac{AB}{AC}$$

چون AN نیم‌ساز خارجی زاویه‌ی A است، پس چنین داریم:

$$\frac{NB}{NC} = \frac{AB}{AC}$$

از دو رابطه‌ی اخیر، رابطه‌ی زیر نتیجه می‌شود:

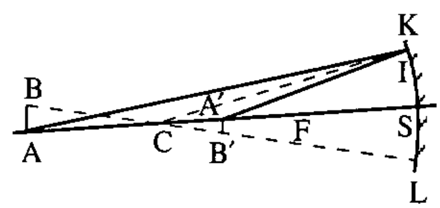
$$\frac{MB}{MC} = \frac{NB}{NC}$$

پس چهار نقطه‌ی B، C، M، N تشکیل تقسیم توافقی می‌دهند.

❁ ❁ ❁

۷. کاربرد قضیه‌ی ۶ در آینه‌های کروی

در آینه‌ی کروی M، مرکز را C، رأس را S و کانون را F می‌نامیم. تصویر شکل AB را به A′B′ نموده‌ایم. تصویر شکل AB را به A′B′ نموده‌ایم. برای ترسیم تصویر A′B′، شعاع تابش دل‌خواه $\widehat{AI}$ را رسم می‌کنیم و زاویه‌ی $C\hat{I}A'$ را برابر زاویه‌ی $A\hat{I}C$ می‌سازیم. نقطه‌ی A′ تصویر نقطه‌ی A به‌دست می‌آید (زیرا می‌دانیم که شعاع تابش و شعاع بازتاب نسبت به شعاعی از آینه که از نقطه‌ی فرود می‌گذرد، قرینه‌اند)



چون زاویه‌ی دهانه‌ی آینه، یعنی زاویه‌ی گشادگی KCS، کوچک است (مثلاً در حدود $\frac{۱}{۲۰}$ رادیان یا سه درجه) پس زاویه‌ی $C\hat{I}S$ محسوساً یک زاویه‌ی قائمه است؛ زیرا مثلث $C\hat{I}S$ متساوی‌الساقین است و در این مثلث، زاویه رأس کوچک است. پس خط IS محسوساً نیم‌ساز زاویه‌ی خارجی AIA′ است.

مختصر آن‌که خط KC نیم‌ساز داخلی زاویه‌ی مثلث AKA′ است و خط KS خیلی به نیم‌ساز خارجی مثلث AKA′ نزدیک است. پس چهار نقطه‌ی A، A′، C و S، محسوساً تشکیل تقسیم توافقی می‌دهند و می‌توانیم دستورهای زیر را به کار بریم:

رابطه‌ی دکارت $\quad \frac{۱}{\overline{SA}}+\frac{۱}{\overline{SA'}}=\frac{۲}{\overline{SC}}=\frac{۱}{\overline{SF}}$

رابطه‌ی نیوتن $\quad \overline{FA}.\overline{FA'}=\overline{SF}^{۲}$

❁ ❁ ❁

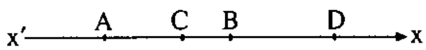
۸. یک رابطه‌ی توافقی تازه

در سطرهای بعد با به‌کارگیری خواص نیم‌سازهای داخلی و خارجی مثلث، یک رابطه‌ی توافقی تازه ارائه می‌شود کاربردی از آن در اثبات قضیه‌ی اساسی قطب و قطبی یاد می‌شود (این رابطه‌ی توافقی از آن نگارنده است).

اگر نقاط A، B، C و D تشکیل تقسیم توافقی دهند، رابطه‌های زیر محقق است:

$$(۱)\quad \overline{AB}^{۲}=\overline{AC}.\overline{AD}+\overline{BC}.\overline{BD}$$

$$(۲)\quad \overline{CD}^{۲}=\overline{CA}.\overline{CB}+\overline{DA}.\overline{DB}$$



الف) برهان جبری: بنا به تعریف تقسیم توافقی چنین داریم:

$$(۳)\quad \frac{\overline{CA}}{\overline{CB}}=-\frac{\overline{DA}}{\overline{DB}}$$

بر محور x′x که منطبق بر خط AB است، نقطه‌ی A را مبدأ می‌گیریم (برای آسانی محاسبه). طول‌های نقطه‌های B، C و D را روی این محور، به‌ترتیب b، c و d می‌نامیم. رابطه‌ی ۳ به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\frac{-c}{b-c}=\frac{d}{b-d}$$

و یا:

$$c(d-b)=d(b-c)$$

به دو طرف رابطه‌ی بالا عبارت $-b(d-b)$ را می‌افزاییم. حاصل می‌شود:

$$(c-b)(d-b)=d(b-c)-b(d-b)$$

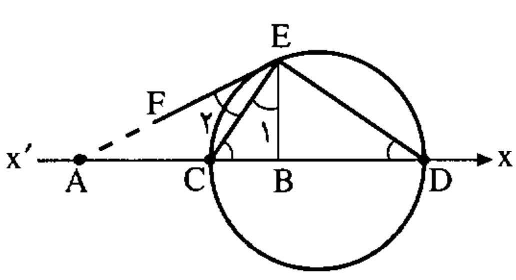
پس از اختصار نتیجه می‌شود:

$$b^{۲}=cd+(c-b)(d-b)$$

رابطه‌ی ۴، همان رابطه‌ی ۱ است.

با استدلالی مشابه آن‌چه گذشت، می‌توان درستی رابطه‌ی ۲ را ثابت کرد.

ب) برهان هندسی: روی محور x′x چهار نقطه‌ی A، B، C و D را که تشکیل تقسیم توافقی می‌دهند، در نظر می‌گیریم. برای اثبات رابطه‌ی ۱، دایره‌ای به قطر CD و عمود BE را بر خط CD رسم می‌کنیم و نقطه‌ی برخورد آن را با دایره، E می‌نامیم.



از نقطه‌ی E، مماس EF را بر دایره رسم می‌کنیم.
این خط مماس بر نقطه‌ی A می‌گذرد. (برای اثبات می‌گوییم، دو زاویه‌ی D و E_1 برابراند، زیرا هردو متمم زاویه‌ی C هستند و نیز دو زاویه‌ی E_1 و E_2 برابراند، زیرا اندازه دو زاویه‌ی D و E_2، هر دو نصف اندازه‌ی کمان AC هستند. پس خط EC نیم‌ساز داخلی زاویه‌ی BEF و خط DE که بر خط EC عمود است، نیم‌ساز خارجی زاویه‌ی BEF است. پس بنابر قضیه‌ی ۶، خط EF بر نقطه‌ی A می‌گذرد).

در مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABE چنین داریم:

$$\overline{AB}^2 = \overline{AE}^2 - \overline{EB}^2$$

از تشابه دو مثلث AEC و AED نتیجه می‌شود:

$$\overline{AE}^2 = \overline{AC}.\overline{BD}$$

در مثلث قائم‌الزاویه ECD، پاره‌خط EB ارتفاع است، پس چنین داریم:

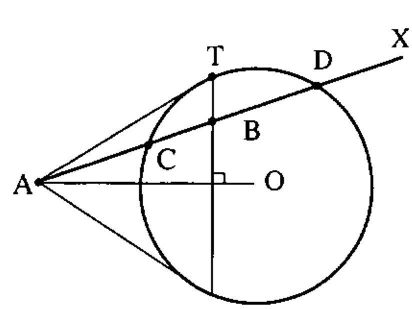
$$\overline{BE}^2 = -\overline{BC}.\overline{BD}$$

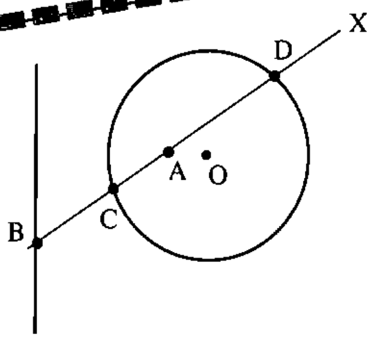
از سه رابطه‌ی اخیر، رابطه‌ی ۱ نتیجه می‌شود.
اثبات رابطه‌ی ۲، با اثبات پیشین مشابه است.

❁ ❁ ❁

۹. کاربرد رابطه‌ی توافقی یاد شده در شماره‌ی ۸

الف) اثبات تازه‌ای از قضیه‌ی اساسی قطب و قطبی. دایره‌ی (O, R) و نقطه‌ی ثابت A در صفحه‌ی آن را در نظر می‌گیریم. خط متحرک AX در صفحه‌ی دایره، دور نقطه‌ی A می‌چرخد و دایره را در دو نقطه‌ی متغیر C و D قطع می‌کند. مطلوب است مکان هندسی نقطه‌ی B از خط متحرک AX، به‌طوری که چهار نقطه‌ی A، B، C و D تشکیل تقسیم توافقی بدهند.





برهان: بنابر رابطه‌ی توافقی یادشده در شماره ۸ می‌نویسیم:

$$(1)\quad \overline{AB}^2 = \overline{AC}.\overline{AD} + \overline{BC}.\overline{BD}$$

یکی از قضیه‌های هندسه می‌گوید، اگر از نقطه‌ی دل‌خواه A واقع در صفحه‌ی دایره (O, R) قاطع دلخواهی رسم کنیم و نقاط تقاطع آن را با دایره، B و C بنامیم، چنین داریم:

$$\overline{AB}.\overline{AC} = \overline{AO}^2 - R^2$$

بنابر قضیه‌ی پیش گفته، دو رابطه‌ی زیر را می‌نویسیم:

$$(2)\quad \begin{cases} \overline{AC}.\overline{AD} = \overline{AO}^2 - R^2 \\ \overline{BC}.\overline{BD} = \overline{BO}^2 - R^2 \end{cases}$$

رابطه‌ی ۱ با رعایت دو رابطه‌ی ۲ به صورت زیر درمی‌آید:

$$\overline{BA}^2 - \overline{BO}^2 = \overline{AO}^2 - 2R^2 = \text{ثابت}$$

یعنی تفاضل مربع‌های فاصله‌های نقطه‌ی متحرک B از دو نقطه‌ی ثابت A و O مقداری است ثابت. پس مکان آن نقطه خطی راست عمود بر خط AO.

❁ ❁ ❁

ب) کاربرد رابطه‌ی توافقی یادشده در شماره‌ی ۸. در شکل آینه‌ی کروی، چهار نقطه‌ی A، A′، C و D، محسوساً تقسیم توافقی تشکیل می‌دهند و بنابر رابطه‌ی توافقی یادشده در شماره‌ی ۸، می‌توان نوشت:

$$\overline{SC}^2 = \overline{SA}.\overline{SA'} + \overline{CA}.\overline{CA'}$$

و یا:

$$R^2 = 4f^2 = \overline{SA}.\overline{SA'} + \overline{CA}.\overline{CA'}$$

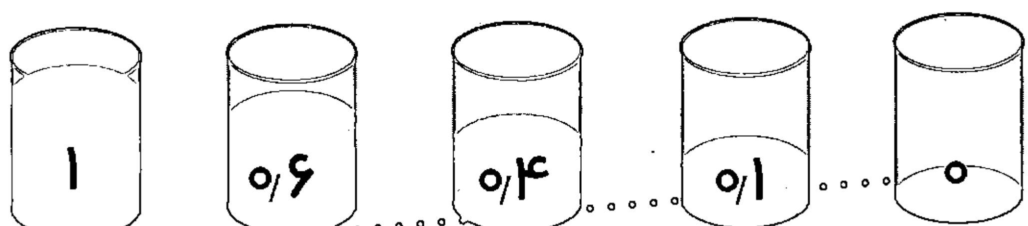
در رابطه‌ی بالا، f فاصله‌ی کانونی است و SA و SA′ فاصله‌های رأس آینه از شئ و تصویراند و CA و CA′ فاصله‌های مرکز آینه از شیء و تصویراند.

---

1. Images optiques 2. P. fleury 3. J. P. mathieu

● دکتر محمدعلی فریبرزی عراقی
عضو هیئت علمی دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکزی

مقدمه‌ای بر نظریه‌ی مجموعه‌های فازی (۲)



یادآوری

در بخش پیشین به شرح تاریخچه‌ای از پیدایش منطق فازی و مجموعه‌های فازی پرداختیم. اشاره کردیم که بنیان‌گذار نظریه‌ی فازی پروفسور لطفی عسگرزاده، استاد «دانشگاه برکلی» آمریکا بود که در سال ۱۹۶۵ با ارائه‌ی اولین مقاله‌ی خود، مجموعه‌های فازی را به جهان علم شناساند. مادر ایشان روس و پدر ایشان ایرانی بود. وی در سن ۱۰ سالگی در سال ۱۹۳۱ میلادی به همراه خانواده به ایران مراجعت کرد و پس از طی تحصیلات متوسطه در «دبیرستان البرز» تهران (کالج البرز سابق)، در سال ۱۹۴۲ موفق به اخذ درجه‌ی لیسانس رشته‌ی برق و الکترونیک از دانشگاه تهران شد. طی جنگ جهانی دوم بود که او برای ادامه‌ی تحصیلات به کشور آمریکا رفت و درنهایت در سال ۱۹۴۹ درجه‌ی دکترای خود را از دانشگاه کلمبیا در رشته‌ی مهندسی برق دریافت داشت.

از معرفی نظریه مجموعه‌های فازی توسط وی بیش از ۴۰ سال می‌گذرد و تاکنون بیش از ۱۵ هزار مقاله‌ی علمی توسط دانشمندان جهان درباره‌ی منطق فازی و کاربردهای آن در مجلات معتبر علمی منتشر شده‌اند. این اهمیت نظریه مجموعه‌های فازی و منطق فازی را که ابتدا مخالفان زیادی داشت، مشخص می‌کند. پیدایش این نظریه سبب شد، منطق دوگانه‌ی (سیاه و سفید) ارسطویی به منطق چندارزشی (خاکستری) تبدیل شود و به طراحی ماشین‌هایی هوشمند انجامید که تا قبل از معرفی این منطق، قادر به تشخیص مفاهیمی به‌جز صفر و یک نبودند.

ایده‌ی اساسی در منطق فازی آن است که برای هر حالت ممکن همیشه نمی‌توان یک قاعده‌ی خاص را به کار برد. تعداد قواعدی که بتوانند هر حالت را به طور دقیق تعریف کنند، بسیار محدود است.

این قواعد تنها نقاط گسسته‌ای از تمام حالات پیوسته‌ی ممکن را، مشخص می‌کنند و ما با ترکیب این قواعد می‌توانیم، تقریبی برای یک حالت مشخص را به‌دست آوریم. منطق فازی، یک مدل ریاضی در اختیار ما می‌گذارد که تحت آن می‌توان تصمیم‌گیری کرد و مراحل تعیین مقدار را به شکل الگوریتم نشان داد. حال به ادامه‌ی بحث می‌پردازیم.

در قسمت قبل مجموعه‌ی فازی $\tilde{A}$ را به صورت زیر تعریف کردیم:

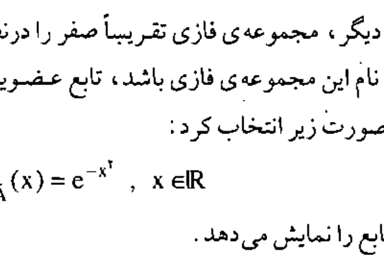
$$\tilde{A}=\left\{(x,\mu_{\tilde{A}}(x))\,|\,x\in X\right\}$$

که در آن، X مجموعه مرجع (جهانی) و $\mu_{\tilde{A}}$ تابع عضویت مجموعه‌ی $\tilde{A}$ است. در این قسمت ابتدا چند مثال از یک مجموعه‌ی فازی را بیان می‌کنیم. چون مجموعه‌ی فازی با تابع عضویت خود مشخص می‌شود، لذا برای معرفی یک مجموعه‌ی فازی باید تابع عضویت مناسبی را که توصیف قابل قبولی از آن مجموعه‌ی فازی باشد، بیان کرد و خواهیم دید که تابع عضویت یک مجموعه‌ی فازی منحصر به فرد نیست.

ابتدا مجموعه‌ی فازی افراد باسواد جامعه را درنظر می‌گیریم. در این حالت، مقادیر تابع عضویت را به شکل زیر می‌توان معرفی کرد:

افراد بی‌سواد ⇐ ۰ و افراد با تحصیلات ابتدایی ⇐ ۰/۱ و
افراد با تحصیلات راهنمایی ⇐ ۰/۲ و افراد با تحصیلات دبیرستان ⇐ ۰/۳ و
افراد با تحصیلات فوق‌دیپلم ⇐ ۰/۴ و افراد با تحصیلات لیسانس ⇐ ۰/۶ و
افراد با تحصیلات فوق‌لیسانس ⇐ ۰/۸ و افراد با تحصیلات دکترا و بالاتر ⇐ ۱

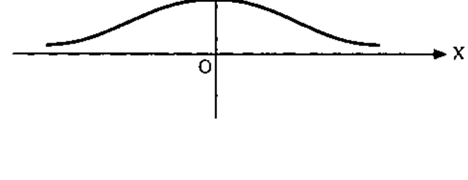
نمودار زیر نمایشی از تابع عضویت این مجموعه‌ی فازی است که در آن، محور افقی سطوح تحصیلی هشت‌گانه مذکور را به صورت شماره مشخص می‌کند.



به عنوان مثالی دیگر، مجموعه‌ی فازی تقریباً صفر را درنظر می‌گیریم. اگر $\tilde{A}$ نام این مجموعه‌ی فازی باشد، تابع عضویت $\mu_{\tilde{A}}$ را می‌توان به صورت زیر انتخاب کرد:

$$\mu_{\tilde{A}}(x)=e^{-x^2}\ ,\quad x\in\mathbb{R}$$

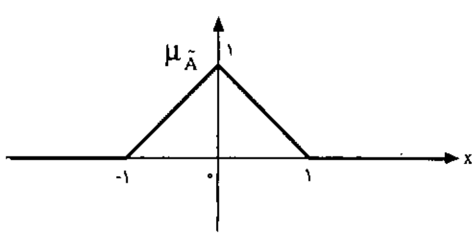
شکل زیر این تابع را نمایش می‌دهد.



ملاحظه می‌کنیم، هر قدر به عدد صفر نزدیک‌تر شویم، مقدار تابع عضویت به حداکثر خود یعنی ۱ نزدیک می‌شود و هر قدر از صفر دور شویم، مقدار تابع عضویت به حداقل خود یعنی ۰ نزدیک می‌شود. اما فقط این تابع توصیفی برای مجموعه‌ی فازی $\tilde{A}$ نیست و توابع دیگری را هم می‌توان معرفی کرد که به‌عنوان تابع عضویت این مجموعه به کار روند. مثلاً $\mu_{\tilde{A}}(x)=\frac{1}{1+x^2}$ ضابطه‌ی دیگری برای تابع عضویت $\tilde{A}$ است که در آن: $\mu_{\tilde{A}}(0)=1$. هم‌چنین تابع عضویت $\mu_{\tilde{A}}$ را به شکل زیر می‌توان معرفی کرد:

$$\mu_{\tilde{A}}(x)=\begin{cases}x+1 & -1<x\leq 0\\ 1-x & 0\leq x<1\\ 0 & \text{در غیر این صورت}\end{cases}$$

شکل زیر نمایشی از این تابع عضویت را مشخص می‌کنند. در این حالت، مقدار تابع عضویت به ازای $|x|\geq 1$، صفر تعریف شده است.



به این ترتیب برای یک مجموعه‌ی فازی می‌توان چندین تابع عضویت انتخاب کرد.

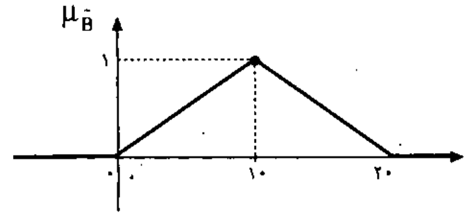
حال مجموعه‌ی فازی تقریباً ۱۰ را در نظر می‌گیریم. اگر $\tilde{B}$ نام این مجموعه‌ی فازی باشد، نمونه‌ای از تابع عضویت برای آن عبارت است از: $\mu_{\tilde{B}}:\mathbb{R}\to[0,1]$

$$\mu_{\tilde{B}}(x)=\frac{1}{1+(x-10)^4}$$

در این جا نیز ملاحظه می‌شود که $\mu_{\tilde{B}}(10)=1$ و هر قدر از عدد ۱۰ دورتر می‌شویم، مقدار $\mu_{\tilde{B}}$ به صفر نزدیک‌تر می‌شود. برای این مجموعه‌ی فازی توابع عضویت دیگری پیدا کنید. شاید پس از قدری بررسی و دقت بتوانید تابع عضویت $\mu_{\tilde{B}}$ را با ضابطه‌ی زیر مطرح کنید.

$$\mu_{\tilde{B}}(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{10} & 0\leq x\leq 10\\[2mm] \dfrac{20-x}{10} & 10\leq x\leq 20\\[2mm] 0 & \text{در غیر این صورت}\end{cases}$$

نمودار این تابع عضویت به شکل زیر است.



همان‌طور که در مثال‌های فوق مشاهده شد، در معرفی ضابطه‌ی تابع عضویت، به عضو یا اعضایی از مجموعه‌ی مرجع که به طور کامل ویژگی مربوطه را دارند، عدد ۱ را نظیر می‌کنیم و برای سایر اعضای مجموعه مرجع، بسته به آن‌که چه قدر از ویژگی مورد نظر دورتر هستند، مقادیری از صفر تا کمتر از یک را نظیر می‌کنیم. مثال زیر نمونه‌ای از یک مجموعه‌ی فازی است که بیش از یک عضو عدد ۱ را به خود نظیر می‌کند. مجموعه‌ی فازی اعداد حقیقی تقریباً بین ۲۰ و ۴۰ را درنظر می‌گیریم. تابع عضویت این مجموعه‌ی فازی که آن را با $\tilde{C}$ نمایش می‌دهیم، با ضابطه‌ی زیر معرفی می‌شود:

$$\mu_{\tilde{C}}(x)=\begin{cases}\dfrac{۱}{۱+(x-۲۰)^{۲}} & ۱۰\le x\le ۲۰\\ ۱ & ۲۰\le x\le ۴۰\\ \dfrac{۱}{۱+(x-۴۰)^{۲}} & ۴۰\le x\le ۵۰\\ ۰ & \text{در غیر این صورت}\end{cases}$$

در این حالت، برای تمامی مقادیر از ۲۰ تا ۴۰ مقدار تابع عضویت ۱ تعریف می‌شود.

نکته: هر عدد حقیقی $a\in\mathbb{R}$ را می‌توان متناظر با یک مجموعه‌ی فازی $\tilde{A}$ در نظر گرفت که تابع عضویت زیر را داراست:

$$\mu_{\tilde{A}}:\mathbb{R}\to[۰,۱]$$

$$\mu_{\tilde{A}}(x)=\begin{cases}۱ & x=a\\ ۰ & x\neq a\end{cases}$$

در ادامه، به معرفی چند عمل مهم در مجموعه‌های فازی می‌پردازیم. ابتدا مفهوم زیرمجموعه بودن و تساوی دو مجموعه‌ی فازی را مطرح می‌کنیم.

۱. فرض کنیم $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ دو مجموعه‌ی فازی باشند که در مجموعه‌ی مرجع X تعریف شده‌اند. در این صورت:

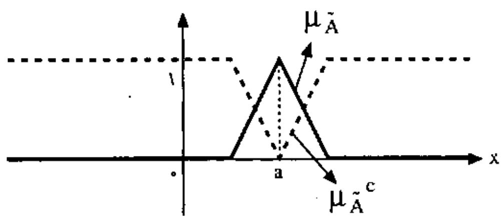
الف) $\tilde{A}\subset\tilde{B}\ \Leftrightarrow\ \mu_{\tilde{A}}(x)\le\mu_{\tilde{B}}(x)\ ,\ \forall x\in X$

ب) $\tilde{A}=\tilde{B}\ \Leftrightarrow\ \mu_{\tilde{A}}(x)=\mu_{\tilde{B}}(x)\ ,\ \forall x\in X$

۲. مکمل مجموعه‌ی فازی $\tilde{A}$ در X را با $\tilde{A}^c$ نمایش می‌دهیم و به این صورت تابع عضویت آن را به دست می‌آوریم:

$$\mu_{\tilde{A}^c}(x)=۱-\mu_{\tilde{A}}(x)\ ,\ x\in X$$

شکل زیر نمونه‌ای از تابع عضویت یک مجموعه‌ی فازی و مکمل آن را نمایش می‌دهد:



۳. فرض کنیم $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ دو مجموعه‌ی فازی در X باشند. در این صورت اشتراک این دو مجموعه‌ی فازی یک مجموعه‌ی فازی است که تابع عضویت آن به شکل زیر معرفی می‌شود:

$$\mu_{\tilde{A}\cap\tilde{B}}(x)=\min\{\mu_{\tilde{A}}(x)\ ,\ \mu_{\tilde{B}}(x)\}\ ,\ \forall x\in X$$

۴. فرض کنیم $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ دو مجموعه‌ی فازی در X باشند. در این صورت، اجتماع این دو مجموعه‌ی فازی یک مجموعه‌ی فازی است که تابع عضویت آن به شکل زیر معرفی می‌شود:

$$\mu_{\tilde{A}\cup\tilde{B}}(x)=\max\{\mu_{\tilde{A}}(x)\ ,\ \mu_{\tilde{B}}(x)\}\ ,\ \forall x\in X$$

سؤالی که برای خواننده پیش می‌آید این است که: «آیا خواص نظریه‌ی مجموعه‌های قطعی نظیر $A\cap A^c=\phi$ ، $(A\cup B)^c=A^c\cap B^c$ ، در مجموعه‌های فازی نیز برقرار است؟» در این جا A^c به معنای متمم A است. در حالت کلی نمی‌توان گفت تمام خواص مجموعه‌های قطعی در مجموعه‌های فازی برقرار است، چرا که ما در مجموعه‌های فازی با توابع عضویت آن‌ها کار می‌کنیم. مثال زیر را در نظر بگیرید.

فرض کنید: $X=\{۱,۲,۳,\cdots,۱۰\}$. دو مجموعه‌ی $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ را در X به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\tilde{A}=\{(۲,۰/۴),(۳,۰/۶),(۴,۰/۸),(۵,۱),(۶,۰/۸),(۷,۰/۶),(۸,۰/۴)\}$$

$$\tilde{B}=\{(۱,۰/۲),(۲,۰/۴),(۴,۰/۹),(۵,۱),(۷,۰/۶),(۸,۰/۳)\}$$

اولاً مطلوب است $\tilde{A}^c$ و $\tilde{B}^c$ ، ثانیاً تحقیق کنید آیا: $\tilde{A}\cup\tilde{A}^c=X$ و $\tilde{A}\cap\tilde{A}^c=\phi$ ، و ثالثاً تحقیق کنید: آیا $(\tilde{A}\cup\tilde{B})^c=\tilde{A}^c\cap\tilde{B}^c$.

حل: اولاً، توجه می‌کنیم که در $\tilde{A}$ عضوی نظیر ۱ در X با درجه‌ی عضویت ۰ وجود دارد که چنین اعضایی را در مجموعه‌ی فازی معمولاً نمی‌نویسند، ولی این اعضا در $\tilde{A}^c$ با درجه‌ی عضویت ۱ وجود دارند. برای سایر اعضا نیز درجه‌ی عضویت را از یک کم می‌کنیم. لذا:

$$\tilde{A}^c=\{(۱,۱),(۲,۰/۶),(۳,۰/۴),(۴,۰/۲),(۶,۰/۲),(۷,۰/۴),(۸,۰/۶),(۹,۱),(۱۰,۱)\}$$

$$\tilde{B}^c = \{(1,0/8),(2,0/6),(3,1),(4,0/1),(6,1),(7,0/4),(8,0/7),(9,1),(10,1)\}$$

ملاحظه می‌کنیم، درجه‌ی عضویت ۵ در هر دو مجموعه‌ی فازی فوق صفر است، لذا این عضو قید نشده است.

ثانیاً، با توجه به تعاریف min-max در اشتراک و اجتماع دو مجموعه‌ی فازی داریم:

$$\tilde{A} \cap \tilde{A}^c = \{(2,0/4),(3,0/4),(4,0/2),(6,0/2),(7,0/4),(8,0/4)\}$$

و:

$$\tilde{A} \cup \tilde{A}^c = \{(1,1),(2,0/6),(3,0/6),(4,0/8),(5,1),(6,0/8),(7,0/6),(8,0/6),(9,1),(10,1)\}$$

مشاهده می‌کنیم که در تنظیم این دو مجموعه، به ترتیب مینی‌مم و ماکزی‌مم درجه‌های عضویت هر یک از اعضای X درنظر گرفته می‌شود. در این حالت: $\tilde{A} \cap \tilde{A}^c \neq \phi$ و $\tilde{A} \cup \tilde{A}^c \neq X$. توجه می‌کنیم که ϕ و X مجموعه‌هایی قطعی هستند. به این ترتیب این دو خاصیت در حالت فازی برقرار نیستند.

ثالثاً:

$$\tilde{A} \cup \tilde{B} = \{(1,0/2),(2,0/4),(3,0/6),(4,0/9),(5,1),(6,0/8),(7,0/6),(8,0/4)\}$$

$$\Rightarrow (\tilde{A} \cup \tilde{B})^c = \{(1,0/8),(2,0/6),(3,0/4),(4,0/1),(6,0/2),(7,0/4),(8,0/6),(9,1),(10,1)\}$$

و با توجه به مجموعه‌های $\tilde{A}^c$ و $\tilde{B}^c$ مذکور در قسمت اولاً، خواهیم داشت:

$$\tilde{A}^c \cap \tilde{B}^c = \{(1,0/8),(2,0/6),(3,0/4),(4,0/1),(6,0/2),(7,0/4),(8,0/6),(9,1),(10,1)\}$$

به این ترتیب: $(\tilde{A} \cup \tilde{B})^c = \tilde{A}^c \cap \tilde{B}^c$

به طور کلی می‌توان ثابت کرد، براساس تعاریف min-max از اشتراک و اجتماع دو مجموعه‌ی فازی، قوانین دمورگان برقرار هستند؛ یعنی برای هر دو مجموعه‌ی فازی $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ در X داریم:

$$\begin{cases} (\tilde{A} \cap \tilde{B})^c = \tilde{A}^c \cup \tilde{B}^c \\ (\tilde{A} \cup \tilde{B})^c = \tilde{A}^c \cap \tilde{B}^c \end{cases}$$

در قسمت بعدی، به معرفی چند تعریف مهم دیگر در مجموعه‌های فازی و نیز عمل ضرب در مجموعه‌های فازی می‌پردازیم.

1. Fuzzy set theory and its applications, H. J. Zimmermann, third edition, Kluwer Acadmic Publishers, London, 1996.

۲. آشنایی با نظریه مجموعه‌های فازی، دکتر سیدمحمود طاهری، انتشارات جهاددانشگاهی، ۱۳۷۵.

معرفی سایت‌های ریاضی جهان

● احسان یارمحمدی

اسم سایت: Intmath

آدرس اینترنتی سایت: http://www.intmath.com

در صفحه‌ی اصلی این سایت بخشی به نام درس‌های ریاضی (Math Lessons) وجود دارد که شامل زیرعنوان‌های ذیل می‌باشد.

※ مثلثات (Trigonometry)

۱. توابع مثلثاتی (Trigonometric Functions)

۲. نمودارهای توابع مثلثاتی (Graphs of Trigonometric Functions)

۳. مثلثات تحلیلی (Analytic Trigonometry)

※ جبر (Algebra)

۱. اعداد (Numbers)

۲. جبر پایه (Basic Algebra)

۳. عامل‌یابی و کسری‌ها (Factoring & Fractions)

۴. معادلات درجه‌ی دوم (Quadratic Equations)

۵. توان‌ها و رادیکال‌ها (Expouents & Radicals)

۶. توابع نمایی و لگاریتمی (Exponential & Logarithmic Functions)

۷. معادله‌های چندجمله‌ای درجه‌ی بالاتر (Polynomial Equations of Higher Degree)

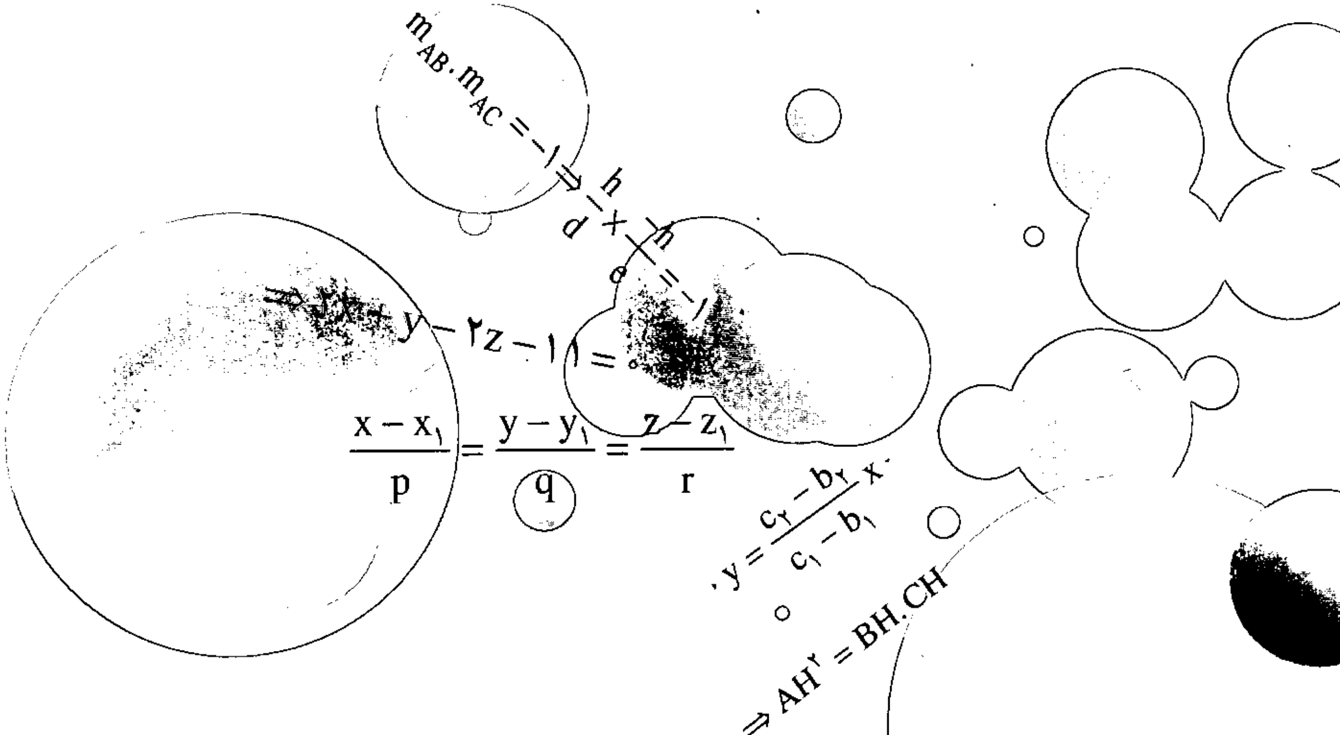
۸. دستگاه‌های معادلات (Systems of Equations)

۹. ماتریس‌ها و دترمینان‌ها (Matrices and Equations)

۱۰. نامعادله‌ها (Inequalities)

۱۱. سری‌ها و قضیه دوجمله‌ای (Series and Binomial Theorem)

ادامه در صفحه‌ی ۲۷



رویکرد هندسی- رویکرد جبری در آموزش هندسه (۵)

● محمدهاشم رستمی

«یکی از مهم‌ترین پیوندها و اتصال‌ها در همه‌ی ریاضیات اتصال و پیوند بین هندسه و جبر است»
(از استانداردهای موضوعی NCTM)

اشاره

در شماره‌های پیشین درباره‌ی رویکرد هندسی، رویکرد جبری مختصاتی در آموزش هندسه در فضاهای ۲ بعدی و ۳ بعدی بحث شد، در ادامه، مثال‌های دیگری از هندسه در ۳ بعد را ذکر می‌کنیم و آن‌ها را با دو رویکرد هندسی و جبری مختصاتی حل می‌کنیم.

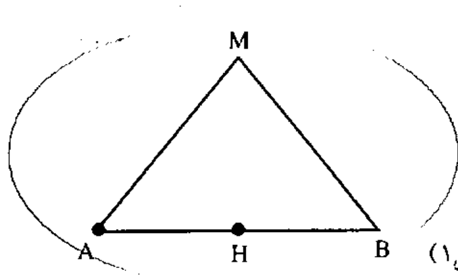
مثال ۴. صفحه‌ی عمودمنصف یک پاره‌خط

ثابت کنید، مکان هندسی نقطه‌ای از فضا که از دو نقطه‌ی ثابت داده شده به یک فاصله قرار دارد، صفحه‌ای است که از وسط پاره‌خط واصل بین این دو نقطه می‌گذرد و بر این پاره‌خط عمود است.

اثبات:

الف) روش هندسی

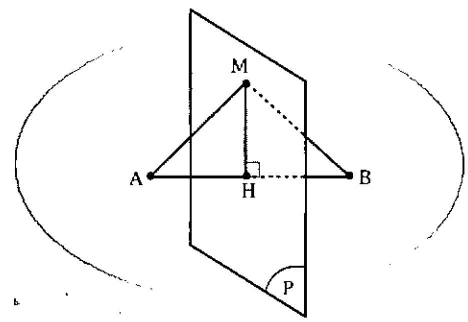
دو نقطه‌ی ثابت A و B را درنظر می‌گیریم و وسط پاره‌خط AB را H می‌نامیم. می‌خواهیم ثابت کنیم، مکان هندسی نقطه‌ای از فضا که از این دو نقطه به یک فاصله قرار دارد، صفحه‌ای است که در نقطه‌ی H بر AB عمود است.



(شکل ۱)

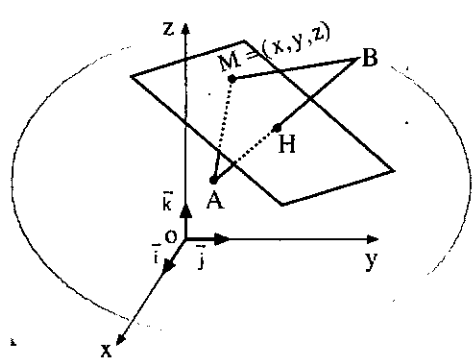
برای اثبات، فرض می‌کنیم، M یک نقطه‌ی دل‌خواه از این مکان هندسی باشد؛ یعنی داشته باشیم:

$MA = MB$



از M به نقطه‌ی H وسط پاره‌خط AB وصل می‌کنیم. در مثلث متساوی‌الساقین MAB، میانه‌ی MH عمودمنصف پاره‌خط AB است. پس نقطه‌ی M روی خطی قرار دارد که در نقطه‌ی ثابت H بر پاره‌خط AB عمود است. این ویژگی برای هر نقطه‌ای مانند M که از دو نقطه‌ی A و B به یک فاصله قرار داشته باشد، برقرار است. یعنی همه‌ی این نقطه‌ها روی خط‌هایی قرار دارند که در نقطه‌ی H بر AB عمودند. اما می‌دانیم، مکان هندسی خط‌هایی که در یک نقطه از یک خط بر آن خط عمود هستند، صفحه‌ای است که در آن نقطه بر آن خط عمود است. این صفحه را P می‌نامیم. صفحه‌ی P چون از وسط پاره‌خط AB نیز می‌گذرد، پس صفحه‌ی عمودمنصف پاره‌خط AB است.

نکته: می‌دانیم که در هر مثلث متساوی‌الساقین، میانه‌ی نظیر قاعده‌ی مثلث، عمود بر قاعده و درنتیجه، عمودمنصف قاعده‌ی مثلث متساوی‌الساقین است. ما از این ویژگی برای اثبات استفاده کرده‌ایم.



ب) رویکرد جبری: دستگاه مختصات قائم $O - xyz$ را در نظر می‌گیریم. اگر دو نقطه‌ی ثابت، $A = (x_1, y_1, z_1)$ و $B = (x_2, y_2, z_2)$ باشند، می‌خواهیم مکان هندسی نقطه‌ای از فضا را تعیین کنیم که از این دو نقطه به یک فاصله است. برای اثبات از روش مستقیم تعیین معادله‌ی مکان هندسی یک نقطه، استفاده می‌کنیم. به این ترتیب که فرض می‌کنیم $M = (x, y, z)$ یکی از نقطه‌های مکان هندسی موردنظر باشد؛ یعنی نقطه‌ای باشد که از دو نقطه‌ی A و B به یک فاصله است. در این صورت خواهیم داشت:

$$MA = MB \Rightarrow \sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + (z-z_1)^2}$$
$$= \sqrt{(x-x_2)^2 + (y-y_2)^2 + (z-z_2)^2}$$
$$\Rightarrow x^2 + x_1^2 - 2x_1x + y^2 + y_1^2 - 2y_1y + z^2 + z_1^2 - 2z_1z$$
$$= x^2 + x_2^2 - 2x_2x + y^2 + y_2^2 - 2y_2y + z^2 + z_2^2 - 2z_2z$$
$$\Rightarrow 2(x_2 - x_1)x + 2(y_2 - y_1)y + 2(z_2 - z_1)z + (x_1^2 + y_1^2 + z_1^2) -$$
$$(x_2^2 + y_2^2 + z_2^2) = 0 \qquad (1)$$

به‌طوری که دیده می‌شود، معادله‌ی(۱) معادله‌ی یک صفحه است، زیرا معادله‌ای است درجه اول نسبت به x، y و z (یعنی به صورت $ax + by + cz + d = 0$). این صفحه بر بردار $\overrightarrow{AB}$ عمود است، زیرا بردار قائم آن عبارت است از:

$$\vec{N} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

این بردار، همان بردار $\overrightarrow{AB}$ است، چون داریم:

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

از طرف دیگر، این صفحه از نقطه‌ی H وسط پاره‌خط AB می‌گذرد، زیرا مختصات این نقطه، یعنی:

$$H = (\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2})$$

در معادله‌ی صفحه‌ی P، یعنی در معادله‌ی(۱) صدق می‌کند:

$$2(x_2 - x_1)(\frac{x_2 + x_1}{2}) + 2(y_2 - y_1)(\frac{y_2 + y_1}{2}) +$$
$$2(z_2 - z_1)(\frac{z_2 + z_1}{2}) + x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 - (x_2^2 + y_2^2 + z_2^2) = 0$$
$$x_2^2 - x_1^2 + y_2^2 - y_1^2 + z_2^2 - z_1^2 + x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 - x_2^2 - y_2^2 - z_2^2 = 0$$
$$\Rightarrow 0 = 0$$

بنابراین صفحه‌ی P، صفحه‌ی عمودمنصف پاره‌خط AB است و این صفحه مکان هندسی نقطه‌ای از فضاست که از دو نقطه‌ی A و B به یک فاصله قرار دارد.

نکته. در رویکرد تحلیلی برای تعیین معادله‌ی صفحه‌ی عمودمنصف یک پاره‌خط و یا در واقع مکان هندسی نقطه‌ای از فضا که از دو نقطه‌ی ثابت A و B به یک فاصله است، می‌توانستیم دستگاه مختصات قائم $O - xyz$ را چنان انتخاب کنیم که مبدأ مختصات منطبق بر نقطه‌ی H، وسط پاره‌خط AB و پاره‌خط AB روی محور $x'ox$ قرار گیرد (شکل۴). در این صورت، مختصات دو نقطه‌ی A و B به‌صورت $A = (x_1, 0, 0)$ و $B = (-x_1, 0, 0)$ خواهد بود. اکنون اگر $M = (x, y, z)$ را نقطه‌ای از مکان هندسی موردنظر اختیار کنیم، یعنی نقطه‌ای باشد که از دو سر پاره‌خط AB به یک فاصله است، خواهیم داشت:

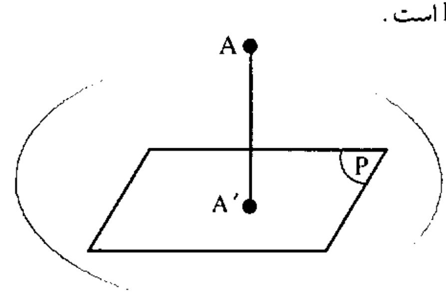
$$MA = MB \Rightarrow \sqrt{(x-x_1)^2+(y-0)^2+(z-0)^2}$$
$$= \sqrt{(x+x_1)^2+(y-0)^2+(z-0)^2}$$
$$\Rightarrow (x-x_1)^2+y^2+z^2=(x+x_1)^2+y^2+z^2 \Rightarrow 4x_1x=0$$
$$\Rightarrow x=0 \quad (1)$$ معادله‌ی صفحه‌ی عمودمنصف پاره‌خط AB

بردار قائم این صفحه $\vec{N}=(1,0,0)$ است که همان بردار یکه‌ی محور xهاست که خط AB روی آن قرار دارد. در ضمن این صفحه از نقطه‌ی $O=(0,0,0)$ که وسط پاره‌خط AB است نیز می‌گذرد. پس حکم مسئله درست است.

به‌طوری که دیده می‌شود، انتخاب مناسب دستگاه مختصات قائم، محاسبه را ساده‌تر می‌کند.

مثال۵. مجموعه‌ی صفحه‌هایی را مشخص کنید که دو نقطه‌ی ثابت A و B از هر یک از آن‌ها به یک فاصله باشند.

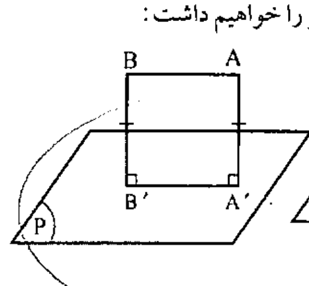
تعریف: فاصله‌ی یک نقطه از یک صفحه، طول عمودی است که از آن نقطه بر آن صفحه فرود می‌آید و محصور بین آن نقطه و پای عمود است. در شکل۱، پاره‌خط AA' فاصله‌ی نقطه‌ی A از صفحه‌ی P است.



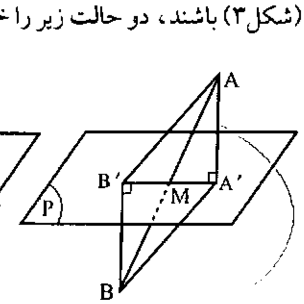
اثبات:

الف) روش هندسی

از این راهبرد (استراتژی) استفاده می‌کنیم که مسئله را حل شده درنظر می‌گیریم. یعنی فرض می‌کنیم، صفحه‌ی P یکی از صفحه‌هایی باشد که دو نقطه‌ی A و B از آن به یک فاصله‌اند. اگر پاره‌خط‌های AA' و BB' به‌ترتیب فاصله‌های نقطه‌های A و B از صفحه‌ی P باشندو از A' به B' وصل کنیم، بنابر آن که دو نقطه‌ی A و B در یک طرف صفحه‌ی P (شکل۲) و یا در دو طرف این صفحه (شکل۳) باشند، دو حالت زیر را خواهیم داشت:

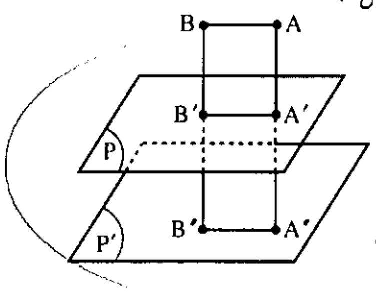


(شکل۳)



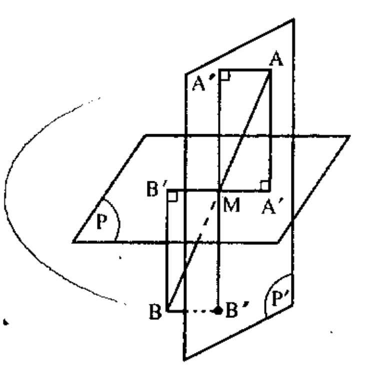
(شکل۲)

حالت اول: در حالتی که دو نقطه‌ی A و B در یک طرف صفحه‌ی P باشند، (شکل۱)، چهارضلعی $AA'B'B$ متوازی‌الاضلاع و در واقع مستطیل است؛ زیرا AA' با BB' موازی (دو خط عمود بر یک صفحه موازی‌اند) و $AA'=BB'$ (بنابه فرض) است. بنابراین $AB=A'B'$ و AB موازی $A'B'$ است. درنتیجه AB با صفحه‌ی P موازی است. یعنی هر صفحه‌ای که با خط AB موازی باشد، جواب مسئله است و تمام صفحه‌هایی از فضا که با خط AB موازی‌اند، یک مجموعه صفحه‌ی جواب مسئله هستند (شکل۴).



(شکل۴)

حالت دوم: در حالتی که دو نقطه‌ی A و B در دو طرف صفحه‌ی P باشند، چهارضلعی $AA'BB'$ متوازی‌الاضلاع است؛ زیرا $AA'=BB'$ و $AA'\|BB'$ است. اما در متوازی‌الاضلاع، قطرها منصف یکدیگرند. پس نقطه‌ی M وسط پاره‌خط AB روی صفحه‌ی P است، زیرا M وسط پاره‌خط $A'B'$ نیز هست (شکل۳). درنتیجه، صفحه‌ی دل‌خواه P که دو نقطه‌ی A و B از آن به یک فاصله‌اند و در دو طرف این صفحه هستند، از نقطه‌ی M وسط پاره‌خطAB می‌گذرد. پس تمام صفحه‌هایی کهس این ویژگی را دارند، یعنی از نقطه‌ی M وسط پاره‌خط AB می‌گذرند، مجموعه‌ای دیگر از صفحه‌های جواب مسئله هستند (شکل۵).



(شکل۵)

با توجه به نکات بالا می‌توانیم بگوییم: دو مجموعه صفحه وجود دارد که دو نقطه‌ی ثابت A و B از هر یک از آن‌ها به یک فاصله‌اند:

- یک دسته، مجموعه‌ی صفحه‌هایی است که با خط AB، یعنی خط واصل بین آن دو نقطه، موازی‌اند.
- دسته‌ی دیگر، مجموعه‌ی صفحه‌هایی است که بر نقطه‌ی M وسط پاره‌خط AB، یعنی بر نقطه‌ی وسط آن پاره‌خط، می‌گذرند.

نکته‌ی مهم: این مسئله، یک مسئله‌ی کلیدی است که برای حل چند مسئله‌ی دیگر به کار می‌رود.

ب) روش جبری ـ مختصاتی

دستگاه مختصات قائم $O-xyz$ را در نظر می‌گیریم. اگر مختصات دو نقطه‌ی ثابت A و B نسبت به این دستگاه را $A(x_1,y_1,z_1)$ و $B(x_2,y_2,z_2)$ بنامیم، می‌خواهیم مجموعه‌ی صفحه‌هایی را مشخص کنیم که این دو نقطه از هر یک از آن صفحه‌ها به یک فاصله‌اند. فرض می‌کنیم صفحه‌ی $P: ax+by+cz+d=0$، یکی از این صفحه‌ها باشد. در این صورت خواهیم داشت:

$$\text{فاصله‌ی نقطه‌ی A از صفحه‌ی P} = AA' = \frac{|ax_1+by_1+cz_1+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

$$\text{فاصله‌ی نقطه‌ی B از صفحه‌ی P} = BB' = \frac{|ax_2+by_2+cz_2+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

$$AA'=BB' \Rightarrow \frac{|ax_1+by_1+cz_1+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \frac{|ax_2+by_2+cz_2+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

$$\Rightarrow |ax_1+by_1+cz_1+d| = |ax_2+by_2+cz_2+d|$$

$$\Rightarrow ax_1+by_1+cz_1+d = ax_2+by_2+cz_2+d$$

$$\Rightarrow a(x_2-x_1)+b(y_2-y_1)+c(z_2-z_1)=0 \quad (1)$$

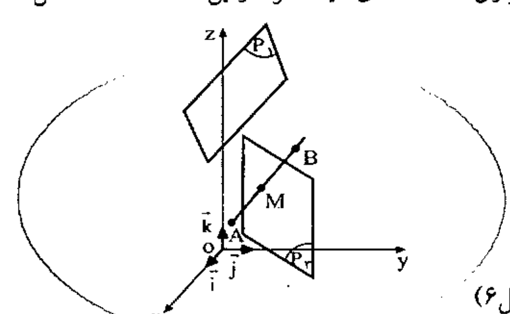
$$ax_1+by_1+cz_1+d = -(ax_2+by_2+cz_2+d)$$

$$\Rightarrow a(x_2+x_1)+b(y_2+y_1)+c(z_2+z_1)+2d=0 \quad (2)$$

● با توجه به این که بردار قائم صفحه‌ی اختیاری P، بردار $\vec{N}=(a,b,c)$، و بردار $\overrightarrow{AB}$ نیز به تصاویر $\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1)$ است، رابطه‌ی (۱) حاصل ضرب درونی دو بردار $\vec{N}$ و $\overrightarrow{AB}$ را نشان می‌دهد؛ یعنی داریم:

$$\vec{N}.\overrightarrow{AB}=0$$

اما دو بردار $\vec{N}$ و $\overrightarrow{AB}$ هر دو مخالف صفرند، پس نتیجه می‌شود که دو بردار $\vec{N}$ و $\overrightarrow{AB}$ بر هم عمودند و این مطلب نشان می‌دهد که صفحه‌ی P با بردار $\overrightarrow{AB}$ موازی است. درنتیجه، یک مجموعه صفحه‌های جواب مسئله، صفحه‌هایی هستند که با بردار $\overrightarrow{AB}$ (یا خط AB) موازی‌اند. صفحه‌ی P یک نمونه از این صفحه‌هاست (شکل ۶).



(شکل ۶)

● رابطه‌ی (۲) نشان می‌دهد که صفحه‌ی اختیاری P از نقطه‌ی M وسط پاره‌خط AB گذشته است، زیرا داریم:

$$M=\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}, \frac{z_1+z_2}{2}\right) \text{ وسط پاره‌خط AB}$$

$$P: ax+by+cz+d=0$$

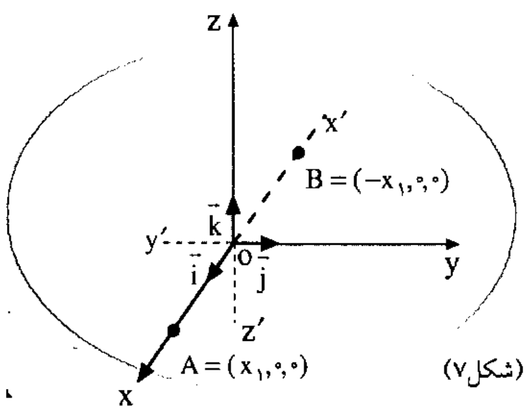
مختصات M در معادله‌ی P

$$\Rightarrow a\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)+b\left(\frac{y_1+y_2}{2}\right)+c\left(\frac{z_1+z_2}{2}\right)+d=0$$

$$\Rightarrow a(x_1+x_2)+b(y_1+y_2)+c(z_1+z_2)+2d=0 \quad (2)$$

که این رابطه، همان رابطه‌ی (۲) است.

بنابراین، مجموعه‌ی دیگر صفحه‌های جواب مسئله، تمام صفحه‌هایی هستند که از نقطه‌ی M وسط پاره‌خط AB می‌گذرند. به بیان دیگر، هر صفحه‌ای که از نقطه‌ی M، وسط پاره‌خط AB بگذرد، دو نقطه‌ی A و B از آن به یک فاصله‌اند. صفحه‌ی P_2 یک نمونه از این صفحه‌هاست (شکل ۶).



(شکل ۷)

تمرین. در رویکرد جبری‌ـ مختصاتی برای حل این مسئله، دستگاه مختصات O-xyz را چنان اختیار کنید که نقطه‌ی M وسط پاره‌خط AB روی نقطه‌ی O، مبدأ مختصات این دستگاه مختصات، و دو نقطه‌ی A و B روی یکی از محورهای مختصات، مثلاً روی محور xها، قرار گیرند. در این صورت، اگر $A=(x_1,0,0)$ باشد، $B=(-x_1,0,0)$ خواهد بود. حال اگر یک صفحه‌ی دل‌خواه جواب مسئله را $P: ax+by+cz+d=0$ بگیریم، مسئله را خودتان حل کنید (شکل ۷).

این راه‌حل را با راه‌حل قبلی مقایسه کنید. کدام ساده‌تر است؟ چرا؟

سؤال: صفحه‌ی عمودمنصف پاره‌خط AB جزو کدام مجموعه از صفحه‌های جواب مثال ۵ است؟

---

۱. برای اطلاعات بیشتر درباره‌ی تعیین معادله‌ی مکان هندسی نقطه‌ها، به کتاب مکان‌های هندسی (جلد اول) از «انتشارات مدرسه» مراجعه کنید.

□□□

با راهیان المپیادهای ریاضی (۱۲)

● غلامرضا یاسی‌پور

نگاهی به نقاط انتهایی

این بخش شامل نابرابری‌هایی است که با استفاده از این ویژگی به اثبات می‌رسند که: توابع حقیقی خاصی در نقاط انتهایی بازه‌ی تعریفشان به اکسترممشان می‌رسند. در این مورد دو نوع تابع را بررسی می‌کنیم: توابع خطی، که هر دو اکسترمم را در نقاط انتهایی «حوزه»[1]ی مربوطه‌شان دارند، و توابع محدب که ماکزیممشان بر مرز حوزه‌ی مربوطه‌شان به‌دست می‌آید. روش کار، در نظر گرفتن عبارت به صورت تابعی خطی یا محدب در هریک از متغیرها به‌طور جداگانه، و به کار بردن آن برای محصور کردن عبارت مورد نظر از بالا یا پایین است. روش‌های مذکور را در مسئله‌ای توضیح می‌دهیم که در امتحان انتخابی رومانیایی المپیاد بین‌المللی ریاضی در ۱۹۸۰ آمده است.

● *به ازای عدد مثبت مفروض a، مطلوب است ماکزیمم:*

$$\sum_{k=1}^{n}(a-a_1)(a-a_2)\cdots(a-a_{k-1})a_k(a-a_{k+1})\cdots(a-a_n)$$

که در آن a_1 ، a_2 ، ... ، a_n ، به‌طور مستقل، روی بازه‌ی $[0,a]$ تغییر می‌کند.

به ازای شاخص k، مقادیر a_1 ، a_2 ، ... ، a_{k-1} ، a_{k+1} ، ... ، a_n را ثابت در نظر می‌گیریم و به عبارت مفروض به عنوان تابعی در a_k می‌اندیشیم. این تابع، خطی است، بنابراین ماکزی‌ممش بر بازه‌ی $[0,a]$ در یکی از نقاط انتهایی به دست می‌آید. با تکرار این استدلال در مورد هر متغیر، نتیجه می‌گیریم که عبارت مورد نظر، به ازای انتخاب خاصی از a_k مساوی ۰ یا a، که در آن $k=1,2,\cdots,n$ ، به ماکزی‌ممش می‌رسد.

اگر جمیع a_k ها برابر ۰ باشند، یا دو یا بیش از دو a_k برابر a باشند، مجموع برابر ۰ است.

اگر a_k برابر a و بقیه‌ی a_k ها برابر ۰ باشند، عبارت برابر a^n است؛ درنتیجه این ماکزی‌مم مطلوب است.

اکنون به مثالی می‌پردازیم که در مسابقه‌ی ریاضی پاتنم[2] آمده و با استفاده از توابع محدب حل شده است.

● *فرض می‌کنیم n عددی طبیعی است و* $x_i\in[0,1]$ ، $i=1,2,\cdots,n$. *ماکزی‌مم مجموع* $\sum_{i<j}|x_i-x_j|$ *را بیابید.*

توجه داشته باشید که تابع $f(x)=|x-a|$ ، به ازای ثابت a، محدب است. بنابراین، اگر x_2 ، x_3 ، ... ، x_n را ثابت نگه داریم، عبارت مورد نظر، به علت آن که مجموعی از توابع محدب است، تابعی محدب در x_1 محسوب می‌شود. بنابراین، به‌خاطر ماکزی‌مم کردن آن، باید x_1 را به صورت یکی از نقاط انتهایی بازه اختیار کنیم. همین استدلال چون در مورد بقیه‌ی اعداد به کار رود، به این نتیجه منجر می‌شود که ماکزی‌مم مجموع، زمانی به‌دست می‌آید که جمیع x_i ها ۰ یا ۱ باشند.

فرض می‌کنیم p مورد از آن‌ها ۰ و $n-p$ مورد از آن‌ها ۱ باشند. در این صورت، مجموع مورد نظر برابر $p(n-p)$ است. با در نظر گرفتن این مقدار به‌عنوان تابعی از p، نتیجه می‌گیریم که چون n زوج باشد، ماکزی‌مم مربوطه به ازای $p=n/2$ به‌دست می‌آید و برابر $n^2/4$ است. و چون n فرد باشد، ماکزی‌مم مورد نظر به ازای $p=(n\pm1)/2$ حاصل می‌شود، و برابر $(n^2-1)/4$ است.

موارد زیر مسائلی از این دست‌اند.

۱. فرض می‌کنیم: $0\le a,b,c,d\le1$. ثابت کنید:

$$(1-a)(1-b)(1-c)(1-d)+a+b+c+d\ge1$$

۲. اعداد نامنفی a، b، c، A، B، C و k در رابطه‌ی زیر صدق می‌کنند:

$$a+A=b+B=c+C=k$$

ثابت کنید:

$$aB+bC+cA\le k^2$$

۳. فرض می‌کنیم، به ازای هر $k=1,2,\cdots,n$ ، $0\le x_k\le1$ است. ثابت کنید:

$$x_1+x_2+\cdots+x_n-x_1x_2\cdots x_n\le n-1$$

۴. مقدار ماکزی‌مم مجموع زیر را که در آن، به ازای هر $i=1,2,\cdots,n$ ، $\frac{1}{2}\le a_i\le1$ باشد، بیابید:

$$S_n=a_1(1-a_2)+a_2(1-a_3)+\cdots+a_n(1-a_1)$$

۵. فرض می‌کنیم $n\ge2$ ، و به ازای هر $i=1,2,\cdots,n$ ، $0\le x_i\le1$ است. نشان دهید:

$$(x_1+x_2+\cdots+x_n)-(x_1x_2+x_2x_3+\cdots+x_nx_1)\le\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor$$

و زمانی را معین کنید که برابری برقرار است.

۶. فرض می‌کنیم، a_1 ، a_2 ، ... ، a_{19} اعدادی حقیقی از بازه‌ی $[-98,98]$ هستند. مقدار ماکزی‌مم $a_1a_2+a_2a_3+\cdots+a_{19}a_1$ را بیابید.

۷. ثابت کنید، به ازای اعداد a، b و c در بازه‌ی $[0,1]$:

$$\frac{a}{b+c+1}+\frac{b}{c+a+1}+\frac{c}{a+b+1}+(1-a)(1-b)(1-c)\le1$$

۸. اگر $a,b,c,d,e\in[p,q]$ ، با $p>0$ ، ثابت کنید:

$$(a+b+c+d+e)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+\frac{1}{e}\right)\le25$$
$$+6\left(\sqrt{\frac{p}{q}}-\sqrt{\frac{q}{p}}\right)^2$$

۹. ثابت کنید، اگر $1\le x_k\le2$ ، $k=1,2,\cdots,n$ باشد، در این صورت:

$$\left(\sum_{k=1}^{n}x_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x_k}\right)^2\le n^3$$

جواب‌ها

نگاهی به نقاط انتهایی

۱. عبارت سمت چپ نابرابری تابعی خطی از هریک از چهار متغیر است، و مینی‌مم آن در یکی از نقاط انتهایی بازه‌ی تعریف به دست می‌آید. بنابراین تنها باید به بررسی $a,b,c,d\in\{0,1\}$ بپردازیم. اگر دست‌کم یکی از آن‌ها ۱ باشد، عبارت برابر $a+b+c+d$ می‌شود که بزرگ‌تر از ۱ یا برابر ۱ است. اگر جمیع آن‌ها صفر باشند، عبارت برابر ۱ می‌شود که نابرابری را اثبات می‌کند.

۲. نابرابری، هم‌ارز این نابرابری است:

$$a(k-b)+b(k-c)+c(k-a)\le k^2$$

اگر سمت چپ را به‌عنوان تابعی از a در نظر بگیریم، خطی است. شرایط صورت مسئله مستلزم آن است که بازه‌ی تعریف $[0,k]$ است. نتیجه می‌شود که برای ماکزی‌مم کردن سمت چپ به انتخاب $a\in\{0,k\}$ نیاز داریم.

با تکرار استدلالی مشابه در مورد b و c نتیجه می‌گیریم که ماکزی‌مم سمت چپ به ازای $(a,b,c)\in\{0,k\}^3$ به‌دست می‌آید.

با بررسی هشت وضعیت ممکن درمی‌یابیم که این ماکزی‌مم k^2 است و مسئله حل می‌شود.

(جمع المپیادهای ریاضی متحد)

۳. x_2 ، x_3 ، ...، x_n را ثابت در نظر می‌گیریم و به بررسی تابع $f:[0,1] \to R$ ،

$$f(x) = x + x_2 + \cdots + x_n - xx_2 \cdots x_n$$

می‌پردازیم. این تابع در x خطی است. درنتیجه ماکزی‌مم خود را در یکی از نقاط انتهایی بازه‌ی $[0,1]$ به‌دست می‌آورد. بنابراین، برای ماکزی‌مم کردن سمت چپ نابرابری، باید x_1 را ۰ یا ۱ انتخاب کنیم، و بنا به تقارن، این مطلب در مورد متغیرهای دیگر نیز برقرار است. البته اگر جمیع x_i ها برابر ۱ باشند، در این صورت برابری خواهیم داشت. اگر دست‌کم یکی از آن‌ها ۰ باشد، در این صورت حاصل‌ضربشان نیز صفر است، و مجموع n-۱ جمله‌ی دیگر حداکثر n-۱ می‌شود که نابرابری را اثبات می‌کند.

(مسابقه‌ی ریاضی رومانی)

۴. عبارت در هر یک از متغیرها خطی است. بنابراین، همانند راه‌حل‌های مسائل پیشین، ماکزی‌مم آن به ازای

$$a_k = \frac{1}{2} \text{ یا } 1 \text{ و } k = 1,2,\cdots,n$$

به دست می‌آید. اگر به ازای هر k، $a_k = \frac{1}{2}$ باشد، آن‌گاه خواهیم داشت: $S_n = \frac{n}{4}$. نشان می‌دهیم که مقدار S_n نمی‌تواند از این عدد تجاوز کند.

اگر دقیقاً m تعداد از a_k ها برابر ۱ باشند، در این صورت m جمله از مجموع، صفرند. هم‌چنین، حداکثر m جمله برابر $\frac{1}{2}$ هستند. یعنی، جمله‌هایی به‌صورت: $a_k(1-a_{k+1})$ با $a_k = 1$ و $a_{k+1} = \frac{1}{2}$. هریک از جمله‌های باقی‌مانده دارای هر دو عامل برابر $\frac{1}{2}$ است و درنتیجه برابر $\frac{1}{4}$ می‌شود. به این ترتیب، مقدار مجموع حداکثر عبارت است از:

$$m.0 + \frac{m}{2} + \frac{(n-2m)}{4} = \frac{n}{4}$$

که نشان می‌دهد، ماکزی‌مم مورد نظر $\frac{n}{4}$ است.

(امتحان انتخابی IMO رومانی، ۱۹۷۵)

۵. سمت چپ نابرابری را با $S(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ نمایش می‌دهیم. این عبارت نسبت به هریک از متغیرهای x_i خطی است. مانند قبل، نتیجه می‌گیریم که اثبات نابرابری هنگامی که x_i ها برابر ۰ یا ۱ باشند، کفایت می‌کند.

اگر دقیقاً k مورد از x_i ها برابر ۰ باشند و بقیه برابر ۱، آن‌گاه:

$$S(x_1,x_2,\cdots,x_n) \le n-k$$

و از آن‌جا که مجموع

$$x_1x_2 + x_2x_3 + \cdots + x_nx_1$$

دست‌کم $n-2k$ است، $S(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ کمتر از یا برابر با مقدار زیر است:

$$n-k-(n-2k) = k$$

بنابراین، ماکزی‌مم S کمتر از یا برابر با $\min(k,n-k)$ است که حداکثر $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ است. نتیجه می‌شود که به‌ازای n زوج، برابری وقتی برقرار است که:

$$(x_1,x_2,x_3,\cdots) = (1,0,1,0,\cdots,1,0) \quad \text{یا} \quad (0,1,0,1,\cdots,0,1)$$

و به ازای n فرد، وقتی برقرار است که جمیع جفت‌های (x_i,x_{i+1})، $i = 1,2,\cdots,n$ شامل یک صفر و یک ۱ باشند، به استثنای یک جفت که شامل دو ۱ است (با قرارداد $x_{n+1} = x_1$).

(المپیاد ریاضی بلغارستان، ۱۹۹۵)

۶. مجموعی که مینی‌مم آن را می‌خواهیم نسبت به هر متغیر، خطی است. درنتیجه مینی‌مم مورد نظر به‌ازای $a_i \in \{-98,98\}$ ای به‌دست می‌آید. از آن‌جا که تعداد شاخص‌ها فرد است، اگر به شاخص‌های mod۱۹ نگاه کنیم، iای چنان موجود است که a_i و a_{i+1} دارای یک علامت‌اند. درنتیجه، مجموع مورد بحث دست‌کم از این قرار خواهد بود:

$$-18 \times 98^2 + 98^2 = -17 \times 98^2$$

و برابری به ازای مقادیر زیر به دست می‌آید:

$$a_1 = a_3 = \cdots = a_{19} = -98,\ a_2 = a_4 = \cdots = a_{18} = 98$$

۷. به ازای هر دو عدد نامنفی α و β، تابع

$$x \to \frac{\alpha}{x+\beta}$$

به‌ازای $x \ge 0$ هم‌گراست. زیرا عبارت مفروض، چون به‌عنوان تابعی از هریک از سه متغیر در نظر گرفته شود، مجموع دو تابع محدب و دو تابع خطی است، و بنابراین محدب. به این ترتیب، هنگامی که دو متغیر ثابت باشند، ماکزی‌مم مورد نظر زمانی به‌دست می‌آید که متغیر سوم در یکی از نقاط انتهایی بازه باشد. بنابراین، مقادیر عبارت همواره کمتر از بزرگ‌ترین مقدار حاصل از انتخاب $a,b,c \in \{0,1\}$ هستند. بررسی ساده‌ای از هشت حالت ممکن نشان می‌دهد که مقدار عبارت مورد نظر نمی‌تواند از ۱ تجاوز کند.

(USAMO, 1980)

۸. اگر چهار عدد از اعداد را ثابت و پنجمی را به‌عنوان متغیر x در نظر بگیریم، آن‌گاه سمت چپ، تابعی به‌صورت $\alpha x + \beta / x + \gamma$، با α ، β ، γ ی مثبت و x متغیر روی بازه‌ی $[p,q]$ درمی‌آید. این تابع بر بازه‌ی $[p,q]$، به علت مجموع یک تابع خطی و محدب بودن، محدب است. بنابراین، ماکزی‌مم خود را در یکی از (یا هر دو) نقاط انتهایی بازه‌ی تعریف آن به‌دست می‌آورد.

این مجموع مانند قبل، نشان می‌دهد که اگر سعی در ماکزی‌مم کردن مقدار عبارت مورد نظر داریم، کافی است که اجازه دهیم a، b، c، d و e مقادیر p و q را اختیار کند.

اگر n عدد از این اعداد برابر p، و $n-5$ عدد برابر q باشند، آن‌گاه سمت چپ برابر

$$n^2+(5-n)^2+n(5-n)\left(\frac{p}{q}+\frac{q}{p}\right)=25$$

$$+n(5-n)\left(\sqrt{\frac{p}{q}}-\sqrt{\frac{q}{p}}\right)^2$$

می‌شود. مقدار ماکزی‌مم $n(5-n)$ زمانی به‌دست می‌آید که n برابر ۲ یا ۳ باشد و در این حال خواهیم داشت:

$$n(5-n)=6$$

و نابرابری به اثبات می‌رسد.

(USAMO, 1977).

۹. با استفاده از نابرابری AM – GM می‌توان نوشت:

$$\sqrt[3]{\left(\sum_{k=1}^{n}x_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x_k}\right)^2}\le\frac{1}{3}\left(\sum_{k=1}^{n}x_k+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x_k}+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x_k}\right)$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{x_k+\frac{1}{x_k}+\frac{1}{x_k}}{3}$$

تابع $x+\frac{2}{x}$ در بازه‌ی $[1,2]$ محدب است. بنابراین ماکزی‌مم خود را در یکی از نقاط انتهایی این بازه به‌دست می‌آورد. نیز، مقدار این تابع در هریک از نقاط انتهایی برابر ۳ است. این موضوع نشان می‌دهد که:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{x_k+\frac{1}{x_k}+\frac{1}{x_k}}{3}\le n$$

و نابرابری به اثبات می‌رسد.

در این‌جا خاطرنشان می‌کنیم، همین ایده را می‌توان در اثبات صورت عمومی‌تر این نابرابری که از جی. اچ. سولوسی[3] است، و، به ازای $i=1,2,\cdots,n$ و $x_i\in[a,b]$، برقرار است ـ یعنی نابرابری زیر ـ به‌کار برد:

$$\left(\sum_{k=1}^{n}x_i\right)\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x_i}\right)^{ab}\le\left(\frac{a+b}{1+ab}n\right)^{1+ab}$$

(L. Panaitopol)

---

1. domain

2. W. L. Putnam Mathematical Competition

3. Gh. Söllösy

معرفی سایت‌های ریاضی جهان

● احسان یارمحمدی

ادامه‌ی مطالب صفحه‌ی ۱۹

* نمودارها (Graphs)

۱. توابع و نمودارها (Functions and Graphs)

۲. هندسه‌ی تحلیلی صفحه (Plane Analytical Geometry)

۳. حرکت‌شناسی (Kinematics)

۴. بردارها (Vectors)

* مشتق‌گیری (Differentation)

۱. مقدمه‌ای به حسابان (Introduction to Calculus)

۲. مشتق‌گیری (Differentation)

۳. کاربردهای مشتق‌گیری (Applications of Differentation)

۴. مشتق توابع غیرجبری (Differentation of Transcendental Functions)

* احتمال (Probability)

۱. شمارش (Counting)

۲. احتمال (Probability)

* انتگرال‌گیری (Integration)

۱. انتگرال‌گیری (Integration)

۲. کاربردهای انتگرال‌گیری (Applications of Integration)

۳. روش‌های انتگرال‌گیری (Methods of Integration)

برگزیده‌ای از سؤالات المپیادهای ریاضی

کشور انگلستان در سال‌های ۲۰۰۱ و ۲۰۰۲

● ترجمه و تالیف: هوشنگ شرقی



اشاره

درباره‌ی مسابقات و المپیادهای ریاضی در کشور انگلستان قبلاً توضیحاتی داده‌ایم. علاقه‌مندان می‌توانند به کتاب «راهنمای المپیاد ریاضی» (مقدمه‌ای بر حل مسائل براساس ۳۲ دوره المپیاد ریاضی بریتانیا)، ترجمه‌ی این جانب، از «انتشارات مدرسه» مراجعه کنند. در این شماره پنج مسئله از مسائل المپیادهای فوق در سال‌های ۲۰۰۱ و ۲۰۰۲ را همراه با حل آن‌ها آورده‌یم.

❀ ❀ ❀

مسائل

۱. می‌دانیم که:

$$34! = 295232799cd96041408476186096435ab\cdots$$

رقم‌های a، b، c و d را به‌دست آورید.

۲. مثلث ABC که در آن $AB < AC$ و دایره‌ی محیطی آن S() مفروض‌اند. عمودی از A بر BC رسم می‌کنیم تا دایره را در نقطه‌ی دیگر P قطع کند. نقطه‌ی X روی خط AC مفروض است و BX، دایره‌ی S را در نقطه‌ی دیگر Q قطع می‌کند. ثابت کنید $BX = CX$، اگر و تنها اگر PQ قطری از S باشد.

۳. فرض کنید x، y و z عددهای حقیقی مثبت باشند؛

به‌طوری‌که: $x^2+y^2+z^2=1$. ثابت کنید:

$$x^2yz+xy^2z+xyz^2 \le \frac{1}{3}$$

۴. همه‌ی عددهای صحیح و مثبت m و n را به‌گونه‌ای به‌دست آورید که n فرد باشد و داشته باشیم:

$$\frac{1}{m}+\frac{4}{n}=\frac{1}{12}$$

۵. همه‌ی عددهای حقیقی و مثبت x را که در معادله‌ی زیر صادق هستند، به‌دست آورید:

$$x+\left[\frac{x}{6}\right]=\left[\frac{x}{2}\right]+\left[\frac{2x}{3}\right]$$

که در این معادله، $[t]$ نماد بزرگ‌ترین عدد صحیح کوچک‌تر یا مساوی x است.

حل مسائل

۱. می‌دانیم که اگر n عددی طبیعی و $\alpha \le n$ عددی اول باشد، تعداد عوامل α در $n!$ از دستور $\left[\frac{n}{\alpha}\right]+\left[\frac{n}{\alpha^2}\right]+\dots$ به‌دست می‌آید (به سادگی می‌توانید علت آن را دریابید). و چون تعداد صفرهای سمت راست $n!$ از توان ۱۰ در آن به‌دست می‌آید، پس درواقع، تعداد ۵های موجود در $n!$ (توان ۵) معادل تعداد صفرهای سمت راست $n!$ است. (چرا؟) لذا تعداد صفرهای سمت راست $n!$ برابر است با: $\left[\frac{n}{5}\right]+\left[\frac{n}{25}\right]+\left[\frac{n}{125}\right]+\dots$ و بنابراین تعداد صفرهای سمت راست $34!$ مساوی است با: $\left[\frac{34}{5}\right]+\left[\frac{34}{25}\right]=7$.

درنتیجه: $b=0$.

اما هم‌چنین روشن است که اگر صفرهای سمت راست این عدد را حذف کنیم، عدد حاصل، یعنی $\frac{34!}{10^7}$، باید بر ۸ بخش‌پذیر باشد. (به توان ۲ در $34!$ دقت کنید.) پس باید عدد سه‌رقمی سمت راست آن، یعنی $\overline{35a}$ بر ۸ بخش‌پذیر و زوج باشد. لذا ۸ یا ۶ یا ۴ یا $a=2$ و با امتحان کردن به سادگی درمی‌یابیم که تنها ۳۵۲ بر ۸ بخش‌پذیر است و درنتیجه: $a=2$.

اما برای یافتن c و d توجه می‌کنیم که $34!$ باید بر ۹ و بر ۱۱ بخش‌پذیر باشد. از بخش‌پذیری آن بر ۹ نتیجه می‌شود که مجموع ارقام آن بر ۹ بخش‌پذیر است. با محاسبه‌ای ساده درمی‌یابیم، مجموع ارقام این عدد برابر است با: $141+c+d$. و چون باقی‌مانده‌ی ۱۴۱ بر ۹، مساوی ۶ است، پس باید $c+d+6$ مضرب ۹ باشد:

$$c+d+6=9k \Rightarrow c+d=9k-6$$

و با توجه به این‌که $0 \le c+d \le 18$، با قرار دادن مقادیر $k=1,2$ خواهیم داشت: ۱۲ یا $c+d=3$ و درنتیجه:

(۴,۸) یا (۳,۹) یا (۳,۰) یا (۲,۱) یا (۱,۲) یا $(c,d)=(0,3)$

(۹,۳) یا (۸,۴) یا (۷,۵) یا (۶,۶) یا (۵,۷) یا

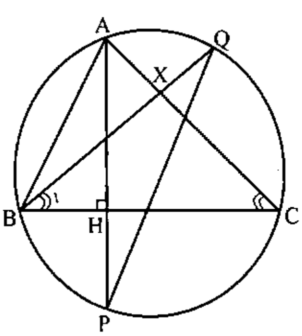
هم‌چنین، می‌دانیم که باقی‌مانده‌ی تقسیم یک عدد بر ۱۱ از جمع و تفریق ارقام آن به‌دست می‌آید؛ یعنی:

$$34! \overset{11}{\equiv} 0-0+0-0+0-0+0-2+5-3+4-6+9-0+6-8$$
$$+1-6+7-4+8-0+4-1+4-0+6-9+d-c+9-9+7$$
$$-2+3-2+5-9+2=19+d-c \Rightarrow 19+d-c \overset{11}{\equiv} d-c-3$$
$$\Rightarrow d-c=11k'+3 \text{ و } 0 \le d-c \le 8 \Rightarrow d-c=3$$

و تنها جوابی که در این شرط صدق می‌کند، $c=0$ و $d=3$ است.

۲. فرض کنیم مطابق شکل: $BX \perp CX$. در این صورت: $\hat{B}_1=\hat{C}$ و با توجه به ویژگی زوایای محاطی نتیجه می‌شود:

$CQ=AB$



هم‌چنین، با توجه به ویژگی زوایای داخلی می‌توان نوشت:

$$\hat{H}=\frac{CP+AB}{2}=90^\circ \Rightarrow CP+AB=180^\circ$$

$\Rightarrow CP+CQ=180^\circ \Rightarrow PQ=180^\circ \Rightarrow$ PQ قطر است.

برعکس، اگر بدانیم PQ قطر است، به طریق مشابه می‌توان نوشت:

$$\left.\begin{aligned} PQ=180^\circ \Rightarrow CP+CQ=180^\circ \\ \hat{H}=\frac{CP+AB}{2}=90^\circ \Rightarrow CP+AB=180^\circ \end{aligned}\right\} \Rightarrow AB=CQ$$

$$\Rightarrow \hat{B}_1=\hat{C} \Rightarrow BX \perp CX$$

۳. با توجه به نابرابری «کوشی ـ شوارتز» می‌توان نوشت:

$$(x^2+y^2+z^2)(a^2+b^2+c^2)\ge(ax+by+cz)^2$$

اگر در این نابرابری فرض کنیم: $a=b=c=xyz$ نتیجه می‌شود:

$$\underbrace{(x^2+y^2+z^2)}_{1}(x^2y^2z^2+x^2y^2z^2+x^2y^2z^2)$$

$$\ge(x^2yz+xy^2z+xyz^2)^2$$

$$\Rightarrow 3x^2y^2z^2\ge(x^2yz+xy^2z+xyz^2)^2$$

$$\Rightarrow x^2yz+xy^2z+xyz^2\le\sqrt{3}xyz \qquad (*)$$

هم‌چنین، با توجه به نامساوی واسطه‌های حسابی- هندسی (AM – GM) خواهیم داشت:

$$\frac{x^2+y^2+z^2}{3}\ge\sqrt[3]{x^2y^2z^2}\Rightarrow 3\sqrt[3]{x^2y^2z^2}\le\underbrace{x^2+y^2+z^2}_{1}$$

$$\Rightarrow 27x^2y^2z^2\le1\Rightarrow xyz\le\frac{1}{3\sqrt{3}}\Rightarrow\sqrt{3}xyz\le\frac{1}{3}$$

و با مقایسه با نامساوی (*) نتیجه می‌شود:

$$x^2yz+xy^2z+xyz^2\le\frac{1}{3}$$

۴.

$$\frac{1}{m}+\frac{4}{n}=\frac{1}{12}\Rightarrow 12n+48m=mn$$

$$\Rightarrow m=\frac{12n}{n-48}\Rightarrow m=\frac{12(n-48)+12\times48}{n-48}$$

$$=12+\frac{12\times48}{n-48}\Rightarrow n-48\,|\,12\times48=2^6\times3^2$$

حال با دادن مقادیر فرد به n که با شرط فوق صادق باشد، نتیجه می‌شود:

n = ۴۹ یا ۵۱ یا ۵۷ ⇒ (m,n) = (۵۸۸,۴۹) یا (۲۰۴,۵۱) یا (۷۶,۵۷)

۵. فرض می‌کنیم، $x=6y$ و از آن‌جا به معادله‌ی زیر می‌رسیم:

$$6y+\lfloor y\rfloor=\lfloor 3y\rfloor+\lfloor 4y\rfloor$$

و با فرض $y=n+p$ که در آن $n\in Z^+$ و $0\le p<1$ است، نتیجه می‌شود:

$$6n+6p+n=3n+\lfloor 3p\rfloor+4n+\lfloor 4p\rfloor$$

$$\Rightarrow 6p=\lfloor 3p\rfloor+\lfloor 4p\rfloor$$

حال با فرض $0\le p<\frac{1}{4}$ نتیجه می‌شود: $0\le 3p<\frac{3}{4}$ و $0\le 4p<1$ و $\lfloor 3p\rfloor=0$ و $\lfloor 4p\rfloor=0$ و درنتیجه: $6p=0$ و $p=0$ و $y=n$ و $x=6n$. یعنی تمام عددهای طبیعی مضرب ۶ یک جواب معادله هستند.

اما اگر $\frac{1}{4}\le p<\frac{1}{3}$ باشد، آن‌گاه؛ $\frac{3}{4}\le 3p<1$ و $\lfloor 3p\rfloor=0$ و $1\le 4p<\frac{4}{3}$ و $\lfloor 4p\rfloor=1$ و معادله به صورت $6p=0+1$ درمی‌آید و $p=\frac{1}{6}$ که در بازه‌ی ($\frac{1}{4}$ و $\frac{1}{3}$) نیست.

اگر $\frac{1}{3}\le p<\frac{1}{2}$ باشد، آن‌گاه: $1\le 3p<\frac{3}{2}$ و $\lfloor 3p\rfloor=1$ و $\frac{4}{3}\le 4p<2$ و $\lfloor 4p\rfloor=1$ و درنتیجه: $6p=2$ و $p=\frac{1}{3}$ و $y=n+\frac{1}{3}$ و $x=6n+2$. یعنی عددهای طبیعی که باقی‌مانده‌ی آن‌ها بر ۶ مساوی ۲ باشد نیز جوابی از معادله هستند.

اگر $\frac{1}{2}\le p<\frac{2}{3}$ باشد، آن‌گاه: $\frac{3}{2}\le 3p<2$ و $\lfloor 3p\rfloor=1$ و $2\le 4p<\frac{8}{3}$ و $\lfloor 4p\rfloor=2$ و درنتیجه: $6p=3$ و $p=\frac{1}{2}$ که از آن‌جا خواهیم داشت: $y=n+\frac{1}{2}$ و $x=6n+3$.

اگر $\frac{2}{3}\le p<\frac{3}{4}$ باشد، آن‌گاه: $2\le 3p<\frac{9}{9}$ و $\lfloor 3p\rfloor=2$ و $\frac{8}{3}\le 4p<3$ و $\lfloor 4p\rfloor=2$ و $6p=4$ و $p=\frac{2}{3}$ و $y=n+\frac{2}{3}$ و $x=6n+4$.

و اگر $\frac{3}{4}\le p<1$ باشد، آن‌گاه $\frac{9}{4}\le 3p<3$ و $3\le 4p<4$ و $\lfloor 3p\rfloor=2$ و $\lfloor 4p\rfloor=3$ و $6p=5$ و $p=\frac{5}{6}$ و $y=n+\frac{5}{6}$ و $x=6n+5$. بنابراین:

x ∈ {6n + r | n ∈ ℕ, r = ۰ یا ۲ یا ۳ یا ۴ یا ۵}

□□□



تولد یک مجله (بخش دوم)

● دکتر غلامرضا یاسی‌پور

اشاره

در شماره‌های قبل قسمت اول مصاحبه با سردبیر مجله‌ی رشد برهان دوره‌ی متوسطه را ملاحظه کردید. اینک در ادامه‌ی آن، قسمت دوم مصاحبه را می‌آوریم.



● **سؤال بعدی که شما هم اشاره‌ی مختصری به آن کردید، این است که آموزش ریاضی در این دوره تقریباً ۲۰ ساله‌ای که شما در جریانش بودید چه پیشرفت‌هایی کرده است و چه نواقصی دارد؟ البته اگر دارد!**

■ روشن است که در طول این سال‌ها آموزش ریاضی تغییر کرده و بسیاری از تغییرات آن هم، تغییرات اجباری بوده است. یعنی وقتی منابع دارند فراوان می‌شوند، وقتی رسانه‌ها دارند تغییر می‌کنند، وقتی امکانات آموزشی و کمک‌آموزشی بیشتر می‌شوند، طبعاً آموزش ریاضی هم تغییر پیدا می‌کند. اما تغییری که باید به لحاظ محتوایی و ساختاری داشته باشد، به نظر من هنوز رخ نداده است. یعنی آموزش ریاضی در حال حاضر در دبیرستان‌ها، نسبت به سال‌های ۶۶، ۶۷ و ۶۸، شاید فقط پنج درصد از لحاظ روش تغییر کرده است. البته ممکن است در محتوا هم تغییراتی رخ داده باشد که قطعاً هم همین‌طور است. بسیاری از این تغییرات به ناچار بوده است. یعنی کتاب درسی تغییر کرده و نحوه‌ی ارائه‌ی مطالب در کتاب درسی تغییر کرده، من معلم هم تغییر کرده‌ام، بر آن اساس. اما اگر بخواهیم آموزش ریاضی امروز دنیا را درنظر بگیریم، خیلی با آن فاصله داریم. یعنی در آموزش ریاضی امروز دنیا نظریه‌هایی پیاده شده، کارهایی انجام گرفته و کلاس‌هایی برای معلمان گذاشته شده است که در آموزش ما اثری از آن‌ها نیست.

کمی می‌آیم عقب‌تر و این جریان را نگاه می‌کنم. زمانی که من می‌خواستم لیسانس بگیرم، واحدهای اصلی، لیسانس دبیری

ریاضی با لیسانس ریاضی محض یکسان بود و فقط در چند واحد تربیتی تفاوت وجود داشت. ما چند واحد به اسم واحدهای تربیتی، مثل روان‌شناسی کودک و نوجوان، تمرین دبیری، بررسی کتب دبیرستانی داشتیم که آن‌ها نداشتند. اما آیا واقعاً این واحدها برای من که می‌خواهم آموزشگر ریاضی بشوم، کافی‌اند؟ کدام یک از نظریه‌هایی که الان در دنیا برای آموزش ریاضی پیاده می‌شوند و براساس آن‌ها آموزشگر ریاضی تربیت می‌شود، در ایران وجود دارد؟ چه در دوره‌ی کارشناسی چه در دوره‌ی کارشناسی ارشد. دوره‌ی دکترا هم که ما هنوز در ایران نداریم، داریم؟

می‌خواهم بپرسم، کدام یک از این نظریه‌ها، الان به آن‌ها که می‌خواهند دبیر ریاضی شوند، تدریس می‌شود؟ هنوز همان واحدهایی که ما زمان دانشجویی می‌خواندیم، به دانشجویان رشته‌ی دبیری ریاضی تدریس می‌شود. البته از امسال اصلاً رشته‌ای تحت عنوان دبیری وجود ندارد! آیا دبیران ما در طول دوره‌ی دبیری، معلم ریاضی می‌شوند؟ کدام یک از این دوره‌های ضمن خدمت به آن بحث اصلی آموزش ریاضی می‌پردازد؟ هیچ کدام. اگر معلمینی مطالعاتی داشته‌اند و روی قضیه‌ای کار کرده‌اند، شخصی بوده است. یعنی اگر من پنج درصد، ده درصد تغییر کرده‌ام، خودم کتاب و مقاله خوانده‌ام و با چند نفر که آموزش ریاضی را خوب کار کرده‌اند، آشنا بوده‌ام و از ایشان استفاده کرده‌ام. این ده درصد پیشرفت در زمینه‌ی آموزش ریاضی بوده است و در غیر این صورت، فقط تغییرات اجباری داشته‌ایم.

● **ما دهمین کنفرانس آموزش ریاضی ایران را برگزار کرده‌ایم. این ده کنفرانس آموزش ریاضی که برگزار شده و همت زیادی نیز صرف آن شده و دبیران هم در این کنفرانس‌ها شرکت کرده، مقاله داده یا به‌عنوان مستمع حضور داشته‌اند، هیچ تأثیری روی آموزش ریاضی در ایران نداشته‌اند؟**

■ نمی‌شود بگوییم تأثیر نداشته‌اند. حتماً تأثیر گذاشته‌اند، اما تأثیر قطعاً در حد و اندازه‌ی آن کسانی بوده که در کنفرانس‌ها شرکت کرده‌اند. آیا مثلاً بنده بعد از کنفرانس آمده‌ام کلاسی دایر کنم تا تجربیاتی را که کسب کرده‌ام، به بقیه منتقل کنم؟ آیا کتابی که در این زمینه چاپ شده، در اختیار همه‌ی معلمین ریاضی قرار گرفته است؟ آیا فیلم‌های کنفرانس، کلاس‌ها و سخن‌رانی‌هایی که به‌صورت موازی برگزار و همه هم ضبط شده‌اند، در اختیار معلمین قرار گرفته‌اند؟ نه! چند نفر می‌توانند در یک کنفرانس آموزشی شرکت کنند؟ بیشتر از دو هزار نفر؟ آن هم در سطح دوره‌های ابتدایی و راهنمایی و متوسطه. چون می‌دانید که کنفرانس‌های آموزشی، فقط دوره‌ی متوسطه را پوشش نمی‌دهد.

● **آقای امیری، شما به دو سؤال بعدی ما هم جواب دادید. حال یک سؤال خصوصی مطرح می‌کنم و بعد دوباره می‌رویم سراغ سؤال‌های عمومی. کدام استاد بیشترین تأثیر را بر شما داشته است؟ و چرا؟**

■ در دوره‌ی راهنمایی، معلم دینی ما آقایی بود به نام احمد زمانی که من همیشه تحت تأثیر ایشان بودم. گرچه ایشان معلم دینی بودند، اما در خیلی از زمینه‌ها معلم من بودند. روش و منش معلمی ایشان این انگیزه را به من داد که پا در این عرصه بگذارم و به کار معلمی علاقه‌مند شدم. در دوره‌ی متوسطه معلمین خوب خیلی داشتم که اگر بخواهم یکی را از بین همه‌ی آن خوب‌ها بگویم، آقای مهندس مهرداد هستند که مکانیک به ما درس می‌دادند. ایشان الان قطعاً بازنشست شدند. من ایشان را تا دو سه سال پیش هم می‌دیدم. یک بار خدمتشان رسیدم و مطلع شدم، با مجله‌ی رشد آموزش فیزیک همکاری داشتند و دارند. در دوره‌ی کارشناسی در دانشگاه، از استادم، جناب آقای دکتر نشوادیان، معلم ریاضی بودن را یاد گرفتم. همواره دوست داشته‌ام که پا جای پای ایشان بگذارم و همیشه مدیونشان هستم. دست همه‌ی این عزیزان را می‌بوسم.

● **نظرتان درباره‌ی مدارس غیرانتفاعی چیست؟ چه‌قدر در همان رشته‌ی خودتان تأثیر دارند؟ بیشتر بحثم، بحث ریاضی است.**

■ الان مدارس ما تبدیل شده‌اند به مدارس غیرانتفاعی. یعنی اکثریت با مدارس غیرانتفاعی است.

● **یعنی تعدادشان بیشتر است؟**

■ بله، الان در تهران حداقل در دوره‌ی متوسطه، تعداد مدارس غیرانتفاعی بیشتر از مدارس دولتی است.

● **تأثیرشان چگونه است؟ خوب؟ متوسط؟ بد؟**

■ در نظام آموزشی ما، مدیر نقش خیلی مهمی دارد و خیلی تأثیرگذار است. اگر مدیر یک مدرسه‌ی غیرانتفاعی، آدم فرهنگی باتجربه‌ای باشد، مدرسه را به آن‌چه که باید باشد، تبدیل می‌کند. چون در نهایت که فرقی نمی‌کند! نظام آموزشی ما نظامی متمرکز است، یعنی همان کتاب درسی که در مدرسه‌ی غیرانتفاعی باید تدریس شود، در مدرسه‌ی دولتی هم باید تدریس شود. اما اگر مدیر آدمی فرهنگی باشد، این کار به نحو احسن انجام می‌شود.

من فکر می‌کنم، اگر به مدرسه‌ی غیرانتفاعی از این دریچه نگاه کنیم که امکانات آموزشی بهتری دارند و معلم‌ها حقوق و حق‌التدریس بهتری می‌گیرند، بنابر این کار بهتری ارائه می‌شود، اشتباه نکرده‌ایم. اما آیا مخاطبینی که روبه‌روی این معلم‌ها و در این مدارس در حال درس خواندن هستند، اکثریت هستند؟ در پاسخ به این پرسش دچار اشکال می‌شویم. یعنی آیا ما امکانات آموزشی و معلمین خوب را برای عده‌ای که نمی‌گویم خیلی کم، اما در اقلیت هستند، به کار نگرفته‌ایم؟ ما باید بتوانیم این امکانات را توسعه دهیم. البته من شنیده‌ام چنین کاری

در شرف انجام است. یعنی قرار شده است، امسال در اداره‌ی مدارس وزارت تعاون و وزارت آموزش و پرورش تعامل داشته باشند و مدیریت به‌صورت هیئت امنایی صورت بگیرد. در این صورت بازده خوب خواهد شد. در واقع، آن امکاناتی که الان در مدارس غیرانتفاعی خوب ما هست، ان شاءالله به مدارس دولتی هم آورده شود.

بنابراین، مدارس غیرانتفاعی خوب کم نداریم. مدارس غیرانتفاعی که قبل از انقلاب اسلامی ملی بودند و حالا شده‌اند غیرانتفاعی، آن موقع هم تأثیرگذارترین مدارس بودند؛ مثل البرز و هشترودی و مدارس اسلامی مانند علوی. الان هم مدارسی داریم که تأثیرگذارند. یعنی خروجی‌هایشان آدم‌هایی هستند که فقط درس نخوانده‌اند. درس زندگی یاد گرفتند، علم آموخته‌اند و در جامعه می‌توانند گلیم خودشان و بقیه را از آب بیرون بکشند.

● **سؤال بعدی که در واقع مهم‌ترین سؤال است: کنکور و معضل آن؟ یعنی شما آیا این روش تستی برای ریاضیات را ـ چون بحث ما بحث اختصاصی ریاضیات است ـ می‌پسندید یا خیر؟ آیا برای آن دلیلی دارید و یا فقط نمی‌پسندید و یا نه می‌پسندید؟**

■ چند وقت پیش هم آقای شرقی، سردبیر مجله‌ی ریاضی که مبتکران چاپ می‌کند، همین سؤال را کرد. البته در پاسخ به سؤال‌های ایشان نظرم را کامل و باز نگفتم. یک همایشی بود در منطقه ۱، چون من مسئولیت گروه ریاضی منطقه‌ی ۱ را هم دارم، تقریباً چهار سال پیش همایشی در این منطقه برگزار کردیم، تحت عنوان «نقش کنکور در آموزش ریاضی» که خود شما از سخن‌ران‌های آن همایش بودید، در سالن شهید مولایی. البته اسم همایش ما این نبود. اسم اصلی آن چنین بود: «نقش مخرب کنکور در آموزش ریاضی» که ما مخربش را برداشتیم. گفتیم خود آن‌ها که می‌آیند، می‌شنوند و پی به آن می‌برند.

کنکور دارد تیشه می‌زند به آموزش ریاضی. این را من با اعتقاد کامل می‌گویم و پای حرفم هم هستم. در جایی که من باید مفاهیم را با عمق بسیار بالا درس بدهم، یعنی آن هدف اصلی آموزش ریاضی که فکر کردن و به تفکر واداشتن مخاطبم است، به او شعبده‌بازی و روش‌های تست زدن را یاد می‌دهم. محدودش می‌کنم به زمان و می‌گویم تو باید در این زمان فکر کنی و در این زمان به من جواب بدهی. پس مجبورم به او فرمول بدهم. در واقع، خلاقیت را از بین می‌برم و مفاهیم را نصفه‌نیمه یاد می‌دهم.

یادم هست، در آن همایش من از آقای قندهاری خواستم، تعدادی از تست‌های کنکور را نقد کند. ایشان خیلی استادانه این کار را انجام داد. تست کنکور را مثال می‌زد و نشان می‌داد به همه و می‌گفت این تست کنکور است. بنده اگر بخواهم این مسئله‌ی ریاضی را سر کلاس دبیرستان حل کنم، این‌طور حل می‌کنم که از لحاظ ساختار آموزشی، حل آن روشی کاملاً منطقی دارد. ولی اگر بخواهم به دانش‌آموزم سر کلاس کنکور درس بدهم، این‌طور حل می‌کنم که در سه خط به جواب می‌رسد و یا با حذف گزینه‌ها و روش‌های دیگر، در یک خط به جواب می‌رسم. توجه داشته باشید، وقتی من این‌جور درس می‌دهم، این مفاهیم از قلم می‌افتند! حالا اگر چنین مسئله‌ای با این شرایط طرح شود، دانش‌آموزی که آن را به روش کنکوری یاد گرفته است، دیگر نمی‌تواند جواب دهد. ده پانزده تا مسئله را به همین ترتیب مقایسه می‌کرد.

مسلم است که کنکور دارد به آموزش ریاضی ضربه می‌زند، ولی این که ما چاره‌ای داریم یا نداریم یا بحث‌هایی که در حاشیه مطرح است، بماند. به هر صورت، این تعیین سرنوشت یک مملکت است آقای یاسی‌پور. این بچه‌ها که دارند دانشگاه می‌روند، فردا می‌خواهند آینده‌سازان مملکت اسلامی ما بشوند. وقتی من کنکور برگزار می‌کنم، سرنوشت این مملکت را رقم می‌زنم، رقم زدن سرنوشت یک مملکت در مدت چهار ساعت اصلاً فاجعه است! اصلاً اقدام به این کار به نظر من اشکال دارد. این سرنوشت که با کم‌ترین عامل مزاحم تغییر می‌کند. وقتی این حرف را می‌زنم، تعجب می‌کنید. درحالی که عده‌ای نشسته‌اند سر جلسه‌ی کنکور، بیرون یک اره‌ی برقی شروع می‌کند به کار کردن! آیا آن‌ها که در جلسه‌ی کنکور نشسته‌اند، حواسشان پرت می‌شود یا نه؟ آیا تأثیری در قبولی‌شان دارد یا نه؟ این قبولی در سرنوشت مملکت تأثیر دارد یا نه؟ پس سرنوشت یک مملکت با صدای یک اره‌ی برقی تغییر می‌کند!

اما چاره چیست؟ ما چندین راه پیشنهاد کرده‌ایم، اما تا به حال توجه نشده است. وظیفه‌ی اصلی سازمان سنجش، سنجش است، نه گزینش. الان سازمان سنجش ما، سازمان سنجش و گزینش است! سازمان سنجش باید امتحان‌های استاندارد را از دبیرستان تا دیپلم و حتی پیش‌دانشگاهی برگزار کند. کنکور هم چرا باید یک‌بار در سال باشد؟ وقتی سؤال استاندارد مطرح شود، سه بار در سال کنکور بدهند! یعنی سه زمان را تعیین کنند تا اگر یک نفر نشست سر جلسه‌ی کنکور، این احساس را نداشته باشد که اگر امروز را از دست داد، زندگی‌اش را از دست داده است. هر چهار ماه یک‌بار کنکور بگیرند. در کنکور هم فقط نمره‌ی خام مهم است. سازمان سنجش نمره‌ی خام کنکور و سال‌های دبیرستان را در اختیار دانشگاه‌ها قرار می‌دهد. دانشگاه‌ها خودشان گزینش می‌کنند. این سنجش می‌کند، دانشگاه‌ها گزینش می‌کنند. گزینش براساس طبقه‌بندی خود دانشگاه‌ها و براساس رشته‌هایی که دارند، انجام می‌شود. حالا ممکن است دانشگاه‌ها کنکور بگیرند یا سؤال تشریحی بدهند. آن را دیگر خودشان می‌دانند. دانشگاه حتماً دلش برای خودش

می‌سوزد و می‌کوشد طوری گزینش کند که بهترین‌ها را برگزینند.

از طرف دیگر، کنکور به این شکل نباید برگزار شود. درست است که سرعت انتقال اهمیت دارد، اما سرعت انتقال را در جایگاه خودش اندازه‌گیری کنیم. برای یک درس، بیاییم سرعت انتقال بگذاریم و یا ضریبی بگذاریم. اما آیا همه‌ی آن‌هایی که فارغ‌التحصیل شده‌اند، دکترا دارند و به مدارج خیلی بالا رسیده‌اند، از سرعت انتقال خیلی بالا برخوردار بوده‌اند؟ این طور نبوده است! به تحقیق و پژوهش دست زده‌اند و ماه‌ها و سال‌ها روی این مسئله فکر کرده‌اند. وقتی یک درس را بگذاریم برای سنجش سرعت انتقال، هر سؤال بقیه‌ی درس‌ها چرا باید یک دقیقه و نیم زمان داشته باشد؟ سه دقیقه زمان بدهند برای آن. در این صورت می‌توانند سؤال‌های کامل و پنج گزینه‌ای طرح کنند و وقت هم بدهند، تا واقعاً یک گزینشِ درست انجام شود.

● **پیشنهاد شما برای بهبود آموزش ریاضی چیست؟ شما در کنفرانس‌های متعدد آموزش ریاضی شرکت می‌کنید و حتماً سخن‌رانی‌هایی هم داشته‌اید. اگر می‌شود به‌طور مختصر، از پیشنهادهایی که در این جلسه‌ها مطرح کرده‌اید و در ذهن دارید، چند نمونه بفرمایید.**

■ اگر بخواهیم آموزش ریاضی ما دچار تحول شود، باید آموزشگران ریاضی را متحول کنیم. یعنی دبیران و معلمین ریاضی ما باید متحول شوند. آموزش‌وپرورش باید بیاید با دانشگاه‌ها قرارداد ببندد. حداقل از دبیران ریاضی که نقش مهمی در جامعه دارند، بخواهد که در این دوره‌ها شرکت کنند. به آن‌ها امکانات بدهد و آن‌ها را با نظریه‌های به‌روز آموزش ریاضی در دنیا آشنا کند.

● **آخرین و مهم‌ترین سؤال بنده این است که تأثیر ایمان در پیشرفت علمی دانش‌آموزان چیست؟ البته شما به این سؤال در هر شماره‌ی برهان در یادداشت سردبیر جواب می‌دهید و من سؤالم را از آن‌جا ایده گرفته‌ام. منتها می‌خواهیم خیلی شسته‌ورفته و خلاصه بفرمایید، ایمان چه قدر می‌تواند در پیشرفت علمی دانش‌آموزان تأثیر داشته باشد؟**

■ این سؤال به ظاهر ساده، اما بسیار پیچیده است. من فکر می‌کنم ایمان در علم دو وجه دارد، یعنی از دو دریچه باید به آن نگاه کرد. یکی، هنگامی که متعلم در حال یادگیری علم است، ایمان در آن فراگیری علم چه نقشی دارد؟ چون ما کسانی را هم داریم که به هیچ چیز ایمان ندارند، اما خیلی هم خوب علم فراگرفته‌اند.

دوم، پس از آن‌که این متعلم علم را فراگرفت، هنگامی که می‌خواهد آن را به‌کار ببندد، نقش ایمان خیلی بالا می‌رود. مخاطبین ما، پس از این‌که علم را فراگرفتند، باید از آن ایمانی که دارند، استفاده کنند و کاربردهای آن علم را در جهتی سوق دهند که به نفع جامعه، مملکت و دینشان باشد.

من خودم شخصاً، تأثیر ایمان را در هر دو مقطعی که خدمتتان گفتم، دیده‌ام و لمس کرده‌ام. یعنی بارها وقتی روی مسئله‌ی ریاضی فکر می‌کردم و نمی‌توانستم مسئله را حل کنم، یا دیگر احساس می‌کردم که فکرم به جایی قد نمی‌دهد، آن مسئله را کنار می‌گذاشتم و می‌رفتم آیاتی از قرآن می‌خواندم، دورکعت نماز می‌خواندم یا می‌نشستم به خلقتم و به خالقم فکر می‌کردم. وقتی قدری آرامش پیدا می‌کردم و به سراغ آن مسئله می‌رفتم، خیلی راحت آن مسئله حل می‌شد. این بارها برایم اتفاق افتاده است. غالباً هم ساعت ۱۲ شب به بعد بوده است. فکر می‌کنم یک «بسم‌الله الرحمن الرحیم» از طرف یک عالم و دانشمند، به‌ویژه یک ریاضی‌دان، تأثیرش از این‌که شاید دو ساعت یک موعظه‌گر بخواهد موعظه کند، بیشتر است.

امیدوارم همه‌ی دانش‌آموزان ایران اسلامی به این مسئله توجه کنند که علم و ایمان را توأم با هم پیش ببرند، این‌ها را نمی‌شود از هم جدا کرد. آن جنبه‌ی عملی را، ایمان خیلی خوب می‌تواند تقویت کند و ثمربخش‌تر سازد.

● **خیلی ممنون آقای امیری، همین افتخار برای شما بس که نزدیک به ۲۰ سال توانستید مجله‌ی برهان را ادامه دهید و هیئت تحریریه را نگه دارید. با تشکر از شما و آقای صدر که در این برنامه شرکت کردید. اگر حرف آخری دارید، بفرمایید.**

■ می‌خواستم این جا چند تا تشکر داشته باشم. می‌دانید که در این مسیر ۲۰ ساله با تمام فراز و نشیب‌هایش، من تنها نبوده‌ام و کمک‌هایی که به من شده است، اول از همه از طرف خانواده‌ام و به‌ویژه همسرم بوده است. اول تشویق‌های خانواده‌ام و همکاری‌ها و هم‌یاری‌های آن‌ها و بعد همکاران بسیار بسیار دلسوزی که من در این مسیر داشته‌ام. چون مجله برهان تا شماره ۳۸ در انتشارات مدرسه چاپ و توزیع می‌شد باید از آقای برادری که معاون فرهنگی «انتشارات مدرسه» هستند نام ببرم که همیشه در مورد برهان خیلی به من کمک می‌کردند. آقای آشتیانی که مسئول تولید بودند ما خیلی در تولید اذیتشان کردیم. بعد تک‌تک اعضای هیئت تحریریه که هیچ‌گاه مرا تنها نگذاشتند و ما هر وقت خواستیم، با ایثار وقت‌شان آمدند و نشستیم، برنامه‌ریزی کردیم و به موقع مقالات را به ما دادند. دیگر، برادر و همکار بسیار محترمم، جناب آقای صدر که زحمت این مجله را سالیان سال است به‌دوش می‌کشند. چون من قدری درگیر کار تألیف و تدریس شدم، نقش ایشان در زمینه‌ی اداره‌ی مجله خیلی پررنگ‌تر شد. و سرانجام مسئولین و دست‌اندرکاران فعلی «دفتر انتشارات کمک‌آموزشی»، مدیر مسئول محترم و سایر کارکنان مجله که پشت صحنه هستند، حروف‌چین‌ها، گرافیست‌ها، نمونه‌خوان‌ها و همه.

● **به هر حال اجر شما با خداوند. والسلام علیکم و رحمة‌الله و برکاته.**

□□□



هم‌نهشتی و کاربردهای آن (۴)

۲، ۳، ۵، ۷، ۱۱، ۱۳، ۱۷، ۱۹، ۲۳، ۲۹، ۳۱، ۳۷، ۴۱، ۴۳، ...، ۲۰۰۳، ...

● سید محمدرضا هاشمی موسوی
hashemi – moosavi@yahoo.com

اشاره

در قسمت قبل به برخی از کاربردهای هم‌نهشتی اشاره شد. اینک در این شماره، قضیه‌ی کوچک فرما و کاربردهای آن را در محاسبات باقی‌مانده‌ی تقسیم اعداد توانی و حل معادله‌های سیاله‌ی درجه‌ی nام شرح می‌دهیم و به‌کارگیری این قضیه را برای حل مسئله‌های خلاق و پر ابتکار نشان خواهیم داد.

قضیه‌ی کوچک فرما

اگر p عدد اول مفروض و $(a,p)=1$ آن‌گاه:

$$a^{p-1}\overset{p}{\equiv}1$$

نتیجه: اگر p عدد اول مفروض باشد، آن‌گاه:

$$a^{p}\overset{p}{\equiv}a$$

مثال۱. باقی‌مانده‌ی تقسیم 2^{87} بر ۷ را تعیین کنید.

حل: با توجه به قضیه‌ی کوچک فرما می‌توان نوشت:

$$p \text{ اول};\ 2^{p-1}\overset{p}{\equiv}1$$

$$\begin{cases}7\in\mathbb{P} & (\text{مجموعه اعداد اول})\\ (2,7)=1\end{cases}\xrightarrow[(p=7)]{(\text{فرما})}2^{7-1}\overset{7}{\equiv}1\ ;$$

$$2^{6}\overset{7}{\equiv}1\xrightarrow{(\text{به توان } 14)}(2^{6})^{14}\overset{7}{\equiv}1$$

$$2^{84}\overset{7}{\equiv}1\ ;\ 2^{3}\times 2^{84}\overset{7}{\equiv}2^{3}\ ;\ 2^{87}\overset{7}{\equiv}8\overset{7}{\equiv}1\ ;\ 2^{87}\overset{7}{\equiv}1$$

مثال۲. باقی‌مانده‌ی تقسیم $N=۵^{۱۲}+۶^{۱۲}+\dots+۱۷^{۱۲}$ را بر ۱۳ بیابید.

حل: با توجه به قضیه‌ی فرما:

$$\begin{cases}۱۳\in\mathbb{P}\\(۵,۱۳)=۱\end{cases}\xrightarrow{(\text{فرما})}۵^{۱۳-۱}\overset{۱۳}{\equiv}۱\ ;\ ۵^{۱۲}\overset{۱۳}{\equiv}۱$$

چون ۶، ۷، ... ۱۲ و هم‌چنین ۱۴، ۱۵، ۱۶، ۱۷ نسب به ۱۳ اول هستند و عدد ۱۳ اول است، با استفاده از قضیه‌ی فرما می‌توان نوشت:

$$۶^{۱۳-۱}\overset{۱۳}{\equiv}۱\ ,\ ۷^{۱۳-۱}\overset{۱۳}{\equiv}۱\ ,\ \dots\ ,\ ۱۲^{۱۳-۱}\overset{۱۳}{\equiv}۱\ (۱۳^{۱۲}\overset{۱۳}{\equiv}۰)$$

$$۱۴^{۱۳-۱}\overset{۱۳}{\equiv}۱\ ,\ ۱۵^{۱۳-۱}\overset{۱۳}{\equiv}۱\ ,\ ۱۶^{۱۳-۱}\overset{۱۳}{\equiv}۱\ ,\ ۱۷^{۱۳-۱}\overset{۱۳}{\equiv}۱$$

از جمع دو طرف هم‌نهشتی‌ها:

$$N=۶^{۱۲}+۷^{۱۲}+\dots+۱۷^{۱۲}\overset{۱۳}{\equiv}\underbrace{۱+۱+\dots+۱}_{۱۲\text{مرتبه}}\overset{۱۳}{\equiv}۱۲$$

بنابراین، باقی‌مانده‌ی تقسیم N بر ۱۳ عدد ۱۲ است:

$$N\overset{۱۳}{\equiv}۱۲$$

مثال۳. باقی‌مانده‌ی تقسیم عبارت زیر، بر ۱۱ بر فرض این‌که x، y و z بر ۱۱ بخش‌پذیر نباشند، چه عددی است؟

$$M=x^{۱۰۰۰}+y^{۳۰۰}+z^{۸۰}+۱۳۸۲^{۱۳۸۲}$$

حل:

$$۱۱\in\mathbb{P}\ ,\ ۱۱\nmid x\ ;\ (x,۱۱)=۱\xrightarrow{(\text{فرما})}x^{۱۱-۱}\overset{۱۱}{\equiv}۱$$

$$,\ ۱۱\nmid y\ ;\ (y,۱۱)=۱\xrightarrow{(\text{فرما})}y^{۱۱-۱}\overset{۱۱}{\equiv}۱$$

$$,\ ۱۱\nmid z\ ;\ (z,۱۱)=۱\xrightarrow{(\text{فرما})}z^{۱۱-۱}\overset{۱۱}{\equiv}۱$$

پس:

$$x^{۱۰}\overset{۱۱}{\equiv}۱\ ,\ y^{۱۰}\overset{۱۱}{\equiv}۱\ ,\ z^{۱۰}\overset{۱۱}{\equiv}۱$$

$$(x^{۱۰})^{۱۰۰}\overset{۱۱}{\equiv}۱\ ;\ x^{۱۰۰۰}\overset{۱۱}{\equiv}۱\ ,\ (y^{۱۰})^{۳۰}\overset{۱۱}{\equiv}۱\ ;\ y^{۳۰۰}\overset{۱۱}{\equiv}۱\ ,\ z^{۸۰}\overset{۱۱}{\equiv}۱$$

با توجه به بخش‌پذیری بر ۱۱ می‌توان نوشت:

$$۱۳۸۲^{۱۳۸۲}\overset{۱۱}{\equiv}(۲-۸+۳-۱)^{۱۳۸۲}=(-۴)^{۱۳۸۲}=(۴^{۱۰})^{۱۳۸}\times(۴)^{۲}$$

$$\underset{(\text{فرما})}{\overset{۱۱}{\equiv}}(۱)^{۱۳۸}\times۱۶\overset{۱۱}{\equiv}۵$$

پس:

$$M=x^{۱۰۰۰}+y^{۳۰۰}+z^{۸۰}+۱۳۸۲\overset{۱۱}{\equiv}۱+۱+۱+۵=۸$$

بنابراین:

$$M\overset{۱۱}{\equiv}۸$$

مثال۴. باقی‌مانده‌ی تقسیم $۸۷^{۱۲۸}$ بر ۱۹ را بیابید.

حل:

$$۸۷\overset{۱۹}{\equiv}۱۱\ ;\ ۸۷^{۱۲۸}\overset{۱۹}{\equiv}۱۱^{۱۲۸}=۱۱^{۱۸\times۷}\times۱۱^{۲}=(۱۱^{۷})^{۱۸}\times۱۲۱$$

$$(۱۱^{۷})^{۱۹-۱}\times۱۲۱\underset{(\text{فرما})}{\overset{۱۹}{\equiv}}۱\times۷=۷\ ;\ ۸۷^{۱۲۸}\overset{۱۹}{\equiv}۷$$

مثال۵. عدد $(۷^{۱۵}+k)$ مضرب ۱۷ است. کوچک‌ترین عدد طبیعی k را تعیین کنید.

حل:

$$\begin{cases}۱۷\in\mathbb{P}\\(۷,۱۷)=۱\end{cases}\xrightarrow{(\text{فرما})}۷^{۱۷-۱}\overset{۱۷}{\equiv}۱\ ;\ ۷^{۱۶}\overset{۱۷}{\equiv}۱$$

$$۷^{۱۶}\overset{۱۷}{\equiv}۱+۲(۱۷)=۳۵\ \Rightarrow\ ۷^{۱۵}\overset{۱۷}{\equiv}۵\overset{۱۷}{\equiv}۵-۱۷=-۱۲\ ;$$

$$۷^{۱۵}+۱۲\overset{۱۷}{\equiv}۰\ ;\ k=۱۲$$

مثال۶. اگر p عدد اول بزرگ‌تر از ۷ باشد، ثابت کنید که عدد $N=p^{۱۲}-۱$ بر ۱۰۵ بخش‌پذیر است.

حل: با توجه به برابری ۷×۵×۳=۱۰۵ و قضیه‌ی کوچک فرما (p عدد اول بزرگ‌تر از ۷):

$$(p,۳)=۱\ ;\ p^{۳-۱}\overset{۳}{\equiv}۱\ ;\ p^{۲}\overset{۳}{\equiv}۱\ ;\ (p^{۲})^{۶}\overset{۳}{\equiv}۱\ ;\ p^{۱۲}\overset{۳}{\equiv}۱$$

$$(p,۵)=۱\ ;\ p^{۵-۱}\overset{۵}{\equiv}۱\ ;\ p^{۴}\overset{۵}{\equiv}۱\ ;\ (p^{۴})^{۳}\overset{۵}{\equiv}۱\ ;\ p^{۱۲}\overset{۵}{\equiv}۱$$

$$(p,۷)=۱\ ;\ p^{۷-۱}\overset{۷}{\equiv}۱\ ;\ p^{۶}\overset{۷}{\equiv}۱\ ;\ (p^{۶})^{۲}\overset{۷}{\equiv}۱\ ;\ p^{۱۲}\overset{۷}{\equiv}۱$$

با توجه به هم‌نهشتی‌های اخیر، بدیهی است که ۳، ۵ و ۷ عدد $N=p^{۱۲}-۱$ را می‌شمارند. بنابراین، حاصل ضرب این سه عدد نیز N را می‌شمارد: $۳\times۵\times۷=۱۰۵\,|\,N=p^{۱۲}-۱$.

مثال۷. باقی‌مانده‌ی عدد $(۲۹^{۳۰}+۳۱^{۲۸})^{۱۳۸۷}$ بر ۸۹۹ را تعیین کنید.

حل: در حالت کلی نشان می‌دهیم که اگر p و q دو عدد اول متمایز و m و n دو عدد طبیعی باشند، داریم:

$$p^{m(q-1)}+q^{n(p-1)}\overset{pq}{\equiv}۱$$

$$\begin{cases}\text{اول}\ p,(p,q)=۱\ ;\ p^{q-1}\overset{q}{\equiv}۱\ ,\ q^{p-1}\overset{q}{\equiv}۰\longrightarrow p^{q-1}+q^{p-1}\overset{q}{\equiv}۱\\\text{اول}\ q,(p,q)=۱\ ;\ q^{p-1}\overset{p}{\equiv}۱\ ,\ p^{q-1}\overset{p}{\equiv}۰\longrightarrow p^{q-1}+q^{p-1}\overset{p}{\equiv}۱\end{cases}$$

از رابطه‌های هم‌نهشتی اخیر:

$$p^{q-1}+q^{p-1}\overset{pq}{\equiv}۱$$

هم‌چنین:

$$\begin{cases}(p,q)=۱ ;\ p^{q-۱}\overset{q}{\equiv}۱ ;\ p^{m(q-۱)}\overset{q}{\equiv}۱ ,\ q^{p-۱}\overset{q}{\equiv}۰ ;\ q^{n(p-۱)}\overset{q}{\equiv}۰ \\ (p,q)=۱ ;\ q^{p-۱}\overset{p}{\equiv}۱ ;\ \underset{(\text{فرما})}{p^{n(q-۱)}}\overset{p}{\equiv}۱ ,\ p^{q-۱}\overset{p}{\equiv}۰ ;\ p^{m(q-۱)}\overset{p}{\equiv}۰\end{cases}$$

از جمع هم‌نهشتی‌ها:

$$p^{m(q-۱)}+q^{n(p-۱)}\overset{q}{\equiv}۱ ,\quad p^{m(q-۱)}+q^{n(p-۱)}\overset{p}{\equiv}۱$$

از دو هم‌نهشتی فوق:

$$\text{اول } q,p ,\ (p,q)=۱ ;\ p^{m(q-۱)}+q^{n(p-۱)}\overset{pq}{\equiv}۱$$

$$p=۲۹ ,\ q=۳۱ : (۲۹^{۳۰}+۳۱^{۲۸})^{۱۳۸۷}\overset{۸۹۹}{\equiv}۱ (۸۹۹=۲۹\times ۳۱)$$

مثال۸. باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد زیر را بر ۱۵ تعیین کنید.

$$N=۲^{۱}+۲^{۲}+۲^{۳}+\dots+۲^{۱۳۸۸}$$

حل:

از هم‌نهشتی $۲^{۴}\overset{۱۵}{\equiv}۱$ نتایج زیر حاصل می‌شود:

$$\underbrace{۲^{۴n}\overset{۱۵}{\equiv}۱}_{\text{باقی‌مانده۱}}\xrightarrow{(\times ۲)}\underbrace{۲^{۴n+۱}\overset{۱۵}{\equiv}۲}_{\text{باقی‌مانده۲}}\xrightarrow{(\times ۲)}\underbrace{۲^{۴n+۲}\overset{۱۵}{\equiv}۴}_{\text{باقی‌مانده۴}}\xrightarrow{(\times ۲)}\underbrace{۲^{۴n+۳}\overset{۱۵}{\equiv}۸}_{\text{باقی‌مانده ۸}}$$

بنابراین:

$$N=۲^{۱}+۲^{۲}+۲^{۳}+۲^{۴}+\dots+۲^{۱۳۸۵}+۲^{۱۳۸۶}+۲^{۱۳۸۷}+۲^{۱۳۸۸}$$

$$N\overset{۱۵}{\equiv}\underbrace{۲+۴+۸+۱}_{\text{دسته‌ی باقی‌مانده‌های دوره‌ی اول}}+\dots+\underbrace{۲+۴+۸+۱}_{\text{دسته‌ی باقی‌مانده‌های دوره‌ی آخر}}=\frac{۱۳۸۸}{۴}\overbrace{(۲+۴+۸+۱)}^{۱۵}=۳۴۷\times ۱۵$$

پس:

$$N\overset{۱۵}{\equiv}۳۴۷\times ۱۵\overset{۱۵}{\equiv}۰$$

بنابراین، N بر ۱۵ بخش‌پذیر است:

$$N\overset{۱۵}{\equiv}۰$$

مثال۹. باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد $N=۲^{۲^{۱}}+۲^{۲^{۲}}+۲^{۲^{۳}}+۲^{۲^{۴}}+\dots+۲^{۲^{۱۳۸۷}}$ را بر ۱۱ بیابید.

حل: از هم‌نهشتی بدیهی $۲^{۲^{۱}}\overset{۱۱}{\equiv}۴$ به نتایج زیر می‌رسیم:

$$(۲^{۲^{۱}})^{۲}\overset{۱۱}{\equiv}۴^{۲}=۱۶\overset{۱۱}{\equiv}۵ ;\ ۲^{۲^{۲}}\overset{۱۱}{\equiv}۵ ,\ (۲^{۲^{۲}})^{۲}\overset{۱۱}{\equiv}۵^{۲}$$

$$۲^{۲^{۳}}\overset{۱۱}{\equiv}۲۵\overset{۱۱}{\equiv}۳ ,\ (۲^{۲^{۳}})^{۲}\overset{۱۱}{\equiv}۳^{۲} ;\ ۲^{۲^{۴}}\overset{۱۱}{\equiv}۹ ,\ (۲^{۲^{۴}})^{۲}\overset{۱۱}{\equiv}۹^{۲} ;$$

$$۲^{۲^{۵}}\overset{۱۱}{\equiv}۸۱\overset{۱۱}{\equiv}۴ ,\dots$$

از تقسیم متوالی جمله‌ها بر ۱۱ به ترتیب باقی‌مانده‌های تکراری ۴، ۵، ۳و۹ حاصل می‌شوند؛ پس:

$$N=۲^{۲^{۱}}+۲^{۲^{۲}}+۲^{۲^{۳}}+۲^{۲^{۴}}+\dots+۲^{۲^{۱۳۸۷}}\overset{۱۱}{\equiv}$$

$$\underbrace{\overbrace{(۴+۵+۳+۹)}^{۲۱}+\dots}_{\text{تعداد ۳۴۶پرانتز چهار جمله‌ای}}+\overbrace{\underbrace{(۴+۵+۳)}_{۱۲}}^{\text{سه جمله‌ی منفرد آخر}}$$

$$N\overset{۱۱}{\equiv}۳۴۶(۲۱)+۱۲\overset{۱۱}{\equiv}(۶-۴+۳)(۱۰)+۱=۵۱$$

$$N\overset{۱۱}{\equiv}۵۱\overset{۱۱}{\equiv}۷ ;\ N\overset{۱۱}{\equiv}۷$$

مثال۱۰ . باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد زیر را بر ۴۱ بیابید.

$$N=۲^{۱!}+۲^{۲!}+۲^{۳!}+۲^{۴!}+\dots+۲^{۱۳۸۷!}$$

حل: با توجه به این‌که ۴۱ عدد اول است و $(۲,۴۱)=۱$، از قضیه‌ی کوچک فرما، داریم:

$$۲^{۴۱-۱}\overset{۴۱}{\equiv}۱ ;\ ۲^{۴۰}\overset{۴۱}{\equiv}۱ ;\ ۲^{۴۰k}\overset{۴۱}{\equiv}۱$$

با توجه به این‌که اگر $n\ge ۵$ باشد، آن‌گاه $n!$ مضرب ۴۰ خواهد بود:

$$n\ge ۵ :\ ۲^{n!}=۲^{۴۰k}\overset{۴۱}{\equiv}۱$$

بنابراین:

$$N=۲^{۱!}+۲^{۲!}+۲^{۳!}+۲^{۴!}+۲^{۵!}+\dots+۲^{۱۳۸۷!}$$

$$\overset{۴۱}{\equiv}۲^{۱}+۲^{۲}+۲^{۶}+۲^{۲۴}+\underbrace{۱+۱+\dots+۱}_{\text{تعداد یک‌ها}=۱۳۸۷-۴}$$

$$N\overset{۴۱}{\equiv}۲+۴+۶۴+۱۶^{*}+۱۳۸۳=۱۴۶۹\overset{۴۱}{\equiv}۳۴ ;\ N\overset{۴۱}{\equiv}۳۴$$

$$^{*}(۲^{۷}=۱۲۸\overset{۴۱}{\equiv}۵ ;\ (۲^{۷})^{۳}\overset{۴۱}{\equiv}۵^{۳} ;\ ۲^{۲۱}\overset{۴۱}{\equiv}۱۲۵\overset{۴۱}{\equiv}۲ ;\ ۲^{۲۴}\overset{۴۱}{\equiv}۱۶)$$

مثال۱۱ . اگر باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد $\overline{x۵۱y}$ بر ۷۲ برابر صفر شود، تقسیم $N=(y^{x}+x^{y})^{۱۳۸۷}$ بر ۸۰ چه باقی‌مانده‌ای خواهد داشت؟

حل. بدیهی است که با توجه به ۹×۸=۷۲، عدد $\overline{x۵۱y}$ بر ۸و۹ بخش‌پذیر است؛ پس:

$$\begin{cases}\overline{x۵۱y}\overset{۸}{\equiv}۰ ;\ \overline{۵۱y}\overset{۸}{\equiv}۰ ;\ ۵۱۰+y\overset{۸}{\equiv}۰\\ \overline{x۵۱y}\overset{۹}{\equiv}۰ ;\ x+۵+۱+y\overset{۹}{\equiv}۰ ;\ x+y+۶\overset{۹}{\equiv}۰\end{cases}$$

از حل دستگاه فوق مقادیر xوy به دست می‌آید:

$$۵۱۰+y\overset{۸}{\equiv}۰ ;\ y\overset{۸}{\equiv}-۵۱۰ ;\ y\overset{۸}{\equiv}-۵۱۰+۸(۶۴)=۲ ;\ y\overset{۸}{\equiv}۲$$

چون y یک رقمی است، بنابراین از هم‌نهشتی بالا جواب $y=۲$ حاصل می‌شود.

$$x+y+۶\overset{۹}{\equiv}۰ ;\ x+۲+۶\overset{۹}{\equiv}۰ ;\ x\overset{۹}{\equiv}-۸ ;\ x\overset{۹}{\equiv}-۸+۹=۱ ;\ x\overset{۹}{\equiv}۱$$

چون x یک رقمی است، بنابراین از هم‌نهشتی بالا جواب $x=۱$ حاصل می‌شود.

$$N=(۲^{۱}+۱^{۲})^{۱۳۸۷}=۳^{۱۳۸۷} ;\ ۳^{۴}=۸۱\overset{۸۰}{\equiv}۱ ,\ (۳^{۴})^{۳۴۶}\overset{۸۰}{\equiv}۱$$

$$۳^{۱۳۸۴}\overset{۸۰}{\equiv}۱ ;\ ۳^{۳}\times ۳^{۱۳۸۴}\overset{۸۰}{\equiv}۳^{۳} ;\ ۳^{۱۳۸۷}\overset{۸۰}{\equiv}۲۷ ;\ N\overset{۸۰}{\equiv}۲۷$$

مثال۱۲ . اگر n عددی صحیح باشد، ثابت کنید که $M=(\frac{n^{۵}}{۵}+\frac{n^{۳}}{۳}+\frac{۷n}{۱۵})^{۲۰۰۹}$ نیز عددی صحیح است.

حل: با توجه به برابری زیر:

$$\frac{n^5}{5}+\frac{n^3}{3}+\frac{7n}{15}=\frac{3n^5+5n^3+7n}{15}$$

کافی است، نشان دهیم برای هر n داریم:

$$15|(3n^5+5n^3+7n)$$

و یا برای هر n، عدد $3n^5+5n^3+7n$ بر ۳ و ۵ بخش‌پذیر است. هم‌نهشتی‌های زیر بدیهی هستند:

$$3n^5+5n^3+7n\overset{3}{\equiv}2n^3+n\equiv 2n^3-2n=2(n^3-n)\underset{(فرما)}{\overset{3}{\equiv}}0$$

$$3n^5+5n^3+7n\overset{5}{\equiv}3n^5+2n\overset{5}{\equiv}3n^5-3n=3(n^5-n)\underset{(فرما)}{\overset{5}{\equiv}}0$$

بنابراین، طبق قضیه‌ی فرما $((a,p)=1\ ;\ a^p\overset{p}{\equiv}a)$ نتیجه می‌شود که M عددی صحیح است.

مثال۱۳. با استفاده از قضیه‌ی کوچک فرما، معادله‌ی هم‌نهشتی زیر را حل کنید:

$$(x^{35}+22x^{19}+28x^3)^{1388}\overset{17}{\equiv}0$$

حل: با توجه به قضیه‌ی فرما $(x^{17}\overset{17}{\equiv}x)$، هم‌نهشتی‌های زیر برای هر x بدیهی است:

$$x^{17}\overset{17}{\equiv}x\ ;\ x^{34}\overset{17}{\equiv}x^2\ ;\ x^{35}\overset{17}{\equiv}x^3$$

$$22x^{19}\overset{17}{\equiv}5x^{19}\overset{17}{\equiv}5x^2.x^{17}\overset{17}{\equiv}5x^2.x=5x^3\ ,\ 28x^3\overset{17}{\equiv}11x^3$$

بنابراین:

$$(x^{35}+22x^{19}+28x^3)^{1388}\overset{17}{\equiv}(x^3+5x^3+11x^3)^{1388}=$$

$$(17x^3)^{1388}\overset{17}{\equiv}0(x\in Z)$$

معادله‌ی هم‌نهشتی، در واقع یک اتحاد همیشه برقرار است و به ازای هر x، صحیح و درست است. روش دیگر این است که معادل عبارت را بر $(x^{17}-x)$ تقسیم کنیم:

$$(x^{35}+x^{19}+x^3)^{1388}\overset{17}{\equiv}[(x^{17}-x)(x^{18}+6x^2+17x^3)]^{1388}$$

مثال۱۴. با استفاده از قضیه‌ی کوچک فرما نشان دهید که برای هر عدد اول $p>5$، بی‌نهایت عدد به صورت $N=999\cdots9999$ وجود دارند که بر p بخش‌پذیرند.

حل: در واقع باید نشان دهیم، هم‌نهشتی $10^n\overset{p}{\equiv}1$ برای بی‌نهایت عدد مثبت صحیح برقرار است.

از آن‌جا که $p>5$ و $(p,10)=1$ و بنابر قضیه‌ی کوچک فرما $10^{p-1}\overset{p}{\equiv}1$، پس هر عدد صحیح n که مضربی از $(p-1)$ است، جواب مسئله خواهد بود: $n=k(p-1)$

مثال۱۵. اگر p عددی اول باشد و $x^p+y^p=z^p$، توسط قضیه‌ی کوچک فرما ثابت کنید که p عبارت $(x+y-z)$ را می‌شمارد.

حل: بر طبق قضیه‌ی فرما $(x^p\overset{p}{\equiv}x)$، بلافاصله نتیجه می‌شود:

$$x^p+y^p-z^p\overset{p}{\equiv}x+y-z$$

بنابراین، اگر $x^p+y^p\overset{p}{\equiv}z^p$ باشد، آن‌گاه: $x+y-z\overset{p}{\equiv}0$. به روش دیگر، به سادگی از جمع جبری $x^p\overset{p}{\equiv}x$، $y^p\overset{p}{\equiv}y$ و $z^p\overset{p}{\equiv}z$ می‌توان نوشت:

$$x^p+y^p-z^p\overset{p}{\equiv}x+y-z$$

از فرض اول بودن p و برابری $x^p+y^p=z^p$:

$$\underbrace{x^p+y^p}_{z^p}-z^p\overset{p}{\equiv}z^p-z^p=0$$

بنابراین:

$$x+y-z\overset{p}{\equiv}0\quad(p|(x+y-z))$$

تعیین رقم یکان عدد

برای تعیین رقم یکان هر عد مانند N، کافی است باقی‌مانده‌ی تقسیم آن عدد را بر ۱۰ تعیین کنیم:

$$N\overset{10}{\equiv}r<10$$

نتیجه: اگر $n\geq5$ باشد، آن‌گاه: $n!\overset{10}{\equiv}0$

در واقع اگر $n\geq5$، رقم یکان عدد $n!$ برابر صفر است.

مثال ۱۶. رقم یکان عدد $N=1!+2!+3!+\cdots+1388!$ را تعیین کنید.

حل: کافی است باقی‌مانده‌ی تقسیم N بر ۱۰ را تعیین کنیم که در واقع همان رقم یکان است:

$$N=1!+2!+3!+4!+5!+\cdots+1388!\overset{10}{\equiv}1+2+6+24+0+0+\cdots+0$$

$$N\overset{10}{\equiv}33\overset{10}{\equiv}3 \text{ و } N\overset{10}{\equiv}3$$ (رقم یکان N)

مثال۱۷. رقم یکان عدد زیر را تعیین کنید.

$$N=1389^1+1389^2+1389^3+\cdots+1389^{1387}$$

حل: کافی است باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد N را بر ۱۰ تعیین کنیم.

$$N=1389^1+1389^2+1389^3+\cdots+1389^{1387}\overset{10}{\equiv}(-1)^1+(-1)^2+(-1)^3+\cdots+(-1)^{1387}$$

$$N\overset{10}{\equiv}-1+1-1+\cdots+1-1\overset{10}{\equiv}-1\overset{10}{\equiv}9\ ;\ N\equiv9$$

بنابراین، رقم یکان عدد N برابر ۹ است.

تعیین رقم یکان اعداد توان‌دار

برای تعیین رقم یکان اعداد توان‌دار، کافی است توان عدد را زیر

۴ تقسیم کنیم که در این صورت دو حالت برای باقی‌مانده پیش می‌آید. حالت اول این است که باقی‌مانده صفر شود. در این حالت به جای توان، عدد ۴ را جای‌گزین می‌کنیم. حالت دوم باقی‌مانده‌ی غیرصفر است که در این حالت به جای توان عدد، همان عدد باقی‌مانده‌ی غیر صفر را قرار می‌دهیم:

$$a^n \overset{10}{\equiv} \begin{cases} a^4 & \text{n بر ۴ بخش‌پذیر باشد} \\ a^r & \text{n بر ۴ باقی‌مانده‌ی ناصفر r دهد} \end{cases}$$

نکته: اگر رقم یکان عددی یکی از اعداد ۰، ۱، ۵ یا ۶ باشد، تمام توان‌های طبیعی آن عدد نیز دارای همان رقم یکان خواهند بود:

$$a \overset{10}{\equiv} 0 \; ; \; a^n \overset{10}{\equiv} 0 \; ; \; a \overset{10}{\equiv} 1 \; ; \; a^n \overset{10}{\equiv} 1$$

$$a \overset{10}{\equiv} 5 \; ; \; a^n \overset{10}{\equiv} 5 \; ; \; a \overset{10}{\equiv} 6 \; ; \; a^n \overset{10}{\equiv} 6$$

برای تعیین رقم یکان یک عدد، از هم‌نهشتی‌های زیر نیز می‌توان استفاده کرد:

$$a \overset{10}{\equiv} 3 \; ; \; a^{2n} \overset{10}{\equiv} 1 \; , \; a \overset{10}{\equiv} 2 \text{ یا } 8 \; ; \; a^{4n} \overset{10}{\equiv} 6$$

$$a \overset{10}{\equiv} 9 \; ; \; a^n \overset{10}{\equiv} \begin{cases} 1 & \text{n زوج} \\ 9 & \text{n فرد} \end{cases} , \; a \overset{10}{\equiv} 4 \; ; \; a^n \overset{10}{\equiv} \begin{cases} 4 & \text{n فرد} \\ 6 & \text{n زوج} \end{cases}$$

مثال۱۸. رقم یکان عدد زیر را تعیین کنید.

$$M = 101^{1389} + 102^{1389} + \cdots + 989^{1389}$$

حل: باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد ۱۳۸۹ بر ۴ برابر ۱ است. پس:

$$M \overset{10}{\equiv} \underbrace{101^1 + 102^1 + \cdots + 989^1}_{\text{تعداد جملات} = 889} = \frac{889}{2}(2 \times 101 + 888(1))$$

$$M \overset{10}{\equiv} \frac{889}{2} \times 1090 = 889 \times 545 \overset{10}{\equiv} 9 \times 5 = 45 \overset{10}{\equiv} 5 \; ; \; M \overset{10}{\equiv} 5$$

(رقم یکان M)

مثال۱۹: رقم یکان عدد زیر را بیابید.

$$N = (1388)^{2!} + (1388)^{4!} + \cdots + (1388)^{1000!}$$

حل: با توجه به (n بر ۴ بخش‌پذیر) $a^n \overset{10}{\equiv} a^4$، می‌توان نوشت:

$$N \overset{10}{\equiv} (-2)^2 + \underbrace{(-2)^4 + (-2)^4 + (-2)^4 + \cdots + (-2)^4}_{499 \text{ جمله}} =$$

$$2^2 + 499 \times 2^4 \overset{10}{\equiv} 4 + (-1)(-4)$$

$$N \overset{10}{\equiv} 8 \quad \text{(رقم یکان N)}$$

مثال۲۰: رقم یکان عدد M را بیابید.

$$M = 1387^{11} + 1387^{14} + 1387^{17} + \cdots + 1387^{1388}$$

حل: تعداد جملات عدد M برابر $(1 + \frac{1388 - 11}{3})$ یا ۴۶۰ است و با توجه به هم‌نهشتی $1387^k \overset{10}{\equiv} 7^k$، برای تعیین رقم یکان M می‌توان رقم یکان مجموع زیر را تعیین کرد:

$$M \overset{10}{\equiv} 7^{11} + 7^{14} + 7^{17} + \cdots + 7^{1388}$$

از طرف دیگر، با توجه به هم‌نهشتی $7^3 \overset{10}{\equiv} 3$ یا $7^{n+3} \overset{10}{\equiv} 3(7^n)$، می‌توان نوشت $(7^{11} \overset{10}{\equiv} 3)$:

$$M \overset{10}{\equiv} \underbrace{\overbrace{(3+9+7+1)}^{20} + \overbrace{(3+9+7+1)}^{20} + \cdots + \overbrace{(3+9+7+1)}^{20}}_{\frac{460}{4} = 115 \text{ پرانتز چهارجمله‌ای}}$$

$$M \overset{10}{\equiv} 115 \times 20 \overset{10}{\equiv} 0 \; ; \; M \overset{10}{\equiv} 0 \quad \text{(رقم یکان M)}$$

مثال۲۱. رقم یکان عدد $N = (1!)^1 + (2!)^2 + \cdots + (2008!)^{1387}$ را تعیین کنید.

حل: با توجه به این نکته که باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد n! برای هر $n \geq 5$ بر ۱۰ برابر صفر است:

$$N \overset{10}{\equiv} 1 + 2^2 + 6^3 + 24^4 + 0 + 0 + 0 + \cdots + 0$$

$$N \overset{10}{\equiv} 1 + 4 + 6 + 6 = 17 \overset{10}{\equiv} 7 \; ; \; N \overset{10}{\equiv} 7 \quad \text{(رقم یکان N)}$$

مثال۲۲. رقم یکان عدد $N = (1388)^{2008!} + (1389)^{2009!}$ را بیابید.

حل: اعداد !۲۰۰۸ و !۲۰۰۹ بر ۴ بخش‌پذیرند. بنابراین به جای هریک ۴ قرار می‌دهیم:

$$N \overset{10}{\equiv} (-2)^4 + (-1)^4 = 16 + 1 = 17 \overset{10}{\equiv} 7 \; ; \; N \overset{10}{\equiv} 7 \quad \text{(رقم یکان N)}$$

مثال۲۳. رقم یکان عدد $M = (1387)^{88k+3} + (2007)^{44k+4}$ را تعیین کنید.

حل:

$$M \overset{10}{\equiv} 7^{88k+3} + 7^{44k+4} \overset{10}{\equiv} 7^3 + 7^4 \overset{10}{\equiv} 7(-1) + (-1)^2$$

(رقم یکان M)

$$M \overset{10}{\equiv} -7 + 1 = -6 \overset{10}{\equiv} 4 \; ; \; M \overset{10}{\equiv} 4$$

مثال۲۴. رقم یکان عدد $N = 1387^{7^{7^7}}$ را بیابید.

حل: رقم یکان N معادل رقم یکان $M = 7^{7^{7^7}}$ است؛ بنابراین:

$$7^7 \overset{2}{\equiv} 1^7 = 1 \; ; \; 7^7 = 2t + 1 \; ; \; 7^{7^7} = 7^{2t+1} = (7^2)^t \times 7 = 49^t \times 7$$

$$7^{7^7} \overset{4}{\equiv} (1)^t(3) = 3 \; ; \; 7^{7^7} = 4k + 3 \; ; \; M = 7^{4k+3}$$

$$M \overset{10}{\equiv} 7^3 = 7^2 \times 7 \overset{10}{\equiv} (-1)(-3) = 3 \; ; \; M \overset{10}{\equiv} 3 \; ; \; N \overset{10}{\equiv} 3$$

(رقم یکان N)

مثال۲۵. با فرض $M=(1!)^1+(2!)^2+(3!)^3+\cdots+(1387!)^{2008}$، رقم یکان $S=M^{M^M}$ را بیابید.

حل:

$$M=(1!)^1+(2!)^2+(3!)^3+(4!)^4+\cdots+(1387!)^{2008}\overset{4}{\equiv}1+2^2+6^3+0+0+\cdots+0\,;$$

$$M\overset{4}{\equiv}1\,;\quad M^M\overset{4}{\equiv}1\,;\quad M^M=4k+1$$

$$M=(1!)^1+(2!)^2+(3!)^3+\cdots+(1387!)^{2008}\overset{10}{\equiv}1+2^2+6^3+24^4+0+0+\cdots$$

$$M\overset{10}{\equiv}1+4+6+6=17\overset{10}{\equiv}7\,;\quad S=M^{M^M}\overset{10}{\equiv}7^{4k+1}\overset{10}{\equiv}7\,;\quad S\overset{10}{\equiv}7$$

(رقم یکان S)

تمرین

۱. باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد 4^{1001} بر ۲۰۰۳ را توسط قضیه‌ی کوچک فرما بیابید.

۲. باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد $M=(7^{12}+8^{12}+9^{12}+\cdots+19^{12})^{1389}$ را بر ۱۳ بیابید.

۳. باقی‌مانده‌ی تقسیم عبارت $N=(x^{2000}+y^{900}+z^{800})^{2009}$ بر ۱۱، با فرض این‌که x، y و z بر ۱۱ بخش‌پذیر نباشند، چه عددی است؟

۴. باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد $M=(38^{88}+87^{128})^{89}$ را بر ۱۹ بیابید.

۵. عدد $N=7^{2008}+k$ مضرب ۱۷ است. کوچک‌ترین عدد طبیعی k را بیابید.

۶. اگر p عدد اول بزرگ‌تر از ۷ باشد، ثابت کنید که عدد $M=p^{12}-1$ بر اعداد ۱۵، ۲۱، ۳۵ و ۱۰۵ بخش‌پذیر است.

۷. باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد $N=(29^{30}+31^{28}-2)^{2009}$ را بر ۸۹۹ بیابید.

۸. باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد $M=(5^{2010}+7^{2012})^{2009}$ را بر ۳۵ تعیین کنید.

۹. باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد $N=1^{2003}+2^{2003}+3^{2003}+\cdots+4004^{2003}$ را بر ۲۰۰۳ بیابید.

۱۰. باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد $M=3^1+3^2+3^3+3^4+\cdots+3^{2009}$ را بر ۸ بیابید.

۱۱. باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد $N=2^1+2^2+2^3+\cdots+2^{2008}$ را بر ۱۵ تعیین کنید (با سه روش).

۱۲. باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد $M=2^{2^1}+2^{2^2}+2^{2^3}+2^{2^4}+\cdots+2^{2^{2009}}$ را بر ۱۱ بیابید.

۱۳. باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد $N=3^1+3^3+3^5+3^7+\cdots+3^{2009}$ را بر ۱۳ بیابید.

۱۴. باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد $M=2^{1!}+2^{2!}+2^{3!}+2^{4!}+\cdots+2^{2009!}$ را بر ۴۱ بیابید.

۱۵. اگر باقی‌مانده‌ی عدد $M=\overline{x51y}$ را بر ۷۲ برابر صفر شود، باقی‌مانده‌ی عدد $N=(y^{x^{2009}}+x^{y})^{1389}$ را بر ۸۰ بیابید.

۱۶. رقم یکان عدد $N=1!+2!+3!+\cdots+2009!$ را تعیین کنید.

۱۷. رقم یکان عدد $M=(1+2+3+\cdots+2009)!$ را بیابید.

۱۸. رقم یکان عدد $N=(2009^1+2009^2+2009^3+\cdots2009^{2009})^{2009}$ را بیابید.

۱۹. رقم یکان عدد $M=2^1+2^2+2^3+2^4+\cdots+2^{2009}$ را بیابید.

۲۰. رقم یکان عدد $N=101^{2009}+102^{2009}+\cdots+989^{2009}$ را بیابید.

۲۱. رقم یکان عدد $M=(2008)^{2!}+(2008)^{4!}+\cdots+(2008)^{1000!}$ را بیابید.

۲۲. رقم یکان عدد $N=(2007)^{11}+(2007)^{14}+(2007)^{17}+\cdots+(2007)^{2009}$ را بیابید.

۲۳. رقم یکان عدد $M=(1!)^1+(2!)^2+(3!)^3+\cdots+(1388!)^{2009}$ را بیابید.

۲۴. اگر داشته باشیم:
$M=1!+3!+5!+\cdots+2009!$ و $N=2!+4!+6!+\cdots+2008!$
رقم یکان عدد $S=(M^N+N^M)^{1389}$ را تعیین کنید.

۲۵. رقم یکان عدد $N=(2008)^{1388!}+(2009)^{1389!}$ را بیابید.

۲۶. رقم یکان عدد $M=(2007)^{88k+2}+(1387)^{44k+4}$ را تعیین کنید.

۲۷. رقم یکان عدد $N=1387^{7^{7^7}}+2007^{7^{7^7}}$ را بیابید.

۲۸. رقم یکان عدد $S=M^{M^M}$ را با فرض $M=(1!)^1+(2!)^2+\cdots+(2009!)^{1389}$ بیابید.

۲۹. رقم سمت راست عدد $N=(1!+3!+\cdots+2009!)(2!+4!+\cdots+2008!)$ را بیابید.

۳۰. با استفاده از قضیه‌ی فرما، یک سری از جواب‌های عمومی معادله‌ی $x^p+y^p=z^m$ را با فرض $(p,m)=1$ به دست آورید. (p اول است). (رجوع شود به رشد برهان ۵۴)

□□□

نماد تجسمی جهت اثبات مساحت دایره به روش علمی کاربردی

● عبدالساده نیسی

مساحت دایره

این قاعده از دیرباز و از رابطه‌ی مجذور شعاع ضرب در عدد پی πR^{2} بدست می‌آید. با توجه به این که برای اثبات این معادله از طریق معادلات پیشرفته روش‌های مختلفی وجود دارد اما هیچ کدام از آن‌ها برای مقاطع تحصیلی تا حد متوسط قابل ادراک نمی‌باشد، بنابراین لازم دیده شد که علاوه بر اثبات این قضیه و بیان نقش عدد π در مساحت دایره یک نماد تجسمی از مراحل تکوین این قضیه طراحی و جهت تجسم و مشاهدات عینی مورد استفاده قرار گیرد.

اثبات مساحت دایره:

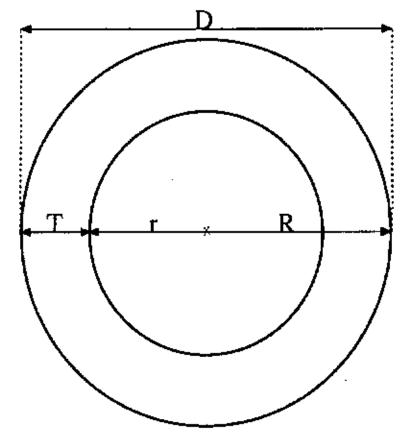
عدد π که مقدار آن ۳/۱۴ یا به طور دقیق‌تر ۳/۱۴۱۵۹۲۷ می‌باشد عددی است ثابت و به عنوان رابط میان محیط و قطر دایره تعریف می‌شود.

محیط دایره $= D\pi = 2\pi R$

این عد (π) که نقش آن در محیط دایره شفاف و قابل احساس می‌باشد در مساحت دایره به سادگی مشهود نیست و نیاز به اثبات و استدلال دارد. برای این موضوع پس از تحقیق و بررسی پیرامون

مساحت دایره جهت رسیدن به نقش عدد π و اثبات مساحت از راه ساده‌ای اقدام گردید. از این‌رو به اثبات مساحت حلقه محصور میان دو دایره پرداخته شد.

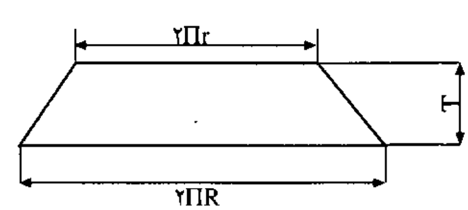
$$S_2 = \pi R^2 - \pi r^2 = \pi(R^2 - r^2) = \pi(R+r)(R-r)$$
$$R + r = D - T$$
$$R - r = T$$
$$S_2 = \pi T(D - T)$$



مساحت حلقه مورد نظر از طریق روش معمول بدست آمد. اما نقش عدد π معلوم نمی‌باشد با در نظر گرفتن این مطلب که نقش عدد π در رابطه محیط دایره روشن و قابل لمس می‌باشد اگر مساحت حلقه با روشی محاسبه شود که محیط هر دو دایره در آن موثر باشد و جواب واحدی حاصل گردد نقش عدد π در مساحت حلقه و سپس دایره روشن خواهد شد.

راه‌حل:

در ذهن خود حلقه را درنظر می‌گیریم تا به‌صورت ذوزنقه متساوی‌الساقین مجسم شود. با این فرض مساحت ذوزنقه را بدست می‌آوریم اگر جواب با جواب قبلی یکی باشد به هدفی که پیگیری کرده‌ایم خواهیم رسید.



$$\text{مساحت ذوزنقه} \Rightarrow S_{tr} = \frac{2\pi R + 2\pi r}{2} \times T$$
$$S_{tr} = \pi T(R + r)$$

جواب به‌دست آمده برای مساحت ذوزنقه که از طریق محیط دو دایره محاسبه شده است با مساحت حلقه یکسان می‌باشد و می‌توان به‌راحتی نقش عدد π را در این اثبات مشاهده نمود.

حال اگر بخواهیم نقش این عدد را در مساحت دایره احساس نماییم به‌طریق زیر عمل می‌شود:

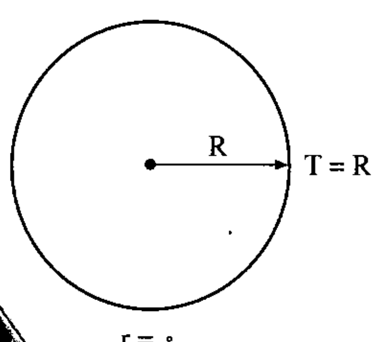
اثبات مساحت دایره:

با توجه به رابطه به‌دست آمده برای مساحت حلقه و ذوزنقه یعنی

$S = \pi T(R + r)$

اگر مقدار T را آن‌قدر بزرگ نماییم تا به اندازه‌ی R شود به‌خودی خود مقدار r صفر (۰) خواهد شد.

$$S = \pi R(R + 0)$$
$$S = \pi R^2$$



فیثاغورس در جزیره ساموس، نزدیک کرانه‌های ایونی، زاده شد. او در عهد قبل از ارشمیدس، زنون و اودوکس (۵۶۹ تا ۵۰۰ (پیش از میلاد)) می‌زیست. او در جوانی به سفرهای زیادی رفت و این امکان را پیدا کرد تا با کاهنان مصر، بابل و مغان ایرانی آشنا شود و دانش آن‌ها را بیاموزد. به طوری که معروف است فیثاغورس، دانش مغان را آموخت. او روی‌هم رفته، ۲۲ سال در سرزمین‌های خارج از یونان بود و چون از سوی پولوکراتوس، شاه یونان، به آمازیس، فرعون مصر سفارش شده بود، توانست به سادگی به رازهای کاهنان مصری دست یابد. او مدت‌ها در این کشور به سر برد و در خدمت کاهنان مصری به شاگردی پرداخت و آگاهی‌ها و باورهای بسیار کسب کرد و از آن‌جا روانه بابل شد و دوران شاگردی را از نو آغاز کرد.

وقتی او در حدود سال ۵۳۰، از مصر بازگشت، در زادگاه خود مکتب اخوتی (که امروزه برچسب مکتب فیثاغورس بر آن خورده است) را بنیان گذاشت. هدف او از بنیان نهادن این مکتب این بود که بتواند مطالب عالی ریاضیات و مطالبی را تحت عنوان نظریه‌های فیزیکی و اخلاقی تدریس کند و پیشرفت دهد.

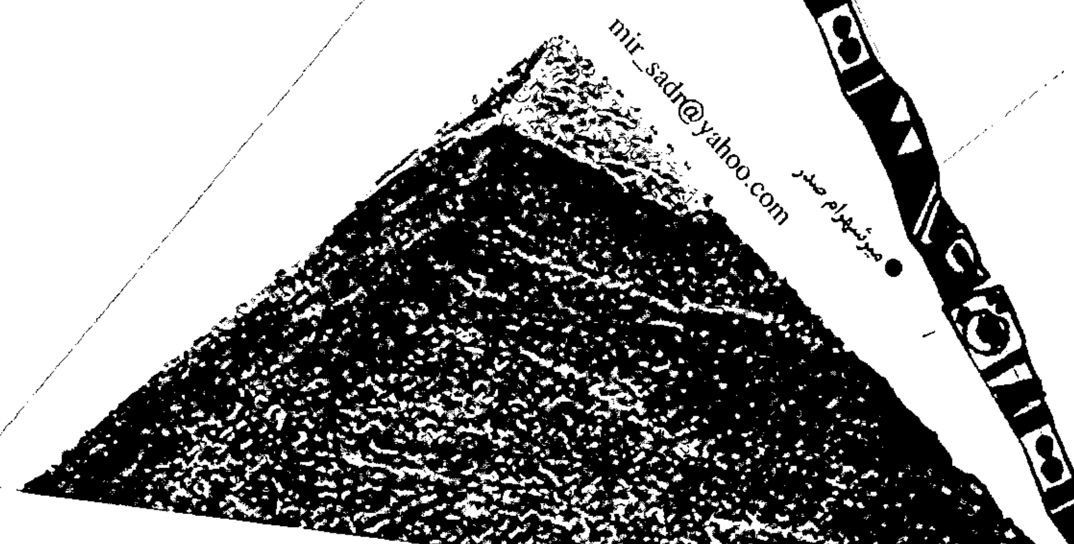
فیثاغورس نیز به مانند سقراط جانب احتیاط را نگاه داشت و چیزی ننوشت. تعالیم وی از طریق شاگردانش به دست ما رسیده است.

شیوه تفکر این مکتب با سنت قلیمی دموکراسی، که در آن زمان بر ساموس حاکم بود، متضاد بود. و چون این مشرب فلسفی با مذاق مردم ساموس خوش نیامد، فیثاغورس به ناچار، زادگاه‌اش را ترک گفت و به سمت شبه‌جزیره آپتین (از سرزمین‌های وابسته به یونان) رفت و در کراتون مقیم شد.

در افسانه‌ها چنین آمده است که متعصبان آیینی و سیاسی، توده‌های مردم را علیه او شوراندند و به ازای نور هدایتی که وی راهنمای ایشان کرده بود مکتب و معبد او را آتش زدند و وی در میان شعله‌های آتش جان سپرد.

وی نظرات ریاضی خویش را با موضوعات فلسفی و باورهای آیینی درهم آمیخته بود. او در عین حال هم عارف و هم ریاضیدان بود و به قولی یک دهم شهرت او نتیجه نبوغ وی و مابقی ماحصل ارشاد و رسالت اوست.

mir_sadr@yahoo.com
میرشهرام صدر



بلندای خئوپس

برای آن‌که نقش فیثاغورس را در تبیین اصول ریاضیات درک کنیم، لازم است کمی درباره جایگاه ریاضیات در عصر وی و پیشرفت‌هایی که تا زمان وی صورت گرفته بود، بدانیم که این هم به نوبه خود، درخور توجه است. جالب است بدانید با این که مبنای ریاضیات بر «استدلال» استوار است، قبل از فیثاغورس هیچ کس نظر روشنی درباره این موضوع نداشت که استدلال باید مبنی بر مفروضات باشد. به عبارتی استدلال، مسئله‌ی تعریف‌شده‌ای نبود.

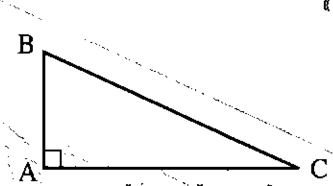
در واقع می‌توان گفت بنا به قول مشهور، فیثاغورس در بین اروپاییان اولین کسی بود که روی این نکته اصرار ورزید که در هندسه باید ابتدا «اصول موضوع» و «اصول متعارفی» را معین کرد و آنگاه به اتکاء آن‌ها که «مفروضات» هم نامیده می‌شوند، روش استنتاج متوالی را پیش گرفت به پیش رفت. از نظر تاریخی «اصول متعارفی» عبارت بود از «حقیقتی لازم و خودبه‌خود واضح».

این‌که فیثاغورس استدلال را وارد ریاضیات کرد، از مهم‌ترین حوادث علمی است و قبل از فیثاغورس، هندسه عبارت بود از مجموعه قواعدی که ماحصل تجارب و ادراکات متفرق بوده‌اند؛ تجارب و قواعدی که هیچ‌گونه ارتباطی با هم نداشتند حتی کسی در آن زمان حدس نمی‌زد مجموعه‌ی این قواعد را بتوان از عده‌ی بسیار کمی اصول نتیجه گرفت. در صورتی که امروزه حتی تصور این موضوع که ریاضیات بدون استدلال چه وضع و حالی داشته است برای ما ممکن نیست. اما در آن عصر این موضوع گام بلندی به سوی نظام قدرتمند هندسه محسوب می‌شد.

قضیه فیثاغورس

یکی از معروف‌ترین قضیه‌ها در هندسه است و اهمیت آن ناشی از کاربردش در حل مسائل هندسه می‌باشد. از کاربردهای مهم این قضیه می‌توان در محاسبه‌ی فاصله‌ی بین دو نقطه در صفحه و فضا و معادله‌ی دایره در صفحه (هندسه تحلیلی) نام برد. بیشتر دانش‌آموزان این قضیه را به خوبی می‌شناسند و در حل مسائل از آن کمک می‌گیرند، قضیه‌ی فیثاغورس می‌گوید:

«در هر مثلث قائم‌الزاویه، مربع وتر برابر است با مجموع مربعات دو ضلع دیگر»

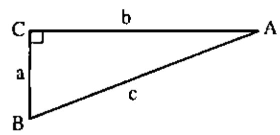


$BC^2 = AB^2 + AC^2$

در این مقاله با دو روش عملی درستی قضیه‌ی فیثاغورس را بررسی کرده، هم‌چنین درستی قضیه فیثاغورس به روش‌های جبری و تحلیلی ثابت می‌کنیم و در انتها؛ با طرح یک مسأله کاربردی، ارتفاع هرم خئوپس را محاسبه می‌کنیم.

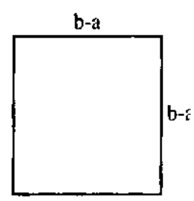
روش عملی اول. برای بررسی درستی قضیه فیثاغورس با روش عملی مراحل زیر را انجام می‌دهیم.

مرحله‌ی اول: مثلث قائم‌الزاویه ABC را با طول ضلع‌های a، b و c ($c>b>a$) درنظر می‌گیریم (شکل۱).



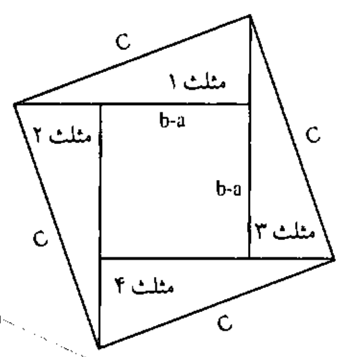
(شکل۱)

مرحله‌ی دوم: مربعی به طول b-a به صورت زیر را رسم می‌کنیم:



(شکل۲)

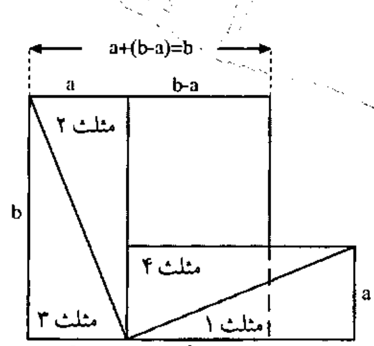
مرحله‌ی سوم: چهار مثلث مانند ΔABC در شکل۱ را در چهار طرف ضلع‌های این مربع به صورت زیر قرار می‌دهیم. (شکل۳)



(شکل۳)

همان‌طور که در شکل ۳ ملاحظه می‌کنید، مربعی به ضلع c به وجود می‌آید که مساحت آن برابر با $S = c^2$ است.

مرحله‌ی چهارم: اکنون می‌خواهیم مساحت شکل۳ را به روش دیگری محاسبه کنیم، برای این منظور مثلث ۱ را کنار مثلث ۴ و مثلث ۳ را کنار مثلث ۲ قرار می‌دهیم. (شکل۴)



(شکل۴)

شکل ۴ از دو مربع به ضلع های a و b تشکیل شده است، پس مساحت آن برابر است با:

$$S = a^2 + b^2$$

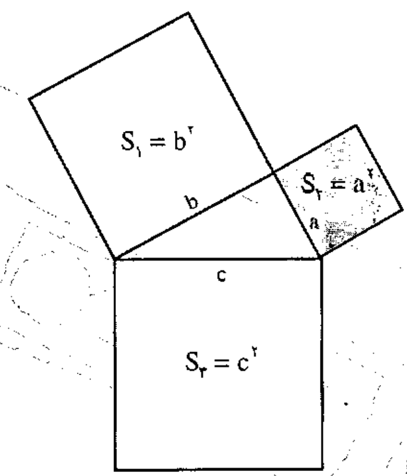
با توجه به مساحت شکل های ۳ و ۴ درمی‌یابیم که:

$$\begin{cases} S = c^2 \\ S = a^2 + b^2 \end{cases} \Rightarrow c^2 = a^2 + b^2$$

با توجه به رابطه‌ی اخیر درستی قضیه‌ی فیثاغورس برقرار است.

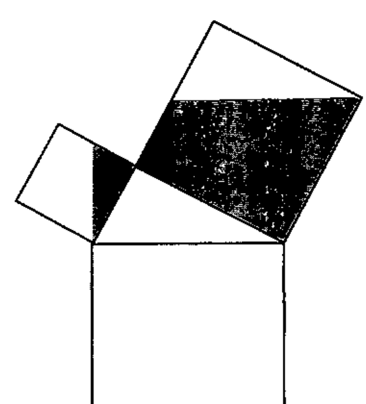
□

روش عملی دوم. مثلث قائم‌الزاویه ABC را با طول ضلع های c, b, a $(c > b > a)$ در نظر می‌گیریم و روی وتر این مثلث یک مربع بزرگ به طول c و روی دو ضلع زاویه قائمه دو مربع دیگر به طول‌های b و a بنا می‌کنیم. (شکل۵)



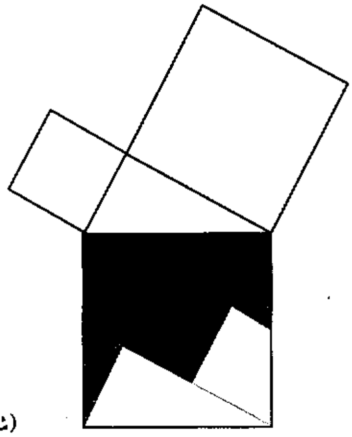
(شکل۵)

اکنون سطح مربع‌های کوچک‌تر را که روی ضلع های زاویه‌ی بنا شده‌اند، به قطعات کوچک‌تری تقسیم می‌کنیم. (شکل۶)



(شکل۶)

در این مرحله می‌توانیم با قطعات کوچک‌تری که به‌دست آورده‌ایم، سطح مربع بزرگ‌تر را کاملاً بپوشانیم یا موزاییک کنیم.



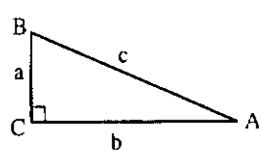
(شکل۷)

با توجه به دو شکل ۶ و ۷ ملاحظه می‌کنیم که مجموع مساحت‌های دو مربع کوچک‌تر برابر با مساحت مربع بزرگ‌تر است، از آن‌جا که مجموع مساحت‌های دو مربع کوچک‌تر برابر با $a^2 + b^2$ است و مساحت مربع بزرگ‌تر برابر با c^2 می‌باشد، درستی قضیه فیثاغورس برقرار است، یعنی در مثلث قائم‌الزاویه ABC داریم:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

اثبات جبری قضیه‌ی فیثاغورس

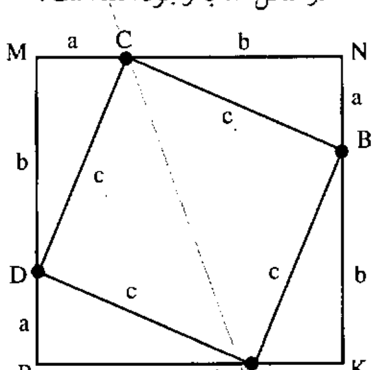
مثلث قائم‌الزاویه ABC را با طول ضلع های c, b, a $(c > b > a)$ درنظر می‌گیریم.



(شکل۸)

می‌خواهیم در این مثلث نشان دهیم که: $c^2 = a^2 + b^2$

برای این منظور شکل زیر را رسم می‌کنیم (شکل۹) همان‌طور که ملاحظه می‌کنید این شکل از کنار هم قرار گرفتن چهار مثلث مانند ΔABC در شکل ۸، به وجود آمده است.



(شکل۹)

در شکل ۹، یک مربع بزرگ مشاهده می‌کنید که طول هر ضلع آن برابر با a+b است، درنتیجه مساحت آن برابر است با:

$$S = (a + b)(a + b)$$

مربع CBAD به ضلع C وجود دارد که مساحت آن برابر با $S_1 = c^2$ و مساحت هر مثلث قائم‌الزاویه برابر با $S_2 = \frac{1}{2}ab$ است؛

با توجه به شکل ۹ ملاحظه می‌کنید:

$$S_{MNPK} = S_{CBAD} + 4S_{BNC}$$
$$\Rightarrow S = S_1 + 4S_2$$
$$\Rightarrow (a+b)(a+b) = c^2 + 4(\frac{1}{2}ab)$$
$$\Rightarrow a^2 + 2ab + b^2 = c^2 + 2ab$$
$$\Rightarrow a^2 + b^2 = c^2$$

درنتیجه حکم ثابت شد.

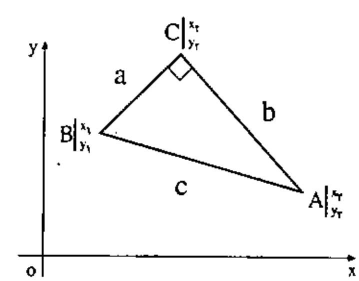
اثبات تحلیلی قضیه‌ی فیثاغورس

مثلث قائم‌الزاویه ABC را با مختصات رأس‌های $B(x_1, y_1)$، $C(x_2, y_2)$ و $A(x_3, y_3)$ و طول ضلع‌های a، b و c درنظر می‌گیریم به طوری که $c > b > a$، (شکل ۱۰) می‌خواهیم با روش تحلیلی ثابت کنیم:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

برای این منظور طول ضلع‌های مثلث را به کمک مختصات رأس‌های آن به دست می‌آوریم، سپس درستی رابطه‌ی ذیل را نشان می‌دهیم:

$$BC^2 + AC^2 = AB^2$$



(شکل ۱۰)

$$AB = \sqrt{(x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2}$$
$$BC = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$
$$AC = \sqrt{(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2}$$

$$BC^2 + AC^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2$$
$$= x_2^2 + x_1^2 - 2x_1x_2 + y_2^2 + y_1^2 - 2y_1y_2$$
$$+ x_3^2 + x_2^2 - 2x_2x_3 + y_3^2 + y_2^2 - 2y_2y_3$$
$$= x_1^2 + x_3^2 + y_1^2 + y_3^2 + 2(x_2^2 + y_2^2$$
$$- x_2x_3 - x_1x_2 - y_2y_3 - y_1y_2) \qquad (1)$$

از طرفی چون مثلث ABC در رأس C قائمه است، پس: $m_{BC} = \frac{-1}{m_{AC}}$؛ درنتیجه داریم:

$$m_{BC} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \;;\; m_{AC} = \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2}$$

$$m_{BC} = \frac{-1}{m_{AC}} \Rightarrow \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{x_2 - x_3}{y_3 - y_2}$$
$$\Rightarrow (x_2 - x_1)(x_2 - x_3) = (y_2 - y_1)(y_3 - y_2)$$
$$\Rightarrow x_2^2 + y_2^2 - x_2x_3 - x_1x_2 - y_2y_3 - y_1y_2$$
$$= -y_1y_3 - x_1x_3 \qquad (2)$$

اکنون رابطه‌ی (۲) را در رابطه‌ی (۱) جایگزین می‌کنیم:

$$BC^2 + AC^2 = x_1^2 + x_3^2 + y_1^2 + y_3^2 + 2(-y_1y_3 - x_1x_3)$$
$$= (x_1^2 + x_3^2 - 2x_1x_3) + (y_1^2 + y_3^2 - 2y_1y_3)$$
$$= (x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2 = AB^2$$
$$\Rightarrow BC^2 + AC^2 = AB^2$$

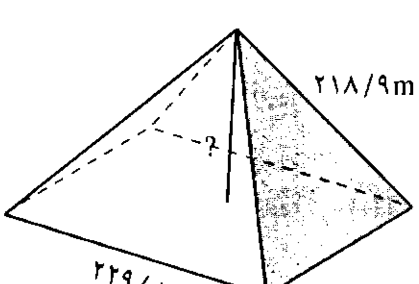
درنتیجه حکم ثابت شد.

در این قسمت از مقاله به ارائه یک مسأله کاربردی از قضیه فیثاغورس می‌پردازیم.

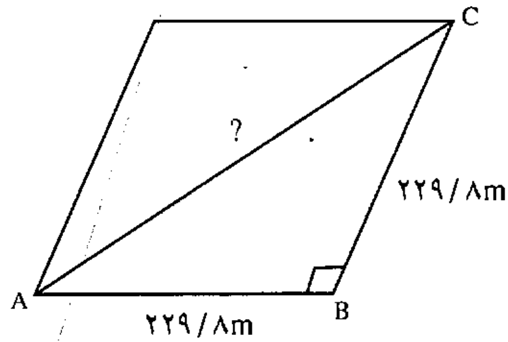
بلندای هرم خئوپس

جیزه یکی از شهرهای کشور مصر است. شهر جیزه در استان جیزه قرار دارد و هرم آن یعنی هرم بزرگ جیزه شهرت جهانی دارد. هرم بزرگ جیزه در اصل همان هرم خئوپس[1] (کئوپس) بزرگ‌ترین هرم از اهرام سه‌گانه‌ی مصر است. ساخت این هرم در زمان حیات فرعون خئوپس آغاز شد ولی مدت‌ها بعد از مرگ اوبه پایان رسید. این هرم هم مانند هرم‌های دیگر شامل مقبره‌ی شاه و ملکه به صورت مجزا است که البته بعد از اکتشاف هر دو خالی بوده‌اند. سطح زیربنای هرم، یک مربع به طول ۲۲۹٫۸ متر است و در بنای آن سنگ‌هایی از یک تن تا چهل تن به کار رفته‌اند. گفته می‌شود که حدود ۱۰۰٫۰۰۰ کارگر برای ساختن این بنا، بیشتر از ۲۰ سال زحمت کشیده‌اند.

قاعده‌ی هرم خئوپس مربعی به طول ۲۲۹٫۸ متر و هر یال جانبی آن به طول ۲۱۸٫۹ متر است. می‌خواهیم ارتفاع این هرم را پیدا کنیم.



برای این منظور ابتدا قطر مربع مقطع هرم را به کمک رابطه‌ی فیثاغورس مشخص می‌کنیم.



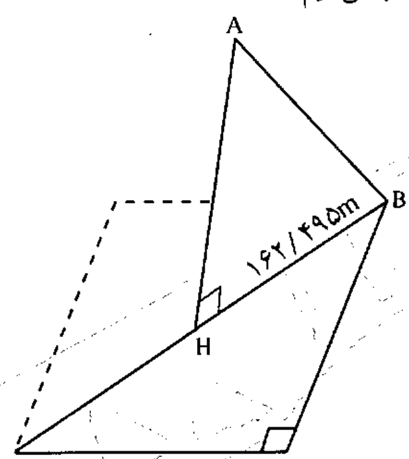
در مثلث قائم‌الزاویه ABC داریم:

$$AC^{۲} = AB^{۲} + BC^{۲}$$

$$\Rightarrow AC^{۲} = (۲۲۹/۸)^{۲} + (۲۲۹/۸)^{۲} = ۱۰۵۶۱۶/۰۸$$

$$\Rightarrow AC = \sqrt{۱۰۵۶۱۶/۰۸} = ۳۲۴/۹۹$$

اکنون با توجه به شکل زیر در مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABH، بلندای خئوپس را محاسبه می‌کنیم.



$$AB^{۲} = AH^{۲} + BH^{۲} \Rightarrow AH^{۲} = AB^{۲} - BH^{۲}$$

$$\Rightarrow AH^{۲} = (۲۱۸/۹)^{۲} - (۱۶۲/۴۹۵)^{۲} = ۲۱۵۱۲/۵۸$$

$$\Rightarrow AH^{۲} = \sqrt{۲۱۵۱۲/۵۸} = ۱۴۶/۶۷$$

1. cheops

1. http://mathematica.ludibunda.ch

2. http://www.mathsisfun.com

3. http://www.subtangent.com

4. http://fa.wikipedia.org

تفریح اندیشه

۱. مکعبی به ضلع ۴ اینچ (هر اینچ حدود ۲/۵ سانتی‌متر است) را رنگ و سپس آن را به ۶۴ مکعب یک اینچی تقسیم کرده‌ایم. یکی از این مکعب‌های کوچک را به تصادف برمی‌داریم و می‌اندازیم. احتمال این‌که هیچ یک از پنج وجه دیده شونده‌ی آن رنگ نشده باشد، چیست؟

❀❀❀

۲. سعید که آدم عجولی است، از پله‌ی برقی متحرک واقع در مسیرش با نرخ یک پله در هر ثانیه بالا می‌رود و پس از ۲۰ پله بالای آن می‌رسد. روز بعد، باز هم در حالی که پله‌ی برقی در حرکت است، با نرخ دو پله در ثانیه از آن بالا می‌رود و در ۳۲ پله به بالای آن می‌رسد. در صورتی که پلکان برقی متوقف باشد، چند پله از پایین تا بالا دارد؟

❀❀❀

[illegible]

مجموعه‌ی زیرمجموعه‌ها



● حمیدرضا امیری



می‌دانیم اگر مجموعه‌ی A دارای n عضو باشد آنگاه ۲^n زیر مجموعه دارد، حال اگر همه‌ی این زیر مجموعه‌ها را اعضای مجموعه‌ای در نظر بگیریم، آن را مجموعه‌ی توانی[1] A نامیده و با p(A) نمایش می‌دهیم. پس، p(A) یعنی مجموعه‌ی شامل همه‌ی زیر مجموعه‌های A که اگر تعداد اعضای A را با $|A|$ و تعداد اعضای p(A) را با $|p(A)|$ نمایش دهیم خواهیم داشت:

I) $$|A| = n \Leftrightarrow |p(A)| = ۲^n$$

II) $$B \subseteq A \Leftrightarrow B \in p(A)$$

تذکر مهم: چون همواره $A \subseteq \varnothing$ پس بنابر (II) همواره $\varnothing \in p(A)$ و بنابراین همواره برای هر مجموعه‌ی دلخواه مانند A داریم، $p(A) \neq \varnothing$.

مثال۱: اگر $A = \{۲,۳,۴\}$ در این صورت

$$p(A) = \{\varnothing, A, \{۲\}, \{۳\}, \{۴\}, \{۲,۳\}, \{۲,۴\}, \{۳,۴\}\}$$

مثال۲: اگر $A = \varnothing$ در این صورت

$$p(A) = \{\varnothing\}$$

مثال۳: اگر $|A| = ۲$ (A مجموعه‌ای ۲ عضوی است) در این صورت مجموعه‌ی $p(p(p(A)))$ چند عضو دارد؟

$$|A| = ۲ \Rightarrow |p(A)| = ۲^۲ = ۴ \Rightarrow |p(p(A))| = ۲^۴ = ۱۶$$
$$\Rightarrow |p(p(p(A)))| = ۲^{۱۶}$$

مثال۴: اگر A و B دو مجموعه باشند ثابت کنید:

$$A \subseteq B \Leftrightarrow p(A) \subseteq p(B)$$

حل: ابتدا فرض می‌کنیم $A \subseteq B$ و ثابت می‌کنیم $p(A) \subseteq p(B)$، (به روش عضوگیری دلخواه)

فرض کنیم $[X \in p(A) \Rightarrow X \subseteq A \xrightarrow{A \subseteq B} X \subseteq B \Rightarrow X \in p(B)]$
$\Rightarrow p(A) \subseteq p(B)$

حال فرض می‌کنیم $p(A) \subseteq p(B)$ و ثابت می‌کنیم $A \subseteq B$،

فرض کنیم $[x \in A \Rightarrow \{x\} \subseteq A \Rightarrow \{x\} \in p(A) \xrightarrow{p(A) \subseteq p(B)} \{x\} \in p(B)$
$\Rightarrow \{x\} \subseteq B \Rightarrow x \in B] \Rightarrow A \subseteq B$

نتیجه: اگر A و B دو مجموعه باشند همواره داریم:

$$A = B \Leftrightarrow p(A) = p(B)$$

مثال۵: برای هر دو مجموعه‌ی دلخواه مانند A و B ثابت کنید:

(I) $p(A) \cap p(B) = p(A \cap B)$

(II) $p(A) \cup p(B) \subseteq p(A \cup B)$

حل: برای اثبات روابط فوق نیاز به بیان دو ویژگی در مجموعه‌ها و بین اعمال اجتماع و اشتراک داریم یعنی:

I) $$\begin{matrix} A \subseteq B \\ A \subseteq C \end{matrix} \Leftrightarrow A \subseteq (B \cap C)$$

II) $$\begin{matrix} A \subseteq B \\ A \subseteq C \end{matrix} \Rightarrow A \subseteq (B \cup C)$$

همان‌طور که مشاهده می‌کنید عکس رابطه‌ی (II) در حالت کلی برقرار نمی‌باشد. و مثال‌های نقض فراوانی می‌توان برای آن یافت در صورتی که رابطه‌ی (I) به صورت یک قضیه‌ی دو شرطی بیان شده و اثبات این روابط به‌خصوص از روش عضوگیری دلخواه بسیار ساده است!

حال رابطه‌ی (I) را ثابت می‌کنیم،

فرض کنیم $[x \in [p(A) \cap p(B)] \Leftrightarrow x \in p(A)\ ,\ x \in p(B)$
$\Leftrightarrow x \subseteq A\ ,\ x \subseteq B \Leftrightarrow x \subseteq (A \cap B) \Leftrightarrow x \in p(A \cap B)]$
$\Rightarrow p(A) \cap p(B) = p(A \cap B)$

(توجه دارید که تمام روابط برگشت پذیر بوده و تساوی بین دو مجموعه حاصل شد)

در اثبات رابطه‌ی (II) که در زیر مشاهده خواهید کرد با توجه به رابطه‌ی ذکر شده که قبلاً یک طرفه بودن آن تأکید شد، فقط $p(A) \cup p(B) \subseteq p(A \cup B)$ ثابت می‌شود

فرض کنیم $[x \in [p(A) \cup p(B)] \Leftrightarrow x \in p(A)\ ,\ x \in p(B)$
$\Leftrightarrow x \subseteq A\ ,\ x \subseteq B \Rightarrow x \subseteq (A \cup B) \Rightarrow x \in p(A \cup B)]$
$\Rightarrow p(A) \cup p(B) \subseteq p(A \cup B)$

اگر فرض کنیم $A = \{۱\}$ و $B = \{۲,۴\}$ در این صورت $A \cup B = \{۱,۲,۴\}$ و با تشکیل $p(A)$ و $p(B)$ و $p(A \cup B)$ مشاهده می‌کنید که $\{۱,۲,۴\} \in p(A \cup B)$ ولی $\{۱,۲,۴\} \notin p(A) \cup p(B)$ پس عکس رابطه‌ی (II) برقرار نمی‌باشد.

مثال ۶: اگر A و B دو مجموعه باشند ثابت کنید:

$A \cap B = \varnothing \Leftrightarrow p(A) \cap p(B) = \{\varnothing\}$

حل:

(۱) فرض کنیم $A \cap B = \varnothing \Rightarrow p(A \cap B) = p(\varnothing) = \{\varnothing\}$

(۲) از طرفی: $p(A \cap B) = p(A) \cap p(B)$

$(۱),(۲) \Rightarrow p(A) \cap p(B) = \{\varnothing\}$

فرض کنیم $p(A) \cap p(B) = \{\varnothing\} \xrightarrow{(۲)}$
$p(A \cap B) = \{\varnothing\} \Rightarrow A \cap B = \varnothing$

مثال ۷: برای هر دو مجموعه‌ی دلخواه ثابت کنید:

$p(A-B) \subseteq p(A) - P(B)$

و سپس برای عکس رابطه، مثال نقض بزنید.

فرض کنیم $x \in p(A-B) \Rightarrow x \subseteq (A-B) \xrightarrow{(A-B)\subseteq A}$
$x \subseteq A\ ,\ x \nsubseteq B \Rightarrow x \in p(A)\ ,\ x \notin p(B) \Rightarrow$
$x \in (p(A)-p(B))] \Rightarrow p(A-B) \subseteq p(A) - p(B)$

حال اگر فرض کنیم $A = \{۱,۲\}$ و $B = \{۲,۳\}$ در این صورت واضح است که، $\{۱,۲\} \in p(A) - p(B)$ در صورتی که $(A-B) = \{۱\}$ و $p(A-B) = \{\varnothing, \{۱\}\}$ و $\{۱,۲\} \notin p(A-B)$ بنابراین عکس رابطه‌ی فوق برقرار نمی‌باشد.

مثال ۸: اگر A و B دو مجموعه دلخواه باشند ثابت کنید:

$p(A) - p(B) = p(A) - p(A \cap B)$

حل: می‌دانیم در حالت کلی و برای هر دو مجموعه‌ی دلخواه همواره $(A-B) = A - (A \cap B)$، بنابراین می‌توان نوشت:

$$p(A) - p(B) = p(A) - [\underbrace{p(A) \cap p(B)}_{p(A \cap B)}] = p(A) - p(A \cap B)$$

نتیجه‌ی مهم: با توجه به این که $|A-B| = |A| - |A \cap B|$ ($|A|$ یعنی تعداد اعضای A) پس می‌توان نوشت:

$$|p(A) - p(B)| = |p(A)| - \left|\underbrace{p(A) \cap p(B)}_{p(A \cap B)}\right| = |p(A)| - |p(A \cap B)|$$

مثال ۹: اگر $A = \{a, \{a\}, \{a\}, \{a\}, b\}$ و $B = \{b, \{a\}, \{\{a\}\}, \{b\}\}$ در این صورت مجموعه‌ی $p(A) - p(B)$ چند عضو دارد؟

حل: می‌دانیم $A \cap B = \{b, \{a\}\}$ مجموعه‌ای ۲ عضوی است پس،

$|p(A) - p(B)| = |p(A)| - |p(A \cap B)| = ۲^۴ - ۲^۲ = ۱۶ - ۴ = ۱۲$

مثال ۱۰: اگر $A = \{a, \{a\}, \{\{a\}\}, \{a, \{a\}\}\}$ در این صورت مجموعه‌ی $p(A) - A$ چند عضو دارد؟

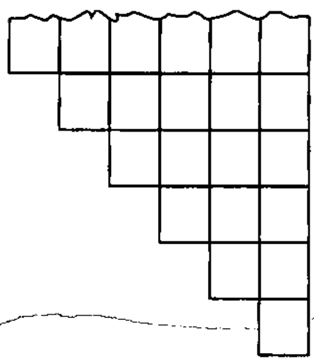
حل: $|p(A) - A| = |p(A)| - |p(A) \cap A|$

بنابراین باید بررسی کنیم که $p(A)$ و A چند عضو مشترک دارند، با توجه به تعریف مجموعه‌ی A واضح است که $\{a\} \in p(A)$ و $\{\{a\}\} \in p(A)$ و $\{a, \{a\}\} \in p(A)$ که همگی اعضای A نیز هستند پس، $|p(A) \cap A| = ۳$ و لذا داریم،

$|p(A)| - |p(A) \cap A| = ۲^۴ - ۳ = ۱۳$

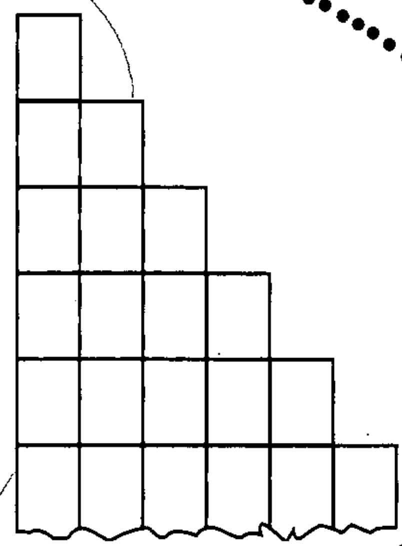
1. power set

● ترجمه: شهین نیهنا



نگاهی به سری‌های هندسی

$\sum_{k=1}^{n} k^2$ و $\sum_{k=1}^{n} k$



چکیده

در این مقاله، با نگاهی نو و جدید به سری‌های هندسی پرداخته‌ایم و از شکل‌های آشنای هندسی، برای اثبات جمع‌های جبری آموخته شده استفاده کرده‌ایم. برای اثبات رابطه‌ی اول از مساحت مربع‌های ایجاد شده در سطرها که روی هم قرار گرفته‌اند و در رابطه‌ی دوم از مکعب‌هایی به ضلع یک واحد استفاده شده است. سپس به کمک برش‌های داده شده، شکل‌ها محدودتر شده‌اند تا راحت‌تر بتوان مساحت و حجم آن‌ها را محاسبه کرد. در نهایت، مجموع مساحت‌ها در رابطه‌ی اول و نیز مجموع حجم‌ها در رابطه‌ی دوم، همان رابطه‌ی آشنای سری‌های هندسی را نتیجه‌گیری کرده است. هدف این مقاله، آشنایی دانش‌آموزان و همکاران با دیدگاهی دیگر برای اثبات سری‌هاست تا عزیزان با فهم بیشتر مسائل ریاضی و تجزیه و تحلیل آن‌ها، تأثیر مثبت تفکر ریاضی را دریابند.

مقدمه

تجربیات جدید و پژوهش در ریاضی، سبب می‌شود که انسان با بصیرت بیشتری به سامان‌دهی ذهن و اندیشه‌ی خویش بپردازد و برای رویارویی با چالش‌های علمی در بستر تدریس آماده شود. اکثر آموزشگران ریاضی، یادگیری ریاضی را مبنای توفیق فرد در حل مسئله، هم در زندگی عادی و هم در حوزه‌های دیگر مانند شیمی، فیزیک و... می‌دانند. بنابراین بهتر است، به‌دنبال روش‌های جدید و جذاب برای اثبات آموخته‌های قبلی باشیم تا نشان دهیم، ریاضی اگر زیبا و فهمیدنی باشد، بازتابی از طبیعت و جهان اطراف ماست.

قبلاً با دو نمونه از جمع‌های جبری زیر آشنا شده‌ایم:

$$1)\ 1+2+3+4+\cdots+(n-1)+n=\sum_{k=1}^{n} k=\frac{n(n+1)}{2}$$

$$2)\ 1^2+2^2+3^2+\cdots+(n-1)^2+n^2=\sum_{k=1}^{n} k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

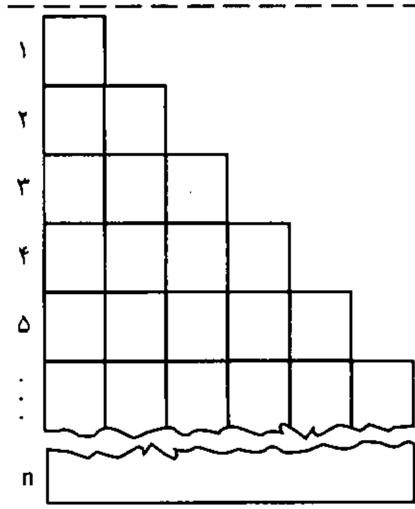
حال می‌خواهیم به $\sum_{k=1}^{n} k$ و $\sum_{k=1}^{n} k^2$ از منظر هندسی بنگریم و آن‌ها را اثبات کنیم.

برای اثبات اولین جمع؛ مربع‌هایی را داریم که با استفاده از مساحت آن‌ها، اتحاد بالا اثبات می‌شود. و برای دومین جمع، آرایشی از مکعب‌ها را داریم که حجم آن‌ها به اثبات اتحاد می‌انجامد.

اثبات اولین مجموع

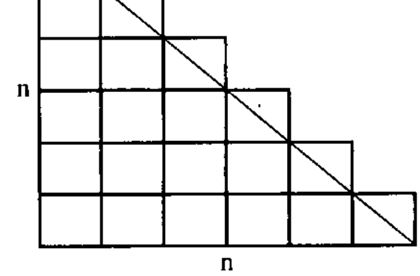
برای اثبات اولین مجموع، مربع‌هایی به طول ضلع یک واحد را داریم، که در شکل ۱ نشان داده شده‌اند. با توجه به شکل می‌بینیم که یک مربع روی اولین سطر، دو مربع روی دومین سطر، سه مربع روی سومین سطر و... تا n مربع روی nامین سطح قرار دارد. این مربع‌ها جمع زیر را می‌سازند:

$$1+2+3+\dots+(n-1)+n$$



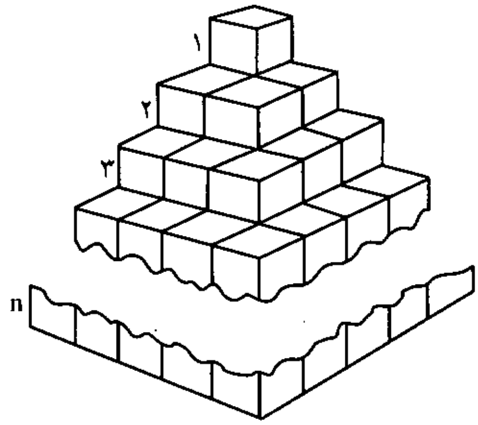
شکل ۱ **الگوی پلکانی از مربع‌های واحد**

علاوه بر این، می‌توان شکل بالا را با جدا کردن قسمت‌هایی از آن به شکل ۲ تبدیل کرد. مساحت مثلث بزرگ در شکل ۲، $\frac{n^2}{2}$ است؛ زیرا n سطر و n ستون دارد. از طرف دیگر، نیم شدن مربعات باقی‌مانده در شکل، نشان می‌دهد که مساحت آن‌ها نیز نصف شده است و چون در n سطر، n مثلث داریم، پس مساحت آن‌ها می‌تواند $n(\frac{1}{2})$ باشد. به این ترتیب، مجموع مساحت‌ها در شکل ۲ یا $\sum_{k=1}^{n} k$ برابر با $\frac{n^2}{2}+\frac{n}{2}$ خواهد شد که برابر است با: $\frac{n(n+1)}{2}$.



شکل ۲

اثبات دومین مجموع

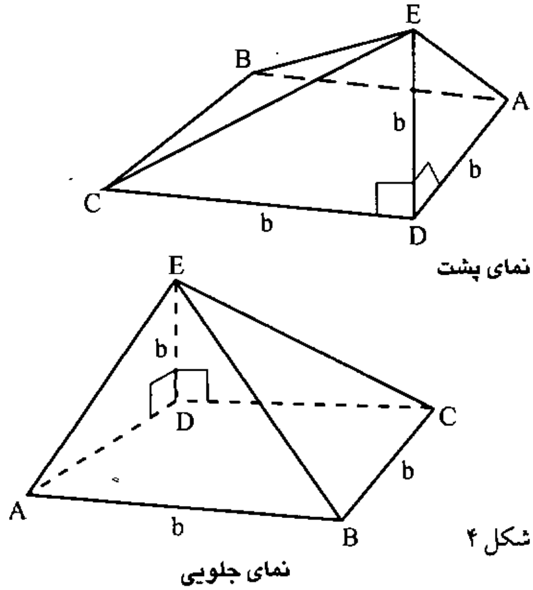


شکل ۳ **لایه‌هایی از مکعب‌ها**

حال برای مجموع دوم، اگر بخواهیم $\sum_{k=1}^{n} k^2$ را به‌وسیله‌ی شکل‌های هندسی نمایش دهیم، باتوجه به شکل ۳ تعداد مکعب‌ها در هر سطر برابر با k^2 است. یعنی یک مکعب در اولین سطر، چهار مکعب در دومین سطر، نه مکعب در سومین سطر و همین‌طور تا آخر، تا nامین سطر. به‌طور کلی ما در شکل ۳، n^2 مکعب داریم که اگر تعداد آن‌ها شمارش شود، حجم شکل، مجموع زیر خواهد بود:

$$1^2+2^2+3^2+\dots+(n-1)^2+n^2$$

برای این قسمت هم از روشی که در جمع اول اعمال شد، بهره می‌گیریم. پس شکل ۳ را با برش‌هایی تقسیم می‌کنیم که بدین وسیله شکل‌های زیر ایجاد خواهند شد:

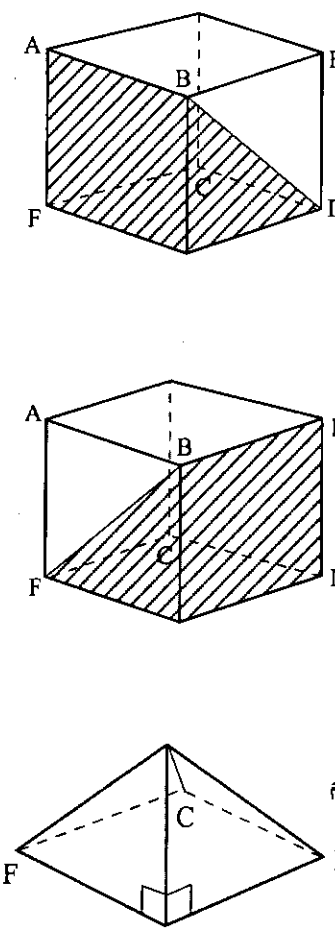


شکل ۴

نمای پشت و جلویی تقسیم‌ها، هرم‌هایی با قاعده‌ی ABCD هستند و DE عمودی است که برای قاعده‌ی ABCD ارتفاع محسوب می‌شود. ضلع‌ها و لبه‌های دیگر یکسان هستند و طولی برابر b دارند. پس فرمول حجم هرم تشکیل‌شده به این صورت خواهد بود:

$$\frac{b^۳}{۳} = ۳ \div (b)(b^۲) = ۳ \div (\text{ارتفاع})\ (\text{مساحت قاعده هرم})$$

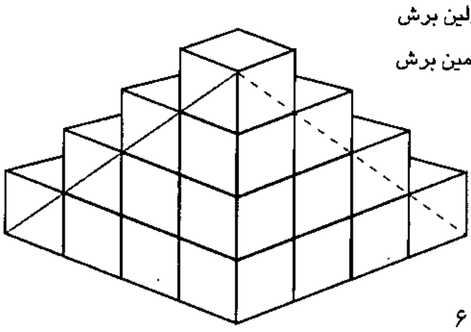
شکل‌های ۵، عمل برش را در مکعب شکل ۳ از نگاهی دیگر نشان می‌دهند. مکعب به‌وسیله‌ی برش‌هایی به دو قسمت از AB به CD برش داده شده و سپس به‌وسیله‌ی چرخش مکعب، عمل برش از لبه‌ی BE به CD انجام شده است.



شکل ۵

بالاخره و در نهایت از تقسیم شکل ۳، مکعب به دو تکه جداگانه تقسیم می‌شود.

حجم هرم به‌دست آمده $\frac{b^۳}{۳}$ است. پس حجم باقی‌مانده‌ی هرم $\frac{۲b^۳}{۳}$ می‌شود (شکل ۵ـ الف). این برش‌ها را به طور کلی می‌توان به‌صورت شکل ۶ نمایش داد.



شکل ۶

پس می‌توان گفت: چون مکعب n سطر دارد، حجم هرم بزرگ $\frac{۱}{۳}n^۳$ است و تکه‌های باقی‌مانده نیز $\frac{۲}{۳}n$ حجم دارند. حال تنها قسمت‌هایی که هنوز محاسبه نشده‌اند، نیمه‌هایی هستند که در قسمت‌های بالایی قرار گرفته‌اند و به صورت $(n-۱)$ لایه مکعب نصف شده روی n لایه هستند و حجم آن‌ها به این صورت محاسبه می‌شود:

$$\frac{۱}{۲}(۱+۲+۳+\cdots+(n-۱))$$

که با استفاده از مجموع اول، مقدار آن $\frac{۱}{۲}((n-۱)\frac{n}{۲})$ به‌دست می‌آید.

بنابراین، مجموع حجم شکل و در نتیجه $\sum_{k=۱}^{n} k^۲$ برابر است با:

$$\underbrace{\frac{n^۳}{۳}}_{(I)} + \underbrace{\frac{(n-۱)\times n}{۲}}_{(II)} + \underbrace{\frac{۲n}{۳}}_{(III)}$$

(I) حجم هرم بزرگ

(II) قسمت بالایی مکعبات نیمه

(III) باقی‌مانده مکعبات پس از برش دوباره

بنابراین داریم:

$$\frac{n^۳}{۳} + \frac{n(n-۱)}{۲} + \frac{۲n}{۳} = \frac{۲n^۳ + ۳n(n-۱) + ۴n}{۶}$$

$$= \frac{n(۲n^۲ + ۳(n-۱) + ۴)}{۶}$$

$$= \frac{n(۲n^۲ + ۳n + ۱)}{۶}$$

$$= \frac{n(n+۱)(۲n+۱)}{۶}$$

و این همان جوابی است که انتظار داشتیم.

❑❑❑

مسائل برای حل

ریاضیات ۱

مجتبی رفیعی

۱. اگر $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ و $b,d > ۰$، آن‌گاه ثابت کنید:

$$\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$$

۲. حدود a را چنان بیابید که عدد گویای $\frac{a}{۲۰}$ بین دو عدد $\frac{۲}{۵}$ و ۰٫۳ قرار گیرد.

۳. حاصل عبارت $\frac{(|۳-\sqrt{۳}|-|۴-\sqrt{۲۴}|)\times\sqrt{۱۵}}{\sqrt{۱۴۵}}$ را با دقت دو رقم اعشار به‌دست آورید.

۴. مجموعه‌ی $(A\cup B)$ شش عضو، مجموعه‌ی $(A\cap B)$ سه عضو و مجموعه‌ی $(A-B)$ نیز دو عضو دارد. مجموعه‌ی $(B-A)$ چند عضو دارد؟

۵. اگر $A=\left\{x \middle| \frac{x}{۲}\in Z\right\}$ و $B=\left\{x \middle| \frac{x}{۴}\in Z\right\}$، مجموعه‌ی $A-B$ را با علائم ریاضی مشخص کنید.

۶. اگر $a=۵^{-۳}$ و $b=-۵^{۲}$، حاصل عبارت $A=\frac{a^{۷}b^{۳}(a^{۲}b^{۲})^{-۱}}{(a^{-۲}b^{۲})^{-۱}(ab)^{۲}}$ را حساب کنید.

۷. جرم هر الکترون تقریباً $۹٫۱\times۱۰^{-۲۵}$ گرم است. جرم یک جسم ۲۵۴۹ تنی چند برابر جرم الکترون است؟ حاصل را به صورت نماد علمی بنویسید (هر تن برابر ۱۰۰۰ کیلوگرم است).

۸. مخرج کسر $\frac{۱}{\sqrt[۳]{۴-\sqrt{۳}}}$ را گویا کنید.

۹. اگر a و b دو عدد باشند که $a+b=۱$، درستی تساوی‌های زیر را ثابت کنید:

الف) $a^{۲}-a=b^{۲}-b$

ب) $a(a+۱)+b(b+۱)=۲(۱-ab)$

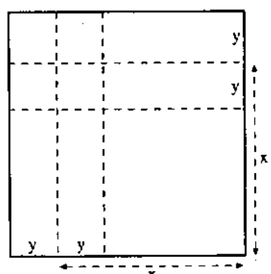
۱۰. حاصل عبارت $x(۱-x)(x+۱)(x^{۲}+x^{۶}+x^{۴})$ را به‌دست آورید.

۱۱. عبارت‌های زیر را تجزیه کنید.

الف) $۵۰x^{۲}-۳۰xy-۵۶y^{۲}$

ب) $ab(a-b)+bc(b-c)+ac(c-a)$

۱۲. تساوی $(x+y)^{۲}-(x-y)^{۲}=۴xy$ را به کمک شکل زیر ثابت کنید.



ریاضیات ۲

هوشنگ شرقی

۱. معادله‌های زیر را حل کنید:

الف) $\frac{۳x-۲}{x+۱}+\frac{x+۱}{x+۲}=\frac{۴x+۳}{x+۵}$

ب) $\sqrt{۴x+۱}+\sqrt{x-۱}=\sqrt{۸x}$

۲. مجموعه جواب‌های هریک از نامعادله‌های زیر را به‌دست آورید:

الف) $\frac{۳x}{x+۲}+\frac{۴}{x-۲}\geq\frac{۹}{x^{۲}-۴}$

ب) $-۱\leq\frac{۳x-۱}{x-۲}\leq۱$

۳. معادله‌ی درجه دوم $۳mx^{۲}+۲mx+(۱-m)=۰$ مفروض است. حدود m را طوری به‌دست آورید که معادله‌ی فوق دو ریشه حقیقی منفی داشته باشد.

۴. دامنه‌ی تعریف تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\sqrt{۴-x^{۲}}+\sqrt[۴]{\frac{x^{۲}-۱}{x}}$ را به‌دست آورید.

۵. نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\frac{x-[x]}{[x]-۱}$ را در بازه‌ی $[-۲,۳)$ رسم کنید.

۶. نمودار تابع f با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases}x-۱ & x>۱\\ ۲-x & -۱\leq x\leq ۱\\ -۲x & x<-۱\end{cases}$ را رسم کنید و از روی آن یک‌به‌یک و پوشایی f را تحقیق کنید. هم‌چنین مقدار $f(f(f(\frac{۱}{۲})))$ را به‌دست آورید.

۷. نشان دهید تابع $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ و $f(x)=x(x^{۲}-۳x+۳)$ معکوس‌پذیر است و ضابطه‌ی معکوس آن را به‌دست آورید.

۸. ماتریس $A=\begin{bmatrix}۲ & ۳\\ ۱ & ۲\end{bmatrix}$ مفروض است. ماتریس دو در دوی X را طوری بیابید که داشته باشیم:

$$A^{۲}+A^{-۱}=A^{۳}+AX$$

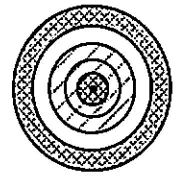
۹. m را طوری بیابید که دستگاه معادلات زیر اولاً ریشه‌ی حقیقی نداشته باشد، ثانیاً بی‌شمار جواب داشته باشد.

$$\begin{cases}mx+(m+۱)y=m-۱\\ (m+۲)x+(۴m-۲)y=m\end{cases}$$

هندسه‌ی ۱

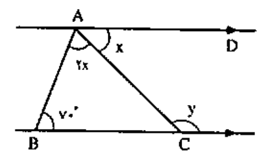
محمدهاشم رستمی

۱. در شکل، پنج دایره‌ی هم‌مرکز و به شعاع‌های a، ۲a، ۳a، ۴a و ۵a دیده می‌شوند. مساحت کدام یک از قسمت‌های هاشورخورده بیشتر است؟



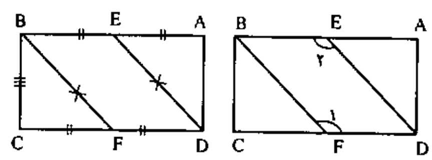
۲. به ازای چه مقدارهایی از پارامتر m، مقادیر $m-1$، $2m+3$ و ۵، می‌توانند ضلع‌های یک مثلث متساوی‌الساقین باشند؟

۳. اندازه‌ی x و y را با توجه به شکل زیر تعیین کنید. AD موازی BC است.



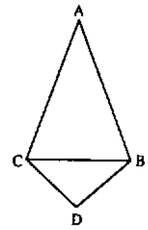
۴. در شکل داده شده:

الف) $\hat{2}=\hat{1}$، BF=DE و BF نیم‌ساز زاویه‌ی B و DE نیم‌ساز زاویه‌ی D و $\hat{B}=\hat{D}=90°$ است. ثابت کنید: BC=AD



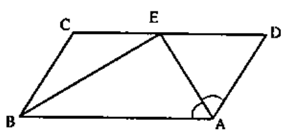
ب) BC=AD، E وسط AB، F وسط CD، AB=CD و BF=DE است.
ثابت کنید $\hat{A}=\hat{C}$.

۵. اگر BC قاعده‌ی مشترک دو مثلث متساوی‌الساقین ABC و DBC باشد، مثلث‌های هم‌نهشت ایجادشده را مشخص کنید و دلیل هم‌نهشتی آن‌ها را بنویسید.



۶. مجموع زاویه‌های درونی یک nضلعی محدب ۱۴۴۰° است. مجموع زاویه‌های برونی این nضلعی چه قدر است؟

۷. ABCD متوازی‌الاضلاعی است که در آن $2BC=AB$ است. نیم‌ساز زاویه‌ی A، ضلع CD را در نقطه‌ی E قطع می‌کند. ثابت کنید:

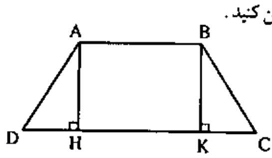


الف) BE نیم‌ساز زاویه‌ی $A\hat{B}C$ است.

ب) مثلث AEB در رأس E قائم‌الزاویه است.

۸. عدد مساحت یک لوزی را بیابید که مساحت آن با $x^2+2x+16$، یک قطرش با $x+5$ و قطر دیگرش با $2x$ مشخص شده باشد.

۹. مساحت ذوزنقه‌ی متساوی‌الساقین ABCD را که AH و BK ارتفاع آن هستند، در هریک از حالت‌های زیر تعیین کنید.



الف) AB=۱۲، CD=۲۴، AD=۱۰

ب) AC=۲۵، AH=۱۵، BC=۱۸

۱۰. اندازه‌ی x و y را در هریک از موارد زیر تعیین کنید:

الف) $\frac{x}{3}=\frac{y-2}{5}=\frac{1}{2}$

ب) $\frac{x-y}{5}=\frac{x+y}{7}=1$

حسابان ۱

احمد قندهاری

۱. تابع با ضابطه‌ی $f(x)=[x]+[-x]$ را در بازه‌ی $[-3,3]$ رسم کنید. سپس حدهای $\lim_{x\to 2}f(x)$ و $\lim_{x\to\sqrt{2}}f(x)$ را بیابید.

۲. تابع با ضابطه‌ی زیر

$$f(x)=(a-1)x^3+(a-2)x^2+(ab-8)x+(a-b+4)$$

مفروض است. a و b را چنان بیابید که: اولاً، تابع f فرد باشد. ثانیاً، تابع f زوج باشد.

۳. اگر صفرهای دو تابع با ضابطه‌های $f(x)=x^2+5x+4$ و $g(x)=ax^2+bx+6$ مساوی باشند، مقدار عددی a و b را بیابید.

۴. ثابت کنید: $\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}=-\frac{1}{2}$

۵. صحت اتحاد زیر را ثابت کنید.

$$\cos^2\alpha+2\sin^2\alpha+\sin^2\alpha.\tan^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}$$

۶. در تابع با ضابطه‌ی $f(x)=5x-1$، اگر $x\to 1^-$ باشد، آن‌گاه $f(x)\to 4$. اگر بخواهیم $|f(x)-4|<\frac{1}{200}$ باشد، آن‌گاه حدود x را بیابید.

۷. اگر f تابعی یک به یک باشد و داشته باشیم: $g(x)=\frac{2+f(x)}{2-f(x)}$، آن‌گاه $g^{-1}(x)$ را بیابید.

۸. حاصل $\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+1}+x-5}{\sqrt{x+6}-3}$ را بیابید.

۹. حاصل $\lim_{x\to+\infty}(\sqrt[3]{x^3+x^2}-x)$ را بیابید.

۱۰. تابع با ضابطه‌ی زیر مفروض است. a و b را چنان بیابید که تابع f در $x=1$ پیوسته باشد.

$$f(x)=\begin{cases}ax^2+b|x| , & x<1\\ \left[x-\frac{7}{2}\right] , & x=1\\ a\sin(x-1)+b[x+1] , & x>1\end{cases}$$

جبر و احتمال

حمید رضا امیری

۱ . با استفاده از استقرای ریاضی ثابت کنید :

$5^n - 4n - 1 = 16r \qquad r \in Z \qquad n \in \mathbb{N}$

۲ . با ارائه مثال نقض هر یک از احکام زیر را رد کنید .

الف : اگر a و b و c عدد اول باشند ، آن‌گاه $a+b+c$ نیز اول است .

ب : $n \in \mathbb{N} \Rightarrow n^2 < n!$

ج : اگر n مضرب ۴ باشد آن‌گاه ۳n مضرب ۸ است .

د : $a < b, c < d \Rightarrow a - c < b - d$

۳ . با استفاده از اثبات بازگشتی درستی نامساوی زیر را ثابت کنید :

$2x^2 - 4xy + 4y^2 - 2x + 6 > 0$

۴ . با استفاده از استدلال استنتاجی ثابت کنید حاصل ضرب هر سه عدد صحیح متوالی مضرب ۳ است .

۵ . با استفاده از برهان خلف ثابت کنید :

اگر $n \in Z$ ، n^2 مضرب ۵ باشد ، n نیز مضرب ۵ است .

۶ . در یک جمع برای آن که حداقل ۳ نفرشان در یک روز هفته و در یک ماه سال به دنیا آمده باشند بایستی حداقل چند نفر باشند؟

۷ . اگر یک مجموعه ۲۷ عضوی از میان اعداد طبیعی از ۱ الی ۵۲ انتخاب کنیم ثابت کنید حداقل ۲ عضو انتخابی نسبت به هم اولند .

۸ . اگر $n \in Z, A_n = (\frac{-1}{n}, \frac{2n+1}{n})$ مطلوب است

الف : $\bigcup_{i=3}^{5} A_i$

ب : $A_2 - \bigcup_{i=2}^{5} A_i$

۹ . با استفاده از جبر مجموعه‌ها ثابت کنید .

$A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C)$

$(A \cup B) - (B \cup C) = (A - B) - C$

۱۰ . تعداد زیرمجموعه‌های دو عضوی یک مجموعه ۲n عضوی از تعداد زیرمجموعه‌های دو عضوی یک مجموعه n عضوی ۱۲ تا بیشتر است . n را بیابید .

۱۱ . اگر دو زوج مرتب $(\{5, b, c\}, (0, a))$ و $(\{b\}, (d-1, 4))$ برابر باشند مطلوب است مقادیر a و b و c و d .

۱۲ . درستی تساوی زیر را ثابت کنید .

$(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$

۱۳ . اگر $A = \{x^2 | x \in z, -3 \le x \le 3\}$ و $B = \{x | x \in z, |x| < 2\}$

الف : رابطه زیر را که از A در B تعریف شده با اعضاء مشخص کنید .

$aRb \Leftrightarrow a^2 | b$

ب : چند رابطه روی مجموعه توانی B می‌توان تعریف کرد؟

۱۴ . اگر مجموعه A دارای ۲۵ عضو و مجموعه $A^2 - B^2$ دارای ۵۴۴ عضو باشد آن‌گاه مجموعه $A \cap B$ چند عضوی است؟

۱۵ . نمودار رابطه زیر را رسم کنید .

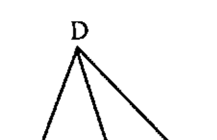
$R = \{(x, y) | x \in \mathbb{R}, x^2 + y^2 \le 2, |x| > |y|\}$

هندسه‌ی ۲

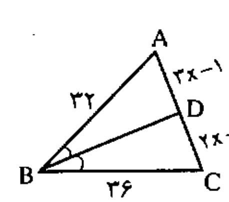
محمد هاشم رستمی

۱ . با استفاده از استدلال استقرایی ، رابطه‌ای را که مجموع تعداد ضلع‌ها و قطرهای یک nضلعی محدب را بیان می‌کند ، حدس بزنید و چگونگی انجام کار را بنویسید .

۲ . در مثلث ACD (شکل زیر) داریم AC=CD و AD=DB . ثابت کنید $A\hat{B}D > A\hat{D}B$.



۳ . در شکل ، BD نیم‌ساز زاویه‌ی B از مثلث ABC است . اندازه‌ی محیط مثلث ABC را تعیین کنید .



۴ . مجموع فاصله‌ی هر نقطه واقع در درون یک مثلث متساوی‌الاضلاع از سه ضلع آن مساوی $12\sqrt{3}$ سانتی‌متر است . اندازه‌ی مساحت این مثلث چه‌قدر است؟

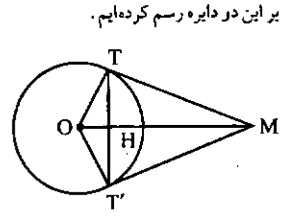
۵ . ثابت کنید که در هر مثلث ، میانه‌ی نظیر یک ضلع از نصف مجموع دو ضلع دیگر کوچک‌تر و از نصف قدر مطلق تفاضل آن دو ضلع بزرگ‌تر است .

۶ . مثلث ABC را با داده‌های BC=a ، $\hat{B} = \alpha$ و ارتفاع $AH = h_a$ رسم کنید .

۷ . در دایره‌ی $C(5, 10)$ دو وتر موازی و مساوی AB و CD ترتیب به طول‌های ۱۰ و $10\sqrt{3}$ رسم شده‌اند . اندازه‌ی کمان‌های $\widehat{AC}$ و $\widehat{BD}$ را تعیین کنید .

۸ . دو دایره‌ی C و C' هر کدام از مرکز دیگری می‌گذرند . در صورتی که خط‌المرکزین این دو دایره ۵ سانتی‌متر باشد ، نقطه‌ای در صفحه‌ی این دو دایره تعیین کنید که وتر رسم شده از این نقطه در دایره‌ی C ، به طول ۸ سانتی‌متر و وتر رسم شده از این نقطه در دایره‌ی C' به طول ۶ سانتی‌متر باشد .

۹ . از نقطه‌ی M که به فاصله‌ی ۲۰ سانتی‌متر از مرکز دایره‌ی $C(5, 12)$ قرار دارد ، دو مماس MT و MT' را بر این دو دایره رسم کرده‌ایم .



تعیین کنید :

۱ . طول مماس‌های MT و MT'

۲ . طول وتر TT'

۳ . پاره‌خط OH

۴ . اندازه‌ی زاویه‌ی $T\hat{M}T'$

پاسخ تشریحی مسائل

ریاضیات ۱

۱. برای آن‌که تشخیص دهیم، از دو عدد گویای مثبت کدام یک بزرگ‌تر است، کافی است آن‌ها را به شکلی بنویسیم که مخرج مساوی داشته باشند. سپس هر عدد که صورتش بزرگ‌تر بود، بزرگ‌تر است. بنابراین، مخرج هر دو کسر را به ۲۰ تبدیل می‌کنیم:

$$\left.\begin{array}{l}\frac{2}{5}=\frac{8}{20}\\ 0/3=\frac{3}{10}=\frac{6}{20}\end{array}\right\} \Rightarrow \frac{6}{20}<\frac{a}{20}<\frac{8}{20} \Rightarrow 6<a<8$$

۲.

$$\frac{a}{b}<\frac{c}{d} \Rightarrow ad<bc \Rightarrow ab+ad<ab+bc$$

$$\Rightarrow a(b+d)<b(a+c)$$

$$\Rightarrow \frac{a}{b}<\frac{a+c}{b+d} \qquad (1)$$

$$\frac{a}{b}<\frac{c}{d} \Rightarrow ad<bc \Rightarrow ad+cd<bc+cd$$

$$\Rightarrow d(a+c)<c(b+d)$$

$$\Rightarrow \frac{a+c}{b+d}<\frac{c}{d} \qquad (2)$$

$$(1) \text{ و } (2) \Rightarrow \frac{a}{b}<\frac{a+c}{b+d}<\frac{c}{d}$$

۳. با دقت دو رقم اعشار داریم:

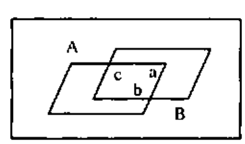
$\sqrt{3}=1/73$ و $\sqrt{15}=3/87$ و $\sqrt{24}=4/89$ و $\sqrt{145}=12/04$

$$\frac{\left(|3-\sqrt{3}|-|4-\sqrt{24}|\right)\times\sqrt{15}}{\sqrt{145}}$$

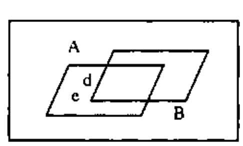
$$=\frac{\left(|3-1/73|-|4-4/89|\right)\times 3/87}{12/04}$$

$$=\frac{(1/27-0/89)\times 3/87}{12/04}=\frac{0/38\times 3/87}{12/04}=\frac{1/47}{12/04}=0/12$$

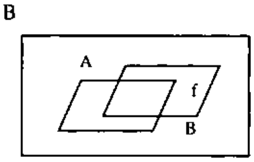
۴. فرض کنیم $A \cup B=\{a,b,c,d,e,f\}$. چون $A \cap B$ سه عضو دارد؛ بنابراین سه عضو دلخواه a، b و c را برای آن در نظر می‌گیریم. هم‌چنین مجموعه‌ی $A-B$ دو عضو دارد. بنابراین دو عضو دلخواه e، d را برای آن در نظر می‌گیریم. درنتیجه $B-A$ فقط می‌تواند یک عضو داشته باشد.



$A \cap B$



A-B



B-A

۵. ابتدا مجموعه‌ها را با اعضای آن‌ها مشخص می‌کنیم:

$$\frac{x}{2}=k \Rightarrow x=2k \Rightarrow A=\{2k \mid k\in Z\}$$

$$=\{\cdots,-6,-4,-2,0,2,4,6,\cdots\}$$

$$\frac{x}{4}=k \Rightarrow x=4k \Rightarrow A=\{4k \mid k\in Z\}$$

$$=\{\cdots,-8,-4,0,4,8,\cdots\}$$

$$A-B=\{\cdots,-6,-4,-2,0,2,4,\cdots\}-\{\cdots,-8,-4,0,4,8,\cdots\}$$

$$=\{\cdots,-6,-2,2,6,\cdots\}=\{x \mid x=4k-2, k\in Z\}$$

۶. ابتدا کسر را ساده و سپس مقادیر a و b را جای‌گذاری می‌کنیم.

$$A=\frac{a^7b^3(a^2b^2)^{-1}}{(a^{-2}b^2)^{-1}(ab)^2}=\frac{a^7b^3(a^2)^{-1}(b^2)^{-1}}{(a^{-2})^{-1}(b^2)^{-1}a^2b^2}$$

$$=\frac{a^7b^3a^{-2}b^{-2}}{a^2b^{-2}a^2b^2}=\frac{a^5b}{a^4b^0}=a^{5-4}b=ab \xrightarrow{a=5^{-3},\, b=-5^3}$$

$$5^{-3}\times(-5)^3=\frac{1}{5^3}\times(-5)^3=-\frac{5^3}{5^3}=-1$$

۷. برای این‌که $9/1\times10^{-25}\,g$ را به کیلوگرم (kg) تبدیل کنیم، کافی است این عدد را بر ۱۰۰۰ تقسیم کنیم:

$$\frac{9/1\times10^{-25}}{1000}=9/1\times10^{-25-3}=9/1\times10^{-28}\,kg \qquad (1)$$

برای تبدیل ۲۵۴۹ تن به کیلوگرم (kg) کافی است این عدد را در ۱۰۰۰ ضرب کنیم:

$$2549\times1000=2/549\times10^3\times10^3=2/549\times10^6\,kg \qquad (2)$$

برای این‌که تشخیص دهیم جرم جسم چند برابر جرم الکترون است، کافی است نسبت زیر را تشکیل دهیم:

$$\frac{2/549\times10^6}{9/1\times10^{-28}}=\frac{2/549}{9/1}\times10^{6-(-28)}=23/1959\times10^{34}$$

$$=2/31959\times10^{35}$$

۸.

$$\frac{1}{\sqrt[3]{4-\sqrt{3}}}=\frac{1}{\sqrt[3]{4-\sqrt{3}}}\times\frac{\sqrt[3]{(4-\sqrt{3})^2}}{\sqrt[3]{(4-\sqrt{3})^2}}=\frac{\sqrt[3]{(4-\sqrt{3})^2}}{\sqrt[3]{(4-\sqrt{3})^3}}$$

$$=\frac{\sqrt[3]{(4-\sqrt{3})^2}}{4-\sqrt{3}}=\frac{\sqrt[3]{(4-\sqrt{3})^2}}{4-\sqrt{3}}\times\frac{4+\sqrt{3}}{4+\sqrt{3}}$$

$$=\frac{(4+\sqrt{3})\sqrt[3]{(4-\sqrt{3})^2}}{16-3}=\frac{(4+\sqrt{3})\sqrt[3]{(4-\sqrt{3})^2}}{13}$$

۹. الف) دو طرف برابری $a+b=1$ را در $(a-b)$ ضرب می‌کنیم:

$$a+b=1 \Rightarrow (a-b)(a+b)=(a-b)$$

$$\Rightarrow a^2-b^2=a-b$$

$$\Rightarrow a^2-a=b^2-b$$

ب) دو طرف برابری $a+b=1$ را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$\left.\begin{array}{l}a+b=1\\(a+b)^2=1\end{array}\right\}\oplus \Rightarrow (a+b)^2+(a+b)=2$$

$$\Rightarrow a^2+2ab+b^2+a+b=2$$

$$\Rightarrow (a^2+a)+(b^2+b)=2-2ab$$

$$\Rightarrow a(a+1)+b(b+1)=2(1-ab)$$

۱۰.

$$x(1-x)(x+1)(x^2+x^6+x^4)=x(1-x^2)\left[x^2(1+x^4+x^2)\right]$$

$$=x\times x^2\left[(1-x^2)(1+x^4+x^2)\right]$$

$$=x^3(1-x^6)=x^3-x^9$$

۱۱.

الف)

$$50x^2-30xy-56y^2=2(25x^2-15xy-28y^2)$$

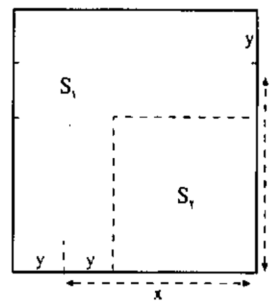
$$=2\left[(5x)^2-3y(5x)-28y^2\right]$$

$$=2(5x-7y)(5x+4y)$$

ب)

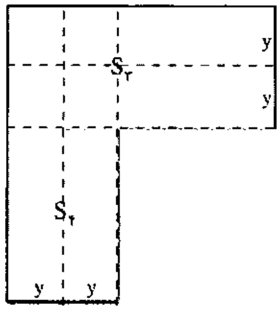
$$ab(a-b)+bc(b-c)+ac(c-a)$$
$$=a^2b-ab^2+b^2c-bc^2+ac(c-a)$$
$$=a^2b-bc^2-ab^2-ab^2+b^2c+ac(c-a)$$
$$=b(a^2-c^2)-b^2(a-c)-ac(a-c)$$
$$=(a-c)\left[b(a+c)-b^2-ac\right]$$
$$=(a-c)(ba+bc-b^2-ac)$$
$$=(a-c)(ba-ac+bc-b^2)$$
$$=(a-c)[a(b-c)-b(b-c)]=(a-c)(b-c)(a-b)$$

۱۲. طول ضلع مربع بزرگ برابر $x+y$ است، پس مساحت آن برابر است با $S_1=(x+y)^2$. طول ضلع مربع کوچک برابر با $x-y$ است. پس مساحت این مربع برابر است با $S_2=(x-y)^2$.



در صورتی که این دو را از هم کم کنیم، سمت چپ تساوی به دست می‌آید.

$$S_1-S_2=(x+y)^2-(x-y)^2 \qquad (1)$$



اکنون مساحت دو مستطیل سایه‌خورده در شکل قبل را محاسبه می‌کنیم:

$$S_3=(x+y)(2y)$$
$$S_4=(x-y)(2y)$$
$$\Rightarrow S_3+S_4=(x+y)(2y)+(x-y)(2y)$$
$$=2xy+2y^2+2xy-2y^2$$
$$=4xy \qquad (2)$$

با توجه به روابط (۱) و (۲) خواهیم داشت:

$$(x+y)^2-(x-y)^2=4xy$$

ریاضیات ۲

۱.

الف)
$$\frac{(x+2)(3x-2)+(x+1)^2}{(x+1)(x+2)}=\frac{4x+3}{x+5}$$
$$\Rightarrow \frac{3x^2-2x+6x-4+x^2+2x+1}{x^2+3x+2}=\frac{4x+3}{x+5}$$
$$\Rightarrow (4x^2+6x-3)(x+5)=(x^2+3x+2)(4x+3)$$
$$\Rightarrow 4x^3+20x^2+6x^2+30x-3x-15=4x^3+3x^2+12x^2+9x+8x+6$$
$$\Rightarrow 26x^2+27x-15=15x^2+17x+6 \Rightarrow 11x^2+10x-21=0$$
$$\Rightarrow x=1 \text{ یا } x=-\frac{21}{11}$$

ب)
$$(\sqrt{4x+1}+\sqrt{x-1})^2=(\sqrt{8x})^2$$
$$\Rightarrow 4x+1+x-1+2\sqrt{4x^2-3x-1}=8x$$
$$\Rightarrow 2\sqrt{4x^2-3x-1}=3x \Rightarrow 4(4x^2-3x-1)=9x^2$$
$$\Rightarrow 7x^2-12x-4=0 \quad \Delta=144-4(7)(-4)=256$$
$$\Rightarrow x=\frac{12\pm16}{14} \Rightarrow x_1=2\ ,\ x_2=-\frac{2}{7}$$

پاسخ $x_2=-\frac{2}{7}$ غیر قابل قبول است. (چرا؟) و معادله تنها یک ریشه‌ی $x=2$ دارد.

۲.

الف)
$$\frac{3x(x-2)+4(x+2)}{(x+2)(x-2)}\geq\frac{9}{(x-2)(x+2)}$$
$$\Rightarrow \frac{3x^2-6x+4x+8-9}{(x+2)(x-2)}\geq 0 \Rightarrow \frac{3x^2-2x-1}{(x+2)(x-2)}\geq 0$$

$3x^2-2x-1=0 \Rightarrow x=1$ یا $x=-\frac{1}{3}$ و $(x+2)(x-2)=0$

$\Rightarrow x=2$ یا $x=-2$

x	$(-\infty,-2)$	$(-2,-\frac{1}{3})$	$(-\frac{1}{3},1)$	$(1,2)$	$(2,+\infty)$
$3x^2-2x-1$	+	+	−	+	+
$x+2$	−	+	+	+	+
$x-2$	−	−	−	−	+
P	+	−	+	−	+
		//////		//////	

$$\Rightarrow x<-2 \text{ یا } -\frac{1}{3}\leq x\leq 1 \text{ یا } x>2$$

ب)
$$-1\leq\frac{3x-1}{x-2}\leq 1 \Rightarrow \left|\frac{3x-1}{x-2}\right|\leq 1 \Rightarrow |3x-1|\leq|x-2|$$
$$\Rightarrow (3x-1)^2\leq(x-2)^2 \Rightarrow (3x-1)^2-(x-2)^2\leq 0$$
$$\Rightarrow (3x-1+x-2)(3x-1-x+2)\leq 0 \Rightarrow (4x-3)(2x+1)\leq 0$$
$$\Rightarrow -\frac{1}{2}\leq x\leq\frac{3}{4}$$

۳.
$$\Delta>0\ ,\ x_1+x_2<0\ ,\ x_1x_2>0$$
$$\Rightarrow \Delta=4m^2-12m(1-m)>0 \Rightarrow 16m^2-12m>0$$
$$\Rightarrow 4m(4m-3)>0 \Rightarrow m>\frac{3}{4} \text{ یا } m<0 \qquad (1)$$
$$x_1+x_2=-\frac{b}{a}=\frac{-2m}{3m}=-\frac{2}{3}<0 \qquad (2)$$
$$x_1x_2=\frac{c}{a}=\frac{1-m}{3m}>0 \Rightarrow 0<m<1 \qquad (3)$$

(۱) و (۲) و (۳) $\Rightarrow \boxed{\frac{3}{4}<m<1}$

۴.

$$\begin{cases} 4-x^2\geq 0 & 4-x^2=0 \Rightarrow x=\pm 2 \\ \frac{x^2-1}{x}\geq 0 & x^2-1=0 \Rightarrow x=\pm 1\ ,\ x=0 \end{cases}$$

x	$(-\infty,-2)$	$(-2,-1)$	$(-1,0)$	$(0,1)$	$(1,2)$	$(2,+\infty)$
$P_1=4-x^2$	−	+	+	+	+	−
x^2-1	+	+	−	−	+	+
x	−	−	−	+	+	+
$P_2=\frac{x^2-1}{x}$	−	−	+	−	+	+
$P_1\geq 0, P_2\geq 0$	//////	//////		//////		//////

$$\Rightarrow D_f=[-1,0)\cup[1,2]$$

۵.

$-2 \le x < -1 \Rightarrow [x] = -2 \Rightarrow y = \frac{x+2}{-3}$

x	-2	-1
y	0	$\frac{-1}{3}$

$-1 \le x < 0 \Rightarrow [x] = -1 \Rightarrow y = \frac{x+1}{-2}$

x	-1	0
y	0	$\frac{-1}{2}$

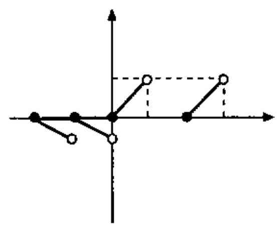
$0 \le x < 1 \Rightarrow [x] = 0 \Rightarrow y = -x$

x	0	1
y	0	1

$1 \le x < 2 \Rightarrow [x] = 1 \Rightarrow y = -$

$2 \le x < 3 \Rightarrow [x] = 2 \Rightarrow y = x - 2$

x	2	3
y	0	1

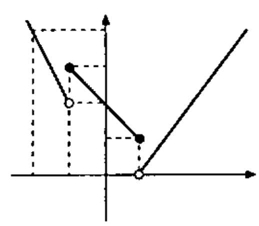


۶. با توجه به نمودار تابع، واضح است که این تابع نه یک‌به‌یک است و نه پوشا. با درنظر گرفتن ضابطه‌ی تابع داریم:

$f(\frac{1}{2}) = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

$\Rightarrow f(f(\frac{1}{2})) = f(\frac{3}{2}) = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow f(f(f(\frac{1}{2}))) = f(\frac{1}{2}) = \frac{3}{2}$



۷. نشان می‌دهیم که f یک‌به‌یک است:

$f(x_1) = f(x_2)$

$\Rightarrow x_1(x_1^2 - 3x_1 + 3) = x_2(x_2^2 - 3x_2 + 3)$

$\Rightarrow x_1^3 - 3x_1^2 + 3x_1 = x_2^3 - 3x_2^2 + 3x_2$

$\Rightarrow x_1^3 - 3x_1^2 + 3x_1 - 1 = x_2^3 - 3x_2^2 + 3x_2 - 1 \Rightarrow (x_1 - 1)^3 = (x_2 - 1)^3$

$\Rightarrow x_1 - 1 = x_2 - 1 \Rightarrow x_1 = x_2$

و برای تعیین ضابطه‌ی معکوس f، نقش‌های x و y را عوض می‌کنیم:

$x = y(y^2 - 3y + 3) \Rightarrow x = y^3 - 3y^2 + 3y$

$\Rightarrow x - 1 = y^3 - 3y^2 + 3y - 1 \Rightarrow x - 1 = (y-1)^3$

$\Rightarrow y - 1 = \sqrt[3]{x-1} \Rightarrow y = \sqrt[3]{x-1} + 1$

$\Rightarrow f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x-1} + 1$

۸.

$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = 2\times 2 - 3\times 1 = 1 \Rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

$A^2 = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 12 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$

$A^3 = A^2.A = \begin{bmatrix} 7 & 12 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 26 & 45 \\ 15 & 26 \end{bmatrix}, \ X = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

$\Rightarrow \begin{bmatrix} 7 & 12 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 26 & 45 \\ 15 & 26 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2a+3c & 2b+3d \\ a+2c & b+2d \end{bmatrix}$

$\Rightarrow \begin{bmatrix} 2a+3c & 2b+3d \\ a+2c & b+2d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -17 & -36 \\ -12 & -17 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow \begin{cases} 2a+3c = -17 \\ a+2c = -12 \end{cases} \begin{cases} 2b+3d = -36 \\ b+2d = -17 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} a = 2, \ c = -7 \\ b = -21, \ d = 2 \end{matrix}$

$\Rightarrow X = \begin{bmatrix} 2 & -21 \\ -7 & 2 \end{bmatrix}$

۹.

اولاً:

$$\frac{m}{m+2} = \frac{m+1}{4m-2} \neq \frac{m-1}{m}$$

$\Rightarrow 4m^2 - 2m = m^2 + 3m + 2 \Rightarrow 3m^2 - 5m - 2 = 0$

$\Delta = 25 + 24 = 49$

$m = \frac{5 \pm 7}{6} \Rightarrow m = 2, \ m = -\frac{1}{3}$

به ازای $m = -\frac{1}{3}$ دستگاه غیرممکن است و ریشه‌ی حقیقی ندارد.

ثانیاً: به ازای $m = 2$ تساوی $\frac{m}{m+2} = \frac{m+1}{4m-2} = \frac{m-1}{m}$ برقرار شده و دستگاه مبهم است و بی‌شمار جواب دارد.

هندسه‌ی ۱

۱. مساحت دو قسمت هاشورخورده را محاسبه می‌کنیم.

قسمت هاشورخورده در وسط، مساحت دایره‌ای به شعاع 3a است، پس مساحت آن برابر است با:

$\pi(3a)^2 = 9\pi a^2$

قسمت هاشورخورده‌ی دیگر، تاج دایره‌ی حاصل از دو دایره‌ی هم مرکز به شعاع‌های 4a و 5a است، پس مساحت آن برابر است با:

$\pi(5a)^2 - \pi(4a)^2 = 25a^2 - 16a^2 = 9\pi a^2$

پس مساحت‌های این دو قسمت با هم مساوی هستند.

۲. شرط آن‌که سه عدد داده‌شده‌ی a، b و c، اندازه‌ی ضلع‌های یک مثلث متساوی‌الساقین باشد، آن است که اولاً: نامساوی مضاعف $|b-c| < a < b+c$ برقرار باشد. ثانیاً: b=c یا c=a یا a=b باشد.

بنابراین با فرض $a = m-1$، $b = 2m+3$ و $c = 5$ باید داشته باشیم:

$(I)\begin{cases} |2m+3-5| < m-1 < 2m+3+5 \\ 2m+3 = 5 \end{cases}$

یا $(II)\begin{cases} |2m+3-5| < m-1 < 2m+3+5 \\ m-1 = 5 \end{cases}$

یا $(III)\begin{cases} |2m+3-5| < m-1 < 2m+3+5 \\ m-1 = 2m+3 \end{cases}$

یکی از این دستگاه‌ها را حل می‌کنیم. داریم:

$\begin{cases} |2m-2| < m-1 < 2m+8 \\ 2m = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m-1 > |2m-2| \\ m-1 < 2m+8 \\ m = 1 \end{cases}$

دستگاه جواب ندارد

$\Rightarrow m > 1 \Rightarrow \begin{cases} m-1 > 2m-2 \\ m > -9 \\ m = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m < -3 \\ m > -9 \\ m = 1 \end{cases}$

دستگاه جواب ندارد.

$\Rightarrow m < 1 \Rightarrow \begin{cases} m-1 > -2m+2 \\ m > -9 \\ m = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m > 1 \\ m > -9 \\ m = 1 \end{cases}$

پس در حالت I، به ازای هیچ مقداری از m مثلث نمی‌تواند متساوی‌الساقین باشد. حالت‌های II و III را خودتان حل کنید.

۳. داریم:

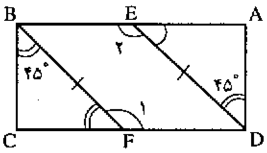
$AD \parallel BC \Rightarrow A\hat{C}B = x$ و $\Delta ABC: \hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=180^\circ$

$\Rightarrow 2x+72^\circ+x=180^\circ \Rightarrow 3x=108 \Rightarrow x=36^\circ$

$x+y=180^\circ \Rightarrow 36^\circ+y=180^\circ \Rightarrow y=144^\circ$

۴.

الف) دو مثلث ADE و CBF به حالت (ز ض ز) هم‌نهشت هستند؛ زیرا داریم:



$$\begin{cases} A\hat{E}D=180^\circ-\hat{2} \\ B\hat{F}C=180^\circ-\hat{1} \Rightarrow A\hat{E}D=B\hat{F}C \\ \hat{1}=\hat{2} \end{cases}$$

$$A\hat{D}E = F\hat{B}C = \frac{90^\circ}{2} = 45^\circ\ ,\ BF=DE$$

از هم‌نهشت بودن این دو مثلث نتیجه می‌شود: BC=AD

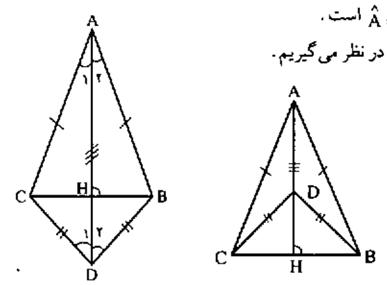
ب) دو مثلث ADE و BCF به حالت (ض ض ض) هم‌نهشت‌اند، زیرا داریم:

بنا به فرض BC=AD، بنابه فرض BF=DE

$$AB=CD \Rightarrow \frac{AB}{2}=\frac{CD}{2} \Rightarrow AE=CF$$

در نتیجه $\hat{A}=\hat{C}$ است.

۵. دو حالت در نظر می‌گیریم.



حالت اول) دو مثلث متساوی‌الساقین در دو طرف قاعده‌ی مشترک BC باشند. از A به D وصل می‌کنیم و نقطه‌ی برخورد AD با قاعده‌ی BC را H می‌نامیم. مثلث‌های ABD و ACD به حالت برابری سه ضلع هم‌نهشت‌اند. زیرا ضلع AD در هر دو مشترک است و AB=AC و BD=DC است. مثلث‌های قائم‌الزاویه‌ی ABH و ACH، هم‌چنین مثلث‌های قائم‌الزاویه‌ی BHD و CHD نیز هم‌نهشت هستند، زیرا می‌دانیم که به‌دلیل نیم‌ساز بودن AD برای زاویه‌های A و D (به دلیل تساوی‌های $\hat{A}_1=\hat{A}_2$ و $\hat{D}_1=\hat{D}_2$)، AD عمودمنصف BC است)

حالت دوم) دو مثلث در یک طرف قاعده‌ی مشترک BC باشند. در این حالت نیز دو مثلث ABD و ACD به حالت (ض ض ض) هم‌نهشت هستند. اکنون اگر AD را ادامه دهیم تا ضلع BC را در نقطه‌ی H قطع کند، مثلث‌های قائم‌الزاویه‌ی ABH و ACH، هم چنین مثلث‌های قائم‌الزاویه‌ی DBH و DCH هم‌نهشت‌اند. زیرا در این حالت نیز AD عمودمنصف قاعده‌ی BC است.

در واقع در هر دو حالت، خطی که رأس‌های دو مثلث متساوی‌الساقین ABC و DBC را به هم وصل می‌کند، عمودمنصف قاعده‌ی BC است.

نکته: در صورتی‌که نقطه‌ی برخورد AD با قاعده‌ی مشترک BC را در نظر نگیریم، تنها دو مثلث ABD و ACD (در هر دو حالت) به دلیل برابری سه ضلع، هم‌نهشت هستند

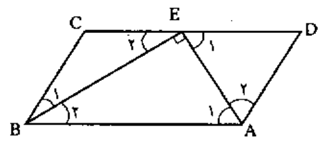
۶. مجموع زاویه‌های خارجی هر n ضلعی محدب °۳۶۰ است. بنابراین نیازی به محاسبه‌ی تعداد ضلع‌های این n ضلعی محدب نیست.

۷.

الف) چون AE نیم‌ساز زاویه‌ی A است، پس $\hat{A}_1=\hat{A}_2$ است. اما $\hat{A}_1=\hat{E}_1$ است، زیرا AB موازی CD و AE قاطع این دو خط است. پس $\hat{A}_2=\hat{E}_1$ و درنتیجه مثلث ADE متساوی‌الساقین هستند؛ یعنی AD=DE. اما $AD=BC=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}CD$ است، پس $DE=\frac{1}{2}CD$، یعنی E وسط ضلع CD است. از آن‌جا خواهیم داشت:

$$ED=CE=\frac{1}{2}CD=\frac{1}{2}AB=CB$$

از CE=CB نتیجه می‌شود که $\hat{E}_2=\hat{B}_1$ است، اما به‌دلیل موازی بودن CD و AB، $\hat{E}_2=\hat{B}_2$ است. در نتیجه $\hat{B}_1=\hat{B}_2$ است؛ یعنی BE نیم‌ساز زاویه‌ی B است.



ب) بنا به یکی از ویژگی‌های متوازی‌الاضلاع داریم:

$$\hat{A}+\hat{B}=180^\circ \Rightarrow \hat{A}_1+\hat{A}_2+\hat{B}_1+\hat{B}_2=180^\circ$$

$$\Rightarrow 2\hat{A}_1+2\hat{B}_2=180^\circ \Rightarrow \hat{A}_1+\hat{B}_2=180^\circ \quad (1)$$

اما در مثلث ABE داریم:

$$\hat{A}_1+\hat{B}_2+A\hat{E}B=180^\circ \quad (2)$$

از رابطه‌های ۱ و ۲ نتیجه می‌شود:

$$A\hat{E}B=90^\circ$$

یعنی مثلث AEB در رأس قائم‌الزاویه است.

۸. اگر مساحت لوزی را با S و قطرهای آن را با d و d′ نشان دهیم، داریم:

$$S=x^2+2x+16\ ,\ d=x+5\ ,\ d'=2x\ ,\ S=\frac{1}{2}d.d'$$

$$\Rightarrow x^2+2x+16=\frac{1}{2}(x+5)(2x) \Rightarrow x^2+x+16=x^2+5x$$

$$\Rightarrow 4x=16 \Rightarrow x=4 \Rightarrow S=16+8+16=40$$ واحد سطح

۹. می‌دانیم که در ذوزنقه‌ی متساوی‌الساقین ABCD، به‌دلیل هم‌نهشتی دو مثلث ADH و BCK، DH=CK و در نتیجه $CD=AB-2DH$ است. از آن‌جا داریم:

الف)

$$CD-AB=2DH \Rightarrow 24-12=2DH$$

$$\Rightarrow DH=6\ ,\ AD^2=AH^2+DH^2$$

$$100=AH^2+36 \Rightarrow AH^2=64 \Rightarrow AH=8$$

$$S_{\text{ذوزنقه}}=\frac{1}{2}(AB+CD)AH=\frac{1}{2}(12+24)\times\frac{8}{2}=72$$ واحد سطح

ب)

$$AC^2=AH^2+CH^2 \Rightarrow 625=225+CH^2$$

$$\Rightarrow CH^2=400 \Rightarrow CH=20$$

$$AD=BC=28\ ,\ AD^2=AH^2+DH^2 \Rightarrow 324=225+DH^2$$

$$\Rightarrow DH^2=99 \Rightarrow DH=3\sqrt{11} \Rightarrow CD=CH+HD=20+3\sqrt{11}$$

$$AB=CD-2DH=20+3\sqrt{11}-6\sqrt{11}=20-3\sqrt{11}$$

$$S_{\text{ذوزنقه}}=\frac{1}{2}(AB+CD)\times\frac{AH}{2}=\frac{1}{2}(20+3\sqrt{11}+20-3\sqrt{11})\times\frac{15}{2}$$

$$\Rightarrow S_{\text{ذوزنقه}}=150$$ واحد سطح

۱۰.

الف)

$$\frac{x}{3}=\frac{y-2}{5}=\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{x}{3}=\frac{1}{2} \Rightarrow x=\frac{3}{2}$$

$$\frac{y-2}{5}=\frac{1}{2} \Rightarrow y-2=\frac{5}{2} \Rightarrow y=\frac{9}{2}$$

ب)

$$\frac{x-y}{5}=\frac{x+y}{7}=1$$

$$\begin{cases} \frac{x-y}{5}=1 \\ \frac{x+y}{7}=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-y=5 \\ x+y=7 \end{cases} \Rightarrow x=6\ ,\ y=1$$

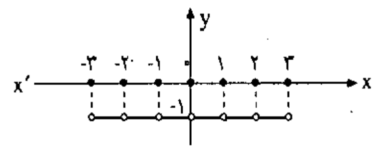
راه دوم: $\frac{(x-y)+(x+y)}{5+7}=1 \Rightarrow \frac{2x}{12}=1 \Rightarrow x=6$

$$\frac{(x-y)-(x+y)}{5-7}=1 \Rightarrow \frac{-2y}{-2}=1 \Rightarrow y=1$$

حل ۱. داریم: $f(x)=[x]+[-x]=\begin{cases}0\ , & x\in Z\\ -1\ , & x\notin Z\end{cases}$

$\lim\limits_{x\to 2} f(x)=-1$

$\lim\limits_{x\to \sqrt{3}^-} f(x)=-1$



حل ۲. تابع با ضابطه‌ی $f(x)=ax^n+bx^{n-1}+cx^{n-2}+\dots \quad n\in N$ وقتی فرد است که ضرایب توان‌های زوج x و عدد ثابت معادله، مساوی صفر باشد. و وقتی زوج است که ضرایب توان‌های فرد x مساوی صفر باشد.

$f(x)=(a-1)x^3+(a-2)x^2+(ab-8)x+(a-b+4)$

f فرد باشد: $\begin{cases}a-2=0\\ a-b+4=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=2\\ b=6\end{cases}$

f زوج باشد: $\begin{cases}a-1=0\\ ab-8=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=1\\ b=8\end{cases}$

حل ۳. اگر صفرهای دو تابع هم‌درجه، مساوی باشند، باید ضرایب آن‌ها متناسب باشند؛ یعنی:

$\frac{a}{1}=\frac{b}{5}=\frac{6}{4}\Rightarrow\frac{a}{1}=\frac{6}{4}\Rightarrow\boxed{a=\frac{3}{2}}\ ,\ \frac{b}{5}=\frac{6}{4}\Rightarrow\boxed{b=\frac{15}{2}}$

توجه: می‌توان معادله‌ی $x^2+5x+4=0$ را حل کرد و ریشه‌های آن را در معادله‌ی $ax^2+bx+6=0$ قرار داد.

حل ۴. فرض می‌کنیم $x=\frac{\pi}{7}$ و حاصل عبارت سمت چپ برابر A باشد. پس:

$\cos 2x+\cos 4x+\cos 6x=A$

دو طرف تساوی را در $2\sin x$ ضرب می‌کنیم. سپس هر جمله‌ی سمت چپ را به حاصل جمع تبدیل می‌کنیم.

$2\cos 2x\sin x+2\cos 4x\sin x+2\cos 6x\sin x=2A\sin x$

داریم:

$2\cos a\sin b=\sin(a+b)-\sin(a-b)$

عبارت سمت چپ $=\sin 3x-\sin x+\sin 5x-\sin 3x+\sin 7x-\sin 5x=2A\sin x$

$\Rightarrow 2A\sin x=-\sin x+\sin 7x$ و $x=\frac{\pi}{7}$

$2A\sin\frac{\pi}{7}=-\sin\frac{\pi}{7}+\underbrace{\sin\pi}_{0}\Rightarrow 2A\sin\frac{\pi}{7}=-\sin\frac{\pi}{7}\Rightarrow A=-\frac{1}{2}$

حل ۵.

$A=\underbrace{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}_{1}+\sin^2\alpha+\sin^2\alpha.\tan^2\alpha$

$A=1+\sin^2\alpha(1+\tan^2\alpha)=1+\sin^2\alpha(\frac{1}{\cos^2\alpha})$

$=1+\tan^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}$

حل ۶.

$|f(x)-4|<\frac{1}{200}\Rightarrow|5x-5|<\frac{1}{200}\Rightarrow|x-1|<\frac{1}{1000}$

$x\to 1^-\Rightarrow|x-1|=0<1-x$

$|x-1|<\frac{1}{1000}\Rightarrow 0<1-x<\frac{1}{1000}\xrightarrow{\text{در (1-) ضرب می‌کنیم}}$

$-\frac{1}{1000}<x-1<0\Rightarrow 1-\frac{1}{1000}<x<1\Rightarrow\frac{999}{1000}<x<1$

حل ۷. $f(x)=y\Rightarrow f^{-1}(y)=x \qquad (1)$

$g(x)=\frac{2+y}{2-y}\Rightarrow g^{-1}(\frac{2+y}{2-y})=x \qquad (2)$

با مقایسه‌ی (۱) و (۲): $g^{-1}(\frac{2+y}{2-y})=f^{-1}(x)$

$\frac{2+y}{2-y}=x\Rightarrow 2x-xy=2+y\Rightarrow y(1+x)=2x-2\Rightarrow y=\frac{2x-2}{1+x}$

$\Rightarrow g^{-1}(x)=f^{-1}(\frac{2x-2}{1+x})$

حل ۸. صورت و مخرج را هم در مزدوج صورت و هم در مزدوج مخرج ضرب می‌کنیم.

$\lim\limits_{x\to 3}\frac{(x-5)+\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+6}-3}=\frac{0}{0}$

$\lim\limits_{x\to 3}\frac{(x-5)+\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+6}-3}\times\frac{(x-5)-\sqrt{x+1}}{(x-5)-\sqrt{x+1}}\times\frac{\sqrt{x+6}+3}{\sqrt{x+6}+3}$

$=\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-11x+24}{x+6-9}\times\frac{\sqrt{x+6}+3}{(x-5)-\sqrt{x+1}}$

$=\lim\limits_{x\to 3}\frac{(x-3)(x-8)}{x-3}\times\frac{\sqrt{x+6}+3}{(x-5)-\sqrt{x+1}}$

$=(3-8)\times\frac{3+3}{-2-2}=-5(-\frac{3}{2})=\frac{15}{2}$

حل ۹.

داریم: $a-b=(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b})(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2}+\sqrt[3]{ab})$

$\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt[3]{x^3+x^2}-x)=+\infty-\infty$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt[3]{x^3+x^2}-x)\times\frac{\sqrt[3]{(x^3+x^2)^2}+x^2+x\sqrt[3]{x^3+x^2}}{\sqrt[3]{(x^3+x^2)^2}+x^2+x\sqrt[3]{x^3+x^2}}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^3+x^2-x^3}{x^2+x^2+x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{3x^2}=\frac{1}{3}$

حل ۱۰. باید حدّ راست و حدّ چپ و مقدار تابع در $x=1$ برابر باشند.

حدّ راست $\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=a\sin 0+b[2^+]=0+2b=2b$

حدّ چپ $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}(ax^2+bx)=a+b$

مقدار تابع $f(1)=\left[1-\frac{7}{2}\right]=\left[-\frac{5}{2}\right]=-3$

$2b=-3\Rightarrow\boxed{b=-\frac{3}{2}}$

$a+b=-3\Rightarrow a-\frac{3}{2}=-3\Rightarrow\boxed{b=-\frac{3}{2}}$

.۱

$5^n - 4n - 1 = 16r$

$n = 1 \Rightarrow 5^1 - 4(1) - 1 = 0 = 16\times 0$

فرض: $n = k,\ k \geq 1 \Rightarrow 5^k - 4k - 1 = 16r'$

حکم: $n = k+1 \Rightarrow 5^{k+1} - 4(k+1) - 1 = 16r''$

$r', r'' \in z$

ف $\times 5 \Rightarrow 5^{k+1} - 5\times 4k - 5 = 80r'$

$\Rightarrow 5^{k+1} - 4k - 4 - 1 = 80r' + 16k$

$\Rightarrow 5^{k+1} - 4(k+1) - 1 = 16\underbrace{(5r'+k)}_{r''} = 16r''$

.۲

الف) $a = 2,\ b = 3,\ c = 5 \Rightarrow a+b+c = 10$

ب) $n = 1 \Rightarrow 1^2 < 1!$ — یا هر مثال نقض مناسب دیگر

ج) $n = 4 \Rightarrow 3n = 12 \neq 8k$

د) $\begin{matrix} 3 < 6 \\ -5 < -1 \end{matrix} \Rightarrow 8 < 5$ — یا هر مثال نقض دیگر

.۳

$2x^2 - 4xy + 4y^2 - 2x + 6 > 0$

$\Leftrightarrow (x^2 - 4xy + 4y^2) + (x^2 - 2x + 1) + 5 > 0$

$\Leftrightarrow (x-2y)^2 + (x-1)^2 + 5 > 0$ بدیهی

۴. چون $a \in Z$ بنابراین یکی از حالت‌های زیر را خواهیم داشت:

$a = 3k \to a(a+1)(a+2) = 3k(a+1)(a+2) = 3k'$

$a = 3k+1 \to a(a+1)(a+2) = a(a+1)(\overbrace{3k+1+2}^{3(k+1)}) = 3k'$

$a = 3k+2 \to a(a+1)(a+2) =$

$a(3k+2+1)(a+2) = 3\underbrace{(k+1)a(a+2)}_{k''} = 3k''$

.۵

فرض: $n^2 = 5k\ ,\ n \in z\ ,\ k, k' \in Z$

حکم: $n = 5k'$

اثبات: برهان خلف

$n \neq 5k' \Rightarrow n = 5k' \pm 1 \Rightarrow n^2 = (5k' \pm 1)^2 = 25k'^2 \pm 10k' + 1$

$= 5k'' + 1$

$n = 5k' \pm 2 \Rightarrow$ مشابه $n^2 = (5k' \pm 2)^2 \Rightarrow n^2 = 5k'' + 1$

.۶

$7 \times 12 = 84$ لانه

$\left[\frac{n}{84}\right] + 1 = 3 \Rightarrow \left[\frac{n}{84}\right] = 2 \Rightarrow n = \overbrace{84\times 2}^{168} + 1 = 169$

.۷

$A = \{1, 2, \ldots, 52\}$

$(1,2)(3,4),\ldots,(51,52) \Rightarrow$ ۲۶ لانه

طبق اصل لانه کبوتر حداقل ۲ عضو از ۲۷ عضو انتخابی نسبت به‌هم اولند.

.۸

$A_3 = (-\frac{1}{3}, \frac{7}{3}) \quad A_4 = (-\frac{1}{4}, \frac{9}{4})$

$A_5 = (-\frac{1}{5}, \frac{11}{5}) \quad A_2 = (-\frac{1}{2}, \frac{5}{2})$

$\bigcup_{i=3}^{5} A_i = (-\frac{1}{3}, \frac{7}{3})$

$\bigcap_{i=3}^{5} A_i = (-\frac{1}{5}, \frac{11}{5})$

$A_4 - \bigcap_{i=3}^{5} A_i = (-\frac{1}{4}, \frac{9}{4}) - (-\frac{1}{5}, \frac{11}{5}) = (-\frac{1}{4}, -\frac{1}{5}] \cup [\frac{11}{5}, \frac{9}{4})$

.۹

الف $(A\cap B) - (A\cap C) = (A\cap B)\cap(A\cap C)'$

$= (A\cap B)\cap(A'\cup C') = [(A\cap B)\cap A']\cup[(A\cap B)\cap C']$

$= (A\cap B)\cap C' = A\cap(B\cap C') = A\cap(B-C)$

ب $(A\cup B) - (B\cup C) = (A\cup B)\cap(B\cup C)' =$

$(A\cup B)\cap(B'\cap C') = [(A\cup B)\cap B']\cap C' =$

$[(A\cap B')\cup\underbrace{(B\cap B')}_{\varnothing}]\cap C' = (A\cap B')\cap C' = (A-B)-C$

.۱۰

$\binom{2n}{2} = \binom{n}{2} + 12 \Rightarrow \frac{2n(2n-1)(2n-2)!}{2!(2n-2)!} =$

$\frac{n(n-1)(n-2)!}{2(n-2)!} + 12 \Rightarrow 4n^2 - 2n = n^2 - n + 24 \Rightarrow$

$3n^2 - n - 24 = 0 \Rightarrow n = \frac{1 \pm \sqrt{289}}{6} \to \begin{cases} n = 3 \\ n = -\frac{8}{3} \end{cases}$

.۱۱

$(\{b\}, (d-1, 4)) = (\{5, b, c\}, (0, a))$

$b = c = 5 \quad a = 4 \quad d - 1 = 0 \to d = 1$

.۱۲

$(x,y) \in (A\times B)\cap(C\times D) \Leftrightarrow (x,y) \in A\times B, (x,y)$

$\in (C\times D) \Leftrightarrow (x\in A, y\in B), (x\in C, y\in D)$

$\Leftrightarrow (x\in A, x\in C), (y\in B, y\in D) \Leftrightarrow$

$x\in A\cap C,\ y\in B\cap D \Leftrightarrow (x,y)\in(A\cap C)\times(B\cap D)$

$:(A\times B)\cap(C\times D) = (A\cap C)\times(B\cap D)$

.۱۳

$A = \{0, 1, 4, 9\}$ الف: $R = \{(0,0), (1,-1)(1,0)(1,1)(4,0)(9,0)\}$

$B = \{-1, 0, 1\}$ ب $n(p(B)) = 2^3 = 8 \Rightarrow$

تعداد رابطه‌ها $= 2^{8\times 8} = 2^{64}$

.۱۴

$n(A) = 25$

$n(A^2 - B^2) = 544 \Rightarrow (n(A))^2 - (n(A\cap B))^2 = 544$

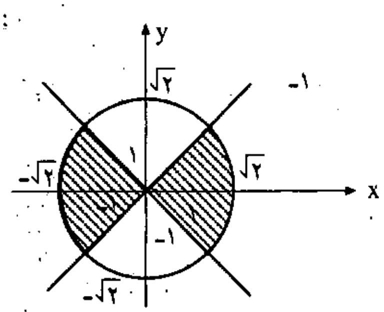
$\Rightarrow 625 - x = 544$

$x = 81 \Rightarrow n(A\cap B) = 9$

.۱۵

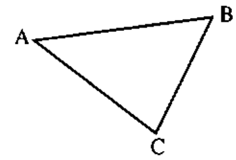
رسم $x^2 + y^2 \geq 2$

رسم $|x| > |y|$

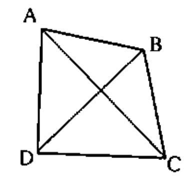


رشد برهان متوسطه — دوره‌ی ... شماره‌ی ... زمستان ۱۳۸...

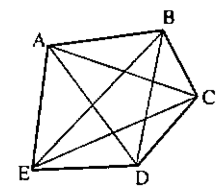
۱ . یک سه ضلعی، یک چهار ضلعی، یک پنج ضلعی، یک شش ضلعی و یک هفت ضلعی را در نظر می‌گیریم و قطرهای آن‌ها را نیز در صورت وجود رسم می‌کنیم.



ـ مجموع تعداد ضلع‌ها و قطرهای مثلث (سه ضلعی) مساوی ۳ است.
ـ مجموع تعداد ضلع‌ها و قطرهای چهارضلعی، مساوی ۶ است.

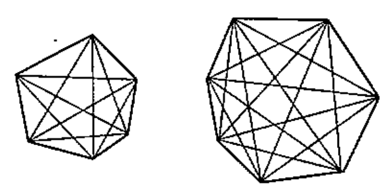


ـ مجموع تعداد ضلع‌ها و قطرهای پنج ضلعی مساوی ۱۰ است.
ـ مجموع تعداد ضلع‌ها و قطرهای شش ضلعی، مساوی ۱۵ است.



ـ مجموع تعداد ضلع‌ها و قطرهای هفت ضلعی، مساوی ۲۱ است.
پس جدول زیر را داریم:

تعداد ضلع‌ها	۳	۴	۵	۶	۷
مجموع تعداد ضلع‌ها و قطرها	۳	۶	۱۰	۱۵	۲۱



مجموع تعداد ضلع‌ها و قطرهای یک چندضلعی، در واقع تعداد پاره‌خط‌هایی است که از وصل کردن دو به دوی رأس‌های آن چند ضلعی ایجاد می‌شود. بنابراین به بررسی این مطلب می‌پردازیم که از هر رأس یک چند ضلعی، چند پاره‌خط (ضلع و قطر) رسم می‌شود.

ـ از هر رأس یک سه ضلعی، ۲ پاره‌خط رسم می‌شود.
ـ از هر رأس یک چهار ضلعی، ۳ پاره‌خط رسم می‌شود.
ـ از هر رأس یک پنج ضلعی، ۴ پاره‌خط رسم می‌شود.
ـ از هر رأس یک شش ضلعی، ۵ پاره‌خط رسم می‌شود.
ـ از هر رأس یک هفت ضلعی، ۶ پاره‌خط رسم می‌شود.

پس جدول زیر را داریم:

تعداد رأس‌های چند ضلعی	۳	۴	۵	۶	۷
تعداد پاره‌خط‌های رسم شده از هر رأس	۲	۳	۴	۵	۶

بنابراین تعداد پاره‌خط‌های رسم شده از تمام رأس‌های چند ضلعی‌های بالا طبق جدول زیر است:

تعداد رأس‌های چند ضلعی	۳	۴	۵	۶	۷
تعداد همه‌ی پاره‌خط‌های رسم شده از رأس‌ها	۳×۲	۴×۳	۵×۴	۶×۵	۷×۶

اما هر رأس دوبار منظور شده است. بنابراین تعداد پاره‌خط‌های واصل بین تمام رأس‌های یک چند ضلعی (در واقع مجموع تعداد ضلع‌ها و قطرهای چندضلعی) طبق جدول زیر است:

تعداد رأس‌ها (یا ضلع‌ها)	۳	۴	۵	۶	۷
تعداد ضلع‌ها و قطرها	$\frac{3\times2}{2}=3$	$\frac{4\times3}{2}=6$	$\frac{5\times4}{2}=10$	$\frac{6\times5}{2}=15$	$\frac{7\times6}{2}=21$

جدول ۱ نشان می‌دهد که تعداد پاره‌خط‌های رسم شده از هر رأس یک چند ضلعی، از تعداد رأس‌ها یکی کمتر است.

تعداد رأس‌ها (یا ضلع‌ها)	۳	۴	۵	۶	۷
تعداد پاره‌خط‌های رسم شده از هر رأس	۳−۱=۲	۴−۱=۳	۵−۱=۴	۶−۱=۵	۷−۱=۶

با توجه به جدول بالا، جدول‌های ۲ و ۳ به صورت زیر درمی‌آیند:

تعداد رأس‌ها (یا ضلع‌ها)	۳	۴	۵	۶	۷
تعداد پاره‌خط‌های رسم شده از همه‌ی رأس‌ها با تکرار رأس‌ها	$3(3-1)$	$4(4-1)$	$5(5-1)$	$6(6-1)$	$7(7-1)$

تعداد رأس‌ها (یا ضلع‌ها)	۳	۴	۵	۶	۷
تعداد پاره‌خط‌های رسم شده از همه‌ی رأس‌ها بدون تکرار آن‌ها؛ یعنی مجموع تعداد ضلع‌ها و قطرها	$\frac{3(3-1)}{2}=3$	$\frac{4(4-1)}{2}=6$	$\frac{5(5-1)}{2}=10$	$\frac{6(6-1)}{2}=15$	$\frac{7(7-1)}{2}=21$

بنابراین به این حدس می‌رسیم که مجموع تعداد ضلع‌ها و قطرهای یک n‌ضلعی محدب مساوی $\frac{n(n-1)}{2}$ است.

برای $n=3$ داریم: $\frac{3(3-1)}{2}=3$. برای $n=4$ داریم: $\frac{4(4-1)}{2}=6$

برای $n=5$ داریم: $\frac{5(5-1)}{2}=10$. برای $n=6$ داریم: $\frac{6(6-1)}{2}=15$

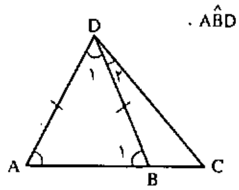
۲ . با توجه به شکل و داده‌های مسئله داریم:

$$AD=DB\Rightarrow \hat{A}=\hat{B}_1=A\hat{B}D \qquad (1)$$

$$AC=CD\Rightarrow \hat{A}=A\hat{D}C=\hat{D}_1+\hat{D}_2 \qquad (2)$$

از رابطه‌ی ۲ نتیجه می‌شود که $\hat{A}>\hat{D}_1$ است. اما بنابه رابطه‌ی ۱، $\hat{A}=\hat{B}_1$ است.

پس $\hat{B}_1>\hat{D}_1$ و یا $A\hat{B}D>A\hat{D}B$.



۳ . بنابه ویژگی نیم‌ساز زاویه‌ی درونی در مثلث داریم:

$$\frac{AD}{DC}=\frac{AB}{BC}$$

از آن‌جا، با توجه به شکل خواهیم داشت:

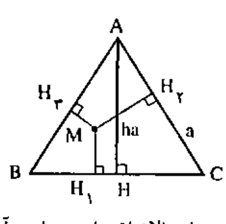
$$\frac{3x-1}{2x+3}=\frac{32}{36}\Rightarrow\frac{3x-1}{2x+3}=\frac{8}{9}\Rightarrow 27x-9=16x+24$$

$$\Rightarrow 11x=33\Rightarrow x=3\Rightarrow AC=5x+2=5\times3+2=17$$

$$\Rightarrow \text{محیط مثلث}=AB+AC+BC=32+17+36=85$$

۴ . می‌دانیم که مجموع فاصله‌های هر نقطه واقع در درون هر مثلث متساوی‌الاضلاع از سه ضلع آن، مساوی ارتفاع آن مثلث است. بنابراین اگر ارتفاع این مثلث را h_a فرض کنیم، خواهیم داشت:

$h_a=12\sqrt{3}$



اکنون اگر ضلع مثلث متساوی‌الاضلاع را a و مساحت آن را s بگیریم، می‌دانیم:

$$h_a = \frac{a\sqrt{3}}{2} \ , \ s = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

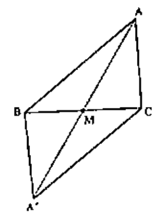
از آن‌جا خواهیم داشت:

$$12\sqrt{3} = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow a = 24$$

$$s = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{576\sqrt{3}}{4} = 144\sqrt{3}$$ واحد سطح

۵. مثلث ABC و میانه‌ی AM از آن را درنظر می‌گیریم. می‌خواهیم ثابت کنیم:

$$AM < \frac{1}{2}(AB + AC)$$



برای اثبات، میانه‌ی AM را به اندازه‌ی خودش امتداد می‌دهیم تا نقطه‌ی A' به‌دست آید. از A' به B و C وصل می‌کنیم. چهارضلعی $ABA'C$ متوازی‌الاضلاع است. زیرا قطرهای آن (AA' و BC) یکدیگر را نصف کرده‌اند. بنابراین (۱) $BA' = AC$ است.

اما در مثلث ABA' داریم:

$$AA' < AB + BA' \qquad (2)$$

در رابطه‌ی ۲ به جای AA' مساوی‌اش 2AM، و به جای BA' مقدار مساوی‌اش AC را قرار می‌دهیم. خواهیم داشت:

$$2AM < AB + AC \Rightarrow AM < \frac{1}{2}(AB + AC)$$

$$2AM < AB + AC \Rightarrow AM < \frac{1}{2}(AB + AC) \qquad (1)$$

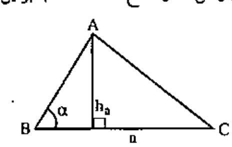
از طرفی در همین مثلث $AA'B$ داریم:

$$AA' > |AB - BA'| \Rightarrow 2AM > |AB - AC|$$

$$\Rightarrow AM > \frac{1}{2}|AB - AC| \qquad (2)$$

از رابطه‌های (۱) و (۲) حکم مسأله نتیجه می‌شود.

۶. فرض می‌کنیم مسئله حل شده و مثلث ABC با معلومات $BC = a$ ، $\hat{B} = \alpha$ و $AH = h_a$ جواب مسئله باشد. به طوری که دیده می‌شود، طول ضلع BC معلوم است: پس این ضلع را می‌توان رسم کرد. از طرف دیگر، برای رأس A دو مکان وجود دارد؛ یکی ضلع دیگر زاویه‌ی $\hat{B} = \alpha$ و دیگری خطی موازی ضلع BC و به فاصله‌ی h_a از آن (در طرف ضلع زاویه‌ی $\hat{B} = \alpha$). زیرا h_a فاصله‌ی رأس A از ضلع BC است. بنابراین برای رسم مثلث ABC چنین عمل می‌کنیم:



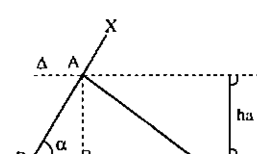
الف) پاره‌خط $BC = a$ را رسم می‌کنیم.

ب) از نقطه‌ی B نیم‌خط Bx را چنان رسم می‌کنیم که با ضلع BC زاویه‌ی $\hat{B} = \alpha$ را بسازد.

پ) خطی موازی ضلع BC و به فاصله‌ی h_a از آن رسم می‌کنیم و آن را Δ می‌نامیم (در همان طرفی که Bx قرار دارد).

ت) نقطه‌ی برخورد خط Δ با نیم‌خط Bx، رأس A از مثلث ABC است.

ث) از A به C وصل می‌کنیم. مثلث ABC جواب مسئله است. این مسئله همواره جواب دارد.



نکته: این مسئله در کتاب کار هندسه‌ی (۲) از انتشارات مدرسه، به روش دیگری حل شده است. آن راه‌حل را نیز ببینید.

۷. قطر عمود بر این دو وتر موازی را رسم می‌کنیم. نقطه‌ی برخورد آن با AB و CD را به ترتیب H و K می‌نامیم و از O به A و C وصل می‌کنیم. می‌دانیم که هر قطر عمود بر وتر،

برگ اشتراک مجله های رشد

شرایط:

۱. واریز مبلغ ۳۰/۰۰۰ ریال به ازای هر عنوان مجله درخواستی، به صورت علی الحساب به حساب شماره‌ی ۳۹۶۶۲۰۰۰ بانک تجارت شعبه سه راه آزمایش (سرخه حصار) کد ۳۹۵ در وجه شرکت افست

۲. ارسال اصل رسید بانکی به همراه برگ تکمیل شده اشتراک

- **نام مجله :** ....
- **نام و نام خانوادگی:** ....
- **تاریخ تولد:** ....
- **میزان تحصیلات:** ....
- **تلفن:** ....
- **نشانی کامل پستی:**

استان: .... شهرستان: ....

خیابان: ....

....

پلاک: .... کدپستی: ....

- **مبلغ واریز شده:** ....
- **شماره و تاریخ رسید بانکی:** ....
- **آیا مایل به دریافت مجله درخواستی به صورت پست پیشتاز هستید؟** بله ☐ خیر ☐

امضا:

نشانی: تهران ـ صندوق پستی ۱۶۵۹۵/۱۱۱

نشانی اینترنتی: www.roshdmag.ir

پست الکترونیک: Email:info@roshdmag.ir

☎ **امور مشترکین:** ۷۷۳۳۶۶۵۶ ـ ۷۷۳۳۵۱۱۰

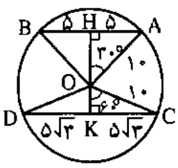
☎ **پیام گیر مجلات رشد:** ۸۸۳۰۱۴۸۲ ـ ۸۸۸۳۹۲۳۲

یادآوری:

- هزینه برگشت مجله در صورت خوانا و کامل نبودن نشانی، بر عهده مشترک است.
- مبنای شروع اشتراک مجله از زمان وصول برگ اشتراک می‌باشد.
- برای هر عنوان مجله برگ اشتراک جداگانه تکمیل و ارسال کنید (تصویر برگ اشتراک نیز مورد قبول است)

آن وتر و کمان نظیرش را نصف می‌کند. بنابراین در مثلث‌های قائم‌الزاویه‌ی OHA و OKC داریم:

$$AH=\frac{AB}{2}=\frac{10}{2}=5\ ,\ \ OA=10$$



$$\Rightarrow \sin A\hat{O}H=\frac{AH}{OA}=\frac{5}{10}=\frac{1}{2}\Rightarrow A\hat{O}H=30^\circ$$

$$CK=\frac{CD}{2}=\frac{10\sqrt{3}}{2}=5\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \sin C\hat{O}K=\frac{CK}{OC}=\frac{5\sqrt{3}}{10}=\frac{\sqrt{3}}{2}=\sin 60^\circ$$

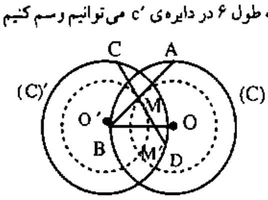
پس داریم:

$$A\hat{O}H+C\hat{O}K=30^\circ+60^\circ=90^\circ\Rightarrow A\hat{O}C=180^\circ-90^\circ=90^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{AC}=\widehat{BD}=A\hat{O}C=90^\circ$$

نکته: با توجه به این‌که $A\hat{O}B=60^\circ$ و $C\hat{O}D=120^\circ$ است، $\widehat{AB}=60^\circ$ و $\widehat{CD}=120^\circ$ خواهد بود.

۸. دو دایره که هر کدام از مرکز دیگری بگذرند، دو دایره‌ی متقاطع مساوی‌اند که طول خط‌المرکزین آن‌ها مساوی شعاع مشترکشان است. بنابراین اگر مرکزهای دو دایره‌ی (c) و (c′) را به ترتیب O و O′ بنامیم، خط‌المرکزین این دو دایره‌ی OO′ مساوی ۵ سانتی‌متر است. از طرف دیگر، می‌دانیم، مکان هندسی وسط وترهایی به طول l در دایره‌ای به مرکز O و به شعاع R، دایره‌ای به همین مرکز و به شعاع $\sqrt{R^2-\frac{l^2}{4}}$ است. بنابراین مکان هندسی وسط وترهایی به ۸ در دایره‌ی (c)، دایره‌ای به مرکز O و به شعاع $\sqrt{5^2-\frac{8^2}{4}}=3cm$ و مکان هندسی وسط وترهایی به طول ۶ در دایره‌ی (c′) دایره‌ای به مرکز O′ و به شعاع $\sqrt{5^2-\frac{6^2}{4}}=4cm$ است. این دو دایره را رسم می‌کنیم. نقطه‌های برخورد آن‌ها (در صورت وجود) جواب مسئله است. اگر این دو نقطه را M و M′ بنامیم، از این دو نقطه وتری به طول ۸ در دایره‌ی c و وتری به طول ۶ در دایره‌ی c′ می‌توانیم رسم کنیم.



نکته: همان طور که اشاره شد، ممکن است مسئله جواب نداشته باشد و این در صورتی است که دو دایره‌ی مکان هندسی وسط وترها، یکدیگر را قطع نکنند. برای بررسی این مطلب می‌توانیم شرط متقاطع بودن آن‌ها را بررسی کنیم. در این مسئله، $d=oo'=5$ ، $R_1=3$ و $R_2=4$ است و داریم:

$$|R_2-R_1|=1<d=5<R_1+R_2=7$$

پس دو دایره‌ی مکان هندسی وسط وترها، یکدیگر را قطع می‌کنند و مسئله دو جواب دارد (نقطه‌های M و M′).

۹. با توجه به این‌که $O\hat{T}M=O\hat{T'}M=90^\circ$ و OM عمودمنصف TT′ و OM نیم‌ساز زاویه‌های TMT′ و TOT′ است، داریم:

$$OM=20, OT=OT'=R=12, MT^2=OM^2-OT^2\quad(1)$$

$$\Rightarrow MT^2=400-144=256\Rightarrow MT=MT'=16$$

$$OM.TH=OT.MT=\frac{1}{2}S_{OMT}\quad(2)$$

$$\Rightarrow 20\times TH=12\times 16\Rightarrow TH=9/6=\frac{1}{2}TT'\Rightarrow TT'=19/2$$

$$OT^2=OH.OM\Rightarrow 144=OH\times 20\Rightarrow OH=7/2\quad(3)$$

$$T\hat{M}T'=2O\hat{M}T\ ,\ \ tg\,O\hat{M}T=\frac{OT}{MT}=\frac{12}{16}=\frac{3}{4}\quad(4)$$

$$\Rightarrow O\hat{M}T=Arctg(\frac{4}{3})\Rightarrow T\hat{M}T'=2Arctg(\frac{3}{4})$$

ریاضی‌دانان مسلمان

ابوالفتح اصفهانی

ابوالفتح محمدبن قاسم‌بن فضل اصفهانی
ریاضی دان ایرانی (زنده و فعّال در ۵۱۳)

بیشتر مورخان درباره‌ی تاریخ زندگانی وی اشتباه کرده او را از ریاضیدانان سده‌ی چهارم دانسته‌اند و نام او را هم به صورت‌های مختلف از قبیل «ابوالفتح بن محمدبن قاسم‌بن فضل» و «ابوالفتح محمودبن محمدبن قاسم‌بن فضل» و «محمودبن قاسم‌بن فضل» و «محمودبن عمربن ابی الفضل» ثبت کرده‌اند. آن‌چه به تحقیق درباره‌ی وی می‌توان گفت این است که وی از ریاضیدانان زبردست اواخر قرن پنجم و اوایل قرن ششم بوده و بدون تردید در سال ۵۱۳ زنده بوده و معاصر با ابوکالیجار گرشاسف بن علی بن فرامرز حسام امیرالمؤمنین پنجمین پادشاه سلسله‌ی کاکویه اصفهان و همدان بوده که از ۴۸۸ تا حدود ۵۱۳ حکومت داشته‌اند. وی تحریر نوی از مقالات پنجم تا هفتم مخروطات اپولونیوس پرداخته و در سال ۵۱۳ ملخّصی از کتاب مخروطات فراهم آورده و آن را به نام ابوکالیجار مذکور ساخته است.

آثار ریاضی موجود وی

۱. تلخیص المخروطات

مخروطات اپولُونیوس دارای هشت مقاله بوده که مقاله‌ی هشتم آن از دیرباز مفقود شده و فقط مقالات اول تا هفتم آن به دست مسلمین رسیده است. این هفت مقاله در قرن سوم هجری توسط هلال حمصی (چهار مقاله‌ی اول) و ثابت بن قره (سه مقاله‌ی پنجم تا هفتم) از یونانی به عربی ترجمه شد.

ابوالفتح اصفهانی در سال ۵۱۳ از این هفت مقاله تلخیصی فراهم آورد و آن را تلخیص المخروطات نامید. این تلخیص از این جهت مورد توجه ریاضیدانان است که چون متن یونانی مقالات پنجم تا هفتم مخروطات نیز بعداً از بین رفت این سه مقاله از روی ترجمه‌ی لاتینی همین تلخیص المخروطات به دست اروپاییان رسید.

تلخیص المخروطات در سال ۱۶۶۱م به زبان لاتینی ترجمه شد و سپس در سال ۱۹۲۳م از روی ترجمه‌ی لاتینی به زبان فرانسوی برگردانده شد.

از تلخیص المخروطات چند نسخه‌ی خطی موجود است و از آن جمله است یک نسخه به خط قطب‌الدین شیرازی که متعلق به کتابخانه سرای در استانبول (به شماره‌ی ۳۴۵۵) است و نسخه‌ای دیگر به خط قوشچی (علاء الدین علی بن محمد) که متعلق به کتابخانه‌ی ایاصوفیا (به شماره‌ی ۲۷۲۴) است. عکس این نسخه به شماره‌های ۵۷۰ و ۵۷۱ و فیلم آن به شماره‌ی ۳۸۵ در کتابخانه‌ی دانشگاه تهران موجود است. این نسخه چنین شروع می‌شود: «هذا کتاب تلخیص المخروطات ممالخصه الشیخ محمودبن قاسم بن فضل الاصفهانی» و در صفحه‌ی چهارم آن آمده است: «لخزانة کتب مولانا الملک الاجل السیدالمنعم العالم العادل المؤید المظفر المنصور عضدالدین علاء الدوله... ابی کالیجار گرشاسف بن علی‌بن فرامرز... حسام امیرالمؤمنین اطال الله بقاه...»

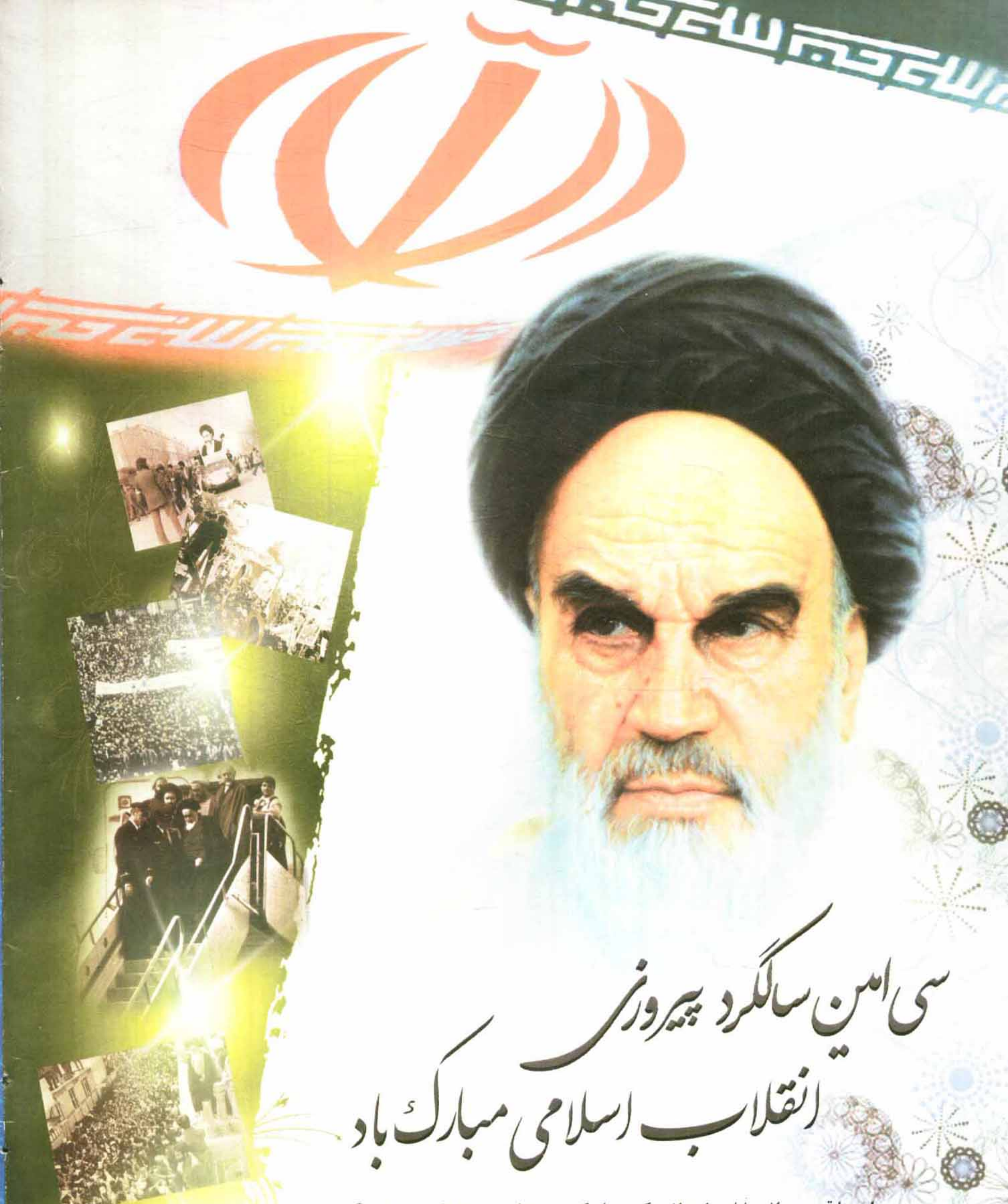
ابوالفتح اصفهانی در پایان مقاله‌ی هفتم تلخیص المخروطات خاطرنشان می‌سازد که این ملخص را از کتاب مخروطات برای ابوکالیجار فراهم آورده و گمان می‌برد که وی نخستین کسی است که این کار را انجام داده و تاریخ اتمام و تحریر کتاب را ۵۱۳ هجری معین می‌کند (و فرغ من اتمامه و تحریره فی شهور سنة ثلث عشرة و خمسمائة هجریه النبویه).

۲. ترجمه‌ی فارسی مخروطات

سوتر نوشته است که نسخه‌ی خطی شماره‌ی ۲۹۶ کتابخانه‌ی فلورانس شامل ترجمه‌ی فارسی هر هفت مقاله‌ی اپولونیوس توسط ابوالفتح اصفهانی است. در منابع دیگر از این ترجمه سخنی به میان نیامده و این مطلب باید مورد تحقیق و بررسی قرار گیرد.

منبع

زندگی‌نامه‌ی ریاضی‌دانان دوره‌ی اسلامی، ابوالقاسم قربانی، مرکز نشر دانشگاهی



جوان‌ها قدر جوانی‌شان را بدانند که صرف کنند در علم و در تقوا و در سازندگیِ خودشان که اشخاص امین صالح بشوند. مملکت با اشخاص امین صالح می‌تواند مستقل باشد.

امام خمینی(ره)

رشد برهان

مجله ی ریاضی

دوره ی متوسطه

۶۱

وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه ریزی آموزشی
دفتر انتشارات کمک آموزشی

فصلنامه ی آموزشی، تحلیلی و اطلاع رسانی

• دوره ی هجدهم • شماره ی ۳ • بهار ۱۳۸۸ • بها: ۴۰۰۰ ریال

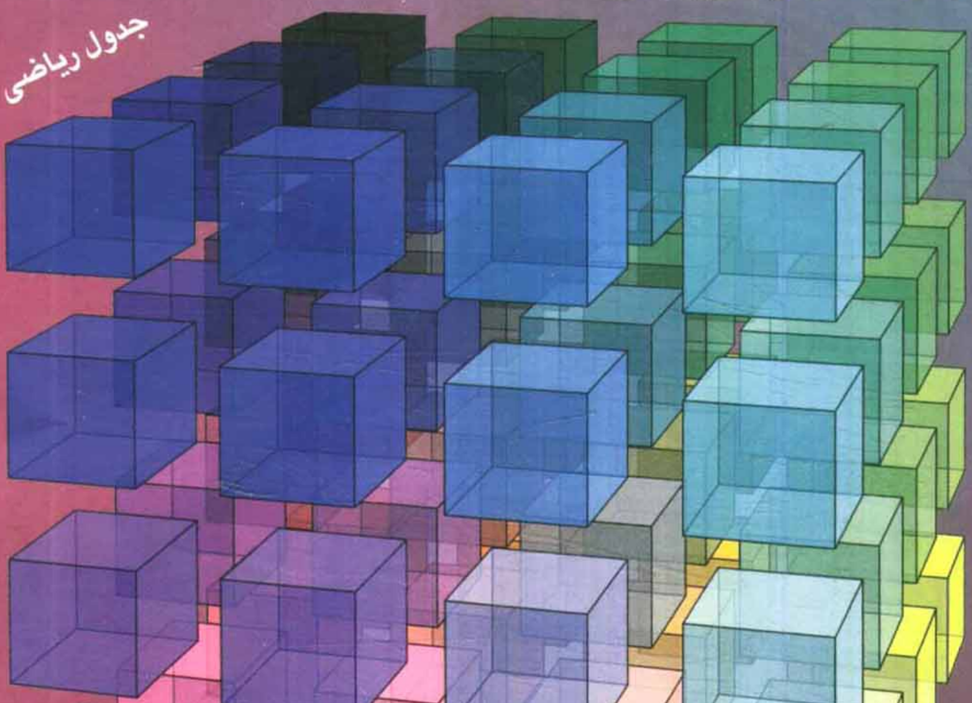
ISSN:1735-4951
www.roshdmag.ir

• نامعادله های دو متغیره و کاربردهای آن

• قضیه تقسیم و کاربرد های آن در Z

جدول ریاضی

• یادی از استاد اسدالله آل بویه





ثابت بن قرّه

ابوالحسن ثابت بن قرة بن زهر ون حرّانی

ریاضی دان و منجم حوزه‌ی علمی بغداد (۲۲۱ - ۲۸۸)

از مردم حرّان واقع در بین النهرین بود. در حدود سال ۲۲۱ به‌دنیا آمد. خانواده‌اش به نجوم و ریاضیات دلبستگی داشتند. زبان اصلی ثابت سریانی بود و زبان‌های یونانی و عربی را خوب می‌دانست. در جوانی در حرّان به شغل صرّافی اشتغال داشت. هنگامی که محمدبن موسی بن شاکر در حین مسافرت گذارش به حرّان افتاد با او آشنا شد و چون از وقوف او بر زبان‌های عربی و یونانی آگاه گردید او را با خود به بغداد برد. وی در تحت تعلیم و هدایت بنوموسی به تحصیل ریاضیات و نجوم ادامه داد و علم طب را نیز فرا گرفت و یکی از زبردست‌ترین دانشمندان و مترجمان عصر خود گردید.

آثار اقلیدس و ارشمیدس و اپولونیوس و ثاوذوسیوس و بطلمیوس و اوطوقیوس به‌دست خود او و یا زیرنظر او به عربی ترجمه شد. ترجمه‌های دیگران و از جمله اسحاق‌بن حنین را اصلاح کرد.

آثار ریاضی ثابت بن قره نقش مهمی در پیشرفت ریاضیات دوره‌ی اسلامی داشته است. نوشته‌های وی راه را برای اکتشافات بعدی مانند تعمیم مفهوم عدد صحیح به اعداد حقیقی مثبت و حساب انتگرال و مثلثات کروی و جز این‌ها هموار کرد. طریقه‌ی وی در تعیین مساحت سهمی و حجم سهمی‌وار بسیار جالب است. دستور زیر را برای محاسبه‌ی دسته‌ای از عددهای متحاب بیان و ثابت کرد:

«هرگاه $p = 3 \times 2^{n} - 1$ و $q = 3 \times 2^{n-1} - 1$ و $r = 9 \times 2^{2n-1} - 1$ بوده و p و q و r عددهای اول بزرگتر از ۲ باشند آن‌گاه عددهای $2^{n}pq$ و $2^{n}r$ متحاب خواهند بود.»

ثابت، علاوه بر این، طبیبی زبردست و در پایان عمرش از ملازمان خلیفه معتضد عباسی بود. وی به سال ۲۸۸ در بغداد درگذشت. سنان‌بن ثابت پسر و ابراهیم‌بن سنان نوه‌ی او نیز از دانشمندان نامی بودند.

در حدود ۱۳۰ کتاب و رساله در طب و ریاضیات و نجوم به ثابت منسوب است. در این جا فقط از آثار ریاضی وی گفت‌وگو می‌شود.

تقسیم‌بندی آثار ریاضی ثابت بن قره

این آثار را به دو دسته می‌توان تقسیم کرد. دسته‌ی اول تألیفات خود اوست و دسته‌ی دوم آثار بعض ریاضی‌دانان یونان است که یا خود او به عربی ترجمه کرده و یا ترجمه‌ی دیگران را اصلاح کرده است.

الف. آثار ریاضی تألیف خود ثابت

۱. کتاب فی الشکل الملقب بالقطاع

همین کتاب با عنوان الشکل القطاع و النسب المؤلفه نیز وجود دارد و به زبان لاتینی ترجمه شده است. در ایران چند نسخه از آن موجود است.[۱]

۲. رساله الی المتعلمین فی النسبة المؤلفة

در سال ۱۹۶۶ به زبان روسی ترجمه شد. نسخه‌ای از آن در مدرسه‌ی سپهسالار هست.[۲]

۳. رساله فی (انه) کیف ینبغی ان یسلک الی نیل المطلوب من المعانی الهندسیه

۴. کتاب فی مساحة الاشکال المسطحه و المجسمه

فیلم آن در دانشگاه تهران موجود است.[۳]

۵. مقاله فی ان الخطین اذا أخرجا علی اقل من قائمتین التقیا

همین مقاله با عنوان زیر نیز موجود است:

کتاب فی انه اذا وقع خط مستقیم علی خطین مستقیمین فصیر الزاویتین التین فی جهة واحده اقل من قائمتین فان الخطین التقیا اذا اخرجا فی تلک الجهة[۴]

بقیه در صفحه‌ی ۳ جلد

بسم الله الرحمن الرحیم

رشد برهان
مجله ی ریاضی
دوره ی آموزش متوسطه
ISSN 1735 - 4951
۶۱
فصلنامه ی آموزشی، تحلیلی و اطلاع رسانی
دوره ی هجدهم /شماره ی ۳/ بهار ۱۳۸۸/شمارگان: ۱۶۰۰۰ نسخه

www.roshdmag.ir
صندوق الکترونیکی سردبیر: Borhanm@roshdmag.ir
پیام گیر نشریات رشد: ۸۸۳۰۱۴۸۲-۸۸۸۳۹۲۳۲
◆ نشانی دفتر مجله: تهران، صندوق پستی ۱۵۸۷۵/۶۵۸۵ تلفن دفتر مجله: ۸۸۳۰۵۸۶۲
تلفن امور مشترکین: ۷۷۳۳۶۶۵۶ _ ۷۷۳۳۵۱۱۰

رشد برهان متوسطه، تمامی دبیران محترم و دانش آموزان عزیز

را در زمینه های زیر به همکاری دعوت می کند:

- نگارش مقاله‌های کمک درسی (شرح و بسط و رفع مشکلات مبحث درسی کتاب‌های ریاضی دوره ی متوسطه و پیش‌دانشگاهی)
- طرح مسائل کلیدی به همراه حل آن‌ها (برای دانش‌آموزان)
- طرح مسائل مسابقه‌ای به همراه حل آن‌ها (برای دانش‌آموزان)
- طرح معماهای ریاضی
- نگارش یا ترجمه ی مقاله‌های عمومی ریاضی (مانند تاریخ ریاضیات، زندگینامه ی علمی و اجتماعی ریاضیدانان، نکته‌های تازه و لطیف ریاضیات، آموزش ریاضیات، آموزش کامپیوتر و ...)

رشد برهان متوسطه هر سه ماه، یکبار منتشر می شود.
مجلّه در حکّ، اصلاح، حذف و اضافه ی مقاله ها آزاد است.
مقاله های وارده، باید خوانا و حتی الامکان کوتاه باشد.
مقاله های رسیده مسترد نمی شود.
استفاده از مطالب مجلّه در کتاب ها یا مجله های دیگر با ذکر دقیق مأخذ بلامانع است.

یادداشت سردبیر

کتاب‌های درسی ما

مردم هر جامعه‌ای، برای رسیدن به قله‌های رفیع عزّت و افتخار تلاش می کنند و در جهت نیل به اهداف از پیش تعیین شده‌ی علمی، فرهنگی، اقتصادی، اجتماعی، آموزشی و ... برنامه‌ریزی کرده و می کوشند تا از همه‌ی امکانات پیرامون خود استفاده‌ی بهینه داشته باشند. کشور ایران اسلامی نیز از این قاعده مستثنا نیست و سند چشم‌انداز ۲۰ ساله نمایانگر همین مطلب است.

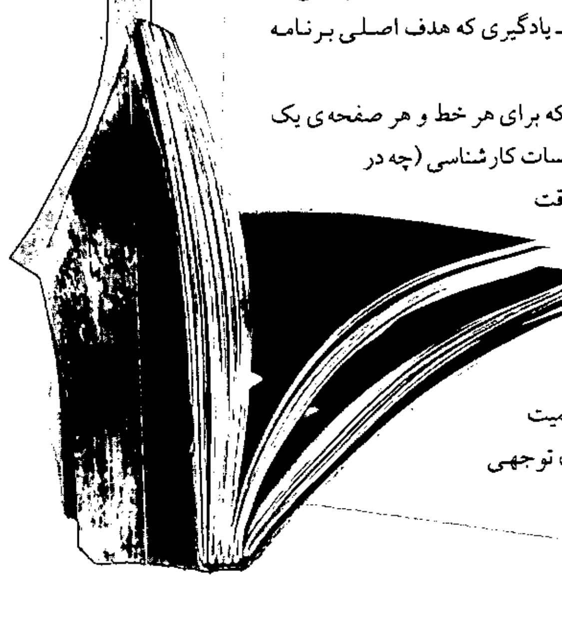
در این میان اولین نگاه مسئولین و دست‌اندرکاران و برنامه‌ریزان، به شما نوجوانان و جوانان عزیز، که آینده‌سازان این مرز و بوم هستید، می باشد.

از طرف دیگر، آموزش و پرورش به عنوان یکی از نهادهای مهم نظام جمهوری اسلامی ایران، عهده‌دار مسئولیت بسیار سنگین و پر اهمیت آموزش و تربیت است. تا جایی که به اعتقاد بسیاری از صاحب‌نظران، پایه و اساس هر گونه تغییر نگرش، فرهنگ‌سازی، تولید علم و خلاصه هر نوع زمینه‌سازی برای رسیدن به اهداف بلند یک ملت، در کلاس‌های درس (از پیش دبستان تا متوسطه) پی‌ریزی و محکم می‌شود. بر این اساس می باید از همه‌ی امکانات و وسایل آموزشی و کمک آموزشی به نحو شایسته بهره برد تا این امر به شکل مناسبی تحقق پیدا کند. چرخه‌ی آموزش در کشور ما از ارکان، اجزا و سازمان‌های متفاوت و متنوعی تشکیل یافته است که همگی در یک راستا و در طول یکدیگر عهده‌دار انجام این وظیفه‌ی سنگین می‌باشند.

یکی از ابزارهایی که نقش مهمی را در این چرخه ایفا می کند، کتاب درسی است که معلمین و دبیران محترم در کلاس درس آن را تدریس می‌کنند تا در نهایت اهداف آموزشی و تربیتی آن، در وجود شما عزیزان نهادینه شود و بتوانید در آینده از این آموزش‌ها بهره بگیرید و به اهداف فردی و اجتماعی برسید. محتوای کتاب درسی لازم است با رویکرد جامعه و نیازهای واقعی مخاطبین تدوین و براساس سند ملی برنامه‌ی درسی توسط کارشناسان و برنامه‌ریزان آموزش و پرورش تهیه شود، این کتاب‌ها باید در برگیرنده و چکیده‌ی همه‌ی این نیازها (چه در ارتباط با کتاب‌های درسی قبل و بعد از خودش و چه در ارتباط با بحث‌های تربیتی و فرهنگ‌سازی اجتماعی) و هدف‌های آموزشی باشند.

بنابراین، وظیفه همه‌ی ما معلمین و شما دانش‌آموزان است که هر چه بیشتر به کتاب درسی اهمیت دهیم و به دنبال اعتلا بخشیدن به آن باشیم تا زحمات سازمان‌هایی هم‌چون «سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی» و کارشناسان این سازمان به نتیجه‌ی مطلوب بینجامد و در نهایت فرایند یاددهی ـ یادگیری که هدف اصلی برنامه درسی است، در بهترین حالت نمایان شود.

اگر در جریان جزئیات تألیف کتاب‌های درسی قرار بگیرید و آگاهی یابید که برای هر خط و هر صفحه‌ی یک کتاب درسی چه قدر زحمت کشیده می شود و چندین ساعت برنامه‌ریزی و جلسات کارشناسی (چه در شوراهای برنامه‌ریزی درسی و چه در کمیته‌های تخصصی و گروه‌های تألیف) وقت صرف می‌شود تا یک کتاب درسی به شکلی درآید که هم اکنون در اختیار شماست، بی‌شک سطر به سطر، صفحه به صفحه و تمرین به تمرین آن را به دقت مطالعه می‌کنید و باتأمل و تأنّی بیشتری مطالب آن را فرا خواهید گرفت.



بیایید از همین امروز کتاب‌های درسی را از این دریچه نگاه کنیم و به آن‌ها اهمیت بیشتری بدهیم. خواهید دید که در آینده نیز به پیشرفت درسی خود کمک شایان توجهی کرده‌اید و ان‌شاءالله موفقیت بیشتری کسب خواهید کرد.

والسلام

ریاضیات در ایران (۳)

● پرویز شهریاری

پیــــش از خوارزمی (محمد فرزند موسی)، اگر ارشمیدس و چند تن دیگر را به شمار نیاوریم، مردم یونان چیزی به فرهنگ انسانی اضافه نکردند؛ البته باید کسانی را هم که خارج از گود محسوب می‌شدند، اضافه کنیم.

این‌ها هم بر خلاف یونانی‌ها، به مسئله‌های روزانه پرداختند. به همین دلیــل، مــردم آزاد یــونــان آن‌هــا را نمی‌پذیرفتند. جامعه‌ی یونانی دوران بردگی را می‌گذراند و در نتیجه، آن‌چه کاربرد داشت، ویژه‌ی بردگان بود و از آن چیزی به ما نرسیده است.

ارشمیدس برده‌ای آزاد شده بود. به همین علت، آن‌چه آورده است جنبه‌ی کاربردی دارد. سر آخر هم، زمانی که رومی‌ها به یونان لشکر کشیدند و یک سرباز رومی به سرای ارشمیدس رفت، ارشمیدس مشغول نوشتن بود و چیز تازه‌ای کشف کرده بود. به همین دلیل به سرباز رومی گفت: به نوشته‌ی من کاری نداشته باش. سرباز هم او را کشت.

یونانی‌ها مقداری از دانسته‌های خود را از سرزمین بابل گرفته بودند. از آن‌جا که نوشته‌های بابلی روی خشت و آجر حک شده بودند، به‌تدریج از بین رفتند و تنها جزئی از آن‌ها باقی ماند. ولی یونانی‌ها که همه‌ی ریاضیات را شاخه‌ای از هندسه می‌پنداشتند توانستند در دوران طلایی خود، به بخشی از هندسه دست پیدا کنند؛ گرچه هیچ‌جا از کاربردهای این هندسه نام نمی‌برند.

یونانی‌ها برای عددها نشانه‌هایی نداشتند و از ۲۷ حرف الفبای خود استفاده می‌کردند. برای صفر هم علامتی نداشتند و عددنویسی آن‌ها، هنوز به شکل موضعی در نیامده بود.

در «میان دو رود» (اهالی بابل) و به‌صورت کمتر پیشرفته مردم عیلام، با روش موضعی عددنویسی آشنا بودند و با آن‌که در آن‌جا از مبنای ۶۰ در عددنویسی استفاده می‌کردند، ولی عددها را به خوبی می‌شناختند و در بابل برای صفر هم علامتی داشتند. در هر دو جا، برده‌داری حکومت می‌کرد؛ در یونان برده‌داری خصوصی و در بابل و عیلام برده داری دولتی.

وقتی از دموکراسی یونانی گفت‌وگو می‌شود، منظور مردم آزاد است که به کارهای مشخصی می‌پرداختند، ولی این دموکراسی شامل برده‌ها نمی‌شد. حساب به همین دلیل پیش نرفت، زیرا احتیاجی به آن نبود. بر سردر آکادمی افلاطون نوشته بودند «هرکس هندسه نمی‌داند، وارد نشود.» و منظور هندسه‌ای بود که هیچ کاربرد عملی نداشته باشد.

در چین، وجود «کتابی در نه باب» که در سده‌های اول و دوم پیش از میلاد تنظیم شده است، گواهی بر سابقه‌ی کار ریاضی‌دانان چینی و سنت‌های ریاضی چین است. پس از آن هم کار پیشرفت ریاضیات در چین متوقف شد. برای نمونه، تسته‌سه‌زی (نیمه‌ی دوم سده‌ی پنجم میلادی) توانست عدد π (یعنی نسبت طول محیط دایره بر طول قطر آن) را تا ۶ رقم درست دهدهی به‌دست آورد. نشانه‌های روشنی در دست است که ریاضی‌دانان چینی برای نخستین‌بار از شیوه‌ی نوشتن کسرهای دهدهی استفاده می‌کرده‌اند. سیانوتون (نیمه‌ی اول سده‌ی هفتم میلادی)، مسئله‌های هندسی را به یاری معادله‌ها حل می‌کرد و تا حل برخی از معادله‌های درجه‌ی سوم هم پیش رفت.

با همه‌ی این‌ها، بسیار بعید است که پیشرفت‌های ریاضی‌دانان چینی توانسته باشد، بر ریاضی‌دانان شرق میانه و نزدیک اثر گذاشته باشد. به ویژه هیچ نشانه‌ای در دست نداریم که برای نمونه، محمدبن‌موسی خوارزمی از همه یا بخشی از دستاوردهای چینیان آگاه باشد. نحوه‌ی بحث

و شیوه‌ی استدلال این ریاضی‌دان ایرانی هم، با روش کار چینی‌ها به کلی متفاوت است. بنابراین لزومی ندارد در این‌جا به بحث درباره‌ی سابقه‌ی ریاضیات چینی و شیوه‌ی کار آن‌ها بپردازیم.

ولی ایران و هند در بیشتر دوران تاریخ خود، رابطه‌ی فرهنگی داشته‌اند. برای نمونه از این موضوع آگاهیم که در دوران حکومت پارت‌ها، جمعی از مغ‌های سیستان به هندوستان رفتند و سنت‌های ریاضی و اخترشناسی را پایه گذاشتند و به «مغ ـ برهمن» مشهور شدند. به ظاهر براهماگوپتا، ریاضی‌دان هندی سده‌ی هفتم میلادی، از جمله‌ی این مغ ـ برهمن‌ها بوده است. آن‌ها بعدها به ایران بازگشتند و در «استخر» فارس، نوعی حکومت محلی تشکیل دادند که موجب سرکار آمدن ساسانیان شد. دست‌کم ترجمه‌ی «کلیله و دمنه» نشانه‌ای است از ارتباط فرهنگی ایران و هند در دوران ساسانی. این کتاب به‌وسیله‌ی دادبه پارسی (به ابن مقفع معروف است) از پهلوی به عربی برگردانده شد که تا امروز هم در دست ماست.

ابوریحان بیرونی، بعدها و در زمان **محمود** غزنوی و به فرمان او به هند رفت. ولی در زمانی که **محمود** مشغول گرفتن کشور و غارت اموال هندی‌ها بود، بیرونی به جمع دانشمندان هندی پیوست و سرانجام به رییس آن‌ها تبدیل شد. کتاب «ماللهند» بیرونی اگر نبود، از بسیاری از وقایع هندی سال‌های نخستین هجری و پیش از آن آگاه نبودیم. او «سانسکریت» را یاد گرفت و بسیاری از کتاب‌های خود را به سانسکریت ترجمه کرد. به جز آن، کتاب‌هایی را از سانسکریت به عربی برگرداند. او در تمامی حکومت محمود غزنوی نتوانست به میهن خود بازگردد و تنها در دوره‌ی حکومت **مسعود** بود که به سرزمین آبا و اجدادی خود بازگشت.

کار اصلی هندی‌ها که در واقع جهشی برای ریاضیات بود، کشف دستگاه موضعی عددنویسی دهدهی بود و انتخاب نمادی برای «هیچ» (یعنی صفر). دستگاه کنونی عددنویسی که در همه جای جهان پذیرفته شده است، از هند آغاز شد و سپس به ریاضی‌دانان شرق میانه و نزدیک رسید و از آن‌جا و به‌ویژه با انتشار کتاب «حساب» محمد، فرزند موسی خوارزمی، به همه‌ی جهان و اروپا رفت.

آریاتهاما، ریاضی‌دان هندی سده‌ی پنجم میلادی، از دستگاه دهدهی عددنویسی، کم و بیش به همان صورت امروزی استفاده می‌کرد و اگرچه نشانه‌های او برای نوشتن عددها، در طول زمان دچار دگرگونی شد، ولی در هر حال، بین نشانه‌های او و نشانه‌های امروزی، شباهت‌های زیاد وجود دارد.

هندی‌ها با شیوه‌ی شاعرانه‌ی خود، مسئله‌هایی را طرح و حل می‌کردند که به معادله‌های درجه‌ی اول و درجه‌ی دوم منجر می‌شدند و اگرچه در دوره‌های بعدی، عددهای منفی را هم می‌شناختند، ولی تنها به پاسخ مثبت معادله‌ها اکتفا می‌کردند و پاسخ‌های منفی را کنار می‌گذاشتند. هندی‌ها برای حل مسئله‌های خود، به جای حرف و علامت، از «روایت» استفاده می‌کردند و روش حل معادله‌ها را که گاه با هندسه هم مخلوط می‌شد، با شرح و بیان توضیح می‌دادند.

خوارزم

سرزمین خوارزم که امروز «خیوه» نام دارد، در بیشتر دوران‌های تاریخ بخشی از سرزمین ایران و به احتمال زیاد جایگاه تولد و رشد زرتشت بوده است. با وجود این، ما بحث کوتاه مربوط به خوارزم را به این مناسبت در این‌جا قرار داده‌ایم که زادگاه بسیاری از دانشمندان ایرانی هم‌چون ابوریحان بیرونی، **ابونصر فارابی**، ابن‌سینا و به‌ویژه محمدموسی خوارزمی بوده است.

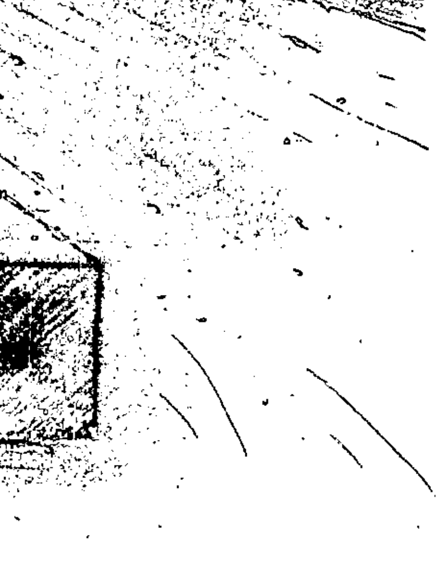
از خوارزم، در اوستا به «خواریزم» و در کتیبه‌ی بیستون به «خواریزمیش» نام برده شده است. برخی آن را همان سرزمین «آریا» می‌دانند که در اوستا با احترام از آن نام برده می‌شود. با همه‌ی پژوهش‌هایی که در این سال‌ها شده است، از تمدن، فرهنگ و زبان خوارزم چیز زیادی نمی‌دانیم؛ چراکه سرزمین خوارزم بارها و بارها مورد هجوم و قتل و غارت قرار گرفته است.

با همه‌ی این‌ها، مردم خوارزم توانستند خود را بازیابند و فرهنگ و سنت‌های خود را حفظ کنند. حتی هجوم سلجوقیان در سده‌ی پنجم هجری و حمله‌ی مغول و قتل‌عام مردم خوارزم در سده‌ی هفتم هجری نتوانست آن‌ها را به کلی نابود کند، ولی به‌تدریج زبان و خط و سنت‌های علمی فراموش شدند. حمله‌ی تیمور در سده‌ی هشتم هجری و قتل‌عام مردم خوارزم، به واقع تیر خلاصی بر این زبان و فرهنگ بود.

ولی در زمان محمدبن موسی خوارزمی در سده‌ی سوم هجری، بی‌تردید اثرها و سنت‌های علمی گذشته، کم‌وبیش در این‌جا و آن‌جا باقی مانده بود و به‌ویژه خوارزمی از این آثار و سنت‌های علمی نیز بهره‌ی فراوان برده است.

اروپای غربی

از مدت‌ها پیش از زوال مکتب اسکندریه، اروپای غربی در تاریکی جهل فرو رفته بود و با سقوط کامل مکتب اسکندریه در سده‌های سوم و چهارم میلادی، عنصرهای تفکر یونانی به تقریب به کلی از صحنه خارج شدند. فرماندهان و حکام تنها در فکر جنگ و در عین حال، ساختن کاخ‌های بزرگ بودند و رهبران آن‌ها تسلط خود را بر جامعه‌ی بی‌سواد و جدا شده از فرهنگ علمی گذشته، محکم می‌کردند. اسلحه و تعصب جای دانش را گرفت و جادوگران، فال‌بینان و شیادان، سرنوشت فرهنگی مردم را به‌دست گرفتند. کیمیاگری تنها شیوه‌ی پژوهش‌های علمی بود و در سراسر اروپای غربی، گروه‌های زیادی در حال تبدیل مس به طلا، تمامی زندگی و عمر خود را صرف می‌کردند. این عقیده رواج کامل داشت که: «نفوذ در طبیعت ممکن



نیست.»، «رازهای طبیعت را نمی‌توان شناخت» و در نتیجه، اندیشه‌های ضدعلمی جانشین ارزش‌های علمی شدند.

در این دوران، تنها جرقه‌هایی کوچک و اغلب از طرف رهبران دینی (چرا که علم و فلسفه تنها در اختیار آن‌ها بود) در ظلمت سده‌های نخستین دوران تاریک‌اندیشی اروپایی درخشید. از میان آن‌ها می‌توان از آکلوین[1] اهل «یورک» انگلستان نام برد که او را آلبینوس[2] هم نامیده‌اند. او در پایان سده‌ی هشتم میلادی کتاب‌هایی در حکمت الهی، فلسفه، دستور زبان و حساب نوشت. نوشته‌های ریاضی او، با این که بسیار مقدماتی بودند، صدها سال تنها سرچشمه‌ی درسی برای علاقه‌مندان به شمار می‌رفتند.

ایران

کار ترجمه‌ی متن‌های علمی و فرهنگی از زبان‌های هندی و پهلوی که از زمان منصور، خلیفه‌ی دوم عباسی آغاز شده بود، در میان خلافت هارون‌الرشید و پسرش مأمون (که هم همسر ایرانی داشت و هم مادرش ایرانی بود) به اوج خود رسید و زمینه را برای رشد فرهنگ و از آن جمله ریاضیات، آماده کرد.

از مترجمان و دانشمندان ایرانی در این دوره، می‌توان سیاهه‌ی بزرگی ترتیب داد که در این جا تنها نام سه تن از نخستین مترجمان را می‌بریم:

- **یعقوب فرزند طارق** (مرگ در سال ۱۸۰ هجری قمری) در ترجمه‌ی کتاب «سید هاتنا» کوشید که یک کتاب هندی درباره‌ی اخترشناسی بود.
- **محمد فرزند ابراهیم فرازی** (مرگ در حدود سال ۱۸۵ هجری قمری) که کار ترجمه‌ی سیدهاتنا را از زبان سانسکریت به پایان رساند.
- **فضل فرزند نوبخت** «سیدهاتنا» را از پهلوی به عربی ترجمه کرد.

دادبه که بعد از مسلمان شدن، نام عبدالله را انتخاب کرد و به عبدالله فرزند مقفع مشهور شد، یکی از بزرگ‌ترین دانشمندان ایرانی خوانده شده است. او در سده‌ی اول هجری قمری تمام تلاش خود را در طول زندگی (که تنها ۳۶ سال بود) صرف ترجمه و تألیف اثرهایی در زمینه‌ی سنت‌های ایرانی کرد. کلیله‌ودمنه را از پهلوی به عربی ترجمه کرد و باب «برزویه‌ی حکیم» را به آن افزود. این باب یکی از زیباترین نوشته‌ها در نثر عربی است که ابن‌مقفع به واقع اندیشه‌های خود را در آن بیان داشته است. بسیاری اعتقاد دارند که او از هواداران نهضت شعوبی بود که بسیاری از بزرگان، سرداران و دانشمندان ایرانی را دربرمی‌گرفت. آن‌ها با قلم و شمشیر خود با خلیفه‌های اموی می‌جنگیدند. ابن‌مقفع اهل فارس بود و سرانجام به دستور خلیفه‌ی عباسی قطعه‌قطعه و به تنور آتش انداخته شد.

---
1. Acluin
2. Albinus



حد تابع (۲)

lim

احمد قندهاری

برای دانش‌آموزان سال سوم متوسطه و دوره‌ی پیش دانشگاهی

اشاره

در شماره‌ی قبل مفاهیم حد چپ و راست تابع و حد تابع در یک نقطه بررسی شد و به قضایای حد اشاره کردیم، اینک ادامه مطلب را در پی می‌آوریم.

قضیه: به ازای هر x (برحسب رادیان) که $\frac{\pi}{۲} > |x| > ۰$ باشد، داریم:

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < ۱$$

از این قضیه نتیجه می‌گیریم:

$$\lim_{x\to ۰} \cos x < \lim_{x\to ۰} \frac{\sin x}{x} < \lim_{x\to ۰} ۱$$

$$۱ < \lim_{x\to ۰} \frac{\sin x}{x} < ۱ \Rightarrow \lim_{x\to ۰} \frac{\sin x}{x} = ۱$$

نتیجه (هم‌ارزی)

$$\begin{cases} \sin ax \sim ax \\ \tan ax \sim ax \end{cases};\ x \to ۰$$ برحسب رادیان

$$\begin{cases} \sin u \sim u \\ \tan u \sim u \end{cases};\ u \to ۰$$ برحسب رادیان

دو توابع هم‌ارز

دو تابع f و g را در a وقتی هم‌ارز گویند که:

مثال ۲. مطلوب است محاسبه‌ی

اولاً: $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$ یا ∞ و $\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$ یا ∞

(a می‌تواند هر عدد حقیقی یا $+\infty$ یا $-\infty$ باشد).

ثانیاً: $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=1$

مثال: تابع f به معادله‌ی $f(x)=\sin 4x$ و تابع g به معادله‌ی $g(x)=4x$ را وقتی $x\to 0$ هم‌ارز گوییم، زیرا:

اولاً: $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$ و $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=0$

ثانیاً: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(f)x}{g(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{4x}=1$

چند هم‌ارزی قابل استفاده در آزمون‌ها وقتی $x\to 0$

۱) $\sin ax \sim ax$

۲) $\tan ax \sim ax$

۳) $\text{Arc}\sin ax \sim ax$

۴) $\text{Arc}\tan ax \sim ax$

۵) $1-\cos mx \sim \frac{m^2x^2}{2}$

۶) $(x-\sin x)\sim \frac{1}{6}x^3$

۷) $(x-\tan x)\sim -\frac{1}{3}x^3$

۸) $(\tan x-\sin x)\sim \frac{x^3}{2}$

۹) $(x-\text{Arc}\sin x)\sim -\frac{x^3}{6}$

۱۰) $(x-\text{Arc}\tan x)\sim \frac{x^3}{3}$

۱۱) $(x-\sin x-\frac{1}{6}x^3)\sim -\frac{x^5}{120}$

۱۲) $(x-\tan x+\frac{1}{3}x^3)\sim -\frac{2x^5}{15}$

۱۳) $ax^n_{(n\in N)}+bx^{n-1}+\cdots+tx \sim tx$

۱۴) $ax^n_{(n\in N)}+bx^{n-1}+\cdots+tx+u \sim u$

مثال: مطلوب است محاسبه‌ی این حدها:

۱) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x.\tan 5x}{2x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{(2x)(5x)}{2x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{10x^2}{2x^2}=5$

۲) $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{1-\cos 2x}}{2\sin 2x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{2\sin^2 x}}{2\sin 2x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{2x^2}}{2(2x)}$

$=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{2}|x|}{4x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{2}|x|}{4x}=\frac{\sqrt{2}}{4}$

۳) $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{2}\sin x}{\sqrt{1-\cos 4x}}=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{2}\sin x}{\sqrt{2\sin^2 2x}}=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{2(2x)^2}}$

$=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{8x^2}}=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{2}x}{2\sqrt{2}|x|}=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{x}{2(-x)}=-\frac{1}{2}$

رفع ابهام مسئله از حالت $\frac{0}{0}$

اگر در محاسبه‌ی حد یک کسر به حالت $\frac{0}{0}$ برخوردیم، برای تعیین حد از روش‌های زیر استفاده می‌کنیم (فرض می‌کنیم $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{0}{0}$):

۱. عبارت f(x) و g(x) را تجزیه می‌کنیم تا عامل $(x-a)$ در آن‌ها ظاهر شود. پس از حذف این عامل از صورت و مخرج، حد تابع به‌دست می‌آید.

مثال ۱. مطلوب است محاسبه‌ی حد زیر.

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3+4x-5}{x^4+x-2}=\frac{0}{0}$$

حل: الف) برای تجزیه‌ی صورت و مخرج، هر کدام را بر $(x-1)$ تقسیم می‌کنیم.

$$x^3+4x-5 \div (x-1) = x^2+x+5,\ \text{باقی‌مانده } 0 \qquad x^4+x-2 \div (x-1) = x^3+x^2+x+2,\ \text{باقی‌مانده } 0$$

$$x^3+4x-5=(x-1)(x^2+x+5)$$

$$x^4+x-2=(x-1)(x^3+x^2+x+2)$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3+4x-5}{x^4+x-2}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2+x+5)}{(x-1)(x^3+x^2+x+2)}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x+5}{x^3+x^2+x+2}=\frac{1+1+5}{1+1+1+2}=\frac{7}{5}$$

۲. اگر f(x) یا g(x) یا هر دو عبارت‌های رادیکالی باشند،

صورت و مخرج را در عبارت مناسبی ضرب می‌کنیم تا صورت و مخرج کسر قابل تجزیه، بدون رادیکال شود. آن‌گاه بنا به شماره‌ی ۱، آن‌ها را تجزیه می‌کنیم تا حد تابع به‌دست آید.

مثال ۲. مطلوب است محاسبه‌ی حد:

$$A = \lim_{x\to 1}\frac{x^2-4x+3}{\sqrt{x^2+x}-\sqrt{2}}$$

حل:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-4x+3}{\sqrt{x^2+x}-\sqrt{2}} = \frac{0}{0}$$

صورت و مخرج کسر را در مزدوج مخرج ضرب می‌کنیم:

$$A = \lim_{x\to 1}\frac{(x^2-4x+3)(\sqrt{x^2+x}+\sqrt{2})}{(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{2})(\sqrt{x^2+x}+\sqrt{2})}$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{(x^2-4x+3)(\sqrt{x^2+x}+\sqrt{2})}{x^2+x-2}$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x-3)(\sqrt{x^2+x}+\sqrt{2})}{(x-1)(x+2)}$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{(x-3)(\sqrt{x^2+x}+\sqrt{2})}{x+2}$$

$$= \frac{-2(\sqrt{2}+\sqrt{2})}{3} = -\frac{4\sqrt{2}}{3}$$

مثال ۳. مطلوب است محاسبه‌ی

$$B = \lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x^2+x}-\sqrt{20}}$$

حل:

$$\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x^2+x}-\sqrt{20}} = \frac{0}{0}$$

صورت و مخرج را هم در مزدوج صورت و هم در مزدوج مخرج ضرب می‌کنیم.

$$B = \lim_{x\to 4}\frac{(\sqrt{2x+1}-3)(\sqrt{2x+1}+3)(\sqrt{x^2+x}+\sqrt{20})}{(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{20})(\sqrt{x^2+x}+\sqrt{20})(\sqrt{2x+1}+3)}$$

$$= \lim_{x\to 4}\frac{(2x+1-9)(\sqrt{x^2+x}+\sqrt{20})}{(x^2+x-20)(\sqrt{2x+1}+3)}$$

$$= \lim_{x\to 4}\frac{2(x-4)(\sqrt{x^2+x}+\sqrt{20})}{(x-4)(x+5)(\sqrt{2x+1}+3)}$$

$$= \lim_{x\to 4}\frac{2(\sqrt{x^2+x}+\sqrt{20})}{(x+5)(\sqrt{2x+1}+3)} = \frac{2(\sqrt{20}+\sqrt{20})}{9(\sqrt{9}+3)}$$

$$B = \frac{4\sqrt{20}}{54} = \frac{2\sqrt{20}}{27} = \frac{8\sqrt{5}}{27}$$

مثال ۴. مطلوب است محاسبه‌ی حد:

$$C = \lim_{x\to 8}\frac{\sqrt[3]{x}-2}{\sqrt{x}-2\sqrt{2}}$$

حل:

$$\lim_{x\to 8}\frac{\sqrt[3]{x}-2}{\sqrt{x}-2\sqrt{2}} = \frac{2-2}{\sqrt{8}-2\sqrt{2}} = \frac{0}{0}$$

داریم:

$$a-b = (\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b})(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2}+\sqrt[3]{ab})$$

درباره‌ی صورت کسر، از اتحاد بالا استفاده می‌کنیم و درباره‌ی مخرج، از اتحاد مزدوج.

$$C = \lim_{x\to 8}\frac{(\sqrt[3]{x}-2)(\sqrt[3]{x^2}+4+2\sqrt[3]{x})(\sqrt{x}+2\sqrt{2})}{(\sqrt{x}-2\sqrt{2})(\sqrt{x}+2\sqrt{2})(\sqrt[3]{x^2}+4+2\sqrt[3]{x})}$$

$$= \lim_{x\to 8}\frac{(x-8)(\sqrt{x}+2\sqrt{2})}{(x-8)(\sqrt[3]{x^2}+4+2\sqrt[3]{x})} = \lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}+2\sqrt{2}}{\sqrt[3]{x^2}+4+2\sqrt[3]{x}}$$

$$= \frac{\sqrt{8}+2\sqrt{2}}{\sqrt[3]{64}+4+2\sqrt[3]{8}} = \frac{4\sqrt{2}}{4+4+4} = \frac{4\sqrt{2}}{12} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

۳. اگر عبارت f(x) یا g(x) یا هر دو مثلثاتی باشند، آن‌ها را به حاصل‌ضرب تبدیل می‌کنیم. سپس از هم‌ارزی‌های مثلثاتی استفاده می‌کنیم. در غیر این صورت، از تبدیل‌ها و فرمول‌های مثلثاتی استفاده می‌کنیم.

مثال ۵. مطلوب است محاسبه‌ی حد:

$$D = \lim_{x\to a}\frac{\sin x-\sin a}{x-a}$$

حل:

$$\lim_{x\to a}\frac{\sin x-\sin a}{x-a} = \frac{0}{0}$$

صورت را به حاصل‌ضرب تبدیل می‌کنیم:

$$D = \lim_{x\to a}\frac{2\cos\frac{x+a}{2}.\sin\frac{x-a}{2}}{x-a}$$

$$= \lim_{x\to a}\frac{2\cos\frac{x+a}{2}(\frac{x-a}{2})}{x-a}$$

$$= \lim_{x\to a}\cos\frac{x+a}{2} = \cos\frac{a+a}{2} = \cos a$$

می‌دانیم که: $x \to a;\ \sin\frac{x-a}{2} \sim \frac{x-a}{2}$

مثال ۶. مطلوب است محاسبه‌ی حد $E=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x-\tan x}{x\sin x^2}$

حل:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\tan x}{x\sin x^2}=\frac{0}{0}$$

$$E=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\frac{\sin x}{\cos x}}{x\sin x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin x \operatorname{con} x-\sin x}{\cos x}}{x\sin x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x.\cos x-\sin x}{x\cos x.\sin x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x(1-\cos x)}{x\cos x.\sin x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x(2\sin^2\frac{x}{2})}{x\cos x.\sin x^2}\sim\lim_{x\to 0}\frac{-x(2\times\frac{x^2}{4})}{x.\cos x(x^2)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{x^3}{2}}{x^3\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}}{\cos x}=\frac{-\frac{1}{2}}{1}=-\frac{1}{2}$$

توجه: در حل این مسئله، از هم‌ارزی ۸ هم می‌توان استفاده کرد.

مثال ۷. مطلوب است محاسبه‌ی حد:

$$F=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x^3}$$

حل:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x^3}=\frac{0}{0}$$

کسر را در مزدوج صورت ضرب و تقسیم می‌کنیم:

$$F=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x})(\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x})}{x^3(\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x})}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1+\tan x-1-\sin x}{x^3(\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x})}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3(\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x})}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin x}{\cos x}-\sin x}{x^3(\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x})}$$

$$F=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin x-\sin x\cos x}{\cos x}}{x^3(\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x})}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\sin x\cos x}{x^3\cos x(\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x})}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x(1-\cos x)}{x^3\cos x(\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x})}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x(2\sin^2\frac{x}{2})}{x^3\cos x(\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x})}$$

$$\sim\lim_{x\to 0}\frac{x(2\times\frac{x^2}{4})}{x^3\cos x(\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x})}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^3}{2}}{x^3\cos x(\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x})}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}}{\cos x(\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x})}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}}{1(\sqrt{1+0}+\sqrt{1+0})}=\frac{\frac{1}{2}}{1+1}=\frac{1}{4}$$

توجه: در حل این مسئله هم می‌توان از هم‌ارزی ۸ استفاده کرد.

تمرین: حدهای زیر را بیابید.

۱) $\lim\limits_{x\to a}\frac{\cos x-\cos a}{x-a}$

۲) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^5+x-2}{x^4+x-2}$

۳) $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{1-\cos 4x}}{\sin 4x}$

۴) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{x^2-1}$

حدهای نامتناهی

۱. اگر تابع f در یک همسایگی محذوف a، تعریف شده باشد و وقتی $x\to a^+$، مقدار f(x) مرتباً بزرگ و بزرگ‌تر شود، به‌طوری که وقتی x از سمت راست به a خیلی نزدیک شود، مقدار f(x) بی‌هیچ محدودیتی افزایش یابد، در این صورت می‌گوییم: حد تابع $+\infty$ است و می‌نویسیم:

$$\lim_{x\to a^+} f(x)=+\infty$$

۲ . در صورتی که با نزدیک شدن x از سمت راست به a، مقدار f(x) بدون هیچ محدودیتی کاهش یابد، می‌گوییم: وقتی $x\to a^+$، حد تابع $-\infty$ است و می‌نویسیم:

$$\lim_{x\to a^+} f(x)=-\infty$$

۳ . چنان‌چه با نزدیک شدن x به a از سمت چپ، مقدار f(x) بی‌هیچ محدودیتی افزایش یابد، در این صورت می‌گوییم: وقتی $x\to a^-$، حد تابع $+\infty$ است و می‌نویسیم:

$$\lim_{x\to a^-} f(x)=+\infty$$

۴ . اگر با نزدیک شدن x به a از سمت چپ، مقدار f(x) بی‌هیچ محدودیتی کاهش یابد، در این صورت می‌گوییم: وقتی $x\to a^-$، حد تابع $-\infty$ است و می‌نویسیم:

$$\lim_{x\to a^-} f(x)=-\infty$$

نکته‌ی مهم: $+\infty$ یا $-\infty$ عدد نیستند، بلکه نشان می‌دهند که مقدار تابع بی‌هیچ محدودیتی افزایش یا کاهش می‌یابد (درواقع باید گفت، تابع حد مشخصی ندارد).

تعریف: اگر $\lim_{x\to a} f(x)=+\infty$ را در نظر بگیریم، این حد بدین معنی است که می‌توان f(x) را از هر عدد مثبت بزرگی، بزرگ‌تر انتخاب کرد؛ به شرطی که x را به اندازه‌ی کافی به a نزدیک کنیم.

چنان‌چه $\lim_{x\to a} f(x)=-\infty$ را در نظر بگیریم، این حد بدین معنی است که می‌توان f(x) را از هر عدد منفی کوچکی، کوچک‌تر انتخاب کرد؛ به شرطی که x را به اندازه‌ی کافی به a نزدیک کنیم.

نکته: اگر k یک عدد حقیقی مثبت باشد، داریم $(n\in N)$:

$$\lim_{x\to a^+}\frac{k}{(x-a)^{2n-1}}=+\infty \qquad \lim_{x\to a^-}\frac{k}{(x-a)^{2n-1}}=-\infty$$

$$\lim_{x\to a^+\text{ یا }a^-}\frac{k}{(x-a)^{2n}}=+\infty$$

چنان‌چه k یک عدد حقیقی منفی باشد، داریم $(n\in N)$:

$$\lim_{x\to a^+}\frac{k}{(x-a)^{2n-1}}=-\infty \qquad \lim_{x\to a^-}\frac{k}{(x-a)^{2n-1}}=+\infty$$

$$\lim_{x\to a^+\text{ یا }a^-}\frac{k}{(x-a)^{2n}}=-\infty$$

مثال ۱: می‌دانیم $\lim_{x\to 1}\frac{4}{(x-1)^2}=+\infty$. اگر بخواهیم $\frac{4}{(x-1)^2}>40000$ باشد، x را چه‌قدر باید به عدد ۱ نزدیک کنیم؟

حل: در دو طرف نامساوی را معکوس می‌کنیم. درنتیجه جهت نامساوی عوض می‌شود:

$$\frac{4}{(x-1)^2}>40000$$

$$\Rightarrow \frac{(x-1)^2}{4}<\frac{1}{40000}$$

از دو طرف ریشه‌ی دوم می‌گیریم:

$$\frac{|x-1|}{2}<\frac{1}{200}\Rightarrow |x-1|<\frac{1}{100}$$

یعنی x را باید آن‌قدر به عدد ۱ نزدیک کنیم تا $|x-1|$ کمتر از $\frac{1}{100}$ باشد.

مثال ۲. می‌دانیم $\lim_{x\to 2}\frac{-2}{(x-2)^2}=-\infty$. اگر بخواهیم $\frac{-2}{(x-2)^2}<-8\times10^6$ باشد، x را چه‌قدر باید به عدد ۲ نزدیک کنیم؟

حل دو طرف نامساوی را در ۱- ضرب می‌کنیم:

$$\frac{-2}{(x-2)^2}<-8\times10^6$$

$$\Rightarrow \frac{2}{(x-2)^2}>8\times10^6\Rightarrow \frac{1}{(x-2)^2}>4\times10^6$$

معکوس می‌کنیم:

$$\Rightarrow (x-2)^2<\frac{1}{4\times10^6}\xrightarrow{\text{ریشه‌ی دوم}}|x-2|<\frac{1}{2000}$$

یعنی x را آن‌قدر باید به عدد ۲ نزدیک کنیم تا $|x-2|$ کمتر از $\frac{1}{2000}$ باشد.

مثال ۳ . مطلوب است محاسبه‌ی حدهای زیر :

۱) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{۲}} \tan x$

حل : این حد را به ناچار در دو حالت بررسی می‌کنیم :

الف) $$\lim_{x\to\frac{\pi^+}{۲}} \tan x = \lim_{x\to\frac{\pi^+}{۲}} \frac{\sin x}{\cos x} \to \frac{\sin\frac{\pi^+}{۲}}{\cos\frac{\pi^+}{۲}} \to \frac{۱}{۰^-} \to -\infty$$

(منظور از علامت $\to$ میل کردن در حالت حدی است)

ب) $$\lim_{x\to\frac{\pi^-}{۲}} \tan x = \lim_{x\to\frac{\pi^-}{۲}} \frac{\sin x}{\cos x} \to \frac{\sin\frac{\pi^-}{۲}}{\cos\frac{\pi^-}{۲}} \to \frac{۱}{۰^+} \to +\infty$$

۲) $\lim\limits_{x\to۰} \cot x$

الف) $$\lim_{x\to۰^+} \cot x = \lim_{x\to۰^+} \frac{\cos x}{\sin x} \to \frac{\cos ۰^+}{\sin ۰^+} \to \frac{۱}{۰^+} \to +\infty$$

ب) $$\lim_{x\to۰^-} \cot x = \lim_{x\to۰^-} \frac{\cos x}{\sin x} \to \frac{\cos ۰^-}{\sin ۰^-} \to \frac{۱}{۰^-} \to -\infty$$

۳) $$\lim_{x\to\frac{\pi}{۴}} \frac{\sin(x+\frac{\pi}{۴})}{\cos ۲x}$$

الف) $$\lim_{x\to\frac{\pi^+}{۴}} \frac{\sin(x+\frac{\pi}{۴})}{\cos ۲x} \to \frac{\sin\frac{\pi^+}{۲}}{\cos\frac{\pi^+}{۲}} \to \frac{۱}{۰^-} \to -\infty$$

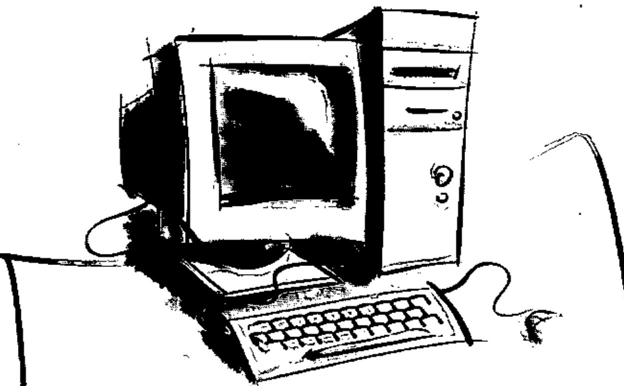
ب) $$\lim_{x\to\frac{\pi^-}{۴}} \frac{\sin(x+\frac{\pi}{۴})}{\cos ۲x} \to \frac{\sin\frac{\pi^-}{۲}}{\cos\frac{\pi^-}{۲}} \to \frac{۱}{۰^+} \to +\infty$$

۴) $$\lim_{x\to۱^-} \frac{x^۲-۴x}{(x-۱)^۳} \to \frac{۱-۴}{(۰^-)^۳} \to \frac{-۳}{۰^-} \to +\infty$$

۵) $$\lim_{x\to۴^-} \frac{x^۲+۲x+۴}{(x-۴)^۲} \to \frac{۱۶+۸+۴}{(۰^-)^۲} \to \frac{۲۸}{۰^+} \to +\infty$$

۶) $$\lim_{x\to-۱^-} \frac{-۲x+۱}{(x+۱)^۵} \to \frac{۲+۱}{(۰^-)^۵} \to \frac{۳}{۰^-} \to -\infty$$

ادامه دارد...



معرفی سایت‌های ریاضی جهان

● احسان یارمحمدی

اسم سایت : **Algebra**

آدرس اینترنتی سایت : **http://www.algebra.com**

این سایت کمک‌هایی را در قالب تکالیف منزل، به‌وسیله‌ی استاد راهنمای ریاضی که به‌صورت رایگان در این سایت خدمت می‌کند، در اختیار علاقه‌مندان قرار می‌دهد . در ضمن، هر بخش این سایت شامل درس‌ها و مسئله‌های حل شده، به‌همراه مکانی برای ارسال مسائل ریاضی خود به قسمت استاد راهنمای ریاضی آن است . در این قسمت، از هر چهار مسئله‌ی ارسال‌شده توسط کاربران، سه مسئله به وسیله‌ی استاد راهنمای ریاضی پاسخ داده می‌شود . به‌علاوه، بیشتر بخش‌های این سایت یک بایگانی دارد که دربرگیرنده‌ی مسائل حل شده به‌وسیله‌ی استاد راهنمای ریاضی است .

در ادامه، چهار قسمت اصلی سایت **Algebra** را به همراه عنوان‌های آن ارائه می‌کنیم :

■ جبر مقدماتی **(Pre-Algebra)**

● کسرهای عددی **(Numeric Fractions)**

● اعداد اعشاری، توانی از ۱۰ ، گرد کردن
(Decimal Numbers, Power of 10, Rounding)

● اعمال به وسیله‌ی اعداد علامت‌دار
(OPerations with Signed Numbers)

● توان‌ها و اعمال روی توان‌ها
(Exponents and Operations on Exponents)

● بخش‌پذیری و اعداد اول
(Divisibility and Prime Numbers)

● اعمال وارون برای جمع و ضرب متقابل
(Inverse Operations for Addition and Multipication Reciprocals)

● ارزش‌یابی عبارات، پرانتزها
(Evaluation of Expressions, Parentheses)

ادامه در صفحه ی ۳۳

نامعادله‌های ۲ متغیره و کاربردهای آن‌ها

برای دانش‌آموزان سال سوم متوسطه

● میرشهرام صدر

اشاره

با حل نامعادله‌های یک متغیره در سال‌های قبل آشنا شده‌اید؛ نامعادله‌های یک متغیره‌ی درجه‌ی اول مانند:

$$\frac{۳}{۲}x - ۲ \leq \frac{۴}{۵} - \frac{۲}{۷}x \quad ; \quad ۲x + ۵ \geq ۰$$

و نامعادله‌های یک متغیره‌ی درجه‌ی دوم مانند:

$$۲x^۲ + ۳x - ۵ > ۰ \quad ; \quad (m-۱)^۲ \leq ۲m(m-۱)$$

کمی فراتر از نامعادله‌های بالا، می‌توان به نامعادله‌های یک متغیره شامل عبارات گویا، گنگ، نمایی، لگاریتمی و مثلثاتی[1] اشاره کرد؛ مانند:

$$\frac{-x^۲ + ۳x + ۱۰}{x^۳ - ۱} > ۰ \quad ; \quad \frac{۱}{\sqrt{۳ - x}} > \frac{۱}{x - ۲}$$

$$۷^{۳x-۱} \geq ۹^{۲-x}; \quad \log_x(x+۱) \leq \log_{\frac{۱}{x}}(۲-x)$$

$$\sqrt{۳}\tan x \geq ۲\sin x$$

مجموعه‌ی جواب هریک از نامعادله‌های یک متغیره بالا، مجموعه‌ای شامل نقاط روی محور اعداد حقیقی است. در این مقاله با نامعادله‌هایی دو متغیره مانند:

$$x + y \leq ۹ \text{ ، } y^۲ \leq ۴x \text{ و } x^۲ + y^۲ < ۲۵$$

آشنا می‌شویم و روش به دست آوردن مجموعه‌ی جواب این نامعادله‌ها را که قسمتی از صفحه‌ی مختصات است، بررسی می‌کنیم.

صورت کلی هر نامعادله‌ی دو متغیره به یکی از شکل‌های $f(x,y) \geq ۰$ ، $f(x,y) \leq ۰$ ، $f(x,y) > ۰$ و $f(x,y) < ۰$ است و مجموعه جواب هریک از این نامعادله‌ها، زیرمجموعه‌ای از $\mathbb{R}^۲$ (صفحه‌ی مختصات) است.

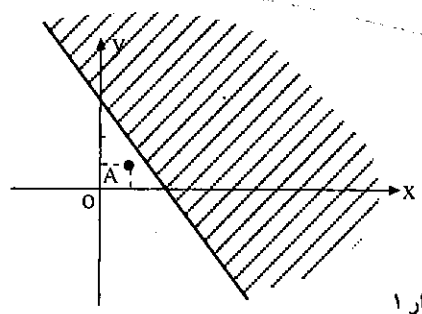
برای حل هریک از نامعادله‌های دو متغیره‌ی قبل، ابتدا نمودار $f(x,y) = ۰$ را رسم و ملاحظه می‌کنیم که این نمودار صفحه مختصات را به چند ناحیه تقسیم می‌کند. برای به‌دست آوردن مجموعه جواب نامعادله، کافی است مختصات یک نقطه‌ی دل‌خواه از هر ناحیه را در نامعادله قرار دهیم. چنان‌چه نامعادله به یک نابرابری همیشه درست تبدیل شد، ناحیه‌ای که شامل آن نقطه است، مجموعه جواب نامعادله را تشکیل می‌دهد.

تذکر: مجموعه جواب نامعادله‌های $f(x,y) \geq ۰$ یا $f(x,y) \leq ۰$ شامل نقاط روی نمودار $f(x,y) = ۰$ است، درحالی‌که

مجموعه جواب نامعادله‌های $f(x,y) > 0$ یا $f(x,y) < 0$ شامل نقاط روی نمودار $f(x,y) = 0$ نیست. برای مثال، برای یافتن مجموعه جواب نامعادله $3x + 2y \geq 6$، ابتدا نمودار خط به معادله‌ی $3x + 2y = 6$ را رسم می‌کنیم. همان‌طور که ملاحظه می‌کنید، این نمودار صفحه‌ی مختصات ($\mathbb{R}^2$) را به سه ناحیه تقسیم می‌کند که عبارت‌اند از: ۱. مجموعه نقاط روی خط؛ ۲. مجموعه نقاط طرف راست خط؛ ۳. مجموعه نقاط طرف چپ خط.

$3x + 2y = 6$

x	0	2
y	3	0



نمودار ۱

اکنون برای این‌که تشخیص دهیم، کدام طرف خط، مجموعه جواب نامعادله است، مختصات یک نقطه‌ی دل‌خواه از $\mathbb{R}^2$ مانند $A(1,1)$ را در نامعادله قرار می‌دهیم:

$$A(1,1) \in \mathbb{R}^2 \Rightarrow 3 \times 1 + 2 \times 1 \geq 6 \Rightarrow 5 \geq 6$$

چون نابرابری آخر نادرست است، بنابراین طرفی از خط که شامل نقطه‌ی $(1,1)$ نیست، مجموعه جواب نامعادله است. هم‌چنین با توجه به تذکری که گذشت، مجموعه جواب نامعادله شامل نقاط روی خط به معادله‌ی $3x + 2y = 6$ است.

مثال: نمودار هریک از نامعادله‌ها را در صفحه‌ی xOy مشخص کنید:

۱) $2x - 4 \geq 0$ ۲) $3x - 2 < x + 1$

۳) $3y - 9 \leq 0$ ۴) $5(y-1) > 2y + 7$

۵) $x - y \geq 0$ ۶) $-x - 2y \leq -4$

۷) $x^2 + y^2 \geq 9$ ۸) $y^2 < 4x$

۹) $(x^2 + y^2 - 9)(y^2 - 4x) > 0$ ۱۰) $\begin{cases} x + y \leq 9 \\ 5x + 3y \geq 30 \\ 5y \geq x \\ 2y \leq x \end{cases}$

حل:

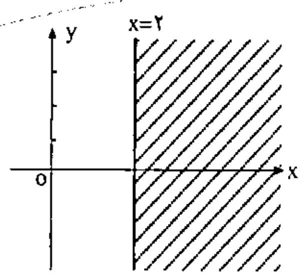
۱. ابتدا نمودار خط به معادله‌ی $2x - 4 = 0$ را رسم می‌کنیم:

$$2x - 4 = 0 \Rightarrow x = 2$$

می‌دانیم که نمودار خط به معادله‌ی $x = 2$، خطی است که در نقطه‌ای به طول ۲ عمود بر محور xهاست. اکنون مختصات یک نقطه‌ی دل‌خواه مانند $O(0,0)$ را در نامعادله قرار می‌دهیم:

$$O(0,0) \in \mathbb{R}^2 \Rightarrow 2 \times 0 - 4 \geq 0 \Rightarrow -4 \geq 0$$

چون نابرابری آخر نادرست است، بنابراین طرفی از خط که شامل نقطه‌ی $O(0,0)$ نیست، مجموعه‌ی جواب نامعادله است، هم‌چنین، مجموعه جواب نامعادله شامل نقاط روی خط به معادله‌ی $x = 2$ است.



نمودار ۲

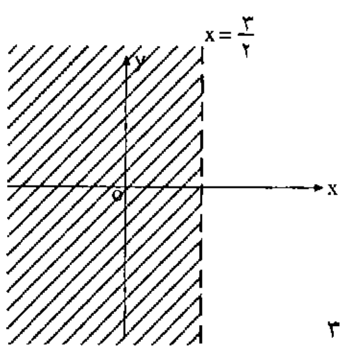
۲.

$$3x - 2 < x + 1 \Rightarrow 2x < 3 \Rightarrow x < \frac{3}{2}$$

ابتدا خط به معادله‌ی $x = \frac{3}{2}$ را رسم می‌کنیم و سپس مختصات نقطه‌ای دل‌خواه مانند $O(0,0)$ را در نامعادله قرار می‌دهیم:

$$O(0,0) \in \mathbb{R}^2 \Rightarrow 0 < \frac{3}{2}$$

چون نابرابری آخر درست است، بنابراین طرفی از خط که نقطه‌ی O را شامل می‌شود، مجموعه جواب نامعادله است. باید توجه داشته باشیم که مجموعه جواب نامعادله شامل نقاط روی خط به معادله‌ی $x = \frac{3}{2}$ نیست.



نمودار ۳

۳. ابتدا خط به معادله‌ی $3y - 9 = 0$ را رسم می‌کنیم:

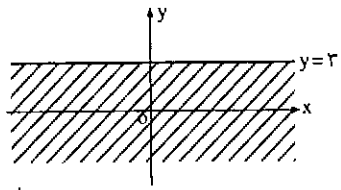
$$3y - 9 = 0 \Rightarrow y = 3$$

می‌دانیم که نمودار خط به معادله‌ی $y = 3$، خطی است که در

نقطه‌ای به عرض ۳ عمود بر محور yهاست. اکنون مختصات یک نقطه‌ی دلخواه، مانند $O(0,0)$ را در نامعادله قرار می‌دهیم:

$O(0,0)\in \mathbb{R}^2 \Rightarrow 3\times 0-9\le 0 \Rightarrow -9\le 0$

چون نابرابری آخر درست است، بنابراین طرفی از خط که نقطه‌ی O را شامل می‌شود، مجموعه جواب نامعادله است. هم‌چنین، مجموعه جواب نامعادله شامل نقاط روی خط به معادله‌ی $y=3$ است.



نمودار ۴

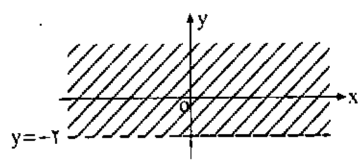
۴.

$5(y-1)>2y-11 \Rightarrow y>-2$

ابتدا خط به معادله‌ی $y=-2$ را رسم می‌کنیم. سپس مختصات نقطه‌ای دل‌خواه مانند $O(0,0)$ را در نامعادله قرار می‌دهیم:

$O(0,0)\in \mathbb{R}^2 \Rightarrow 0>-2$

چون نابرابری آخر درست است، بنابراین طرفی از خط که نقطه‌ی O را شامل می‌شود، مجموعه جواب نامعادله است، هم‌چنین مجموعه جواب نامعادله شامل نقاط روی خط به معادله‌ی $y=-2$ نیست.



نمودار ۵

۵. ابتدا نمودار خط به معادله‌ی $x-y=0$ را رسم می‌کنیم:

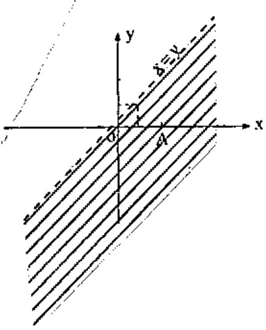
$x-y=0$

x	۰	۱
y	۰	۱

اکنون مختصات نقطه‌ای دل‌خواه مانند $A(2,0)$ را در نامعادله قرار می‌دهیم:

$A(2,0)\in \mathbb{R}^2 \Rightarrow 2-0\ge 0 \Rightarrow 2\ge 0$

چون نابرابری آخر درست است، بنابراین طرفی از خط که نقطه‌ی $A(2,0)$ را شامل می‌شود، مجموعه جواب نامعادله است. هم‌چنین مجموعه جواب نامعادله شامل نقاط روی خط به معادله‌ی $x-y=0$ است.



نمودار ۶

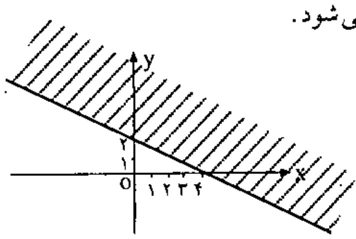
۶.

$-x-2y=-4$

x	۰	۴
y	۲	۰

$O(0,0)\in \mathbb{R}^2 \Rightarrow 0\le -4$ نقطه‌ی دل‌خواه

چون نابرابری آخر نادرست است، بنابراین طرفی از خط که شامل نقطه‌ی O نیست، مجموعه جواب نامعادله است. هم‌چنین، مجموعه جواب نامعادله شامل نقاط روی خط به معادله‌ی $-x-2y=-4$ می‌شود.

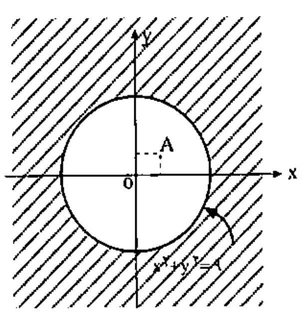


$-x-2y=-4$ نمودار ۷

۷. ابتدا نمودار دایره‌ی $x^2+y^2=9$ را رسم می‌کنیم. می‌دانیم که این معادله، معادله‌ی یک دایره به مرکز $O\begin{vmatrix}0\\0\end{vmatrix}$ و شعاع $r=\sqrt{9}=3$ است. سپس مختصات یک نقطه‌ی دل‌خواه مانند $A(1,1)$ را در نامعادله قرار می‌دهیم:

$A(1,1)\in \mathbb{R}^2 \Rightarrow 1^2+1^2\ge 9 \Rightarrow 2\ge 9$

چون نابرابری آخر نادرست است، بنابراین ناحیه‌ای که شامل نقطه‌ی $A(1,1)$ نیست، مجموعه جواب نامعادله است. هم‌چنین، مجموعه جواب نامعادله شامل نقاط روی دایره به معادله‌ی $x^2+y^2=9$ می‌شود.



نمودار ۸

تذکر: به طور کلی مجموعه جواب نامعادله‌ی $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2>R^2$، مجموعه نقاط بیرون دایره به مرکز $O'\begin{vmatrix}\alpha\\\beta\end{vmatrix}$ و شعاع R است و مجموعه جواب نامعادله‌ی $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2<R^2$، مجموعه نقاط درون دایره به مرکز $O'\begin{vmatrix}\alpha\\\beta\end{vmatrix}$ و شعاع R است.

۸. ابتدا نمودار سهمی $y^2=4x$ را به کمک نقطه‌یابی رسم می‌کنیم:

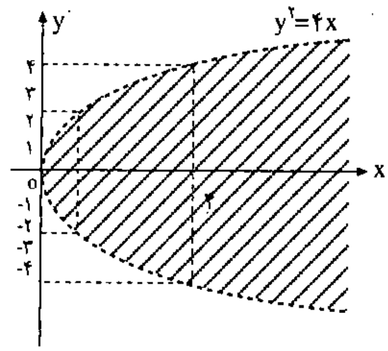
$y^2 = 4x$

x	4	1	0	1	4
y	-4	-2	0	2	4

اکنون مختصات نقطه‌ای دل‌خواه مانند $A(1,0)$ را در نامعادله قرار می‌دهیم:

$A(1,0) \in R \Rightarrow 0^2 < 4\times 1 \Rightarrow 0 < 4$

چون نابرابری آخر درست است، بنابراین ناحیه‌ای که شامل نقطه‌ی $A(1,0)$ است، مجموعه جواب نامعادله محسوب می‌شود. هم‌چنین، مجموعه جواب نامعادله شامل نقاط روی سهمی به معادله‌ی $y^2 = 4x$ نیست.



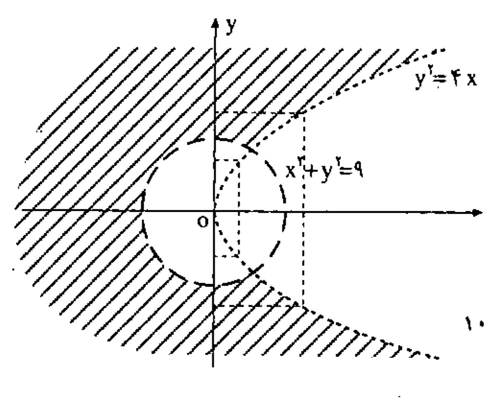
نمودار ۹

۹. برای حل نامعادله‌ی $(x^2+y^2-9)(y^2-4x) > 0$ باید اجتماع مجموعه جواب‌های دو دستگاه زیر را به‌دست آوریم:

$$\begin{cases} x^2+y^2-9>0 \\ y^2-4x>0 \end{cases} (1) \quad ; \quad \begin{cases} x^2+y^2-9<0 \\ y^2-4x<0 \end{cases} (2)$$

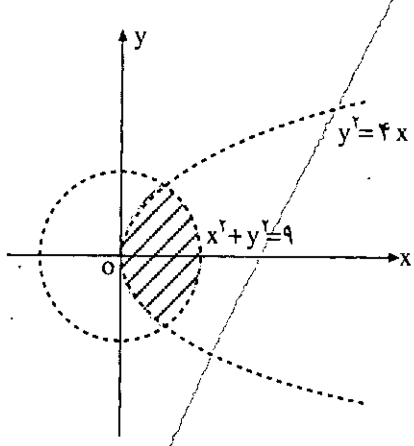
ابتدا مجموعه جواب دستگاه (۱) را به‌دست می‌آوریم:

مجموعه جواب نامعادله‌ی $x^2+y^2>9$، مجموعه نقاط بیرون دایره به معادله‌ی $x^2+y^2=9$ و مجموعه جواب نامعادله‌ی $y^2>4x$، مجموعه نقاط بیرون سهمی به معادله‌ی $y^2=4x$ است؛ اشتراک مجموعه جواب‌های دو نامعادله‌ی دستگاه (۱)، مجموعه جواب این دستگاه است. در شکل زیر مجموعه جواب دستگاه (۱) مشخص شده است.



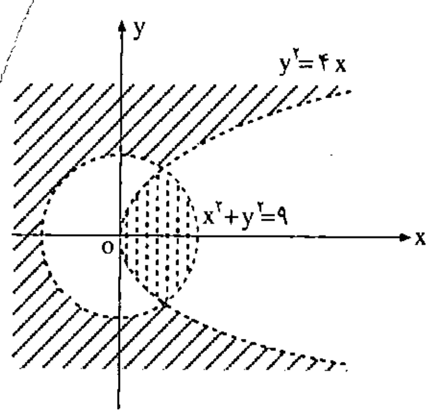
نمودار ۱۰

اکنون مجموعه جواب دستگاه(۲) را به‌دست می‌آوریم: مجموعه جواب نامعادله $x^2+y^2<9$، مجموعه نقاط درون دایره به معادله‌ی $x^2+y^2=9$ و مجموعه جواب نامعادله‌ی $y^2<4x$، مجموعه نقاط درون سهمی به معادله‌ی $y^2=4x$ است؛ اشتراک مجموعه جواب‌های دو نامعادله‌ی دستگاه (۲)، مجموعه جواب این دستگاه است. در شکل زیر مجموعه جواب دستگاه (۲) مشخص شده است.



نمودار ۱۱

نمودار زیر که از اجتماع مجموعه جواب‌های دو دستگاه (۱) و (۲) به‌دست آمده، مجموعه جواب نامعادله‌ی $(x^2+y^2-9)(y^2-4x) > 0$ است.



نمودار ۱۲

۱۰.
$$\begin{cases} x+y \le 9 \\ 5x+3y \ge 30 \\ 5y \ge x \\ 2y \le x \end{cases}$$

برای حلّ این دستگاه، ابتدا خط‌ها به معادله‌های زیر را رسم می‌کنیم:

$L_1: x+y=9$;

x	0	9
y	9	0

$L_2: 5x+3y=30$;

x	0	6
y	10	0

$L_3: 5y=x$;

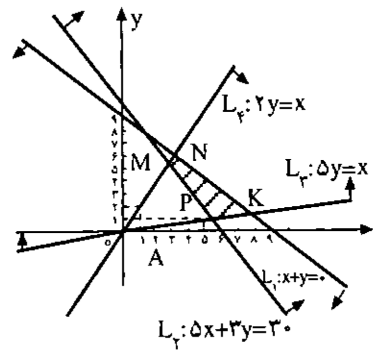
x	0	5
y	0	1

$L_2: ۲y = x \;;\; \begin{array}{c|cc} x & ۰ & ۲ \\ \hline y & ۰ & ۱ \end{array}$

اکنون برای این که تشخیص دهیم، کدام طرف خط، مجموعه جواب نامعادله است، مختصات یک نقطه‌ی دل‌خواه از $\mathbb{R}^۲$، مانند $A(۲,۰)$ را در نامعادله‌ها قرار می‌دهیم:

$$A(۲,۰) \in \mathbb{R}^۲ \Rightarrow \begin{cases} ۲+۰ \leq ۹ \Rightarrow ۲ \leq ۹ \\ ۵\times ۲ + ۳\times ۰ \geq ۳۰ \Rightarrow ۱۰ \ngeq ۳۰ \\ ۵\times ۰ \geq ۲ \Rightarrow ۰ \ngeq ۲ \\ ۲\times ۰ \leq ۲ \Rightarrow ۰ \leq ۲ \end{cases}$$

مجموعه جواب دستگاه بالا، چهارضلعی MNPK است.



نمودار ۱۳

کاربردهای نامعادله‌های دو متغیره

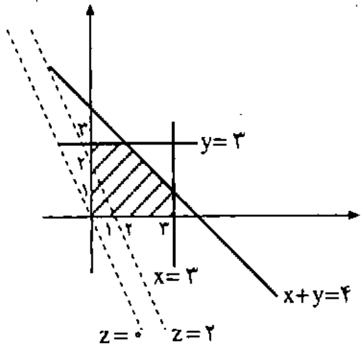
نامعادله‌های دو متغیره و تعیین مجموعه‌ی جواب آن‌ها به صورت هندسی، کاربردهای فراوانی در مباحث گوناگون دارد. از آن جمله در اقتصاد، مدیریت و برنامه‌ریزی، عمده‌ی این کاربردها حول بحث بهینه‌سازی سیستم‌ها با محدودیت است. «برنامه‌ریزی خطی» یا همان «بهینه‌سازی خطی»، روشی در ریاضیات است که به پیدا کردن مقدار مینی‌مم (کمینه) یا ماکزی‌مم (بیشینه) از یک تابع دو متغیره (تابع هدف) روی یک چند ضلعی محدب می‌پردازد. این چندضلعی‌های محدب، در حقیقت نمایش نموداری تعدادی محدودیت از نوع معادله‌های خطی دو متغیره است. برای روشن‌تر شدن بحث به ذکر چند مسئله می‌پردازیم.

مسئله‌ی ۱. دو متغیر مثبت x و y در نابرابری‌های دستگاه نامعادلات زیر صدق می‌کنند:

$$\begin{cases} x+y \leq ۴ \\ x \leq ۳ \\ y \leq ۳ \\ x,y \geq ۰ \end{cases}$$

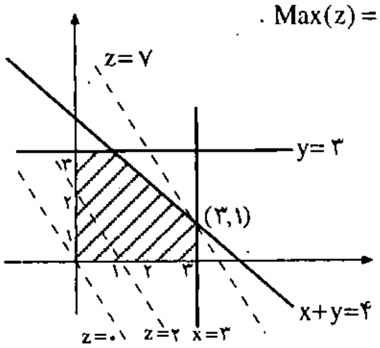
ماکزی‌مم تابع با ضابطه‌ی $z = f(x,y) = ۲x + y$ را به ازای x و yهایی که در شرایط نامعادله‌های بالا صدق می‌کنند، به‌دست آورید.

بدیهی است که هدف، یافتن حداکثر مقدار z به ازای x و yهایی است که در تمام نامعادله‌ها صدق کنند. برای حل این مسئله روش‌های جبری نیز وجود دارند، ولی روش هندسی روشن‌تر و ساده‌تر است. به این منظور نمودار هندسی دستگاه نامعادله‌ها را رسم می‌کنیم. مختصات تمامی نقاط واقع در پنج‌ضلعی هاشور خورده و روی مرزهای آن در تمام نامعادله‌ها صدق می‌کنند. اما تابع دو متغیره‌ی z به لحاظ هندسی با تغییر z یک دسته خطوط را با شیب $m = -۲$ مشخص می‌کند که دو تا از آن‌ها به ازای $z = ۰$ و $z = ۲$ رسم شده‌اند.



نمودار ۱۴

هرچه این دسته خطوط از مبدأ مختصات دور شوند، نقاط روی آن‌ها که در شرایط نامعادله‌ها صدق می‌کنند، مقدار بیشتری از z را به دست می‌دهند و لذا با انتقال این خطوط به دورترین نقاط محدوده‌ی فوق که بهترین شرایط را برای z ایجاد می‌کنند، مختصات مورد نظر را به دست می‌آوریم. باید دقت کرد که در این انتقال، خط حاصل از محدوده‌ی هاشور خورده نگذرد و بر محدوده‌ی فوق مماس شود که نقطه‌ی تماس (یکی از گوشه‌های محدوده‌ی مورد نظر است) جواب مطلوب محسوب می‌شود. مطابق شکل زیر، مختصات این نقطه که محل برخورد دو خط به معادله‌های $x = ۳$ و $x + y = ۴$ است، به صورت $(x,y) = (۳,۱)$ معلوم می‌شود و روشن است که به ازای این دو مقدار: $Max(z) = ۷$.

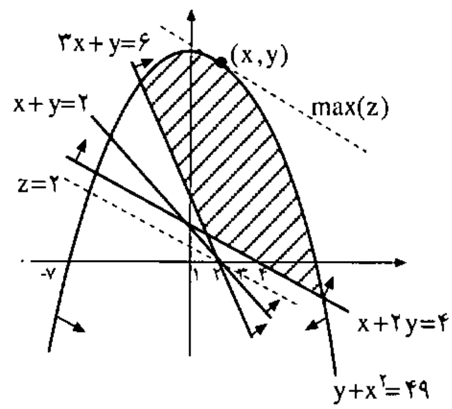


نمودار۱۵

مسئله‌ی۲. ماکزی‌مم $z = x + ۲y$ را که در شرایط دستگاه نامعادلات زیر صدق می‌کند، به‌دست آورید:

$$\begin{cases} x+y \geq ۲ \\ x+۲y \geq ۴ \\ ۳x+y \geq ۶ \\ y+x^۲ < ۴۹ \end{cases}$$

حل: ابتدا محدوده‌ی مورد نظر را به دست می‌آوریم. سپس یکی از خطوط مربوط به تابع هدف را، مثلاً به ازای $z = ۲$ رسم می‌کنیم. آن‌گاه با انتقال موازی باید این خط را به دورترین نقطه‌ی محدوده فرستاد و بر محدوده‌ی فوق مماس کرد که در شکل این کار انجام شده است. اکنون کافی است مختصات نقطه‌ی تماس را به‌دست آوریم.



نمودار ۱۶

برای این کار باید مختصات نقطه‌ای را بر منحنی به معادله‌ی $y + x^۲ = ۴۹$ تعیین کرد که مماس بر منحنی در آن‌جا با خط به معادله‌ی $x + ۲y = ۲$ موازی باشد؛ یعنی شیب آن مساوی $-\frac{۱}{۲}$ باشد. می‌دانیم که مشتق تابع در هر نقطه، ضریب زاویه (شیب) مماس بر آن را به‌دست می‌دهد. پس مشتق تابع با ضابطه‌ی $y + x^۲ = ۴۹$ را می‌گیریم و مساوی $-\frac{۱}{۲}$ قرار می‌دهیم:

$$y = ۴۹ - x^۲; y' = -۲x \Rightarrow -۲x = -\frac{۱}{۲}; x = \frac{۱}{۴}$$

$$y + \frac{۱}{۱۶} = ۴۹ \quad y = ۴۸\frac{۱۵}{۱۶} \quad ; \quad Max(z) = ۹۸\frac{۱}{۸}$$

بدیهی است که برای مینی‌مم کردن تابع دو متغیره‌ی z به شیوه‌ی فوق با انتقال موازی باید دسته‌ی خطوط را حتی‌الامکان به مبدأ مختصات نزدیک‌تر کرد.

تمرین: نمودار هر یک از نامعادله‌های زیر را در صفحه‌ی xOy مشخص کنید:

۱) $۳(x - ۱) \geq -۲x + ۴$

۲) $\frac{۲x - ۳}{۲} \leq ۳x - ۲$

۳) $۱ \leq ۲y - ۳ \leq ۵$

۴) $\frac{۴ - ۳y}{۵} \geq ۲$

۵) $-x + ۲y \geq ۴$

۶) $y^۲ - ۲x < ۰$

۷) $y \geq ۴x^۲ + ۸x + ۱$

۸) $|x + ۲y| \leq ۸$

۹) $۲x^۲ + ۲y^۲ - ۳۲ \leq ۰$

۱۰) $x^۲ + y^۲ - ۲x - ۲y \geq ۲$

۱۱) $۳y - x \leq ۶$

۱۲) $x^۲ - ۲y \geq ۰$

۱۳) $y < \frac{x + ۱}{x - ۱}$

۱۴) $(x^۲ + y^۲ - ۴)(y - x^۲) < ۰$

نمودار مجموعه جواب هر یک از دستگاه‌های زیر را در صفحه‌ی xOy مشخص کنید:

۱) $\begin{cases} x + y \geq ۶ \\ x + y \leq ۸ \\ ۰ \leq x \leq ۵ \\ ۰ \leq y \leq ۳۰ \end{cases}$

۲) $\begin{cases} x + y \leq ۱۰ \\ ۴ \leq y \leq ۷ \\ ۲ \leq x \leq ۶ \\ y \leq ۷ - x \end{cases}$

۳) $\begin{cases} ۵x + ۴y \geq ۲۰ \\ ۴x + ۵y \geq ۲۰ \\ x \geq ۰ \\ y \geq ۰ \end{cases}$

۴) $\begin{cases} x^۲ + y^۲ \leq ۹ \\ x > ۰ \\ y > ۰ \\ x - y \geq ۰ \end{cases}$

۵) $\begin{cases} y \geq x^۲ \\ x \geq y^۲ \end{cases}$

۶) $\begin{cases} x^۲ + y^۲ \leq ۴ \\ y \geq x^۲ \\ -۱ \leq x \leq ۱ \end{cases}$

ماکزی‌مم یا مینی‌مم تابع هدف z را در هر یک از موارد زیر با شرایط داده شده به‌دست آورید:

۱) $\begin{cases} Max(z) = ۲x + y \\ ۲x + ۳y \leq ۶ \\ x + y \geq ۱ \\ y \geq ۱ \\ ۰ \leq x \leq ۳ \end{cases}$

۲) $\begin{cases} Min(z) = x + y \\ ۲x + y \geq ۳ \\ x + ۲y \geq ۴ \\ x \geq ۰ , \quad y \geq ۰ \\ ۲x + ۳y \geq ۶ \end{cases}$

۳) $\begin{cases} Max(z), \ Min(z) = ۲x + ۳y \\ x + y \leq ۳ \\ ۲x + y \leq ۴ \\ ۰ \leq x \leq ۲ \\ y \geq ۱ \end{cases}$

۴) $\begin{cases} Max(z) = y - x^۲ \\ x + y \geq ۳ \\ x^۲ + y^۲ \leq ۱۶ \\ x \geq ۰ , \quad y \geq ۰ \end{cases}$

---

۱. برای اطلاعات بیشتر درباره‌ی حل نامعادله‌ها، به کتاب کوچک ریاضی نابرابرها و نامعادله‌ها از «انتشارات مدرسه» مراجعه کنید.

---

۱. معادلات و نامعادلات، ترجمه و تدوین ابراهیم دارابی، انتشارات مبتکران.

۲. معادله و نامعادله، نوشته‌ی والدی و اسیوویچ و اویلف و همکاران، ترجمه‌ی پرویز شهریاری، انتشارات مدرسه.



یادی از استاد اسدالله آل بویه

● دکتر احمد شرف‌الدین

زنده‌یاد دکتر اسدالله آل‌بویه، استاد گران‌قدر ریاضی، سال‌ها در دانش‌سرای عالی و دانشکده‌ی علوم دانشگاه تهران، هندسه عالی تدریس می‌کرد. آل‌بویه تاکنون چند کتاب ارزنده در زمینه‌ی هندسه تدوین کرده است. وی در فرانسه تحصیل کرده بود و به همراه زنده‌یاد دکتر محسن هشترودی، استاد گران‌قدر ریاضی، از شاگردان الی کارتان بودند. الی کارتان (۱۹۵۱-۱۸۶۹) از ریاضی‌دانان بزرگ جهان بود که سال‌ها در دانشگاه «سُربُن» تدریس می‌کرد و تحقیقات مهمی در هندسه و نظریه‌ی گروه‌ها دارد.

هشترودی و آل‌بویه پس از فراگیری مقدمات ریاضی برای ورود به دوره‌ی دکترا، خواستند زیرنظر کارتان به تحقیقات ریاضی دوره‌ی دکترا بپردازند. کارتان به منظور سنجش توانایی آن‌ها برای تحقیقات در ریاضی، به آن‌ها مسائلی از هندسه‌ی خالص داد و با وقت کاملاً کافی. کارتان استعداد آن‌ها را براساس راه‌حل‌هایی که عرضه کرده بودند، پسندید و آنان را برای انجام تحقیقات زیرنظر خود پذیرفت.

استاد آل‌بویه در مسائلی که برای حل به دانشجویان می‌داد، علاوه بر به کارگیری نظریه‌ی گروه‌ها، متغیر مختلط و...، به حل با قضایای هندسه‌ی خاص توجه خاص داشت. این که افلاطون، هندسه را برای آموختن فلسفه بسیار لازم می‌دانست، از این جهت است که فلسفه فرمول ندارد و فکر استدلالی می‌خواهد (بر سر در مدرسه‌ی افلاطون نوشته شده بود: هر کس هندسه نمی‌داند به این مدرسه داخل نشود). بسیاری از بزرگان دانش، هندسه را وسیله‌ی مناسبی برای پرورش فکر می‌دانند. پاسکال (۱۶۶۲-۱۶۲۳)، یکی از بزرگ‌ترین نوابغ جهان چنین می‌گوید: «ما به تجربه دریافته‌ایم، بین افرادی که هوش برابر دارند و در همه چیز یکسان‌اند، آن که بر هندسه تسلط دارد، برتر است و قدرت ذهنی کاملاً نوینی دارد.»

کانت (۱۸۰۴-۱۷۲۴)، فیلسوف بزرگ آلمانی نیز می گوید: «فلسفه یاد گرفتن اندیشه‌ها نیست، فلسفه یاد گرفتن اندیشیدن است.» ملاحظه می کنیم که کانت برای استدلال و تفکر ارزش والایی قائل است و کسب محفوظات را علم محسوب نمی‌دارد. در آموزش ضروری است که استدلال مورد توجه کامل آموزنده باشد. آموزش‌هایی که صرفاً بر محفوظات متکی باشند، چندان اثری در تقویت فکر ندارند. توضیح و استدلال در آموزش، به‌تدریج در محصلان لذت تفکر به‌وجود می‌آورد. لذت تفکر عالی‌ترین لذت‌هاست و اثر بسیار عمیقی در وارسته کردن انسان دارد؛ چرا که تفکر مداوم، توجه انسان را به درک حقایق بیشتر می کند و او را به سوی قناعت می‌برد.

معلمی که با توضیح کافی و استدلال‌های دقیق به‌طور مداوم علم را تبیین می کند و بدین‌سان لذت فراگیرندگان را از تفکر افزایش می‌دهد، نقش بسیار مهمی در پرورش اخلاقی آنان دارد؛ چرا که بر وارستگی آنان می‌افزاید. افزون بر این، هنگامی که فکر دانش‌آموز با استدلال‌های پیوسته پرورش یابد و از فکر کردن لذت ببرد، به مطالعه به‌طور خودآموز می‌پردازد و خود، معلم خویش می‌شود و همواره به مطالعه ادامه می‌دهد.

* * *

درس استاد آل‌بویه تنها هندسه نبود، بلکه گهگاه به ذکر مسائلی از جامعه می‌پرداخت. او عاشق فرهنگ و تمدن ایران بود. همواره در کلاس و در خارج از کلاس، به مناسبت‌های گوناگون درباره‌ی شکوه تمدن ایران و خدمات بزرگان ایران سخن می‌گفت. در این مختصر، از دو گفته‌ی ایشان یاد می کنم:

● استاد آل‌بویه، پیش از آن که در پاریس افتخار شاگردی کارتان را پیدا کند، در شهر نانسی تحصیل می کرد. آل‌بویه برای ما دانشجویان اظهار داشت که او و دو دانشجوی ایرانی دیگر، در امتحانات پایان سال دانشگاه نانسی شاگرد اول شدند و این موفقیت جالب ایرانی‌ها در روزنامه‌ی محلی با عنوان «ایرانیان را بشناسیم» چاپ شد. در آن روزنامه چاپ شده بود که سه تن از دانشجویان ایرانی، در سه رشته‌ی متفاوت، در میان دانشجویان دانشگاه نانسی شاگرد اول شده‌اند.

آل‌بویه افزود که پس از چند روز که در خدمت استاد ریاضی خود بودم، یک دانشجوی فرانسوی هم که در حضور استاد بود، از استاد پرسید: «چه‌طور آل‌بویه که ایرانی است، شاگرد اول شده و هیچ کدام از دانشجویان فرانسوی شاگرد اول نشده‌اند؟» استاد جواب داد: «ایرانیان ملتی باهوش‌اند، اما در طی تاریخ به کرات مورد حمله‌ی بیگانگان قرار گرفته‌اند. با وجود این، دانشمندان، فیلسوفان و شاعران بزرگی از آن سرزمین برخاسته‌اند. اگر ایرانیان مورد تهاجم‌های بسیار سخت بیگانگان قرار نمی‌گرفتند، درخشندگی بیشتری از خود نشان می‌دادند.»

● از جمله پندهای بسیار ارزشمند استاد آل‌بویه این بود: فرزندان خود را چنان تربیت کنید که نسبت به آموزگار همواره احساسات و رفتار احترام‌آمیز داشته باشند. در این مورد، یکی از مثال‌های آل‌بویه چنین بود که اگر دریافتید، آموزگار مسئله‌ای را درست حل نکرده است، به هیچ‌وجه به فرزند نگویید که آموزگار مسئله را درست حل نکرده است؛ بلکه بگویید یک راه‌حل دیگر هم وجود دارد. آن‌گاه راه‌حل درست را که می‌دانید، به فرزند بیاموزید. من نصیحت استاد آل‌بویه را همواره به کار برده‌ام و از به کار بردن نصیحت ایشان بسیار لذت برده‌ام.

روح آن استاد بزرگوار شاد باشد و خدمات علمی شاگردانش گسترده باد.



رویکرد هندسی- رویکرد جبری در آموزش هندسه (۶)

● محمدهاشم رستمی

اشاره

یکی از مهم‌ترین پیوندها و اتصال‌ها در همه‌ی ریاضیات، اتصال و پیوند بین هندسه و جبر است.

در این شماره نیز (از استانداردهای NCTM) این اتصال و ارتباط را در سه بعد (فضا) بررسی می‌کنیم.

نکته‌ی مهم: ضمن بررسی رویکرد هندسی- رویکرد جبری در آموزش هندسه، برخی راهبردهای مهم برای حل مسئله‌های هندسه را مطرح می‌کنیم.

راهبرد تحدید یا کوچک‌کردن مسئله

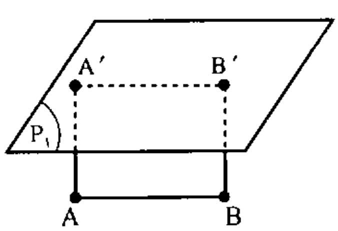
یکی از راهبردهای مهم و کارا برای حل مسله‌ها، راهبرد تحدید یا کوچک کردن مسئله‌ی داده شده است. درباره‌ی این راهبرد بیشتر صحبت خواهیم کرد. اکنون به مثال زیر توجه کنید.

مثال ۶. مجموعه‌ی صفحه‌هایی را تعیین کنید که سه نقطه‌ی ثابت A، B و C از هریک از آن‌ها به یک فاصله باشند.

حل:

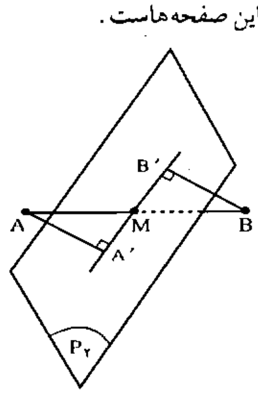
الف) روش هندسی

برای حل این مسئله از روش تحدید یا کوچک‌کردن مسئله استفاده می‌کنیم. برای این کار، یکی از نقطه‌ها، مثلاً نقطه‌ی C را کنار می‌گذاریم. اکنون مجموعه‌ی صفحه‌هایی را باید مشخص کنیم که دو نقطه‌ی ثابت A و B از هریک از آن‌ها به یک فاصله‌اند. این مسئله را قبلاً بررسی کرده‌ایم (مثال ۵، مقاله‌ی شماره‌ی قبل).



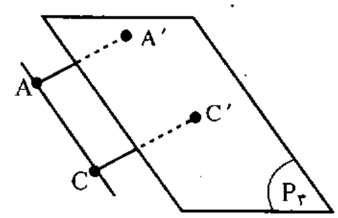
(شکل۱)

دیدیم که دو مجموعه صفحه جواب مسئله هستند: یک مجموعه صفحه‌های موازی خط AB و مجموعه‌ی دیگر، مجموعه‌ی صفحه‌هایی است که از نقطه‌ی M، وسط پاره‌خط AB می‌گذرند. P_2 یک نمونه از این صفحه‌هاست.



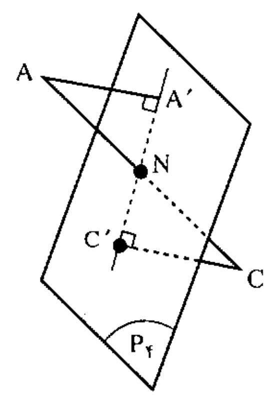
(شکل۲)

اکنون نقطه‌ای دیگر، مثلاً نقطه‌ی B را کنار می‌گذاریم و مجموعه‌ی صفحه‌هایی را تعیین می‌کنیم که دو نقطه‌ی A و C از هریک از آن‌ها به یک فاصله‌اند.



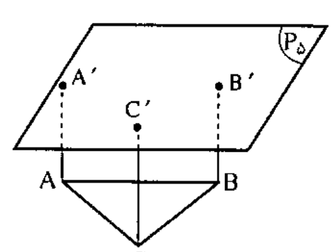
(شکل ۳)

این مسئله را قبلاً حل کرده‌ایم و می‌دانیم که دو مجموعه صفحه جواب مسئله هستند: یکی مجموعه‌ی صفحه‌هایی که با خط AC موازی‌اند و P_3 یک نمونه از آن‌هاست. مجموعه‌ی دیگر، مجموعه‌ی صفحه‌هایی است که از نقطه‌ی N وسط پاره‌خط AC می‌گذرند و P_4 یک نمونه از این صفحه‌هاست.



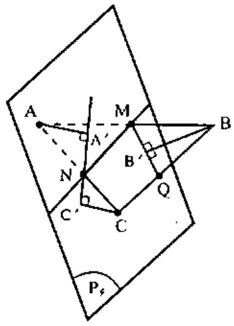
(شکل ۴)

پس مجموعه‌ی صفحه‌هایی که سه نقطه‌ی A، B و C از آن‌ها به یک فاصله‌اند، چند دسته‌اند: یکی دسته‌ای که با خط‌های AB و AC و در نتیجه با صفحه‌ی گذرنده بر سه نقطه‌ی A، B و C موازی است که صفحه‌ی P_5 در شکل ۵، یک نمونه از آن‌هاست.



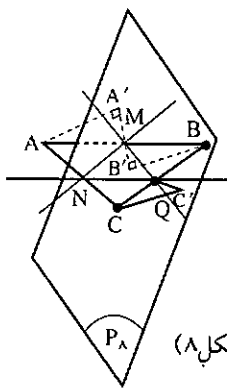
(شکل ۵)

دسته صفحه‌های دیگر جواب مسئله، سه دسته صفحه است که از خط‌های واصل بین وسط‌های پاره‌خط‌های AB، AC و BC می‌گذرند. اگر وسط پاره‌خط BC را نقطه‌ی Q بنامیم، این سه دسته صفحه، یکی دسته صفحه‌ای است که بر دو نقطه‌ی M و N و یا درواقع بر خط MN می‌گذرد. صفحه‌ی P_6 یک صفحه از این دسته صفحه است (شکل ۶).

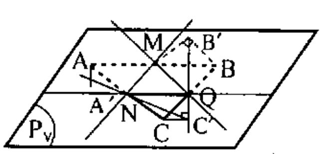


(شکل ۶)

دسته صفحه‌ی دیگر، دسته صفحه‌ای است که بر دو نقطه‌ی N و Q و یا درواقع بر خط NQ می‌گذرد. P_7 یک نمونه از این دسته صفحه است (شکل ۷). و دسته‌ی آخر جواب مسئله، دسته صفحه‌ای است که بر خط MQ می‌گذرد. صفحه‌ی P_8 یک نمونه از این دسته صفحه است (شکل ۸).



(شکل ۸)



(شکل ۷)

پس به طور کلی می‌توان گفت که چهار دسته صفحه وجود دارد که سه نقطه‌ی ثابت A، B و C از هریک صفحه‌های این دسته‌ها به یک فاصله‌اند. با فرض این‌که نقطه‌های M، N و Q را به‌ترتیب وسط پاره‌خط‌های AB، AC و BC بگیریم، این چهار دسته صفحه عبارت‌اند از:

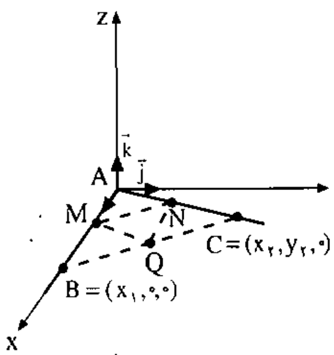
- دسته‌ی اول، دسته صفحه‌ای است که صفحه‌های آن با صفحه‌ی ABC موازی هستند. P_5 یک صفحه از این دسته صفحه است.
- دسته‌ی دوم، دسته صفحه‌ای است که بر خط MN می‌گذرد. P_6 یک صفحه از این دسته صفحه است.
- دسته‌ی سوم، دسته صفحه‌ای است که بر خط NQ می‌گذرد. P_7 یک صفحه از این دسته صفحه است.
- دسته‌ی چهارم، دسته صفحه‌ای است که بر خط MQ می‌گذرد. P_8 یک صفحه از این دسته صفحه است.

نکته‌ی ۱. واضح است، صفحه‌ای که با AB و AC موازی باشد، با خط BC نیز موازی است (مانند صفحه‌ی P_5). و در این صورت، چون $AA' = BB'$ و $AA' = CC'$ است پس $AA' = BB' = CC'$ است. یعنی سه نقطه‌ی A، B و C از صفحه‌ی P_5 و درنتیجه از هر صفحه‌ی موازی صفحه‌ی P_5 به یک فاصله‌اند.

نکته‌ی ۲. صفحه‌ی P_6 که بر خط MN می‌گذرد، یک صفحه از دسته صفحه‌ای است که سه نقطه‌ی A، B و C از آن به یک فاصله‌اند. زیرا چون صفحه‌ی P_6 بر M، وسط AB گذشته،

$AA' = BB'$ است. و چون صفحه‌ی P_6 بر نقطه‌ی N وسط AC گذشته، $AA' = CC'$ است. پس $AA' = BB' = CC'$ است. یعنی سه نقطه‌ی A، B و C از صفحه‌ی P_6 به یک فاصله‌اند. همین مطلب برای صفحه‌های P_7 و P_8 نیز برقرار است.

ب) روش جبری- مختصاتی



(شکل۹)

دستگاه مختصات قائم O-xyz را چنان در نظر می‌گیریم که نقطه‌ی O منطبق بر نقطه‌ی ثابت A، نقطه‌ی B روی محور xها و نقطه‌ی C در صفحه‌ی xoy باشد. در این صورت، $A=(0,0,0)$، $B=(x_1,0,0)$ و $C=(x_2,y_2,0)$ خواهد بود. اکنون اگر صفحه‌ی اختیاری P به معادله‌ی $ax+by+cz+d=0$ یکی از صفحه‌هایی باشد که سه نقطه‌ی A، B و C از آن به یک فاصله باشند، با توجه به این‌که:

$$AA' = \frac{|d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \quad \text{و} \quad BB' = \frac{|ax_1+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \quad \text{و}$$

$CC' = \frac{|ax_2+by_2+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$ و $AA' = BB' = CC'$، خواهیم داشت:

$$\frac{|d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \frac{|ax_1+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \frac{|ax_2+by_2+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

$$|d| = |ax_1+d| = |ax_2+by_2+d|$$

از این رابطه، مشابه آن‌چه درباره‌ی دو نقطه‌ی ثابت (مثال ۵) دیدیم، دیده می‌شود که چهار دسته صفحه جواب مسئله است:

- **دسته‌ی اول:** دسته صفحه‌ای که صفحه‌های آن موازی صفحه‌ی ABC و معادله‌ی آن به صورت Z=k است ($k \in \mathbb{R}$).
- **دسته‌ی دوم:** دسته صفحه‌ای است که بر خط MN، یعنی خط واصل بین نقطه‌های M و N وسط پاره‌خط‌های AB و AC می‌گذرد و با توجه به این‌که:

$$M = (\frac{x_1}{2},0,0)\ ,\ N = (\frac{x_2}{2},\frac{y_2}{2},0)$$

$$MN: \frac{x-\frac{x_1}{2}}{\frac{x_2-x_1}{2}} = \frac{y-0}{\frac{y_2}{2}-0}\ ,\quad Z=0$$

یا

$$\begin{cases}(x-\frac{x_1}{2})\frac{y_2}{2}-(\frac{x_2-x_1}{2})y=0\\ Z=0\end{cases}$$

این دسته صفحه به معادله‌ی زیر است:

$$\alpha\left[(x-\frac{x_1}{2})\frac{y_2}{2}-(\frac{x_2-x_1}{2})y\right]+\beta Z=0$$

- **دسته‌ی سوم:** دسته صفحه‌ای است که بر خط NQ می‌گذرد.
- **دسته‌ی چهارم:** دسته صفحه‌ای است که بر خط MQ می‌گذرد.

معادله‌ی دسته صفحه‌های سوم و چهارم مشابه معادله‌ی دسته صفحه‌ی دوم به دست می‌آید. محاسبه را خودتان انجام دهید.

نکته: می‌توانیم دستگاه مختصات O-xyz را در حالت عمومی و به صورتی در نظر بگیریم که نقطه‌های ثابت A، B و C روی هیچ‌یک از محورهای مختصات نباشند. در این صورت، $A=(x_1,y_1,z_1)$ و $B=(x_2,y_2,z_2)$ و $C=(x_3,y_3,z_3)$ خواهد بود. و اگر ما صفحه‌ی P به معادله‌ی $ax+by+cz+d=0$ را یکی از صفحه‌های جواب مسئله، یعنی صفحه‌ای اختیار کنیم که سه نقطه‌ی A، B و C از آن به یک فاصله باشند، یعنی $AA' = BB' = CC'$ باشد، با توجه به این‌که:

$$AA' = \frac{|ax_1+by_1+cz_1+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

$$BB' = \frac{|ax_2+by_2+cz_2+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

$$CC' = \frac{|ax_3+by_3+cz_3+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

خواهیم داشت:

$$|ax_1+by_1+cz_1+d| = |ax_2+by_2+cz_2+d| = |ax_3+by_3+cz_3+d|$$

از این رابطه مشابه آن‌چه در مثال ۵ دیدیم، می‌توانیم ثابت کنیم چهار دسته صفحه جواب مسئله است. برای مثال ثابت می‌کنیم که صفحه‌ی P با $\vec{AB}$ و هم‌چنین با $\vec{AC}$ موازی است. پس این صفحه موازی صفحه‌ی ABC است و درنتیجه، یک دسته صفحه‌ی جواب مسئله، دسته صفحه‌ای است که صفحه‌های آن با صفحه‌ی ABC، یعنی صفحه‌ی شامل سه‌نقطه‌ی ثابت داده شده، موازی است.

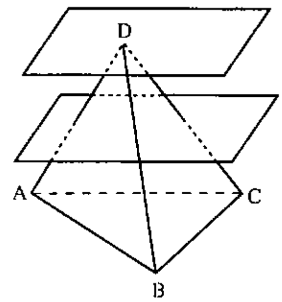
مثال ۷. چهار نقطه‌ی ثابت A، B، C و D غیر واقع در یک صفحه داده شده‌اند. صفحه یا صفحه‌هایی را مشخص کنید که این چهار نقطه از هریک از آن‌ها به یک فاصله باشند.

حل

الف) روش هندسی

اگر مثال‌های ۵ و ۶ را حل نکرده بودیم، ابتدا مسئله را برای دو نقطه و سپس برای سه نقطه حل می‌کردیم. یعنی از راهبرد تحدید (کوچک کردن مسئله) استفاده می‌کردیم و آن‌گاه به حل مسئله برای

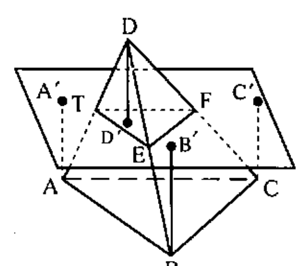
چهار نقطه‌ی غیر واقع در یک صفحه می‌پرداختیم. اما ما قبلاً در مثال ۵ مسئله را برای دو نقطه‌ی ثابت و در مثال ۶ مسئله را برای سه نقطه‌ی ثابت حل کرده‌ایم. بنابراین از این مثال، یعنی مثال ۶ برای حل مسئله استفاده می‌کنیم. با حل مثال ۶ ثابت کردیم، چهار دسته صفحه وجود دارد که سه نقطه‌ی ثابت A، B و C از صفحه‌های آن‌ها به یک فاصله‌اند. اکنون باید ببینیم که در هر کدام از این دسته صفحه‌ها، چند صفحه وجود دارد که چهار نقطه‌ی A، B، C و D از آن‌ها به یک فاصله‌اند. این چهار نقطه‌ی ثابت چهاروجهی ABCD را می‌سازند (شکل ۱۰).



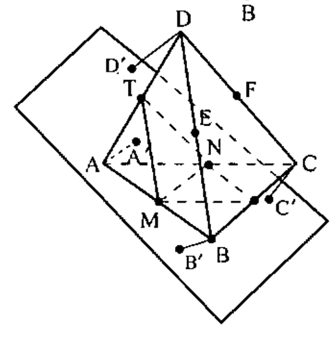
(شکل ۱۰)

● یک دسته صفحه‌ای که سه نقطه‌ی A، B و C از آن به یک فاصله‌اند، دسته صفحه‌ای است موازی صفحه‌ی ABC. از بین صفحه‌های این دسته، باید صفحه‌ای را اختیار کنیم که نقطه‌ی A و D نیز از آن به یک فاصله باشند.

این صفحه از نقطه‌ی T وسط پاره‌خط DA می‌گذرد. بدیهی است، صفحه‌ای که موازی صفحه‌ی ABC باشد و از وسط پاره‌خط DA بگذرد، از نقطه‌های E و F، وسط پاره‌خط‌های DB و DC نیز می‌گذرد. یعنی صفحه‌ی TEF که موازی صفحه‌ی ABC است و بر وسط یال‌های DA، DB و DC از چهاروجهی DABC می‌گذرد، صفحه‌ای از دسته صفحه‌ی موازی صفحه‌ی ABC است که هر چهار نقطه‌ی A، B، C و D از آن به یک فاصله هستند. پس داریم: $DD' = AA' = BB' = CC'$ (شکل ۱۱).



(شکل ۱۱)



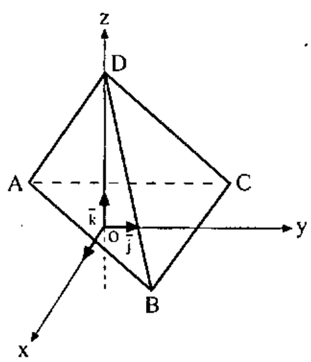
(شکل ۱۲)

تمرین. مشابه این صفحه، سه صفحه‌ی دیگر نیز جواب مسئله است که هر کدام با یک وجه دیگر چهاروجهی موازی است، آن‌ها را مشخص کنید.

● دسته‌ی صفحه‌ی دیگری که سه نقطه‌ی A، B و C از آن به یک فاصله‌اند، دسته صفحه‌ای است که بر نقطه‌های M وسط AB و N وسط AC (یا بر خط MN) می‌گذرد. حال از بین صفحه‌های این دسته، باید صفحه‌ای را مشخص کنیم که دو نقطه‌ی D و A از آن نیز به یک فاصله باشند. اما می‌دانیم، مجموعه‌ی صفحه‌هایی که دو نقطه‌ی D و A از آن به یک فاصله‌اند، بر نقطه‌ی T وسط پاره‌خط DA می‌گذرد. پس از بین صفحه‌های دسته صفحه‌ی گذرنده بر خط MN، صفحه‌ای که بر نقطه‌ی T می‌گذرد، یعنی صفحه‌ی MNT، یک صفحه‌ی جواب این مسئله است و همان صفحه‌ای است که چهار نقطه‌ی A، B، C و D از آن به یک فاصله‌اند (شکل ۱۲). صفحه‌های MNE و MNF نیز صفحه‌های دیگری از این دسته صفحه (دسته صفحه‌ی گذرنده بر MN) هستند که چهار نقطه‌ی A، B، C و D از آن‌ها به یک فاصله‌اند.

تمرین. با توجه به شکل ۱۲، صفحه‌های دیگری از دسته صفحه‌های گذرنده بر NQ و MQ را که جواب مسئله هستند، یعنی چهار نقطه‌ی A، B، C و D از آن‌ها به یک فاصله‌اند، تعیین کنید.

ب) روش جبری- مختصاتی



(شکل ۱۳)

دستگاه مختصات قائم O-xyz را چنان در نظر بگیرید که نقطه‌ی D روی محور Zها و صفحه‌ی ABC روی صفحه‌ی xoy باشد. در این صورت، نقطه‌ی برخورد عمودی که از D بر صفحه‌ی ABC رسم می‌شود، نقطه‌ی O مبدأ این دستگاه مختصات است. در این دستگاه مختصات $A = (x_1, y_1, 0)$، $B = (x_2, y_2, 0)$، $C = (x_3, y_3, 0)$ و $D = (0, 0, z_1)$ خواهد بود. اکنون اگر صفحه‌ی $P: ax + by + cz + d = 0$ یکی از صفحه‌های جواب مسئله، یعنی صفحه‌ای باشد که چهار نقطه‌ی A، B، C و D از آن به یک فاصله‌اند، با محاسبه‌ی AA'، BB'، CC' و DD' و این‌که $AA' = BB' = CC' = DD'$ است، صفحه‌های جواب مسئله را مشخص کنید.

نکته: می‌توانید با روشی دیگر، مختصات نقطه‌های M، N، Q، T، E و F، وسط یال‌های چهاروجهی ABCD را برحسب مختصات نقطه‌های A، B، C، D به‌دست آورید. معادله‌ی صفحه‌های گذرنده بر هر سه نقطه از این شش نقطه، مثلاً معادله‌ی صفحه MNT را بنویسید و ثابت کنید که چهار نقطه‌ی A، B، C و D از این صفحه به یک فاصله‌اند.

ادامه دارد...

□

۵ روش برای محاسبه‌ی $S_p(n)=\sum\limits_{i=0}^{n} i^p = 0+1^p+2^p+3^p+\ldots+n^p \; (p\in N)$

● سیمین اکبری‌زاده
دبیر ریاضی (اراک)

چکیده

هدف این مقاله بررسی روش‌های متفاوت برای محاسبه‌ی $S_p(n)=\sum\limits_{i=0}^{n} i^p$ است. در این زمینه دو روش به کمک تفاضلات و دو روش دیگر به کمک ماتریس و دترمینان ارائه شده‌اند و نهایتاً یک روش به کمک مشتق و انتگرال معین بیان شده است.

تعریف: اگر $\{h_i\}_{i\geq 0}$ یک دنباله باشد با جملات $h_0, h_1, h_2, \ldots$، آن‌گاه:

$$\begin{cases} \Delta^0 h_i = h_i & \text{تفاضل پیشروی مرتبه‌ی صفرم } h_i \\ \Delta^n h_i = \Delta^{n-1}h_{i+1}-\Delta^{n-1}h_i \quad i=0,1,2,\ldots & \text{تفاضل پیشروی مرتبه‌ی } n\text{ام } h_i \end{cases}$$

روش اول: استفاده از تفاضلات پیشرو

اگر در دنباله‌ی $\{h_i\}_{i\geq 0}$، تفاضلات پیشروی مرتبه‌ی pام ثابت باشد، آن‌گاه:

$$h_i = h_0 + \binom{i}{1}\Delta^1 h_0 + \binom{i}{2}\Delta^2 h_0 + \ldots + \binom{i}{p}\Delta^p h_0$$

و با استفاده از ویژگی ضرایب دو جمله‌ای $\left(\sum\limits_{i=0}^{n}\binom{i}{p}=\binom{n+1}{p+1}\right)$ خواهیم داشت:

$$\sum_{i=0}^{n} h_i = h_0\binom{n+1}{1}+\Delta^1 h_0\binom{n+1}{2}+\Delta^2 h_0\binom{n+1}{3}+\ldots+\Delta^p h_0\binom{n+1}{p+1} \qquad \text{فرمول (۱)}$$

در این فرمول: $\binom{n}{k}=\dfrac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{k!}$

مثال۱ . برای محاسبه‌ی عبارت زیر:

$$S_2(n)=\sum_{i=0}^{n} i^2 = 0+1+2^2+3^2+\ldots+n^2$$

دنباله‌ی h_i را مساوی i^2 اختیار کرده و چند جمله‌ی اول این دنباله را در نظر گرفته‌ایم:

$$h_0=0, h_1=1, h_2=4, h_3=9, h_4=16, h_5=25$$

جدول تفاضلات پیشروی این دنباله را تشکیل می‌دهیم (جدول ۱).

i	$h_i = \Delta^0 h_i$	$\Delta h_i = h_{i+1} - h_i$	$\Delta^2 h_i = \Delta h_{i+1} - \Delta h_i$	$\Delta^3 h_i = \Delta^2 h_{i+1} - \Delta^2 h_i$	$\Delta^4 h_i$
۰	۰	۱	۲	۰	۰
۱	۱	۳	۲	۰	۰
۲	۴	۵	۲	۰	۰
۳	۹	۷	۲	۰	
۴	۱۶	۹	۲		
۵	۲۵				

جدول ۱ . تفاضلات پیشروی دنباله‌ی h_i

با توجه به جدول ۱ ، تفاضلات پیشروی مرتبه‌ی دوم این دنباله ثابت و مرتبه‌ی سوم به بعد آن صفر است . (به‌طور کلی در دنباله‌ی i^p ، تفاضلات پیشروی مرتبه pام ثابت و مرتبه p+1ام به بعد صفر است .)

داریم: $\Delta^0 h_0 = h_0 = 0, \Delta^1 h_0 = 1, \Delta^2 h_0 = 2$. لذا طبق فرمول (۱) خواهیم داشت :

$$\sum_{i=0}^{n} h_i = \sum_{i=0}^{n} i^2 = 0\binom{n+1}{1} + 1\binom{n+1}{2} + 2\binom{n+1}{3}$$

$$= 0 + \frac{(n+1)n}{2} + \frac{2(n+1)n(n-1)}{3!}$$

پس از ساده کردن، تساوی $S_2(n) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ حاصل می‌شود. در واقع در این روش، به کمک جدول تفاضلات پیشروی دنباله‌ی i^p ، برای $i = 0,1,2,\ldots,p$ می‌توان فرمولی کلی برای $S_p(n) = \sum_{i=0}^{n} i^p$ به دست آورد.

تعریف: اگر $\{h_i\}_{i\geq 0}$ یک دنباله باشد با جملات $h_0, h_1, h_2, \ldots$ ، آن‌گاه :

$$\begin{cases} h_i \text{ تفاضل پیشروی مرتبه‌ی صفرم } : R_i^0 = h_i \\ h_i \text{ تفاضل پیشروی مرتبه‌ی nام } : R_i^n = \dfrac{R_{i+1}^{n-1} - R_i^{n-1}}{n} \end{cases}$$

روش دوم: استفاده از تفاضلات تقسیم شده

اگر در دنباله‌ی $\{h_i\}_{i\geq 0}$ ، تفاضلات تقسیم شده‌ی مرتبه‌ی p ام ثابت باشد، آن‌گاه :

$$h_n = R_0^0 + R_0^1(n-0) + R_0^2(n-0)(n-1) + R_0^3(n-0)(n-1)(n-2) + \ldots + R_0^p(n-0)(n-1)(n-2)\ldots(n-p+1) \quad \text{فرمول (۲)}$$

مثال ۲ . برای محاسبه‌ی سری، چند جمله‌ی اول آن را درنظر می‌گیریم. داریم :

$$h_n = S_2(n) = \sum_{i=0}^{n} i^2 = 0 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2$$

$$h_0 = \sum_{i=0}^{0} i^2 = 0 \qquad h_1 = \sum_{i=0}^{1} i^2 = 0 + 1 = 1$$

$$h_2 = \sum_{i=0}^{2} i^2 = 0 + 1^2 + 2^2 = 5$$

$$h_3 = \sum_{i=0}^{3} i^2 = 0 + 1^2 + 2^2 + 3^2 = 14$$

$$h_4 = \sum_{i=0}^{4} i^2 = 0 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = 30$$

جدول تفاضلات تقسیم شده‌ی این دنباله را تشکیل می‌دهیم (جدول۲).

i	h_i	$R_i^1 = \frac{R_{i+1}^0 - R_i^0}{1}$	$R_i^2 = \frac{R_{i+1}^1 - R_i^1}{2}$	$R_i^3 = \frac{R_{i+1}^2 - R_i^2}{3}$	$R_i^4 = \frac{R_{i+1}^3 - R_i^3}{4}$
۰	۰	$(1-0)/1=1$	$\frac{4-1}{2} = \frac{3}{2}$	$\frac{\frac{5}{2}-\frac{3}{2}}{3} = \frac{1}{3}$	$\frac{\frac{1}{3}-\frac{1}{3}}{4} = 0$
۱	۱	$(5-1)/1=4$	$\frac{9-4}{2} = \frac{5}{2}$	$\frac{\frac{7}{2}-\frac{5}{2}}{3} = \frac{1}{3}$	
۲	۵	$(14-5)/1=9$	$\frac{16-9}{2} = \frac{7}{2}$		
۳	۱۴	$(30-14)/1=16$			
۴	۳۰				

جدول ۲ . تفاضلات تقسیم‌شده‌ی دنباله‌ی h_i

با توجه به جدول ۲ ، تفاضلات تقسیم‌شده‌ی مرتبه‌ی سوم این دنباله ثابت و مرتبه‌ی چهارم به بعد آن صفر است . (به‌طور کلی در دنباله‌ی $S_p(n) = \sum_{i=0}^{n} i^p$ ، تفاضلات تقسیم‌شده‌ی مرتبه p+1ام ثابت و مرتبه‌ی p+2ام به بعد صفر است.)

داریم: $R_0^0 = h_0 = 0, R_0^1 = 1, R_0^2 = \frac{3}{2}, R_0^3 = \frac{1}{3}$ ، لذا طبق فرمول ۲ خواهیم داشت :

$$h_n = \sum_{i=0}^{n} i^2 = 0 + 1(n-0) + \frac{3}{2}(n-0)(n-1) + \frac{1}{3}(n-0)(n-1)(n-2)$$

پس از ساده کردن، تساوی زیر حاصل می‌شود.

$$h_n = S_2(n) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

در واقع در این روش با انتخاب p مناسب و به کمک جدول تفاضلات تقسیم‌شده‌ی دنباله‌ی $S_p(0),S_p(1),S_p(2),\ldots,S_p(p+1)$ (یعنی p+۲ جمله اول $S_p(n)$) و با استفاده از فرمول (۲)، می‌توان فرمولی کلی برای $S_p(n)$ برحسب n به‌دست آورد.

روش سوم: استفاده از ماتریس

فرض کنیم $S_k(n)=a_1n+a_2n^2+a_3n^3+\ldots+a_{k+1}n^{k+1}$ ضرایب چند جمله‌ای با حل دستگاه معادلات خطی زیر به‌دست می‌آید:

$$\begin{bmatrix} \binom{k+1}{k} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \binom{k+1}{k-1} & \binom{k}{k-1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \binom{k+1}{k-2} & \binom{k}{k-2} & \binom{k-1}{k-2} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \cdots & 0 \\ \binom{k+1}{0} & \binom{k}{0} & \binom{k-1}{0} & \binom{k-2}{0} & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{k+1} \\ a_k \\ a_{k-1} \\ \vdots \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \binom{k}{k} \\ \binom{k}{k-1} \\ \binom{k}{k-2} \\ \vdots \\ \binom{k}{0} \end{bmatrix}$$

مثال۳. با انتخاب $k=3$، $S_3(n)$ را با این روش به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_4 \\ a_3 \\ a_2 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} a_4=\frac{1}{4} \\ a_3=\frac{1}{2} \\ a_2=\frac{1}{4} \\ a_1=0 \end{cases} \Rightarrow S_3(n)=\sum_{i=0}^{n} i^3=\frac{n^4}{4}+\frac{n^3}{2}+\frac{n^2}{4}=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

ماتریس به‌کار رفته در این روش به خاطر پایین مثلثی بودن، تقریباً همان مثلث پاسکال است و فقط یک ضلع آن با این مثلث فرق دارد. تفاوت ستون دوم ماتریس ضرایب و ماتریس مقادیر ثابت، تنها در عنصر اول آن‌هاست. این عنصر در اولی صفر و در دومی یک است. در ضمن، با استفاده از سه ردیف اول در ماتریس اصلی همیشه خواهیم داشت:

$$a_{k+1}=\frac{1}{k+1}, a_k=\frac{1}{2}, a_{k-1}=\frac{k}{12}, a_{k-2}=a_{k-4}=a_{k-6}=\ldots=0$$

و مجموع ضرایب چند جمله‌ای همیشه برابر ۱ است.

روش چهارم: استفاده از دترمینان

$S_k(n)$ یا به‌طور خلاصه S_k از دترمینان زیر محاسبه می‌شود:

$$S_k(n)=\frac{n+1}{(k+1)!}\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & \ldots & (n+1)-1 \\ 3 & 3 & 0 & 0 & \ldots & (n+1)^2-1 \\ 4 & 6 & 4 & 0 & \ldots & (n+1)^3-1 \\ 5 & 10 & 10 & 5 & \ldots & (n+1)^4-1 \\ \ldots & & & & \ldots & \\ k+1 & & & & \ldots & (n+1)^k-1 \end{vmatrix}$$

فرمول (۴)

طبق بسط دو جمله‌ای نیوتن داریم:

$$(a+b)^n=a^n+\binom{n}{1}a^{n-1}b+\binom{n}{2}a^{n-2}b^2+\binom{n}{3}a^{n-3}b^3+\ldots+\binom{n}{n-1}ab^{n-1}+b^n \qquad n\in N$$

اگر در این رابطه به جای n و b و a به ترتیب k+۱ و ۱ و x قرار دهیم، داریم:

$$(x+1)^{k+1}=x^{k+1}+\binom{k+1}{1}x^k+\binom{k+1}{2}x^{k-1}+\ldots+\binom{k+1}{k}x+1$$

حال اگر در این رابطه به جای x به ترتیب n,...,۱,۲ قرار دهیم و تساوی‌های حاصل را نظیر به نظیر با هم جمع کنیم، پس از حذف عوامل مساوی از طرفین داریم:

$$(n+1)^{k+1}=1+\binom{k+1}{1}\left[1^k+2^k+3^k+\ldots+n^k\right]+\binom{k+1}{2}\left[1^{k-1}+2^{k-1}+\ldots+n^{k-1}\right]+\ldots+\binom{k+1}{k}\left[1+2+\ldots+n\right]+\underbrace{(1+1+1\ldots+1)}_{\text{n بار}}$$

با توجه به تساوی $\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$ فرمول (۵) به‌دست می‌آید:

$$(n+1)^{k+1}=\binom{k+1}{k}S_k+\binom{k+1}{k-1}S_{k-1}+\ldots+\binom{k+1}{1}S_1+(n+1)$$

فرمول (۵)

اگر در فرمول (۵) به ترتیب مقادیر k,...,۱,۲ را به k نسبت دهیم، دستگاهی با k معادله و k مجهول به‌دست می‌آید که ماتریس مجهولات آن یک ماتریس مثلثی است. با حل دستگاه فرمول (۴)

پاسخ حاصل می‌شود.

مثال ۴. برای محاسبه‌ی $S_2(n)$، در فرمول (۴) به جای k عدد ۲ را قرار می‌دهیم. خواهیم داشت:

$$S_2(n)=\frac{n+1}{3!}\begin{vmatrix}2 & n\\ 3 & (n+1)^2-1\end{vmatrix}$$

$$=\frac{n+1}{6}\left[2(n+1)^2-2-3n\right]=\frac{(n+1)n(2n+1)}{6}$$

روش پنجم: استفاده از تابع اولیه و مشتق

طبق نمادگذاری $S_k(n)=1^k+2^k+\dots+n^k$ و $S_{k+1}(n)=1^{k+1}+2^{k+1}+3^{k+1}+\dots+n^{k+1}$ و می‌دانیم: $k\neq -1$ ، $\int x^k dx=\frac{x^{k+1}}{k+1}+c$ و $(x^k)'=kx^{k-1}$ لذا:

الف) با استفاده از $S_k(n)$ و انتگرال معین می‌توان $S_{k+1}(n)$ را محاسبه کرد.

ب) با استفاده از $S_{k+1}(n)$ و مشتق می‌توان $S_k(n)$ را محاسبه کرد.

به این منظور کافی است از فرمول‌های (۵ـالف) و (۵ـب) استفاده کرد.

قضیه: می‌توان ثابت کرد که:

فرمول (۵ـالف) $S_{k+1}(n)=(k+1)\int_0^n S_k(n)dn+c_k n$

در هنگام استفاده از این روش، به کمک $S_k(n)$ و انتگرال معین $S_{k+1}(n)$ را به‌دست آورده و برای یافتن c_k ، با توجه به آن که $S_{k+1}(1)=1^{k+1}=1$ در فرمول بدست آمده برای $S_{k+1}(n)$ بجای n یک قرار می‌دهیم.

مثال ۵. با توجه به آن‌که $S_1(n)=\frac{n^2}{2}+\frac{n}{2}$ ، به کمک تابع اولیه $S_2(n)$ را به‌دست می‌آوریم. اگر در فرمول (۵ـالف) بجای k یک قرار دهیم، داریم: $S_2(n)=2\int_0^n S_1(n)dn+c_1n$ پس:

$$S_2(n)=2\int_0^n\left(\frac{n^2}{2}+\frac{n}{2}\right)dn+c_1n=2\left[\frac{n^3}{2\times3}+\frac{n^2}{2\times2}\right]+c_1n$$

$$\Rightarrow S_2(n)=\frac{n^3}{3}+\frac{n^2}{2}+c_1n$$

چون $S_2(1)=1^2=1$ برای یافتن c_1 کافی است در تساوی بالا به‌جای n، عدد ۱ را قرار دهیم:

$$S_2(1)=1=\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+c_1\Rightarrow c_1=\frac{1}{6}\Rightarrow S_2(n)=\frac{n^3}{3}+\frac{n^2}{2}+\frac{n}{6}$$

در ضمن هرگاه بخواهیم به کمک $S_{k+1}(n)$ ، $S_k(n)$ را به‌دست آوریم از فرمول (۵ـب) استفاده می‌کنیم.

فرمول (۵ـب) $S_k(n)=\frac{S'_{k+1}(n)}{k+1}$

با این قرارداد که با توجه به آن‌که $S_k(n)=\frac{n(n+1)}{2}$ بر n قابل قسمت است هرگاه مشتق $S_{k+1}(n)$ دارای عدد ثابت شد عدد ثابت را حذف می‌کنیم و در غیر این صورت تمامی جملات را می‌نویسیم.

مثال ۶. با توجه به آن‌که $S_2(n)=\frac{n^3}{3}+\frac{n^2}{2}+\frac{n}{6}$ ، به کمک مشتق $S_1(n)$ را به‌دست می‌آوریم. اگر در فرمول (۵ـب) به‌جای k عدد ۱ را قرار دهیم داریم: $S_1(n)=\frac{S'_2(n)}{2}$ پس:

$$S_1(n)=\frac{n^2+n+\frac{1}{6}}{2}\Rightarrow S_1(n)=\frac{n^2+n}{2}$$

تمرین ۱. $S_3(n)$ را به کمک تفاضلات پیشرو به‌دست آورید.

حل: جدول تفاضلات پیشروی دنباله‌ی $i=0,1,2,3,\dots$ ، $h_i=i^3$ را تشکیل می‌دهیم (جدول ۳).

i	h_i	$\Delta^1 h_i$	$\Delta^2 h_i$	$\Delta^3 h_i$	$\Delta^4 h_i$
۰	۰	۱	۶	۶	۰
۱	۱	۷	۱۲	۶	
۲	۸	۱۹	۱۸		
۳	۲۷	۳۷			
۴	۶۴				

جدول ۳. تفاضلات پیشروی دنباله‌ی h_i

طبق فرمول ۱:

$$\sum_{i=0}^{n} h_i=\sum_{i=0}^{n} i^3=0\binom{n+1}{1}+1\binom{n+1}{2}+6\binom{n+1}{3}+6\binom{n+1}{4}$$

$$\Rightarrow S_3(n)=\frac{n^4}{4}+\frac{n^3}{2}+\frac{n^2}{4}$$

تمرین ۲. $S_3(n)$ را به کمک تفاضلات تقسیم شده به‌دست آورید.

حل: دنباله‌ی $h_n=\sum_{i=0}^{n} i^3$ را در نظر می‌گیریم و چند جمله‌ی اول دنباله را می‌یابیم:

$h_0=0, h_1=1, h_2=9, h_3=36, h_4=100$

جدول تفاضلات تقسیم شده‌ی این دنباله را تشکیل می‌دهیم (جدول ۴).

i	h_i	R_i^1	R_i^2	R_i^3	R_i^4
0	0	$(1-0)/1=1$	$\frac{8-1}{2}=+\frac{7}{2}$	$\frac{\frac{19}{2}-\frac{7}{2}}{3}=2$	$\frac{3-2}{4}=\frac{1}{4}$
1	1	$(9-1)/1=8$	$\frac{27-8}{2}=\frac{19}{2}$	$\frac{\frac{37}{2}-\frac{19}{2}}{3}=3$	$\frac{4-3}{4}=\frac{1}{4}$
2	9	$(36-9)/1=27$	$\frac{64-27}{2}=\frac{37}{2}$	$\frac{\frac{61}{2}-\frac{37}{2}}{3}=4$	
3	36	$(100-36)/1=64$	$\frac{125-64}{2}=\frac{61}{2}$		
4	100	$(225-100)/1\doteq 125$			
5	255				

جدول ۴. تفاضلات تقسیم‌شده‌ی دنباله‌ی h_j

طبق جدول ۴، تفاضلات تقسیم‌شده‌ی مرتبه‌ی چهارم این دنباله ثابت است.

$$R_0^0=0, R_0^1=1, R_0^2=\frac{7}{2}, R_0^3=2, \ldots, R_0^4=\frac{1}{4}$$

$$h_n=0+1(n-0)+\frac{7}{2}(n-0)(n-1)+2(n-0)(n-1)(n-2)+$$

$$\frac{1}{4}(n-0)(n-1)(n-2)(n-3)$$

$$\Rightarrow \sum_{i=0}^{n} i^3 = S_3(n)=\frac{n^4}{4}+\frac{n^3}{2}+\frac{n^2}{4}$$

تمرین ۳. $S_2(n)$ را با استفاده از ماتریس به‌دست آورید.

حل: در فرمول (۳) به‌جای k عدد ۲ را قرار می‌دهیم. خواهیم داشت:

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_3 \\ a_2 \\ a_1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a_3=\frac{1}{3} \\ a_2=\frac{1}{2} \\ a_1=\frac{1}{6} \end{cases}$$

$$\Rightarrow S_2=\sum_{i=1}^{n} i^2=\frac{n}{6}+\frac{n^2}{2}+\frac{n^3}{3}$$

تمرین ۴. $S_3(n)$ را با استفاده از دترمینان به‌دست آورید.

حل: در فرمول (۴) به‌جای k عدد ۳ را قرار می‌دهیم. خواهیم داشت:

$$S_3(n)=\frac{n+1}{4!}\begin{vmatrix} 2 & 0 & n \\ 3 & 3 & (n+1)^2-1 \\ 4 & 6 & (n+1)^3-1 \end{vmatrix}=\cdots=\frac{n^4}{4}+\frac{n^3}{2}+\frac{n^2}{4}$$

تمرین ۵. به کمک تابع اولیه $S_3(n)$ را محاسبه کنید.

حل: در فرمول (۵-الف) به‌جای k عدد ۲ را قرار می‌دهیم.

$$S_3(n)=3\int_0^n S_2(n)dn+c_3 n$$

$$=3\int_0^n\left(\frac{n^3}{3}+\frac{n^2}{2}+\frac{n}{6}\right)dn+c_3 n$$

$$=3\left[\frac{n^4}{3\times 4}+\frac{n^3}{2\times 3}+\frac{n^2}{2\times 6}\right]+c_3 n$$

$$\Rightarrow S_3(n)=\frac{n^4}{4}+\frac{n^3}{2}+\frac{n^2}{4}+c_3 n$$

می‌دانیم $1=1^3=S_3(1)$ اگر در تساوی بالا $n=1$ قرار دهیم داریم:

$$S_3(1)=1=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+c_3 \Rightarrow c_3=0$$

$$\Rightarrow S_3(n)=\frac{n^4}{4}+\frac{n^3}{2}+\frac{n^2}{4}$$

توجه: می‌توان ثابت کرد هنگامی که می‌خواهیم به کمک S_{2k} و تابع اولیه، S_{2k+1} را محاسبه کنیم ضریب $c_{2k}=0$ خواهد شد مثلاً برای محاسبه‌ی $S_3(n)$ در مثال بالا کافی بود به صورت زیر عمل کنیم:

$$S_3(n)=3\int_0^n S_2(n)dn=3\int_0^n\left(\frac{n^3}{3}+\frac{n^2}{2}+\frac{n}{6}\right)dn$$

$$\Rightarrow S_3(n)=\frac{n^4}{4}+\frac{n^3}{2}+\frac{n^2}{4}$$

تمرین ۶. به کمک مشتق $S_2(n)$ را محاسبه کنید.

حل: در فرمول (۵-ب) بجای k عدد ۲ قرار می‌دهیم.

$$S_2(n)=\frac{S_3'(n)}{3}=\frac{n^3+\frac{3}{2}n^2+\frac{2n}{4}}{3}\Rightarrow S_2(n)=\frac{n^3}{3}+\frac{n^2}{2}+\frac{n}{6}$$

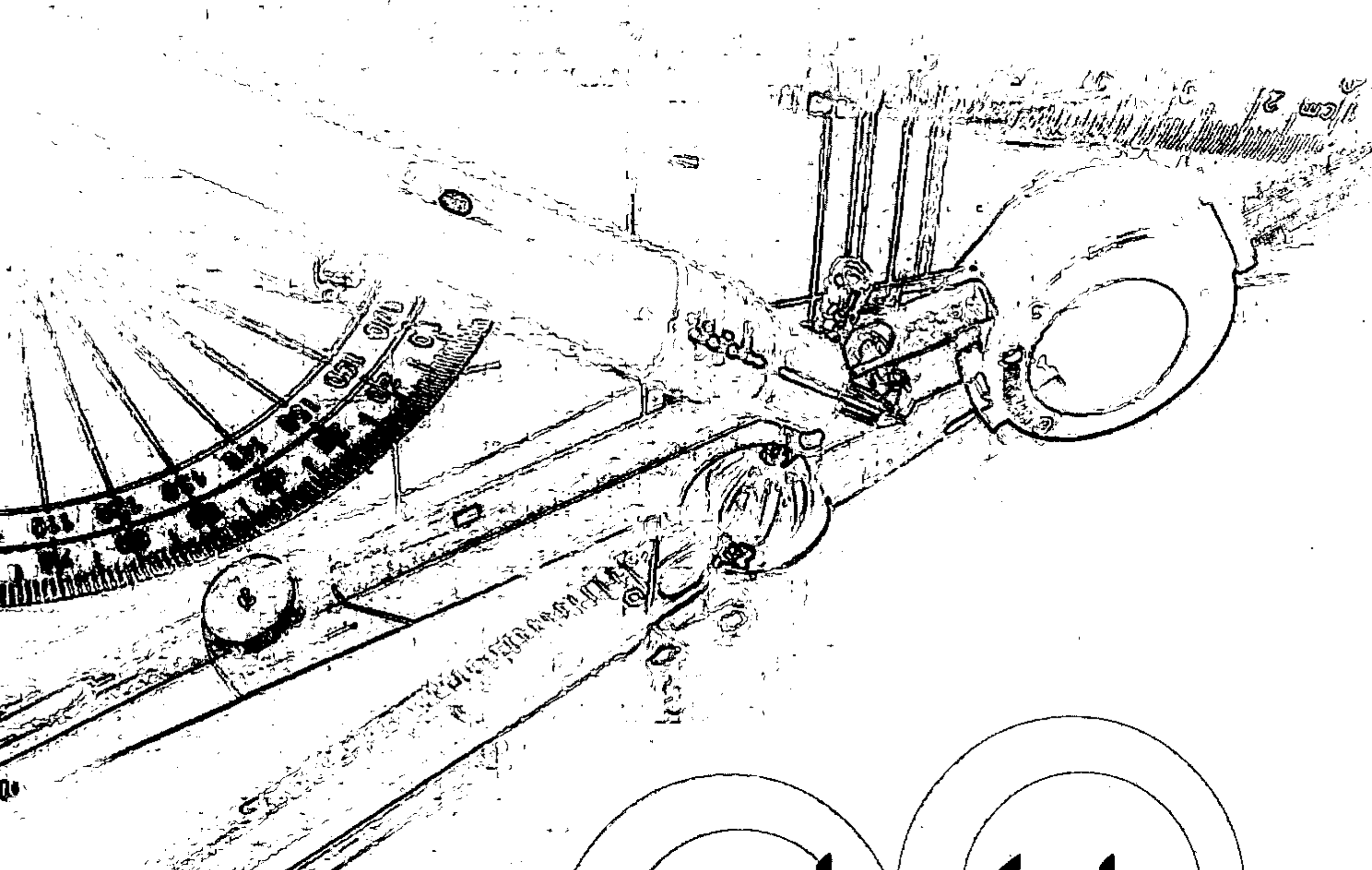
۱. بابلیان، اسماعیل. نخستین گام‌ها در آنالیز عددی (فصل درون‌یابی).

۲. ساروی، مسعود. روش عمومی برای یافتن S_k. گزارش نوزدهمین کنفرانس ریاضی کشور. ص ۵۳-۵۰.

۳. هاشمی، محمدرضا. مجله‌ی رشد آموزش ریاضی. شماره‌ی ۱۶. صفحه ۵۵-۵۴.

۴. عبدالحسین مصحفی، مجله‌ی یکان.

۵. نامی ساعی، حسین. رشد آموزش ریاضی. ش۶۶. ص۲۹-۳۹.



با راهیان المپیادهای ریاضی (۱۳)

● غلامرضا یاسی‌پور

مجموع‌ها و حاصل‌ضرب‌های ادغامی در جبر

پیش از این ملاحظه کردیم، بسیاری از مجموع‌ها را می‌توان با ادغامی کردن آن‌ها، یعنی قرار دادنشان به صورت: $\sum_{k=1}^{n}[F(k+1)-F(k)]$ به سادگی محاسبه کرد. در واقع، در مجموع‌هایی چنین، $F(k)$ها، به ازای k بین ۲ و $n-1$، حذف می‌شوند و مجموع را برابر $F(n+1)-F(1)$ باقی می‌گذارند. خواننده ممکن است به شباهت بین این روش و قضیه‌ی اصلی حساب جامع و فاضل توجه کند و نتیجه بگیرد که در این مورد، پادمشتق گسسته‌ای برای جمله‌های مجموع موردنظر به‌دست می‌آید.

مثال ساده‌ای که روش مجموع‌یابی ادغامی در آن به‌کار رفته، محاسبه‌ی $\sum_{k=1}^{n} k!.k$ است. اگر بنویسیم:

$$k!.k = k!.(k+1-1) = (k+1)!-k!$$

در این صورت، مجموع به این صورت درمی‌آید:

$$\sum_{k=1}^{n}[(k+1)!-k!]$$

که پس از انجام عمل حذف، برابر $(n+1)!-1$ می‌شود.

مسئله: مجموع زیر را محاسبه کنید:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k+1)\sqrt{k}+k\sqrt{k+1}}$$

حل: مخرج کسر را گویا می‌کنیم. داریم:

$$\left((k+1)\sqrt{k}-k\sqrt{k+1}\right)\left((k+1)\sqrt{k}+k\sqrt{k+1}\right)$$

$$=k(k+1)^{2}-(k+1)k^{2}=k(k+1)$$

در این صورت، مجموع به صورت زیر درمی‌آید:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{(k+1)\sqrt{k}-k\sqrt{k+1}}{k(k+1)}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{\sqrt{k}}-\frac{1}{\sqrt{k+1}}\right)=1-\frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

در محاسبه‌ی حاصل‌ضرب‌ها نیز می‌توان از روشی مشابه استفاده کرد. در این حال، عبارت را به صورت حاصل‌ضرب کسرهایی می‌نویسیم که صورت‌ها و مخرج‌هایشان به طور متناوب حذف شوند و صورت کسر اول و مخرج کسر آخر، یا برعکس را باقی بگذارند. در این مورد، مثال زیر را به‌دست می‌دهیم:

مسئله: ثابت کنید:

$$\prod_{n=2}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n^{2}}\right)=\frac{1}{2}$$

با تجزیه و نوشتن هر عامل به صورت یک کسر، حاصل می‌کنیم:

$$\prod_{n=2}^{N}\left(1-\frac{1}{n^{2}}\right)=\prod_{n=2}^{N}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)=\prod_{n=2}^{N}\frac{n-1}{n}\prod_{n=2}^{N}\frac{n+1}{n}$$

$$=\frac{1}{N}\cdot\frac{N+1}{2}=\frac{N+1}{2N}$$

با میل کردن N به بی‌نهایت، درمی‌یابیم که حاصل‌ضرب برابر $\frac{1}{2}$ است.

اکنون خواننده را به حل مسائل زیر دعوت می‌کنیم:

۱. محاسبه کنید:

$$\sum_{k=1}^{n}k!(k^{2}+k+1)$$

۲. فرض می‌کنیم a_1، a_2، ... و a_n تصاعدی حسابی با قدر نسبت d باشد. محاسبه کنید:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k a_{k+1}}$$

۳. مجموع زیر را محاسبه کنید:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{6^{k}}{(3^{k}-2^{k})(3^{k+1}-2^{k+1})}$$

۴. دنباله‌ی $\{x_n\}_n$ توسط $x_1=\frac{1}{2}$ و $x_{k+1}=x_k^{2}+x_k$ تعریف شده است. بزرگ‌ترین عدد صحیح کمتر از مقدار زیر را بیابید.

$$\frac{1}{x_1+1}+\frac{1}{x_2+1}+\cdots+\frac{1}{x_{100}+1}$$

۵. فرض می‌کنیم F_n دنباله‌ی فیبوناتچی باشد ($F_1=1, F_2=1, F_n=F_n+F_{n-1}$). محاسبه کنید:

الف)
$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{F_n}{F_{n-1}\ F_{n+1}}$$

ب)
$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{F_{n-1}\ F_{n+1}}$$

۶. مجموع زیر را محاسبه کنید:

$$\sqrt{1+\frac{1}{1^{2}}+\frac{1}{2^{2}}}+\sqrt{1+\frac{1}{2^{2}}+\frac{1}{3^{2}}}+\cdots+\sqrt{1+\frac{1}{1999^{2}}+\frac{1}{2000^{2}}}$$

۷. نابرابری زیر را ثابت کنید:

$$\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{7}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{9997}+\sqrt{9999}}>24$$

۸. نابرابری دوگانه‌ی زیر را اثبات کنید:

$$2(\sqrt{n+1}-\sqrt{m})<\frac{1}{\sqrt{m}}+\frac{1}{\sqrt{m+1}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n-1}}+\frac{1}{\sqrt{n}}$$
$$<2(\sqrt{n}\cdots\sqrt{m-1})$$

۹. فرض می‌کنیم:

$$a_k=\frac{k}{(k-1)^{\frac{4}{3}}+k^{\frac{4}{3}}+(k+1)^{\frac{4}{3}}}$$

ثابت کنید:

$$a_1+a_2+\cdots+a_{999}<50$$

۱۰. نابرابری زیر را ثابت کنید:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\sqrt{n}}<2$$

۱۱. مجموع زیر را حساب کنید:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{F_{2^{n}}}$$

در این مجموع F_m، mامین جمله‌ی دنباله‌ی فیبوناتچی است.

۱۲. ثابت کنید:

$$\prod_{n=2}^{\infty}\frac{n^{3}-1}{n^{3}+1}=\frac{2}{3}$$

۱۳. حاصل‌ضرب زیر را محاسبه کنید:

$$\prod_{n=0}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2^{2^{n}}}\right)$$

۱۴. فرض می‌کنیم:

$$L_1=2\ ,\ L_2=1\ ,\ L_{n+2}=L_{n+1}+L_n$$

به ازای $n\geq 1$، «دنباله‌ی لوکاس»[1] باشد. رابطه‌ی $\prod_{k=1}^{m} L_{2^k}+1=F_{2^{m+1}}$ را ثابت کنید که در آن $\{F_n\}_n$ دنباله‌ی فیبوناتچی است.

حل مسئله‌ها

۱. می‌توان نوشت:

$$\sum_{k=1}^{n} k!(k^2+k+1)=\sum_{k=1}^{n}\left[(k+1)^2-k\right]k!$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\left[(k+1)!(k+1)-k!k\right]$$

$$=(n+1)!(n+1)-1$$

۲. داریم:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k a_{k+1}}=\frac{1}{d}\sum_{k=1}^{n}\frac{a_{k+1}-a_k}{a_k a_{k+1}}=\frac{1}{d}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{a_k}-\frac{1}{a_{k+1}}\right)$$

این عبارت، از آن‌جا که $a_{n+1}-a_1=nd$، برابر است با: $n/\left((a_1+nd)a_1\right)$.

۳. با استفاده از اتحاد:

$$\frac{6^k}{(3^k-2^k)(3^{k+1}-2^{k+1})}=\frac{3^k}{3^k-2^k}-\frac{3^{k+1}}{3^{k+1}-2^{k+1}}$$

ملاحظه می‌کنیم که مقدار مجموع مورد بحث برابر است با:

$$\frac{3}{3-2}-\lim_{n\to\infty}\frac{3^n}{3^n-2^n}=3-1=2$$

توجه: برابری:

$$\frac{6^k}{(3^k-2^k)(3^{k+1}-2^{k+1})}=\frac{2}{3^k-2^k}-\frac{2^{k+1}}{3^{k+1}-2^{k+1}}$$

روش متفاوت دیگری از ادغام کردن این مجموع را به‌دست می‌دهد (44th. W. L. Putman Mathematical Competion, 1984).

۴. برای ادغام کردن مجموع، از رابطه‌ی بازگشتی دنباله استفاده می‌کنیم. از آن‌جا که:

$$x_{k+1}=x_k^2+x_k$$

به دست می‌آوریم:

$$\frac{1}{x_{k+1}}=\frac{1}{x_k(x_k+1)}=\frac{1}{x_k}-\frac{1}{x_k+1}$$

بنابراین:

$$\frac{1}{x_k+1}=\frac{1}{x_k}-\frac{1}{x_{k+1}}$$

در این صورت:

$$\frac{1}{x_1+1}+\frac{1}{x_2+1}+\cdots+\frac{1}{x_{100}+1}=\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_{101}}$$

از آن‌جا که $x_1=\frac{1}{2}$ و $0<1/x_{101}<1$، قسمت صحیح مجموع برابر ۱ است (تورنمنت شهرها، پاییز ۱۹۸۵، طرح از A. Andjans).

۵. با استفاده از فرمول بازگشتی دنباله‌ی فیبوناتچی، زنجیره‌های نابرابری‌های زیر را به‌دست می‌آوریم:

الف)

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{F_n}{F_{n-1}F_{n+1}}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{F_{n+1}-F_{n-1}}{F_{n-1}F_{n+1}}=\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{F_{n-1}}-\frac{1}{F_{n+1}}\right)$$

$$=\lim_{N\to\infty}\left(\frac{1}{F_1}+\frac{1}{F_2}-\frac{1}{F_N}-\frac{1}{F_{N+1}}\right)=\frac{1}{F_1}+\frac{1}{F_2}=2$$

ب)

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{F_{n-1}F_{n+1}}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{F_n}{F_{n-1}F_nF_{n+1}}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{F_{n+1}-F_{n-1}}{F_{n-1}F_nF_{n+1}}$$

$$=\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{F_{n-1}F_n}-\frac{1}{F_nF_{n+1}}\right)$$

$$=\lim\left(\frac{1}{F_1F_2}-\frac{1}{F_NF_{N+1}}\right)$$

$$=\frac{1}{F_1F_2}=1$$

۶. به ازای عدد صحیح و مثبت n می‌توان نوشت:

$$1+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}=\frac{n^2(n+1)^2+(n+1)^2+n^2}{n^2(n+1)^2}$$

$$=\frac{(n^2+n+1)^2}{n^2(n+1)^2}$$

بنابراین:

$$\sqrt{1+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}}=\frac{n^2+n+1}{n^2+n}=1+\frac{1}{n(n+1)}$$

درنتیجه، مجموع داده شده برابر است با:

$$\sum_{n=1}^{1999}\left(1+\frac{1}{n(n+1)}\right)=\sum_{n=1}^{1999}\left(1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=2000-\frac{1}{2000}$$

۷. برای ادغام کردن این مجموع، چند جمله‌ی مفقود داریم. از آن‌جا که سمت چپ بزرگ‌تر از

$$\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{9}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{9999}+\sqrt{10001}}$$

است، نابرابری از:

$$\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{7}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{9999}+\sqrt{10001}}>48$$

پیروی می‌کند. اکنون، برای ادغام کردن آماده‌ایم. مخرج‌ها را گویا می‌کنیم و نابرابری هم‌ارز زیر را به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{\sqrt{3}-1}{2}+\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{2}+\cdots+\frac{\sqrt{10001}-\sqrt{9999}}{2}>48$$

سمت چپ این نابرابری، برابر $(\sqrt{10001}-1)/2$ است و بررسی مختصری نشان می‌دهد که این مقدار بزرگ‌تر از ۴۸ است (مسابقه‌ی ریاضی اوکراین).

۸. از آن‌جا که به ازای عدد صحیح و مثبت k:

$$(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})(\sqrt{k+1}+\sqrt{k})=1$$

داریم:

$$2(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})=\frac{2}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}<\frac{1}{k}$$

و

$$\frac{1}{\sqrt{k}}<\frac{2}{\sqrt{k}+\sqrt{k-1}}=2(\sqrt{k}+\sqrt{k-1})$$

با ترکیب این دو، داریم:

$$2(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})<\frac{1}{\sqrt{k}}<2(\sqrt{k}-\sqrt{k-1})$$

با جمع همه‌ی این نابرابری‌ها، به‌ازای kهای بین m و n حاصل می‌کنیم:

$$2(\sqrt{n+1}-\sqrt{m})<\frac{1}{\sqrt{m}}+\frac{1}{\sqrt{m+1}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n-1}}+\frac{1}{\sqrt{n}}<2(\sqrt{n}-\sqrt{m-1})$$

و نابرابری دوگانه‌ی مورد بحث اثبات می‌شود.

۹. روش حل این است که ابتدا مخرج a_n را با قرار دادن $(k-1)^{\frac{2}{3}}(k+1)^{\frac{2}{3}}$ به جای $k^{\frac{4}{3}}$، کاهش دهیم و آن‌گاه آن را گویا کنیم. داریم:

$$a_n<\frac{k}{(k-1)^{\frac{4}{3}}+(k-1)^{\frac{2}{3}}(k+1)^{\frac{2}{3}}+(k+1)^{\frac{4}{3}}}$$

$$=\frac{k\left((k+1)^{\frac{2}{3}}-(k-1)^{\frac{2}{3}}\right)}{(k+1)^2-(k-1)^2}=\frac{1}{4}\left((k+1)^{\frac{2}{3}}-(k-1)^{\frac{2}{3}}\right)$$

نتیجه می‌شود که:

$$\sum_{n=1}^{999}a_n<\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{999}\left((k+1)^{\frac{2}{3}}-(k-1)^{\frac{2}{3}}\right)$$

$$=\frac{1}{4}(1000^{\frac{2}{3}}+999^{\frac{2}{3}}-1^{\frac{2}{3}}-0^{\frac{2}{3}})$$

$$<\frac{1}{4}(100+100-1)<50$$

(T. Andreescu)

۱۰. طبیعی است که جمله‌های مجموع را به‌صورت زیر تبدیل کنیم:

$$\frac{1}{\sqrt{n}(n+1)}=\frac{\sqrt{n}}{n(n+1)}=\frac{\sqrt{n}}{n}-\frac{\sqrt{n}}{n+1}$$

این کار ما را مجاز می‌کند که مجموع را به صورت زیر بازنویسی کنیم:

$$1+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\sqrt{n}-\sqrt{n-1}}{n}$$

این مجموع ادغام نمی‌شود، اما از سمت بالا توسط

$$1+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\sqrt{n}-\sqrt{n-1}}{\sqrt{n}\sqrt{n-1}}=1+\sum_{k=2}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n-1}}-\frac{1}{n}\right)$$

که به ۲ ادغام می‌شود، کران‌دار است و به این ترتیب، نابرابری به اثبات می‌رسد (امتحان ورودی کالج رومانی).

۱۱. بنا به استقرا،

$$F_{2m}F_{m-1}-F_{2m-1}F_m=(-1)^m F_m,\quad m\geq 1$$

قرار دادن $m=2^{n-1}$، می‌دهد:

$$F_{2^n}F_{2^{n-1}-1}-F_{2^n-1}F_{2^{n-1}}=F_{2^{n-1}},\quad n\geq 2$$

یا:

$$\frac{1}{F_{2^n}} = \frac{F_{2^{n-1}}-1}{F_{2^{n-1}}} - \frac{F_{2^{n-1}}}{F_{2^n}},\ n \geq 2$$

به این ترتیب :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{F_{2^n}} = \frac{1}{F_1} + \frac{1}{F_2} + \lim_{N\to\infty} \left(\frac{F_1}{F_2} - \frac{F_{2^N-1}}{F_{2^N}}\right) = 3 - \frac{1}{\frac{\sqrt{5}+1}{2}}$$

$$= \frac{7-\sqrt{5}}{2}$$

۱۲ . داریم :

$$\prod_{n=2}^{\infty} \frac{n^3-1}{n^3+1} = \lim_{N\to\infty} \prod_{n=2}^{N} \frac{n^3-1}{n^3+1} = \lim_{N\to\infty} \prod_{n=2} \frac{(n-1)(n^2+n+1)}{(n+1)(n^2-n+1)}$$

$$= \lim_{N\to\infty} \prod_{n=2}^{N} \frac{n-1}{n+1} \prod_{n=2}^{N} \frac{(n+1)^2-(n+1)+1}{n^2-n+1}$$

$$= \lim_{N\to\infty} \frac{1\times 2\times\left((N+1)^2-(N+1)+1\right)}{3N(N+1)} = \frac{2}{3}$$

(مسابقه‌ی ریاضی پاتنام)

۱۳ . می‌توان نوشت :

$$\prod_{n=0}^{\infty} \left(1+\frac{1}{2^{2^n}}\right) = 2 \lim_{N\to\infty} \left(1-\frac{1}{2^{2^0}}\right) \prod_{n=1}^{N} \left(1+\frac{1}{2^{2^n}}\right)$$

حاصل ضرب اخیر ، از آن‌جا که :

$$\left(1-\frac{1}{2^{2^n}}\right)\left(1+\frac{1}{2^{2^n}}\right) = \left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)$$

ادغام می‌شود و برابر $1-\left(\frac{1}{2}\right)^{2^{N+1}}$ است . درنتیجه ، پاسخ مسئله ۲ است .

۱۴ . دنباله‌های فیبوناتچی و لوکاس[1]، به ازای هر $n \geq 1$ در اتحادهای $F_{n+1} + F_{n-1} = L_{n+1}$ و $F_{2n} = F_{n+1}^2 - F_{n-1}^2$ صدق می‌کنند . در این صورت :

$$F_{2n} = (F_{n+1}+F_{n-1})(F_{n+1}-F_{n-1}) = L_{n+1}F_n$$

بنابراین :

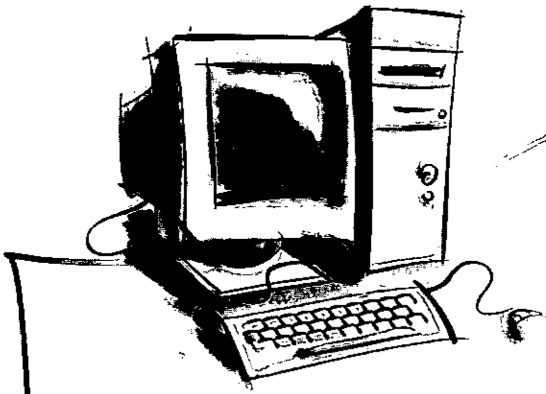
$$L_{n+1} = \frac{F_{2n}}{F_n},\ n \geq 1$$

بنابراین :

$$\prod_{k=1}^{m} L_{2^k+1} = \prod_{k=1}^{m} \frac{F_{2^{k+1}}}{F_{2^k}} = \frac{F_{2^{m+1}}}{F_2} = F_{2^{m+1}}$$

و اثبات انجام می‌گیرد (T. Andreescu) .

1. Lucas sequence



معرفی سایت‌های ریاضی جهان

● احسان یارمحمدی

● پخشی، شرکت پذیری، جابه‌جایی‌پذیر، ویژگی‌ها
(Distributive, Associative, Commutative, Properties)

● معادله‌ها (Equations)

● نامعادله‌ها (Inequations)

● معادلات خطی، نمودارها، شیب
(Linear Equations, Graphs, slope)

● تناسب‌ها (Proportions)

● درصد و نمودارهای دایره‌ای (Percentage and Pie Charts)

● میانگین (Average)

■ جبر ۱ (Algebra I)

● جبر در علم دارایی (Algebra in Finance)

● توابع، دامنه (Functions, Domain)

● دستگاه‌های مختصات، رسم نمودار، غیره
(Coordinate Systems, Graph Plotting, etc)

● نمودارها، ترسیم معادله‌ها و نامعادله‌ها
(Graphs, Graphing Equations and Inequations)

● اعداد حقیقی، اعداد گنگ، غیره
(Real Numbers, Irrational Numbers, etc)

● قدر مطلق (Absolute Value)

● لگاریتم (Logarithm)

● دستگاه‌های معادلات خطی
(Systems of Line Equations)

● ریشه‌ی دوم، ریشه‌ی سوم، ریشه‌ی n-ام
(Square Root, Cubic Root, n-th Root)

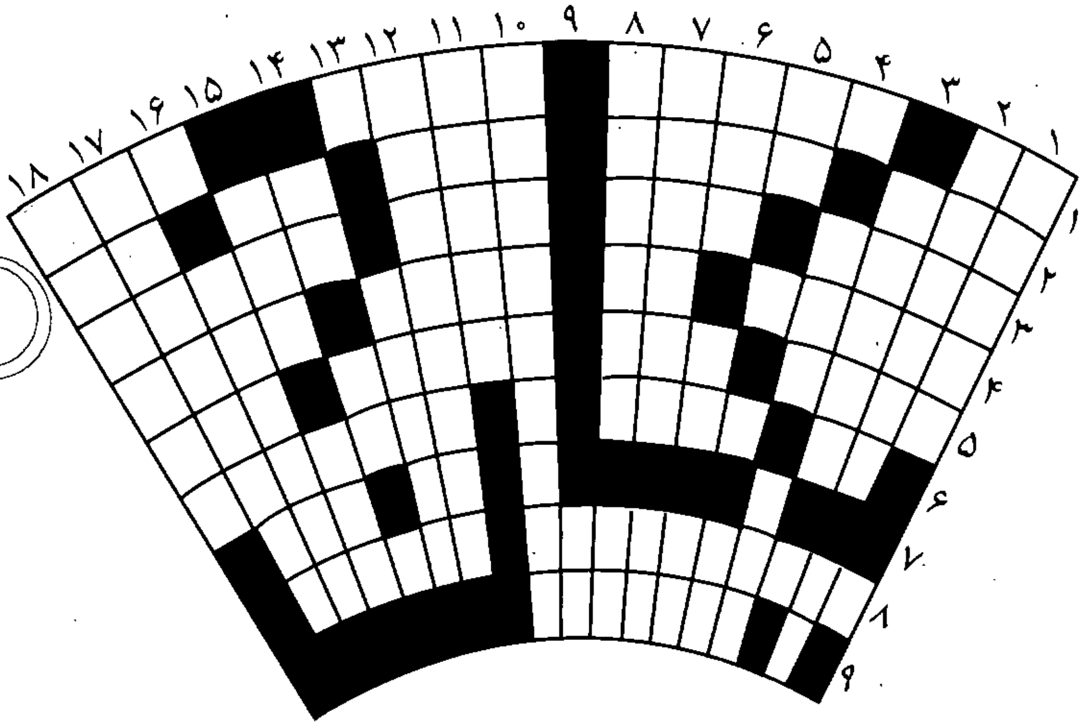
● توان‌های منفی و کسری
(Negative and Fractional Exponents)

ادامه در صفحه ی ۳۹

جدول ریاضی

اشاره

مجله‌ی ریاضی یکان از بهمن سال ۱۳۴۲ به مدیرمسئولی و سردبیری استاد عبدالحسین مصحفی کار خود را شروع کرد و ۱۱۷ شماره را به صورت ماهنامه تا اسفند سال ۱۳۵۶ منتشر کرد. اکنون با گذشت چهل و شش سال از تاریخ انتشار اولین شماره‌ی یکان هنوز هم مطالب قابل استفاده و جذابی در آن یافت می‌شود. در این شماره جدول اعداد متقاطع را از این مجله برای شما انتخاب کرده و در پی می‌آوریم.



قرارداد ـ جهت معمولی برای قرار دادن حروف کلمات در جدول برای ردیف افقی از راست به چپ و برای ردیف قائم از بالا به پایین است. چنان‌چه قبل از شرح کلمه‌ی مربوط به یک قسمت، علامت (ـــ) گذاشته شده باشد، جهت قرار دادن حروف آن کلمه در جهت عکس معمولی خواهد بود؛ یعنی برای ردیف افقی از چپ به راست و برای ردیف قائم از پایین به بالا.

ردیف افقی

۱ـ جز بر خودش بر عدد دیگر بخش‌پذیر نیست ـ قطعه خطی که دارای امتداد، جهت و اندازه باشد ـ به معنی پایه است و در رقومی برابر است با کتانژانت زاویه‌ی میل ـ زیباترین سیاره‌ی منظومه شمسی.

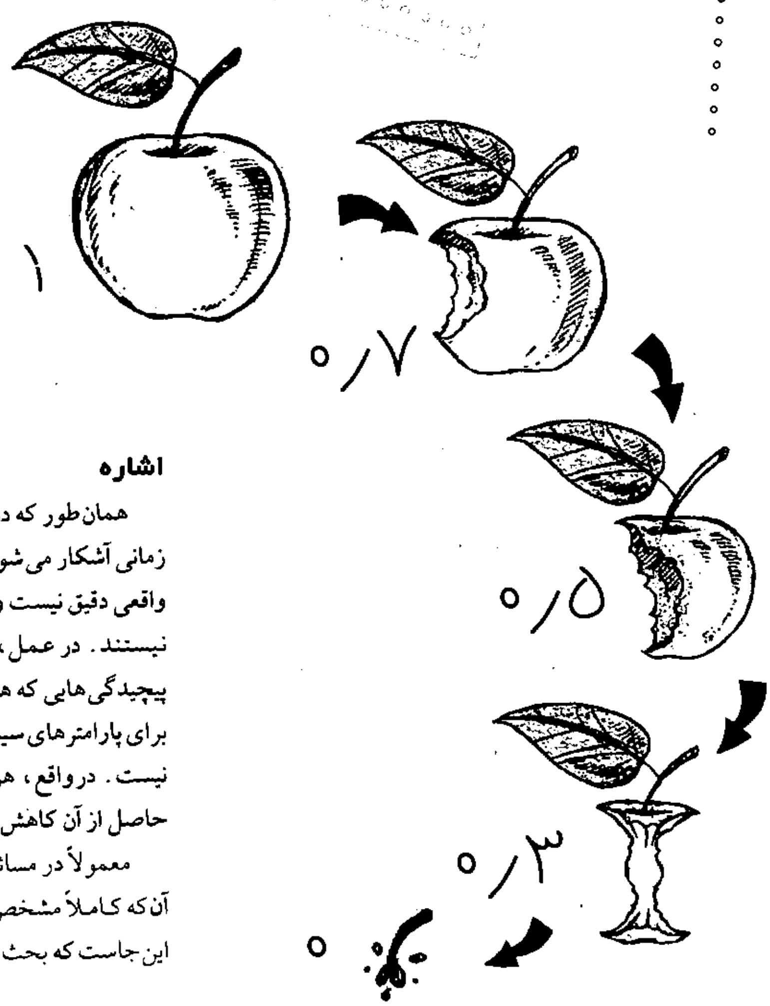
۲ـ سه ربع از کیلو ـ تضعیف آن از مسائل تاریخی و لاینحل هندسه است ـ افسانه‌ای ساخته‌اند که با سقوط آن نیوتن قانون جاذبه را کشف کرد ـ (ـــ) قضیه‌ی کمکی که در مقدمه‌ی یک قضیه اثبات شود ـ (ـــ) صد متر مربع. ۳ـ (ـــ) جیب بی‌انتها ـ دو سر کمان را به هم وصل می‌کند ـ با حذف اول جهت را مشخص می‌کند ـ (ـــ) اولین عدد ترتیبی یا وصفی. ۴ـ نام یکی از دو بعد سطح ـ کوچک‌ترین عددی که عده‌ی حروفش با خودش مساوی است ـ سالی که به اندازه‌ی ده روز و سیزده ساعت و سیزده ثانیه از سال شمسی کوتاه‌تر است ـ عبارتی جبری را گویند وقتی که در آن جمله‌ها به ترتیب درجه واقع شده باشند. ۵ـ اولین مترجم جبر خیام به زبان فرانسه ـ یک فوت با انتهای اضافی ـ آن‌چه که به وسیله‌ی اثبات از فرض یک قضیه به‌دست می‌آید ـ در خارج از حوزه‌ی قوه‌ی جاذبه وجود ندارد. ۶ـ از جزء بزرگ‌تر است ـ دلیلی که دومش به ما بعد آخرش منتقل شده است ـ اولش را نقطه‌دار کنید، نام دانشمند ایرانی نویسنده اولین کتاب جبر به‌دست می‌آید. ۷ـ یک و دو به حساب ابجد ـ دانشکده‌ای که اکثر فارغ‌التحصیلان ششم ریاضی دهه ۱۳۴۰ شمسی مایل به تحصیل در آن بودند. ۸ـ ساده‌ترین و طبیعی‌ترین ماشین حساب ـ تابعی را گویند که در ازای مقداری از متغیر دارای مقدار نباشد. ۹ـ دانش‌آموزان رشته‌ی ریاضی خود را چنین می‌دانند تا این‌که از دانشکده فارغ‌التحصیل شوند و رسماً این عنوان را به‌دست آورند.

ردیف قائم

۱ـ کوچک‌ترین دو عددی که با جموع خود تشکیل تصاعد می‌دهند. ۲ـ (ـــ) دانشمندی که هیئت او مدتی جانشین هیئت بطلمیوس شد و جای خود را به هیئت کپلر داد ـ مساوی است با مجموع دو رقم عدد مربعش. ۳ـ قسمتی از حجم کره که محدود باشد به سطح یک قاچ و دو صفحه‌ی قطری و فعلاً درهم شکسته است. ۴ـ با حذف وسط عددی را بیان می‌کند که مساوی است با مجموع دو عدد ماقبلش و با حذف اول به معنی وتر خواهد بود ـ عضوی از ناظر که مرکز کره سماوی اختیار می‌شود. ۵ـ دو ثلث از رمه ـ خط‌کشی که همراه تخته رسم است. ۶ـ با حذف وسط اولین عدد زوج به‌دست خواهد آمد ـ عدد اسم معروف ـ علامت جمع. ۷ـ نام نقطه‌ی تقاطع استوای سماوی با دایرةالبروج ـ اگر الف به اولش اضافه شود، به مقدار کمتر از ده گفته می‌شود. ۸ـ دانشمند ریاضی‌دان استاد کلژدوفرانس، مخترع نوعی ترازو و اولین نفر که روش ترسیم مماس بر منحنی را از روی حرکت به‌دست آورد ـ دوسوم دست. ۹ـ هر عدد که بر ۲، ۳ و ۵ قابل قسمت باشد، بر آن نیز قابل قسمت خواهد بود. ۱۰ـ دانشمند معروف انگلیسی، کاشف قانون جاذبه‌ی عمومی. ۱۱ـ اگر آخرش را با ماقبل عوض کنید، دستگاه فرانسوی حاصل خواهد شد. ۱۲ـ دانشمند و ریاضی‌دان ایرانی معاصر ابن‌سینا، صاحب تألیفات بسیار در ریاضی. ۱۳ـ اولش را کنار بگذارید، باقی درهم ریخته آن‌چه خواهد بود که مقصود از حل مسئله تعیین آن است. ۱۴ـ تبریزی‌اش مساوی سه کیلو است ـ علامت جمع. ۱۵ـ (ـــ) زاویه‌ی حاده که خط با تصویرش در یک صفحه می‌سازد ـ اخراج عدد صحیح از کسر. ۱۶ـ دو حرف آخرش را قبل از آن قرار دهید، موقعی را معین می‌کند که آفتاب در نصف‌النهار است. ۱۷ـ گالیله به خاطر چنین ادعایی محکوم شد. ۱۸ـ اگر حرف ز به آخرش اضافه شود، دانشمندی را معرفی می‌کند که معاصر نیوتون بوده است و با ابداع آنالیز عناصر بی‌نهایت کوچک، انقلابی در علم ایجاد کرد.

● دکتر محمدعلی فریبرزی عراقی
عضو هیئت علمی دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکزی

مقدمه‌ای بر نظریه‌ی مجموعه‌های فازی (۳)



اشاره

همان‌طور که در دو قسمت قبل اشاره شد، اهمیت بحث فازی زمانی آشکار می‌شود که اطلاعات ما در بررسی رفتار یک سیستم واقعی دقیق نیست و داده‌های اولیه به‌طور یقین برای ما مشخص نیستند. در عمل، هنگام مدل‌سازی یک سیستم، با توجه به پیچیدگی‌هایی که هر سیستم دارد، امکان رسیدن به مقادیری دقیق برای پارامترهای سیستم و داده‌های اولیه، در بسیاری از مواقع مقدور نیست. درواقع، هرقدر سیستم پیچیده‌تر باشد، دقت مدل ریاضی حاصل از آن کاهش می‌یابد.

معمولاً در مسائل عملی، با مقادیری سروکار داریم که به جای آن‌که کاملاً مشخص باشند، به‌طور تقریبی مشخص هستند. این‌جاست که بحث فازی بودن این مقادیر مطرح می‌شود. درواقع،

مفهوم فازی بودن زمانی مطرح می‌شود که نوعی عدم قطعیت در مقادیر یک مسئله به‌وجود می‌آید. امروزه این اطمینان حاصل شده است که تنها با مفاهیم مجموعه‌های قطعی و مقادیر صفر و یک نمی‌توان رفتار سیستم‌ها را به نمایش درآورد. زیرا این رفتارها به حالت فازی گرایش دارند و نوعی ابهام در اطلاعات اولیه وجود دارد که برای توصیف آن‌ها ناچار باید به مقادیری بین صفر و یک رجوع کنیم.

مدل‌های ریاضی که در علوم فنی و مهندسی به کار می‌روند، براساس مفروضات و قوانینی طراحی می‌شوند که به سبب آن‌ها، مدل حاصل دقیق نخواهد بود. چرا که هنگام ساخت مدلی از یک سیستم واقعی، ساده‌سازی‌هایی انجام می‌گیرند و از برخی عوامل صرف‌نظر می‌شود. این به معنای آن است که نوعی ابهام در مدل حاصل ایجاد کرده‌ایم. حال برای بررسی این ابهام، نیاز است، به تئوری مجموعه‌های فازی رجوع کنیم.

لازم به ذکر است، با مدل‌های احتمالاتی و قوانین احتمال نمی‌توان این ابهام را توصیف کرد. در مبحث احتمالات، به‌دنبال آن هستیم که با اطلاعات فعلی، چه میزان اطمینان به وقوع یک رویداد در آینده داریم و در واقع میزان انتظار ما برای وقوع یک رویداد تصادفی پیش‌بینی می‌شود. در حالی که در بحث مجموعه‌های فازی، میزان احتمال وقوع یا عدم وقوع یک رویداد اهمیت ندارد، بلکه مفاهیمی چون بزرگ بودن، بسیار کوچک بودن، تقریباً برابر بودن، خیلی نزدیک بودن و مانند آن‌ها مورد بررسی قرار می‌گیرند. به عبارت دیگر، قطعی بودن به معنای دو ارزشی بودن (ارزش‌های صفر یا یک)، و فازی بودن به معنای چندارزشی بودن (ارزش‌های از صفر تا یک) یا چند مقداری بودن است. در طراحی یک سیستم که رفتاری فازی دارد، ما باید انواع این مقادیر و ارزش‌ها را لحاظ کنیم.

پروفسور **عسگرزاده**، در سال ۱۹۶۵ همین نظریه‌ی مجموعه‌های چند مقداری را مطرح کرد. نام «فازی» را روی آن نهاد و آن را به عنوان تعمیمی از مجموعه‌های دو مقداری (صفر و یک) ارائه کرد. از آن سال تاکنون، محاسبات بر مبنای منطق فازی یا منطق چندمقداری، در میان دانشمندان و محققان جهان جایگاه خاصی یافته و کاربردهای وسیعی در علوم گوناگون نظیر ریاضی، آمار، اقتصاد، مدیریت، فنی و مهندسی و... داشته است. حال به ادامه‌ی بحث می‌پردازیم.

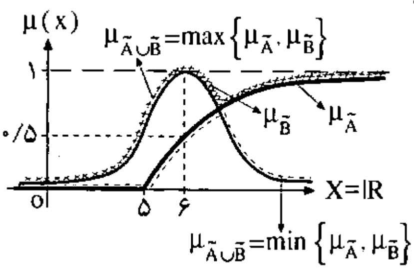
در قسمت قبل، ضمن معرفی متمم، اجتماع و اشتراک دو مجموعه‌ی فازی، دیدیم که برخی خواص نظریه‌ی مجموعه‌های معمولی نظیر «قانون دمورگان»، در مجموعه‌های فازی نیز برقرارند، ولی روابطی چون $\tilde{A}\cap\tilde{A}^C=\phi$ یا $\tilde{A}\cup\tilde{A}^C=X$ در صورتی که $\tilde{A}$ مجموعه‌ای فازی باشد، برقرار نیستند. فرض کنیم $\tilde{A}$ مجموعه‌ی فازی بسیار بزرگ‌تر از ۵ و $\tilde{B}$ مجموعه‌ی فازی تقریباً ۶ باشد. تابع عضویت هر یک از این مجموعه‌های فازی را می‌توان به این صورت بیان کرد:

$$\mu_{\tilde{A}}(x)=\begin{cases}0 & x\le 5\\ \dfrac{1}{1+\dfrac{1}{(x-5)^2}} & x>5\end{cases},\quad \mu_{\tilde{B}}(x)=\frac{1}{1+(x-6)^2}$$

ملاحظه می‌کنیم که اولاً به ازای هر $x\in\mathbb{R}$ داریم: $0\le\mu_{\tilde{A}}(x)\le 1$ و $0\le\mu_{\tilde{B}}(x)\le 1$ ثانیاً هرقدر x از عدد ۵ دورتر می‌شود، مقدار $\mu_{\tilde{A}}(x)$ به یک نزدیک‌تر خواهد شد. هم‌چنین: $\mu_{\tilde{B}}(6)=1$.

در نمودار ۱، توابع عضویت $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ و هم‌چنین توابع عضویت $\tilde{A}\cup\tilde{B}$ و $\tilde{A}\cap\tilde{B}$ براساس تعریف ماکزی‌مم و مینی‌مم از اجتماع و اشتراک دو مجموعه‌ی فازی مشخص شده‌اند.

نمودار ۱



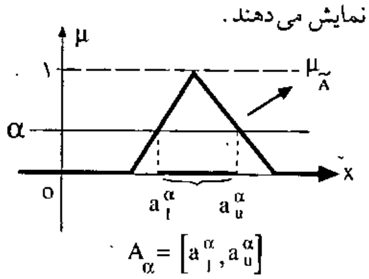
در ادامه چند مفهوم اساسی در مجموعه‌های فازی را معرفی می‌کنیم.

فرض کنیم $\tilde{A}$ یک مجموعه‌ی فازی روی مجموعه‌ی مرجع X باشد. در این صورت مجموعه‌ی «α ـ برش»[1] $\tilde{A}$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

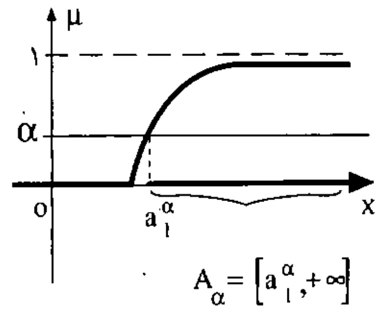
$$A_\alpha=\{x\in X \mid \mu_{\tilde{A}}(x)\ge\alpha\}$$

که در آن: $0\le\alpha\le 1$. به عبارت دیگر، α ـ برش یک مجموعه‌ی فازی عبارت است از اعضایی از مجموعه‌ی مرجع که «درجه‌ی عضویت»[2] آن‌ها بزرگ‌تر یا مساوی α باشد. α ـ برش یک مجموعه فازی یک مجموعه قطعی (غیر فازی) است که می‌توان آن را به صورت یک بازه‌ی حقیقی نظیر $[a_l^\alpha,a_u^\alpha]$ یا $[a_l^\alpha,+\infty)$ نوشت و در آن، a_l^α و a_u^α به‌ترتیب نقاط ابتدا و انتهای این بازه فرض شده‌اند. نمودارهای ۲ و ۳ نمونه‌هایی از α ـ برش یک مجموعه‌ی فازی را نمایش می‌دهند.

نمودار ۲



نمودار ۳



مجموعه α ـ برش را مجموعه‌ی α ـ سطح یا α ـ تراز نیز می‌نامند. هم‌چنین می‌توان گفت: $A_0 = X$.

مجموعه‌ی «α ـ برش قوی»[۳] $\tilde{A}$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$A'_\alpha = \left\{x \in X \middle| \mu_{\tilde{A}}(x) > \alpha\right\}$$

به عبارت دیگر، α ـ برش قوی $\tilde{A}$ مجموعه اعضایی از X است که درجه‌ی عضویت آن‌ها از α بزرگ‌تر باشند. هم‌چنین، «تکیه‌گاه»[۴] مجموعه‌ی فازی $\tilde{A}$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$S(\tilde{A}) = \left\{x \in X \middle| \mu_{\tilde{A}}(x) > 0\right\}$$

به عبارت دیگر، تکیه‌گاه $\tilde{A}$ مجموعه‌ی اعضایی از X است که درجه‌ی عضویت آن‌ها مثبت باشد. در صورتی که $\tilde{A}$ یک مجموعه‌ی فازی متناهی باشد، «عدد اصلی»[۵] $\tilde{A}$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$|\tilde{A}| = \sum_{x \in X} \mu_{\tilde{A}}(x)$$

و به وسیله‌ی آن، عدد اصلی نسبی $\tilde{A}$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\|\tilde{A}\| = \frac{|\tilde{A}|}{|X|}$$

که در آن $|X|$ تعداد اعضای مجموعه‌ی متناهی X است.

برای درک بهتر تعاریف فوق به مثال زیر توجه می‌کنیم:

مجموعه‌ی فازی $\tilde{A}$ را به صورت منازل راحت برای یک خانواده‌ی ۴ نفری در نظر می‌گیریم. اگر راحتی را بر اساس تعداد اتاق‌خواب‌ها منظور کنیم و $X = \{1, 2, 3, \ldots, 10\}$ را مجموعه‌ی تعداد اتاق‌خواب‌های منزل فرض کنیم، آن‌گاه مجموعه‌ی فازی $\tilde{A}$ را می‌توان به شکل زیر بیان کرد:

$$\tilde{A} = \{(1, 0/1), (2, 0/5), (3, 0/8), (4, 1), (5, 0/7), (6, 0/3)\}$$

ملاحظه می‌کنیم برای اعضای ۷ تا ۱۰، درجه‌ی عضویت صفر در $\tilde{A}$ منظور شده است. به همین لحاظ در $\tilde{A}$ مطرح نشده‌اند.

حالت ایده‌آل با درجه‌ی عضویت ۱ زمانی است که منزل دارای ۴ اتاق‌خواب باشد و هر قدر از ۴ دورتر می‌شویم، درجه‌ی عضویت کوچک‌تر می‌شود. در این حالت مجموعه‌ی تکیه‌گاه $\tilde{A}$ به صورت زیر است:

$$S(\tilde{A}) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

هم‌چنین، نمونه‌هایی از α ـ برش و α ـ برش قوی $\tilde{A}$ به ازای $\alpha = 0/3, 0/5, 1$ از این قرار است:

$$A_{0/3} = \{2, 3, 4, 5, 6\} \qquad A'_{0/3} = \{2, 3, 4, 5\}$$
$$A_{0/5} = \{2, 3, 4, 5\} \qquad A'_{0/5} = \{3, 4, 5\}$$
$$A_1 = \{4\} \qquad A'_1 = \varnothing$$

عدد اصلی و عدد اصلی نسبی $\tilde{A}$ نیز به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$|\tilde{A}| = 0/1 + 0/5 + 0/8 + 1 + 0/7 + 0/3 = 3/4$$

$$\|\tilde{A}\| = \frac{3/4}{10} = 0/34$$

حال مجموعه α ـ برش مجموعه‌ی فازی تقریباً ۱۰ را به دست می‌آوریم. گیریم $\tilde{A}$ نام این مجموعه باشد. تابع عضویت $\tilde{A}$ را می‌توان به شکل زیر درنظر گرفت:

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \frac{1}{1 + (x - 10)^2}, \quad x \in \mathbb{R}$$

حال قرار می‌دهیم: $\mu_{\tilde{A}}(x) \geq \alpha$. لذا: $\frac{1}{1 + (x - 10)^2} \geq \alpha$

و از آن‌جا: $1 + (x - 10)^2 \leq \frac{1}{\alpha}$ در نتیجه: $(x - 10)^2 \leq \frac{1 - \alpha}{\alpha}$ و به این ترتیب:

$$|x - 10| \leq \sqrt{\frac{1 - \alpha}{\alpha}} \Rightarrow 10 - \sqrt{\frac{1 - \alpha}{\alpha}} \leq x \leq 10 + \sqrt{\frac{1 - \alpha}{\alpha}}$$

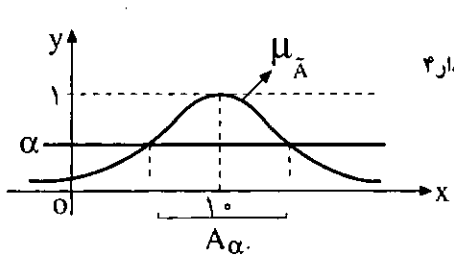
بنابراین:

$$A_\alpha = \left[10 - \sqrt{\frac{1 - \alpha}{\alpha}}, 10 + \sqrt{\frac{1 - \alpha}{\alpha}}\right], \quad 0 < \alpha \leq 1$$

ملاحظه می‌کنیم که: $A_1 = \{10\} \quad , \quad S(\tilde{A}) = \mathbb{R}$

نمودار ۴، A_α را به ازای یک $0 < \alpha \leq 1$ مشخص می‌کند:

نمودار ۴



مفهوم حاصل ضرب دو مجموعه ی فازی از مفاهیم مهم در تئوری مجموعه های فازی است که آن را چنین تعریف می کنیم:
فرض کنیم $\tilde{A}_1$ و $\tilde{A}_2$ دو مجموعه ی فازی به ترتیب روی مجموعه های مرجع X_1 و X_2 باشند.
در این صورت مجموعه ی فازی $\tilde{A}_1 \times \tilde{A}_2$ روی $X_1 \times X_2$ به صورت زیر تعریف می شود:

$$\tilde{A}_1 \times \tilde{A}_2 = \left\{ \left[(x_1, x_2), \mu_{\tilde{A}_1 \times \tilde{A}_2}(x) \right] \middle| x = (x_1, x_2) \in X_1 \times X_2 \right\}$$

که در آن:

$$\mu_{\tilde{A}_1 \times \tilde{A}_2}(x) = \min\left\{ \mu_{\tilde{A}_1}(x_1), \mu_{\tilde{A}_2}(x_2) \right\}$$

این حاصل ضرب را ضرب دکارتی یا کارتزین $\tilde{A}_1$ در $\tilde{A}_2$ نیز می نامند. برای مثال، فرض کنیم:

$\tilde{A}_1 = \{(۳,۰/۵),(۵,۱),(۷,۰/۶)\}$ و $X_1 = X_2 = \{۱,۲,\ldots,۱۰\}$

و $\tilde{A}_2 = \{(۳,۱),(۵,۰/۶)\}$ در این صورت:

$$\tilde{A}_1 \times \tilde{A}_2 = \{[(۳,۳),۰/۵],[(۳,۵),۰/۵],[(۵,۳),۱],$$
$$[(۵,۵),۰/۶],[(۷,۳),۰/۶],[(۷,۵),۰/۶]\}$$

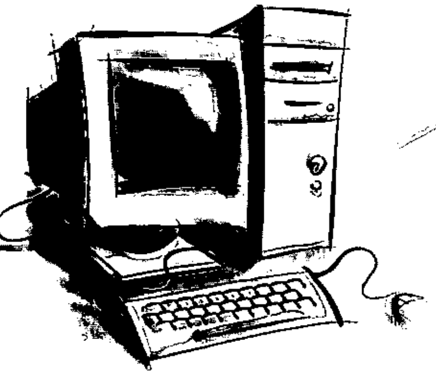
همان طور که ملاحظه می کنیم، عمل ضرب دکارتی دو مجموعه ی فازی شبیه ضرب دکارتی دو مجموعه ی قطعی در نظریه ی مجموعه های کلاسیک انجام می شود، با این تفاوت که هر زوج مرتب دارای یک درجه ی عضویت است. در قسمت های بعد سایر اعمال ریاضی مهم در نظریه ی مجموعه های فازی و نیز چند مفهوم اساسی نظیر مجموعه های محدب و نرمال را معرفی می کنیم.

---

1. α -Level, α -Cut
2. membership degree
3. Stronge $\alpha - \text{cut}$
4. Support
5. Cardinal number

---

۱. منهاج، دکتر محمدباقر. محاسبات فازی. انتشارات دانش نگار. ۱۳۸۶.
۲. شوندی، دکتر حسن. نظریه ی مجموعه های فازی و کاربرد آن در مهندسی صنایع و مدیریت. انتشارات گسترش علوم پایه. ۱۳۸۵.
3. Fuzzy set theory and its applications, H.J. Zimmermann, third edition, Kluwer Academic Publishers, London, 1996.



معرفی سایت های ریاضی جهان

• احسان یارمحمدی

- عبارات شامل متغیرها، جانشین سازی
(Expressions Involving Variables, substitution)
- چند جمله ای ها، عبارت ها و معادله های گویا
(Polynomials, Rational Expressions and Equations)
- معادلات پیچیده رادیکالی شامل ریشه ها
(Radicals Complicated Equations Involving Roots)
- معادله های درجه ی دوم (Quadratic Equations)
- نامعادله ها (Inequations)
- دستگاه های معادلات غیرخطی
(Systems of Equations that are not Linear)
- جبر ۲ (Algebra II)
- اعداد مختلط (Complex Numbers)
- جبر خطی (معادلات غیرخطی)
(Linear Algebra (Not Linear Equations))
- مقدمه ای بر بردارها، جمع و ضرب
(Introduction to Vctors, Addition and Scaling)
- ماتریس ها، دترمینان، قاعده ی کرامر
(Matrices, Determinant, Cramer Rule)
- نما و لگاریتم در توابع توانی
(Exponent and Logarithm as Functions of Power)
- توابع گویا، آنالیز و ترسیم
(Rational Functions, Analyzing and Graphing)
- مقاطع مخروطی ـ بیضی، سهمی، هذلولی
(Conic Sections _ Ellipse, Parabola, Hyperbola)
- دنباله های اعداد، سری ها و چگونگی مجموع آن ها
(Sequences of Numbers, Series and How to Sum them)

ادامه در صفحه ی ۵۰

...ه های
...ی در کشورهای مختلف

مسئله هایی از المپیاد ریاضی کشورهای مغرب

ترجمه و تالیف: هوشنگ شرقی

اشاره

المپیاد ریاضی کشورهای مغرب، از جمله رقابت‌های ریاضی منطقه‌ای است که هر سال بین کشورهای آفریقایی برگزار می‌شود. این کشورها عبارت‌اند از: لیبی، تونس، الجزایر و مراکش که از نخستین سال‌های دهه‌ی ۸۰ میلادی مسابقه‌ی ریاضی مشترک بین آن‌ها آغاز شده است.

در این شماره، منتخبی از سؤال‌های المپیاد ریاضی مغرب را از سال ۱۹۸۶، همراه با راه‌حل آن‌ها می‌آوریم و در صورت دست‌رسی به سؤال‌های سال‌های جدیدتر، در شماره‌های آینده از آن‌ها استفاده می‌کنیم.

سؤال‌ها

۱. رقم‌های x، y و z را طوری پیدا کنید که برای هر مقدار $n \in \mathbb{N}$ داشته باشیم:

$$\sqrt{\underbrace{xx\cdots x}_{2n\ \text{رقم}} - \underbrace{yy\cdots y}_{n\ \text{رقم}}} = \underbrace{zz\cdots z}_{n\ \text{رقم}}$$

۲. خط راست موازی قطر AC از چهارضلعی محدب ABCD، از وسط قطر BD گذشته و خط راستی را که از وسط AC موازی BD رسم می‌شود، در نقطه‌ی O قطع کرده است. ثابت کنید، چهارضلعی‌های OABC، OBCD، OCDA و ODAB مساحت‌هایی برابر دارند.

۳. ثابت کنید برای عددهای مثبت و دل‌خواه a_1، a_2 و a_3 داریم:

$$3\left(\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_2a_3}+\frac{1}{a_3a_1}\right) \geq 4\left(\frac{1}{a_1+a_2}+\frac{1}{a_2+a_3}+\frac{1}{a_1+a_3}\right)^2$$

۴. دو دایره‌ی هم‌مرکز در O مفروض‌اند. دو خط راست که از O گذشته‌اند، دایره‌ی بزرگ‌تر را در A و B دایره‌ی کوچک‌تر را در نقاط C و D قطع کرده‌اند؛ به قسمی که O بین نقاط A و C قرار دارد و D بین نقاط B و O. ثابت کنید دایره‌ی محیطی مثلث AOB و دایره‌ی محیطی مثلث COD و دایره‌ی به قطر BD و دایره‌ی به قطر AC همگی از یک نقطه می‌گذرند.

۵. جواب‌های درست این معادله را پیدا کنید:

$$5^{2x} - 3\times 2^{2y} + 5^{x}\times 2^{y-1} - 2^{y-1} - 2\times 5^{x} + 1 = 0$$

حل

۱. می‌توان معادله را به این صورت بازنویسی کرد:

$$x(\underbrace{11\cdots1}_{2n\ \text{رقم}}) - y(\underbrace{11\cdots1}_{n\ \text{رقم}}) = z^2(\underbrace{11\cdots1}_{n\ \text{رقم}})^2$$

$$\Rightarrow x(\underbrace{11\cdots1}_{n\ \text{رقم}}\underbrace{11\cdots1}_{n\ \text{رقم}}) - y(\underbrace{11\cdots1}_{n\ \text{رقم}}) = z^2(\underbrace{11\cdots1}_{n\ \text{رقم}})^2$$

$$\Rightarrow x\left[10^n(\underbrace{11\cdots1}_{n\ \text{رقم}}) + (\underbrace{11\cdots1}_{n\ \text{رقم}})\right] - y(\underbrace{11\cdots1}_{n\ \text{رقم}}) = z^2(\underbrace{11\cdots1}_{n\ \text{رقم}})^2$$

$$\Rightarrow x(\underbrace{11\cdots1}_{n\ \text{رقم}})(10^n+1) - y(\underbrace{11\cdots1}_{n\ \text{رقم}}) = z^2(\underbrace{11\cdots1}_{n\ \text{رقم}})^2$$

$$\Rightarrow x(10^n+1) - y = z^2(\underbrace{11\cdots1}_{n\ \text{رقم}})$$

$$\Rightarrow x(10^n-1) + (2x-y) = z^2(\underbrace{11\cdots1}_{n\ \text{رقم}})$$

هم‌چنین به سادگی می‌توان ثابت کرد:

$$\underbrace{111\cdots1}_{n\text{رقم}} = \frac{10^n - 1}{9}$$

و از آن‌جا:

$$(2x - y) = (z^2 - 9x)(\underbrace{111\cdots1}_{n\text{رقم}})$$

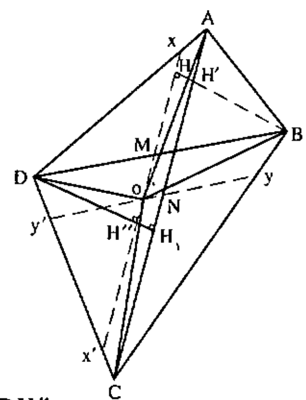
و برای آن‌که این رابطه به ازای همه‌ی مقادیر n برقرار باشد، باید داشته باشیم:

$$2x - y = 0 \quad , \quad z^2 - 9x = 0$$

و از آن‌جا: $z^2 = 9x$ و برای آن‌که $9x$ مربع کامل باشد، باید $x = 1$ یا ۴ یا ۹ و از آن‌جا با توجه به این‌که $y = 2x$ و y نیز یک رقم است، تنها این پاسخ‌ها را داریم:

$(x = 1 \;,\; y = 2 \;,\; z = 3)$ یا $(x = 4 \;,\; y = 8 \;,\; z = 6)$

۲. مطابق شکل $xx' \parallel AC$ و $yy' \parallel BD$ و از B و D عمودهایی بر xx' رسم کرده‌ایم. چون $MB = MD$ است، بنابراین: $\overset{\Delta}{MBH} \cong \overset{\Delta}{MDH''}$ و در نتیجه:



$$BH = DH'' \Rightarrow$$
$$BH' + HH' = DH'' \Rightarrow$$
$$BH'.AC + HH'.AC = DH''.AC \Rightarrow$$
$$2S_{ABC} + 2S_{OAC} = (DH_1 - H_1H'').AC$$

هم‌چنین بدیهی است که: $HH' = H_1H''$ و در نتیجه:

$$2S_{ABC} + 2S_{OAC} = 2S_{ADC} - 2S_{OAC} \Rightarrow$$
$$S_{ABC} + S_{OAC} = S_{ADC} - S_{OAC} \Rightarrow S_{OABC} = S_{OCDA}$$

بنابراین داریم:

$S_{OABC} = S_{OCDA} = \frac{1}{2}S_{ABCD}$ و به طریق مشابه می‌توان ثابت کرد:

$$S_{ODAB} = S_{OBCD} = \frac{1}{2}S_{ABCD}$$

و از آن‌جا نتیجه می‌شود:

$$S_{OABC} = S_{OBCD} = S_{OCDA} = S_{ODAB}$$

۳. با توجه به نابرابری واسطه‌های حسابی ـ هندسی می‌توان نوشت:

$$a_1 + a_2 \geq 2\sqrt{a_1a_2} \Rightarrow \frac{1}{a_1 + a_2} \leq \frac{1}{2\sqrt{a_1a_2}}$$

و به همین ترتیب:

$$\frac{1}{a_1 + a_3} \leq \frac{1}{2\sqrt{a_1a_3}} \;,\; \frac{1}{a_2 + a_3} \leq \frac{1}{2\sqrt{a_2a_3}} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{a_1 + a_2} + \frac{1}{a_2 + a_3} + \frac{1}{a_1 + a_3} \leq \frac{1}{2\sqrt{a_1a_2}} + \frac{1}{2\sqrt{a_2a_3}} + \frac{1}{2\sqrt{a_1a_3}}$$

و لذا برای اثبات این نابرابری کافی است نشان دهیم:

$$3\left(\frac{1}{a_1a_2} + \frac{1}{a_2a_3} + \frac{1}{a_1a_3}\right) \geq 4\left(\frac{1}{2\sqrt{a_1a_2}} + \frac{1}{2\sqrt{a_2a_3}} + \frac{1}{2\sqrt{a_1a_3}}\right)^2$$

و با فرض $a_1a_2 = x$ ، $a_2a_3 = y$ و $a_1a_3 = z$ ، نابرابری به این صورت نوشته می‌شود:

$$3\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) \geq 4\left(\frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{2\sqrt{y}} + \frac{1}{2\sqrt{z}}\right)^2 \Rightarrow$$

$$3\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) \geq$$

$$4\left(\frac{1}{4x} + \frac{1}{4y} + \frac{1}{4z} + \frac{1}{2\sqrt{xy}} + \frac{1}{2\sqrt{xz}} + \frac{1}{2\sqrt{yz}}\right) \Rightarrow$$

$$2\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) \geq \frac{2}{\sqrt{xy}} + \frac{2}{\sqrt{xz}} + \frac{2}{\sqrt{yz}}$$

و با فرض $x > 0$ ، $y > 0$ و $z > 0$ می‌توان نابرابری را به سه نابرابری زیر تفکیک کرد که از جمع آن‌ها نابرابری فوق اثبات می‌شود:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{2}{\sqrt{xy}} \;,\; \frac{1}{x} + \frac{1}{z} \geq \frac{2}{\sqrt{xy}}, \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq \frac{2}{\sqrt{yz}}$$

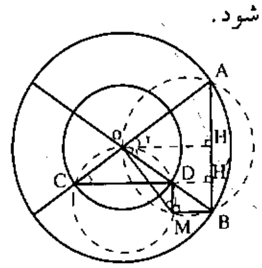
و به دلیل تقارن، اثبات یکی از نابرابری‌های بالا کافی است:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{2}{\sqrt{xy}} \Rightarrow \frac{x + y}{xy} \geq \frac{2}{\sqrt{xy}} \Rightarrow$$
$$x + y \geq \frac{2xy}{\sqrt{xy}} \Rightarrow x + y \geq 2\sqrt{xy}$$

و نابرابری فوق هم براساس نابرابری واسطه‌های حسابی ـ هندسی برقرار است. لازم به ذکر است، اثبات براساس استدلال بازگشتی انجام شده و همه‌ی مراحل نیز برگشت‌پذیرند.

۴. با توجه به اطلاعات مسئله، شکل صفحه بعد را برای آن رسم می‌کنیم. بدیهی است، مثلث‌های OCD و OAB متساوی‌الساقین هستند و در نتیجه نیم‌ساز زاویه‌ی خارجی رأس O

از مثلث ODC موازی قاعده‌ی CD است. این نیم‌ساز، نیم‌ساز زاویه‌ی رأس O از مثلث OAB نیز هست و در نتیجه ارتفاع وارد بر AB نیز محسوب می‌شود.



بنابراین: $OH \perp AB \ , \ CH' \parallel OH \Rightarrow CH' \perp AB$

و اگر نقطه‌ی برخورد دوایر محیطی مثلث‌های OCD و OAB را M بنامیم، خواهیم داشت:

$$MOAB \text{ محاطی } \Rightarrow O\hat{M}B + O\hat{A}B = 180^\circ \Rightarrow$$

$$O\hat{M}D + B\hat{M}D + O\hat{A}B = 180^\circ \ , \ O\hat{M}D = O\hat{C}D = \frac{\widehat{OD}}{2},$$

$$O\hat{C}D + O\hat{A}B + \hat{H}' = 180^\circ \Rightarrow O\hat{C}D + O\hat{A}B = 90^\circ,$$

$$\underbrace{O\hat{C}D + O\hat{A}B}_{90^\circ} + B\hat{M}D = 180^\circ \Rightarrow B\hat{M}D = 90^\circ$$

و بنابراین، M روی دایره‌ای به قطر BD قرار دارد. به طریق مشابه می‌توان ثابت کرد: $A\hat{M}C = 90^\circ$ و لذا M روی دایره‌ای به قطر AC نیز واقع است.

۵. با فرض $a = 5^x$ و $b = 2^y$ خواهیم داشت:

$$a^2 - 3b^2 + \frac{ab}{2} - \frac{b}{2} - 2a + 1 = 0$$
$$\Rightarrow 2a^2 - 6b^2 + ab - b - 4a + 2 = 0$$
$$\Rightarrow 2a^2 - 8b^2 + 2b^2 + ab - b - 4a + 2 = 0$$
$$\Rightarrow 2(a - 2b)(a + 2b) + b(a + 2b) - b - 4a + 2 = 0$$
$$\Rightarrow (a + 2b)(2a - 4b + b) - b - 4a + 2 = 0$$
$$\Rightarrow (a + 2b)(2a - 3b) - 2(a + 2b) - (2a - 3b) + 2 = 0$$
$$\Rightarrow (a + 2b - 1)(2a - 3b - 2) = 0$$
$$\Rightarrow a + 2b = 1 \quad \text{یا} \quad 2a - 3b = 2$$
$$\Rightarrow 5^x + 2^{y+1} = 1 \quad \text{یا} \quad 2\times 5^x - 3\times 2^y = 2$$
$$\Rightarrow 5^x + 2^{y+1} = 1 \ \ (I) \quad \text{یا} \quad 5^x - 3\times 2^{y-1} = 1 \ \ (II)$$

تساوی (I) به‌ازای هیچ دو عدد صحیح x و y برقرار نمی‌شود، زیرا اگر $x \ge 0$ باشد، داریم: $5^x \ge 1$ و درنتیجه: $5^x + 2^{y+1} > 1$. و اگر $y + 1 \ge 0$ باشد، آن‌گاه داریم: $2^{y+1} \ge 1$ و $5^x + 2^{y+1} > 1$. بنابراین، باید $x < 0$ و $y + 1 < 0$ باشد. درنتیجه معادله‌ی فوق به صورت $5^{-m} + 2^{-n} = 1$ با شرط $n > 0$ و $m > 0$ درمی‌آید که با معادله‌ی $\frac{1}{5^m} + \frac{1}{2^n} = 1$ هم‌ارز است و از آن‌جا: $5^m + 2^n = 5^m.2^n$ که این هم ممکن نیست، زیرا عبارت سمت چپ تساوی عددی فرد و عبارت سمت راست عددی زوج است. بنابراین، فقط می‌توان به معادله‌ی (II) توجه کرد:

$$5^x - 3\times 2^{y-1} = 1 \Rightarrow 5^x - 5\times 2^{y-1} + 2\times 2^{y-1} = 1$$
$$\Rightarrow 5(5^{x-1} - 2^{y-1}) = 1 - 2^y \Rightarrow 5(2^{y-1} - 5^{x-1}) = 2^y - 1$$

پس لازم است که $5k = 2^y - 1$ باشد و با فرض $y = 4y' + r$ خواهیم داشت:

$$2^{4y'+r} - 1 = 5k \Rightarrow 2^{4y'} \times 2^r - 1 = 5k$$
$$\Rightarrow 16^{y'}.2^r - 1 \overset{5}{\equiv} 0 \ , \ 16 \overset{5}{\equiv} 1 \Rightarrow 2^r - 1 \overset{5}{\equiv} 0$$

و با فرض ۳ یا ۲ یا ۱ یا $r = 0$، فقط به ازای $r = 0$ این برابری ممکن است. درنتیجه داریم: $y = 4y'$ و از آن‌جا خواهیم داشت:

$$5^x - 3\times 2^{4y'-1} = 1 \Rightarrow 5^x - 1 = \frac{3\times 16^{y'}}{2}$$
$$\Rightarrow 2\times 5^x - 2 = 3\times 16^{y'}$$

عبارت سمت راست این تساوی مضربی از ۳ است. بنابراین عبارت سمت چپ نیز باید مضرب ۳ باشد. اگر x فرد باشد، خواهیم داشت:

$$x = 2x' + 1 \Rightarrow 2\times 5^x - 2 = 2\times 5^{2x'+1} - 2$$
$$= 2\times 25^{x'} \times 5 - 2 \overset{3}{\equiv} 2$$

پس باید x زوج باشد و از آن‌جا نتیجه می‌شود:

$$x = 2x' \Rightarrow 2\times 5^{2x'} - 2 = 3\times 16^{y'}$$
$$\Rightarrow 2\times 25^{x'} - 2 = 3\times 16^{y'} \Rightarrow 2(25^{x'} - 1) = 3\times 16^{y'}$$
$$\Rightarrow 2(25 - 1)(25^{x'-1} + 25^{x'-2} + \dots + 25 + 1) = 3\times 16^{y'}$$
$$\Rightarrow 48(25^{x'-1} + 25^{x'-2} + \dots + 25 + 1) = 48\times 16^{y'-1}$$
$$\Rightarrow 25^{x'-1} + 25^{x'-2} + \dots + 25 + 1 = 16^{y'-1}$$

رقم سمت راست عبارت فوق همواره مساوی ۶ است (مگر آن‌که $y' - 1 = 0$) و رقم سمت راست عبارت سمت چپ در صورتی مساوی ۶ است که تعداد توان‌های ۲۵ فرد باشد؛ یعنی $x' - 1$ فرد و درنتیجه x' زوج باشد:

$$x' = 2x'' \Rightarrow 2(25^{2x''} - 1) = 3\times 16^{y'}$$
$$\Rightarrow 2(625^{x''} - 1) = 3\times 16^{y'}$$
$$\Rightarrow 2(625 - 1)\underbrace{(625^{x''-1} + 625^{x''-2} + \dots + 1)}_{A} = 3\times 16^{y'}$$
$$\Rightarrow 2\times 624A = 3\times 16^{y'}$$
$$\Rightarrow 2\times 2^4 \times 13 \times 3A = 3\times 16^{y'}$$
$$\Rightarrow 13A = 2^{4y'-5}$$

که تساوی اخیر هرگز برقرار نمی‌شود (چرا؟) پس تنها حالت قابل قبول آن است که $y' - 1 = 0$ باشد و درنتیجه:

$$y' = 1 \Rightarrow y = 4 \text{ و } x = 2$$

□

اشاره

در قسمت قبل به برخی از کاربردهای هم‌نهشتی اشاره شد. در این شماره نیز به ادامه‌ی مطلب که تعیین دو رقم راست یک عدد، تعیین سه‌رقم سمت راست یک عدد، قضیه‌ی ویلسن به‌عنوان نتیجه‌ای از قضیه‌ی کوچک‌فرما و کاربردهای آن در حل مسئله‌ها و معادله‌های سیاله‌ی درجه‌ی nام و تعیین باقی‌مانده‌ی تقسیم یک عدد شامل فاکتوریل بر یک عدد اول و دیگر مسئله‌های خلاق و ابتکاری می‌پردازیم.

در آخر مبحث، تمرین‌هایی نظیر مثال‌های متن طراحی شده‌اند که می‌توانید با دیدن مثال‌ها، آن‌ها را حل کنید.

تعیین دو رقم سمت راست یک عدد

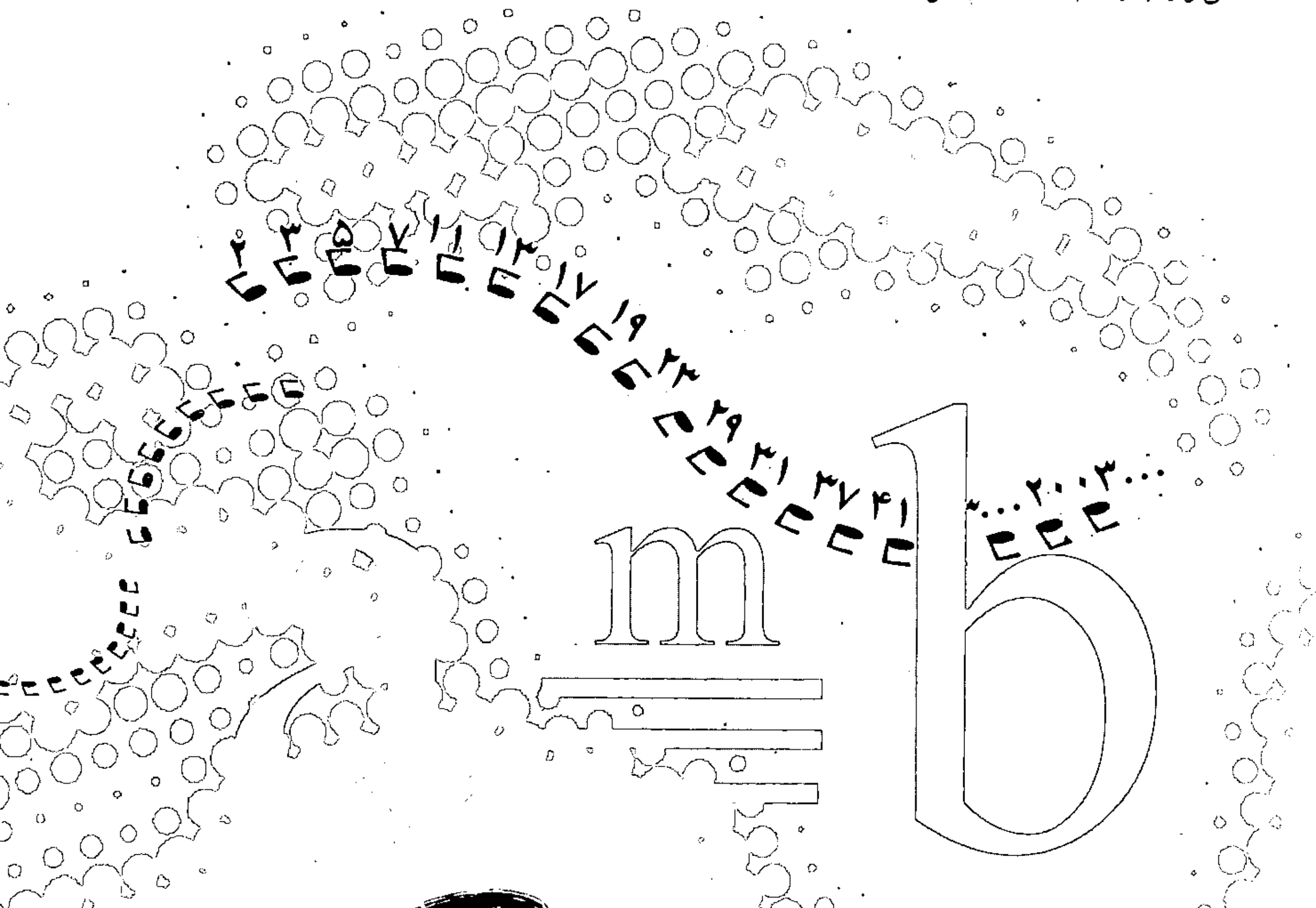
برای تعیین دو رقم سمت راست هر عدد، کافی است باقی‌مانده‌ی تقسیم آن عدد را بر ۱۰۰ بیابیم. در واقع دو رقم سمت راست عددی مثل N از هم‌نهشتی $N \overset{100}{\equiv} \overline{ab}$ تعیین می‌شود.

مثال: دو رقم سمت راست عدد N را بیابید.

$$N = 1! + 2! + 3! + \cdots + 1387!$$

حل: بدیهی است که اگر $n \geq 10$، آن‌گاه $n! \overset{100}{\equiv} 0$. پس:

$$N = 1! + 2! + 3! + \cdots + 1387! \overset{100}{\equiv} 1 + 2 + 6 + 24$$
$$+ 20 + 20 + 40 + 20 + 80 + 0 + \cdots$$



هم‌نهشتی و کاربردهای آن (قسمت ۵)

● سید محمدرضا هاشمی موسوی
hashemi-moosavi@yahoo.com

$N \overset{۱۰۰}{\equiv} ۲۱۳ \overset{۱۰۰}{\equiv} ۱۳ \;;\; N \overset{۱۰۰}{\equiv} ۱۳$ (دو رقم سمت راست N)

مثال: دو رقم سمت راست عدد M را تعیین کنید.

$$M = ۲! + ۴! + ۶! + \cdots + ۲۰۰۸!$$

حل: با توجه به هم‌نهشتی $n! \underset{(n\geq ۱۰)}{\overset{۱۰۰}{\equiv}} ۰$، می‌توان نوشت:

$$M = ۲! + ۴! + ۶! + \cdots + ۲۰۰۸! \overset{۱۰۰}{\equiv} ۲ + ۲۴ + ۲۰ + ۲۰ + ۰ + ۰ + \cdots + ۰ = ۶۶$$

$M \overset{۱۰۰}{\equiv} ۶۶$ (دو رقم سمت راست عدد M)

مثال: دو رقم سمت راست عدد M را تعیین کنید.

$$M = ۲^{۱۳۸۷} + ۵^{۱۳۸۷} + ۷^{۱۳۸۷}$$

حل: $M = (۲^{۱۰})^{۱۳۸} \times ۲^{۷} + (۵^{۲})^{۶۹۳} \times ۵ + (۷^{۴})^{۳۴۶} \times ۷^{۳}$

$$M = (۱۰۲۴)^{۱۳۸} \times (۱۲۸) + (۲۵)^{۶۹۳} \times ۵ + (۲۴۰۱)^{۳۴۶} \times (۳۴۳)$$

$$M \overset{۱۰۰}{\equiv} ۲۴^{۱۳۸} \times ۲۸ + ۲۵ \times ۵ + (۱)^{۳۴۶} \times ۴۳ \overset{۱۰۰}{\equiv} ۷۶ \times ۲۸ + ۲۵ + ۴۳$$

$M \overset{۱۰۰}{\equiv} ۲۱۹۶ \;;\; M \overset{۱۰۰}{\equiv} ۹۶$ (دو رقم سمت راست عدد M)

مثال: دو رقم سمت راست عدد N را تعیین کنید.

$$N = ۲۶^{۱} + ۲۶^{۲} + \cdots + ۲۶^{۱۳۸۸}$$

حل: با توجه به نکات قبل، هم‌نهشتی $۲۶^{n} \overset{۱۰۰}{\equiv} ۷۶$ بدیهی است، پس:

$$N = ۲۶^{۱} + ۲۶^{۲} + ۲۶^{۳} + \cdots + ۲۶^{۱۳۸۸} \overset{۱۰۰}{\equiv} ۲۶ + \underbrace{۷۶ + ۷۶ + \cdots + ۷۶}_{\text{۱۳۸۷ مرتبه}}$$

$$N \overset{۱۰۰}{\equiv} ۲۶ + ۱۳۸۷(۷۶) \overset{۱۰۰}{\equiv} ۲۶ + (۸۷)(۷۶) = ۶۶۳۸ \overset{۱۰۰}{\equiv} ۳۸$$

$N \overset{۱۰۰}{\equiv} ۳۸$ (دو رقم سمت راست عدد N)

مثال: دو رقم سمت راست عدد M را بیابید.

$$M = ۲۴^{۲۵^{۱۳۸۷}} + ۲۵^{۲۶^{۱۳۸۸}} + ۲۶^{۲۴^{۱۳۸۹}}$$

حل: با توجه به نکات قبل، هم‌نهشتی های زیر بدیهی هستند:

$$۲۴^{n} \underset{(\text{فرد } n)}{\overset{۱۰۰}{\equiv}} ۲۴ \;,\; ۲۵^{n} \overset{۱۰۰}{\equiv} ۲۵ \;,\; ۲۶^{n} \underset{(n\geq ۲)}{\overset{۱۰۰}{\equiv}} ۷۶$$

بنابراین، چون توان عدد ۲۴ عددی فرد است، پس:

$$M \overset{۱۰۰}{\equiv} ۲۴ + ۲۵ + ۷۶$$

$M \overset{۱۰۰}{\equiv} ۱۲۵ \overset{۱۰۰}{\equiv} ۲۵ \;;\; M \overset{۱۰۰}{\equiv} ۲۵$ (دو رقم سمت راست عدد M)

تعیین سه‌رقم سمت راست یک عدد

برای تعیین سه رقم سمت راست هر عدد، کافی است باقی‌مانده‌ی تقسیم آن عدد را بر ۱۰۰۰ بیابیم. در واقع سه رقم سمت راست عددی مثل N، از هم‌نهشتی $N \overset{۱۰۰۰}{\equiv} \overline{abc}$ تعیین می‌شود.

مثال: سه رقم سمت راست عدد N را تعیین کنید.

$$N = \left(۷^{۱۳۸۷} \times ۱۱^{۱۳۸۸} \times ۱۳^{۱۳۸۹}\right)^{۲}$$

حل: با توجه به برابری $۱۰۰۱ = ۷ \times ۱۱ \times ۱۳$، می‌توان نوشت:

$$N = \left((۷ \times ۱۱ \times ۱۳)^{۱۳۸۷} \times ۱۱ \times ۱۳^{۲}\right)^{۲} = (۱۰۰۱^{۱۳۸۷} \times ۱۸۵۹)^{۲}$$

$$N = (۱۰۰۱)^{۲\times ۱۳۸۷} \times (۱۸۵۹)^{۲} \overset{۱۰۰۰}{\equiv} (۱)^{۲\times ۱۳۸۷} \times (۸۵۹)^{۲} = ۷۳۷۸۸۱ \overset{۱۰۰۰}{\equiv} ۸۸۱$$

$N \overset{۱۰۰۰}{\equiv} ۸۸۱$ (سه رقم سمت راست عدد N)

مثال: سه رقم سمت راست Nرا از رابطه‌ی زیر بیابید:

$$N \overset{۱۰۰۰}{\equiv} ۳۴۳^{۱۳۸۷} \times ۳۳۱^{۱۳۸۸} \times ۱۹۷^{۱۳۸۹}$$

حل: با توجه به برابری‌های زیر:

$$۷^{۳} = ۳۴۳,\; ۱۱^{۳} = ۱۳۳۱,\; ۱۳^{۳} = ۲۱۹۷,\; ۷ \times ۱۱ \times ۱۳ = ۱۰۰۱$$

می‌توان نوشت:

$$N \overset{۱۰۰۰}{\equiv} ۳۴۳^{۱۳۸۷} \times ۳۳۱^{۱۳۸۸} \times ۱۹۷^{۱۳۸۹} \overset{۱۰۰۰}{\equiv} ۳۴۳^{۱۳۸۷} \times ۱۳۳۱^{۱۳۸۸} \times ۲۱۹۷^{۱۳۸۹}$$

$$N \overset{۱۰۰۰}{\equiv} (۷^{۳})^{۱۳۸۷} \times (۱۱^{۳})^{۱۳۸۸} \times (۱۳^{۳})^{۱۳۸۹} = (۷ \times ۱۱ \times ۱۳)^{۳\times ۱۳۸۷} \times ۱۱^{۳} \times ۱۳^{۶}$$

$$N \overset{۱۰۰۰}{\equiv} (۱۰۰۱)^{۳\times ۱۳۸۷} \times (۱۳۳۱)(۲۱۹۷)^{۲} \overset{۱۰۰۰}{\equiv} (۱)^{۳\times ۱۳۸۷} \times (۳۳۱)(۱۹۷)^{۲}$$

$$N \overset{۱۰۰۰}{\equiv} (۳۳۱)(۳۸۸۰۹) \overset{۱۰۰۰}{\equiv} (۳۳۱)(۸۰۹) = ۲۶۷۷۷۹ \overset{۱۰۰۰}{\equiv} ۷۷۹$$

$N \overset{۱۰۰۰}{\equiv} ۷۷۹$ (سه رقم سمت راست عدد N)

مثال: سه رقم سمت راست عدد Mرا بیابید.

$$M = (۲۰۰۷)^{۲۰۰۸}.(۲۰۱۱)^{۲۰۰۹}.(۲۰۱۳)^{۲۰۱۰}$$

حل:

$$M = (۲۰۰۷)^{۲۰۰۸}.(۲۰۱۱)^{۲۰۰۹}.(۲۰۱۳)^{۲۰۱۰} \overset{۱۰۰۰}{\equiv} ۷^{۲۰۰۸} \times ۱۱^{۲۰۰۹} \times ۱۳^{۲۰۱۰}$$

$$M \overset{۱۰۰۰}{\equiv} (۷ \times ۱۱ \times ۱۳)^{۲۰۰۸} \times ۱۱ \times ۱۳^{۲} \overset{۱۰۰۰}{\equiv} (۱)^{۲۰۰۸} \times ۱۱ \times ۱۶۹ = ۱۸۵۹ \overset{۱۰۰۰}{\equiv} ۸۵۹$$

$M \overset{۱۰۰۰}{\equiv} ۸۵۹$ (سه رقم سمت راست عدد M)

مثال: سه رقم سمت راست عدد M را بیابید.

$$M = ۵! + ۱۰! + ۱۵! + \cdots + ۲۰۱۰!$$

حل: با توجه به هم‌نهشتی $n! \underset{(n\geq ۱۵)}{\overset{۱۰۰۰}{\equiv}} ۰$ می‌توان نوشت:

$$M = ۵! + ۱۰! + ۱۵! + \cdots + ۲۰۱۰! \overset{۱۰۰۰}{\equiv} ۱۲۰ + ۳۶۲۸۸۰۰ + ۰ + ۰ + \cdots + ۰$$

$$M \overset{1000}{\equiv} 3628920 \overset{1000}{\equiv} 920 \; ; \; M \overset{1000}{\equiv} 920$$

(سه رقم سمت راست عدد M)

قضیه‌ی ویلسن، نتیجه‌ای از قضیه‌ی کوچک فرما و کاربرد آن

اگر p عددی اول باشد، آن‌گاه:

$$(p-1)! \overset{p}{\equiv} -1$$

اثبات قضیه‌ی ویلسن و نتیجه‌ی آن:

$$(p-2)! \underset{(\text{اول } p)}{\overset{p}{\equiv}} 1$$

به راحتی از قضیه‌ی کوچک فرما نتیجه می‌شود؛ زیرا کافی است در قضیه‌ی فرما:

$$(a,p)=1 \; ; \; a^{p-1} \underset{(\text{اول } p)}{\overset{p}{\equiv}} 1$$

به‌جای a، عدد $(p-2)!$ یا $(p-1)!$ را جای‌گزین کرد، زیرا:

$$\big(p,(p-2)!\big)=1 \;,\; \big(p,(p-1)!\big)=1$$

بنابراین:

$$(p>2)\;,\; a=(p-2)! : \big((p-2)!\big)^{p-1} \overset{p}{\equiv} 1 \; ; \; (p-2)! \overset{p}{\equiv} 1$$

$$(p>2)\;,\; a=(p-1)! : \big((p-1)!\big)^{p-1} \overset{p}{\equiv} 1 \; ; \; (p-1)! \overset{p}{\equiv} -1$$

چون $(p-1)$ با فرض $p>2$، عددی زوج است، پس از جذرگیری از دو طرف هم‌نهشتی، اعداد ± 1 ظاهر می‌شوند که از طریق آزمایش معلوم می‌شود، جواب‌های $(p-1)! \overset{p}{\equiv} 1$ و $(p-2)! \overset{p}{\equiv} -1$ خارجی هستند و این قضیه برای $p=2$ نیز برقرار است:

$$(\text{اول } p) : (p-2)! \overset{p}{\equiv} 1 \;,\; (p-1)! \overset{p}{\equiv} -1$$

توجه داشته باشیم که از قضیه‌ی ویلسن می‌توان به‌طور مستقیم به رابطه‌ی دیگر رسید؛ زیرا:

$$(p-1)! \overset{p}{\equiv} -1 \; ; \; (p-1)! \overset{p}{\equiv} p-1 \;,\; (p-1\,,\, p)=1 \; ;$$

$$(p-2)!(p-1) \overset{p}{\equiv} p-1 \; ; \; (p-2)! \overset{p}{\equiv} 1$$

مثال: باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد !(۲۰۰۲) بر ۲۰۰۳ را بیابید.

حل: با توجه به قضیه‌ی ویلسن، چون $p=2003$ عددی اول است، پس می‌توان نوشت:

$$p=2003 : (2003-1)! \overset{2003}{\equiv} -1 \; ; \; (2002)! \overset{2003}{\equiv} -1$$

$$(2002)! \overset{2003}{\equiv} -1+2003=2002 \; ; \; (2002)! \overset{2003}{\equiv} 2002$$

(باقی‌مانده‌ی تقسیم)

مثال: با استفاده از قضیه‌ی ویلسن، یک سلسله جواب برای معادله‌ی سیاله‌ی زیر بیابید.

$$p_1,p_2 \in \mathbb{N} \;,\; p_1,p_2 < p\ (\text{اول}) : X^{p_1}+Y^{p_2}=Z^p \quad (1)$$

حل: به‌منظور تعیین جوابی برای معادله‌ی ۱، ابتدا یک سلسله از جواب‌های معادله‌ی زیر را به‌دست می‌آوریم:

$$X_1^n + X_2^n = X_3^{n+1} \quad (2)$$

به این منظور، کافی است که معادله‌ی ۲ را با اتحاد زیر مقایسه کنیم:

$$(a^{n+1}+ab^n)^n + (a^n b + b^{n+1})^n = (a^n+b^n)^{n+1} \quad (3)$$

از مقایسه‌ی معادله ۲ و اتحاد ۳ خواهیم داشت

$$(4)\begin{cases} x_1 = a^{n+1}+ab^n \\ x_2 = a^n b + b^{n+1} \\ x_3 = a^n + b^n \end{cases}$$

در این‌جا، با فرض $n=(p-1)!$، معادله‌ی ۲ به معادله‌ی زیر تحویل می‌شود:

$$x_1^{(p-1)!} + x_2^{(p-1)!} = x_3^{(p-1)!+1} \quad (5)$$

طبق قضیه‌ی ویلسن، اگر p عددی اول باشد، عبارت $(p-1)!+1$ بر p بخش‌پذیر است. از طرف دیگر می‌توان نوشت:

$$(p-1)!+1 = p\left(1+2\left\lfloor \frac{(p-1)!+1}{2p} \right\rfloor\right) \quad (6)$$

($\lfloor\ \rfloor$: قسمت درست عدد)

در این‌جا، با استفاده از رابطه‌ی ۶ و با توجه به شرط $p_1,p_2<p$، معادله‌ی ۵ را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\left(x_1^{\frac{(p-1)!}{p_1}}\right)^{p_1} + \left(x_2^{\frac{(p-1)!}{p_2}}\right)^{p_2} = \left(x_3^{1+2\left\lfloor \frac{(p-1)!+1}{2p} \right\rfloor}\right)^{p} \quad (7)$$

از مقایسه‌ی معادله‌ی ۱ با اتحاد ۷، یک سلسله از جواب‌های معادله‌ی ۱ حاصل می‌شوند:

$$(8)\begin{cases} X = \left(a^{(p-1)!+1}+ab^{(p-1)!}\right)^{\frac{(p-1)!}{p_1}} \\ Y = \left(a^{(p-1)!}b+b^{(p-1)!+1}\right)^{\frac{(p-1)!}{p_2}} \\ Z = \left(a^{(p-1)!}+b^{(p-1)!}\right)^{1+2\left\lfloor \frac{(p-1)!+1}{2p} \right\rfloor} \end{cases}$$

(برای کسب اطلاع بیش‌تر درباره‌ی حل معادله‌های سیاله و تعمیم آن‌ها، به شماره‌های ۵۴، ۵۵ و ۵۶ رشد برهان متوسطه رجوع شود.)

مثال: باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد M را بر ۸۳ بیابید.

$$M = 1+82!^{1387}+82!^{1388}+82!^{1389}+82!^{1394}$$

حل: با توجه به قضیه‌ی ویلسن می‌توان نوشت:

$$(83-1)! \overset{83}{\equiv} -1 \; ; \; 82! \overset{83}{\equiv} -1$$

و با توجه به قضیه‌ی کوچک فرما:

$$82^{83-1}\overset{83}{\equiv}1\ ;\ 82^{82}\overset{83}{\equiv}1\ ;\ (82^{82})^{17}\overset{83}{\equiv}(1)^{17}\ ;\ 82^{1394}\overset{83}{\equiv}1$$

بنابراین:

$$M\overset{83}{\equiv}1+(-1)^{1387}+(-1)^{1388}+(-1)^{1389}+1=$$

$$1-1+1-1+1=1\ ;\ M\overset{83}{\equiv}1$$

مثال: باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد N را بر ۲۰۰۳ بیابید.

$$N=(2001!)^{2008}+(2002!)^{2009}$$

حل: با استفاده از قضیه‌ی ویلسن و نتیجه‌ی آن:

$$2002!=(2003-1)!\overset{2003}{\equiv}-1\ ,\ 2001!=(2003-2)!\overset{2003}{\equiv}1$$

بنابراین:

$$N\overset{2003}{\equiv}(1)^{2008}+(-1)^{2009}=1-1=0\ ,\ N\overset{2003}{\equiv}0$$

پس، عدد N بر ۲۰۰۳ بخش‌پذیر است.

مثال: برای هر عدد اول p و هر عدد صحیح a نشان دهید:

$$p|(a^p+(p-1)!a)$$

حل: طبق قضیه‌ی کوچک فرما $(a^p\overset{p}{\equiv}a)$، می‌توان نوشت:

$$a^p+(p-1)!a\overset{p}{\equiv}a(1+(p-1)!)$$

هم‌چنین، طبق قضیه‌ی ویلسن $((p-1)!\overset{p}{\equiv}-1)$ می‌توان نوشت:

$$a(1+(p-1)!)\overset{p}{\equiv}a(1-1)=0$$

در این‌جا حکم ثابت می‌شود.

مثال: باقی‌مانده‌ی تقسیم !۱۸ را بر ۴۳۷ به‌دست آورید.

حل: با توجه به ۴۳۷=۱۹×۲۳ و طبق قضیه‌ی ویلسن: $18!\overset{19}{\equiv}-1$ و $22!\overset{23}{\equiv}-1$ یا $18!\times19\times20\times21\times22\overset{23}{\equiv}-1$، خواهیم داشت:

$$22!=18!(-4)(-3)(-2)(-1)\overset{23}{\equiv}18!(24)\overset{23}{\equiv}18!(1)=18!\overset{23}{\equiv}-1$$

پس:

$$18!\overset{19\times23}{\equiv}-1\ ;\ 18!\overset{437}{\equiv}-1\ ;\ 18!\overset{437}{\equiv}437-1=436$$

(باقی‌مانده‌ی تقسیم)

مثال: عکس قضیه‌ی ویلسن را ثابت کنید. یعنی اگر $m>1$ و m اول نباشد، ثابت کنید:

$$(m-1)!\overset{m}{\not\equiv}-1$$

حل: چون m عددی اول نیست، بنابراین عدد صحیح $k>1$ وجود دارد؛ چنان‌که $k|m$، پس $k|(m-1)!$. در نتیجه، اگر $(m-1)!\overset{m}{\equiv}-1$ پس باید $k|(-1)$ باشد که غیرممکن است و در این‌جا عکس قضیه‌ی ویلسن نیز ثابت می‌شود.

مثال: اگر p عددی اول و فرد باشد، از قضیه‌ی ویلسن نتیجه بگیرید:

$$2(p-3)!\overset{p}{\equiv}-1$$

حل: از قضیه‌ی ویلسن $\left((p-1)!\overset{p}{\equiv}-1\right)$ نتیجه می‌شود:

$$p\geq3:\ (p-1)!\overset{p}{\equiv}(p-1)(p-2)(p-3)!\overset{p}{\equiv}$$

$$(-1)(-2)(p-3)!=2(p-3)!\overset{p}{\equiv}-1$$

تمرین

۱. دو رقم سمت راست عدد N را بیابید.

$$N=1!+2!+3!+\cdots+2009!$$

۲. دو رقم سمت راست عدد M را بیابید.

$$M=2!+4!+6!+\cdots+1389!$$

۳. دو رقم سمت راست عدد N را بیابید.

$$N=9^{9^{9^{9}}}+9^{9^{9}}+9^{9}+9$$

۴. دو رقم سمت راست عدد M را تعیین کنید.

$$M=24^1+24^2+24^3+\cdots+24^{2009}$$

۵. دو رقم سمت راست عدد N را بیابید.

$$N=2^{2009}+5^{2009}+7^{2009}$$

۶. دو رقم سمت راست عدد M را بیابید.

$$M=26^1+26^2+26^3+\cdots+26^{2008}$$

۷. دو رقم سمت راست عدد N را بیابید.

$$N=24^{26^{2007}}+25^{25^{2008}}+26^{25^{2009}}$$

۸. سه رقم سمت راست عدد M را بیابید.

$$M=(7^{2008}\times11^{2009}\times13^{2010})^3$$

۹. سه رقم سمت راست عدد N را از رابطه‌ی زیر تعیین کنید:

$$N\overset{1000}{\equiv}343^{2007}\times331^{2008}\times197^{2009}$$

۱۰. سه رقم سمت راست عدد M را بیابید.

$$M=(2007)^{1387}.(2011)^{1388}.(2013)^{1389}$$

۱۱. سه رقم سمت راست عدد N را بیابید.

$$N=401^{1387}\times641^{1388}\times561^{1389}$$

۱۲. سه رقم سمت راست عدد M را بیابید.

$$M=5!+10!+15!+\cdots+1390!$$

۱۳. باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد N را بیابید.

$$N=(2002)!^{1388}+(2002)!^{2009}$$

۱۴. با استفاده از قضیه‌ی ویلسن، یک سلسله از جواب‌های عمومی معادله‌ی زیر را بیابید.

$$x^{13}+y^{89}=z^{2003}$$

۱۵. باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد M را بر ۸۳ بیابید.

$$M=1+82!^{2008}+82!^{2009}+82!^{2010}$$

۱۶. باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد N را بیابید.

$N=(2001!)^{1388}+(2002!)^{1389}$ را بر ۲۰۰۳

ادامه دارد...

قضیه‌ی تقسیم و کاربردهای آن در Z (۱)

برای دانش‌آموزان دوره‌ی پیش دانشگاهی رشته ریاضی

● حمیدرضا امیری

یکی از اصلی‌ترین و پایه‌ای‌ترین مباحث در نظریه‌ی مقدماتی اعداد، قضیه‌ی تقسیم در Z و مسائل و کاربردهای آن است. برای ورود به این بحث پیش‌نیازهای چندانی لازم نداریم و آن‌چه را هم که نیاز داریم، بسیار ساده و مقدماتی هستند؛ تعاریف و اصولی هم‌چون تعریف عضو ابتدا و انتها، کران بالا و پایین و اصولی چون اصل خوش‌ترتیبی و اصل استقرای ریاضی که همگی در کتاب درسی ـ ریاضیات گسسته ـ آورده شده‌اند.

ابتدا به تعریف رابطه‌ی «عاد کردن» در Z و بیان خواص، ویژگی‌ها و نتایج حاصل از این تعریف و حل مسائلی می‌پردازم که گاه در امتحانات و کنکورها نمونه‌هایی از آن‌ها آمده است. امیدوارم این بحث و موضوع برای شما جالب و سرگرم‌کننده باشد. فراموش نکنیم که نظریه‌ی اعداد از قدیمی‌ترین شاخه‌های علم ریاضی است. مسائل و قضیه‌هایی در این شاخه از ریاضیات وجود دارند که قدمت آن‌ها به دو تا سه هزار سال پیش برمی‌گردد و مسائلی وجود دارند که صدها سال است، لاینحل باقی مانده‌اند و از راه‌حل آن‌ها در حد یک حدس یاد می‌شود!

مسائل نظریه‌ی اعداد و به‌خصوص مسائل مربوط به قضیه‌ی تقسیم، ب‌م‌م و ک‌م‌م بسیار جالب‌اند و به شدت حس کنجکاوی انسان را تحریک می‌کنند. به همین دلیل، حل آن‌ها بسیار لذت‌بخش و سرگرم‌کننده است! بحث را با تعریف رابطه‌ی عاد کردن و مسائل مربوط به آن آغاز می‌کنم.

تعریف: اگر a و b اعداد صحیح باشند و $a \neq 0$، در این صورت وقتی b بر a بخش‌پذیر است، یعنی $b = a \times q \quad (q \in Z)$، می‌نویسیم: $a|b$ و می‌خوانیم: «a عاد می‌کند b را یا a می‌شمارد b را.»

رابطه‌ی عاد کردن روی Z، $a|b \Leftrightarrow b = aq \quad (q \in Z)$، از خواص انعکاسی، تقارنی، پادتقارنی و تعدی، دو خاصیت انعکاسی و تعدی را دارد و دو خاصیت دیگر را ندارد؛ زیرا:

(I) $\forall a \in Z, a = a \times 1 \Rightarrow a|a$ (خاصیت انعکاسی دارد)

II) $4|8, 8\nmid 4 \Rightarrow$ (خاصیت تقارنی ندارد)

III) $2|-2, -2|2, 2 \neq -2 \Rightarrow$ (خاصیت پادتقارنی ندارد)

IV) فرض کنیم $a|b, b|c \Rightarrow b = aq_1, c = bq_2 \Rightarrow c = \overbrace{(aq_1)}^{b} \times q_2$

$\Rightarrow c = a(q_1q_2) \Rightarrow c = aq \Rightarrow a|c$ (خاصیت تعدی دارد)

تذکر: رابطه‌ی بخش‌پذیری یا عاد کردن روی $\mathbb{N}$ خاصیت پادتقارنی دارد. به عبارت دیگر، اگر a و b دو عدد طبیعی باشند، در این صورت از $a|b$ و $b|a$ نتیجه می‌گیریم: $a = b$.

رابطه‌ی عاد کردن روی Z دارای ویژگی‌هایی است که از آن‌ها تقریباً در همه‌ی موضوعات مقدماتی (تا آخر بحث هم‌نهشتی‌ها و حتی معادلات سیاله) نظریه‌ی اعداد استفاده خواهیم کرد. لذا یادگیری این ویژگی‌ها که بعداً به عنوان ابزارهایی برای حل مسائل و پرسش‌های چهارگزینه‌ای و اثبات قضیه‌ها از آن‌ها بهره می‌گیریم، بسیار ضروری است.

ویژگی‌های رابطه‌ی عاد کردن روی Z

۱) $a|b \Rightarrow a|-b, -a|b, -a|-b$

اثبات: $a|b \Rightarrow b = aq \Rightarrow -b = -aq = a\underbrace{(-q)}_{q'} = aq' \Rightarrow a|-b$

(توجه دارید که معادل حکم مسئله، یعنی معادل $a|-b$، طبق تعریف $-b = aq'$ است که ما خودمان را به این رابطه رساندیم!)

برای اثبات $-a|b$ باید به رابطه‌ی $b = -aq'$ برسیم:

$a|b \Rightarrow b = aq \Rightarrow b = (-a)\underbrace{(-q)}_{q'} \Rightarrow b = -aq' \Rightarrow -a|b$

اثبات حکم سوم، یعنی $-a|-b$ به عهده‌ی شما.

۲) $a|b \Leftrightarrow ma|mb \quad (m \in Z)$

اثبات: $a|b \Leftrightarrow b = aq \Leftrightarrow mb = maq \Leftrightarrow ma|mb$

۳) $a|b \Rightarrow \overbrace{a|mb}^{mb=aq'} \quad (m \in Z)$

اثبات: $a|b \Rightarrow b = aq \Rightarrow mb = maq \Rightarrow mb = a\underbrace{(mq)}_{q'}$

$\Rightarrow mb = aq' \Rightarrow a|mb$

تذکر: عکس ویژگی (۳) در حالت کلی برقرار نیست و حتی از $a|bc$ در حالت کلی نمی‌توان نتیجه گرفت که: $a|b$ یا $a|c$. به‌عنوان مثال نقض، می‌دانیم $6|3 \times 4$، در صورتی که $6\nmid 3$ و $6\nmid 4$.

۴) $a|b \Leftrightarrow a^n|b^n \; (a^n|b^n \Leftrightarrow b^n = a^nq')$

اثبات: $a|b \Rightarrow b = aq \Rightarrow b^n = a^nq^n \xrightarrow{q^n = q'} b^n = a^nq'$

$\Rightarrow a^n|b^n$

برای اثبات طرف دوم رابطه‌ی دو شرطی (۴) به دو تذکر زیر دقت کنید:

تذکر ۱: اگر a عددی گویا باشد، حتماً باید به شکل $a=\frac{m}{n}$ باشد که: $m,n\in Z$ و $n\neq 0$. و اگر عددی صحیح نباشد، دو حالت امکان‌پذیر است: یا آن عدد گویا و غیرصحیح است که باید به شکل $\frac{m}{n}$ باشد و یا آن عدد گنگ است.

تذکر۲: اگر $a\neq 0$ عددی صحیح (و در حالت کلی‌تر اگر a عددی گویا) و b عددی گنگ باشد، در این صورت: $(ab)\in Q'$ (حاصل‌ضرب هر عدد گویای ناصفر در یک عدد گنگ همواره گنگ است).

اثبات از راه برهان خلف

$a\in Q, b\in Q', a\neq 0 \Rightarrow (ab)\in Q$ فرض کنیم (فرض خلف)

اگر فرض کنیم: $ab=c$ و $c\in Q$، در این صورت خواهیم داشت: $b=\frac{c}{a}$ و می‌دانیم $\frac{c}{a}$، یعنی تقسیم عدد گویای c بر عدد گویا و ناصفرِ a، همواره عددی گویاست و با گنگ بودن b تناقض دارد. پس فرض خلف باطل و حکم برقرار است؛ یعنی: $ab\in Q'$.

اثبات طرف دوم ویژگیِ (۴):

$a^n|b^n \Rightarrow b^n=a^nq\,(q\in Z)\Rightarrow b=a\times\sqrt[n]{q}$

اگر ثابت کنیم $\sqrt[n]{q}$ عددی صحیح است، می‌توانیم آن را q' فرض کنیم و $b=aq'$، یعنی $a|b$ همان حکم مسئله است. برای اثبات این‌که: $\sqrt[n]{q}\in Z$، از برهان خلف کمک می‌گیریم. فرض کنیم: $\sqrt[n]{q}\notin Z$. پس طبق تذکر (۱) $\sqrt[n]{q}$ یا گویا و غیرصحیح و یا گنگ است که چون داریم: $q\in Z$، $\sqrt[n]{q}$ نمی‌تواند به صورت $\frac{m_1}{n_1}$ باشد و لذا $\sqrt[n]{q}$ گویا نیست (اگر $\sqrt[n]{q}=\frac{m_1}{n_1}$ باشد، در این صورت داریم: $q=\frac{m_1^n}{n_1^n}$ که با صحیح بودنِ q تناقض دارد). پس: $\sqrt[n]{q}\notin Q$ و در نتیجه: $\sqrt[n]{q}=\in Q$.

و بنابر تذکر ۲، چون: $b=a\times\sqrt[n]{q}$ و $a\neq 0$، لذا باید $a\times\sqrt[n]{q}$ عددی گنگ باشد که با صحیح بودن b تناقض دارد. پس فرض خلف ما، یعنی $\sqrt[n]{q}\notin Z$، باطل است و باید داشته باشیم: $\sqrt[n]{q}\in Z$ که این نشان می‌دهد، می‌توان فرض کرد: $\sqrt[n]{q}=q'$.

پس داریم:

$a^n|b^n\Rightarrow b^n=a^nq\,(q\in Z)\Rightarrow b=a\sqrt[n]{q}\Rightarrow b=aq'\Rightarrow a|b$

۵) $a|b\ ,\ a|c\Rightarrow a|b\pm c$

یعنی اگر عددی دو عدد را بشمارد، آن‌گاه مجموع و تفاضل آن دو عدد را نیز می‌شمارد.

اثبات: $\left.\begin{array}{l} a|b\Rightarrow b=aq_1\\ a|c\Rightarrow c=aq_2\end{array}\right\}\Rightarrow b\pm c=a(\underbrace{q_1\pm q_2}_{q'})\Rightarrow a|b\pm c$

تذکر: عکسِ ویژگی (۵) در حالت کلی برقرار نیست ($2|3+5$، ولی ۲|۳ و ۲|۵).

۶) $a|b\ ,\ c|d\Rightarrow ac|bd$

اثبات: $\left.\begin{array}{l} a|b\Rightarrow b=aq_1\\ c|d\Rightarrow d=cq_2\end{array}\right\}\Rightarrow bd=ac(\overbrace{q_1q_2}^{q})\Rightarrow ac|bd$

۷) $a|b\xrightarrow{q\neq 0}|a|\le|b|$

اثبات: $a|b\xrightarrow{q\neq 0}b=aq\Rightarrow|b|=|aq|\Rightarrow|b|=|a|\,|q|$

$b\neq 0\Rightarrow q\neq 0\xrightarrow{|q|\ge 1}|a|\,|q|\ge|a|\Rightarrow|b|\ge|a|$

۸) $a|b\ ,\ b|a\Rightarrow a=\pm b$

اثبات: $\left.\begin{array}{l} a|b\Rightarrow|a|\le|b|\\ b|a\Rightarrow|b|\le|a|\end{array}\right\}\Rightarrow|a|=|b|\Rightarrow a=\pm b$

۹) $a\in Z\Rightarrow 1|a$ (هر عدد صحیح بر یک بخش‌پذیر است)

اثبات: $a\in Z\Rightarrow a=1\times a\Rightarrow 1|a$

۱۰) $a\in Z\Rightarrow a|0$ (صفر بر هر عدد صحیح بخش‌پذیر است)

اثبات: $a\in Z\Rightarrow 0=a\times 0\Rightarrow a|0$

۱۱) $a\in Z\ ,\ a|1\Rightarrow a=\pm b$

اثبات: $\left.\begin{array}{l} a|1\\ 1|a\end{array}\right\}\xrightarrow{\text{ویژگی ۸}}a=\pm 1$ (طبق ویژگی (۹))

۱۲) $a|b\xrightarrow{m<n}a^m|b^n\to(b^n=a^mq')$

اثبات: $a|b\Rightarrow b=aq\Rightarrow b^n=a^nq\ \underline{\underline{m<n}}\ a^m(\underbrace{a^{n-m}q}_{q'})$

$\Rightarrow a^mq'\Rightarrow a^m|b^n$

۱۳) $a^m|b^n\Rightarrow\xrightarrow{m>n}a|b$

اثبات: $a^m|b^n\Rightarrow b^n=a^mq\ \underline{\underline{m>n}}\ a^n(\underbrace{a^{m-n}q}_{q'})$

$\Rightarrow b^n=a^nq'\Rightarrow a^n|b^n\xrightarrow{\text{ویژگی ۴}}a|b$

کاربرد این ویژگی‌ها را در حل مسائل بسیار جالب و گاه پیچیده‌ی بخش‌پذیری، در مقاله‌ی بعدی مشاهده خواهید کرد.

ادامه دارد...



رنه دکارت

● احمد قندهاری

رنه دکارت[1] فیلسوفی بود که روش ریاضی گونه‌ی کشف حقیقت در کاوش‌های علمی را در رساله‌ی «گفتار در روش» خود مطرح کرد. او معتقد بود، ریاضیات در همه‌ی وجوه زندگی و طبیعت دخالت دارد. هم‌چنین عمیقاً باور داشت، منطق و استدلال ریاضیات، دقیقاً در همه‌ی علوم اثری عمیق و مثبت دارد و بنیاد درک همه‌ی علوم است. ابداع هندسه‌ی تحلیلی او که ترکیبی از جبر و هندسه بود، باعث تغییر مسیر ریاضیات شد.

رنه دکارت در ۳۱ مارس سال ۱۵۹۶ در «لاهی»[2] فرانسه که در جنوب غربی پاریس قرار دارد، متولد شد. پدرش وکیل دعاوی بود. پدر و مادرش هر دو از زمین‌داران ثروتمند بودند. متأسفانه مادرش مدت کوتاهی پس از تولد رنه، درگذشت. رنه نیز کودکی ضعیف و بیمار بود. تقریباً کسی انتظار نداشت زنده بماند و اگرچه رنه زنده ماند، ولی همیشه ضعیف و تقریباً ناسالم بود. به همین علت هم، در خانه نازپرورده بود. ولی در تحصیل، شاگرد کوشا و متفکری بود. پدرش او را «فیلسوف کوچک» می‌نامید، زیرا در مورد هر چیزی سؤال‌های دقیقی مطرح می‌کرد و به سادگی هم قانع نمی‌شد. بعدها پدرش او را به مدرسه‌ی بهتری فرستاد.

رنه عادت داشت در رخت‌خواب دراز بکشد و مطالعه کند. این عادت را هم‌چنان در بزرگ‌سالی هم حفظ کرده بود. در مدرسه‌ی جدید، موضوع مورد علاقه‌ی رنه، ریاضیات بود؛ اگرچه پس از هشت سال تحصیل در آن مدرسه، و مطالعات بسیار زیاد، معتقد شده بود که هنوز هیچ نمی‌داند. ولی در ۱۸ سالگی به‌غایت، ستایش‌انگیز شده بود، زیرا به همه‌ی اطلاعات و دانش آن روزگار دست یافته بود. او بیشتر از گذشته، جذب ریاضیات شد، زیرا باور داشت که ریاضیات تنها علمی است که می‌توان به آن کاملاً اعتماد کرد و پایه‌ی یادگیری دیگر علوم است. با وجود این باور، برای تحصیل در رشته‌ی حقوق به دانشگاه رفت.

در سال ۱۶۱۶، از دانشگاه فارغ‌التحصیل شد و تصمیم گرفت کاری بیابد که بتواند به سفر بپردازد و تجربه‌های مفید کسب کند. به قول خودش می‌خواست «کتاب جهان» را بخواند. لذا در ۲۲ سالگی به نیروی ارتش پیوست. البته نه به‌خاطر جنگ یا دریافت حقوق، بلکه به این دلیل که نظامی بودن در آن زمان نوعی ارزش اجتماعی تلقی می‌شد. او بیشتر به خاطر موقعیت اجتماعی و سفرهای آن، به ارتش شاهزاده اورلئان پیوست. این شاهزاده لشکری فراهم کرد تا علیه اسپانیایی‌ها بجنگد که می‌خواستند دوباره هلند را زیر نفوذ بگیرند. دکارت کار چندانی در ارتش نداشت و بیشتر اوقات به

مطالعه می‌پرداخت. او ریاضی‌دانی را ملاقات کرد که او هم به هندسه‌ی تحلیلی علاقه‌مند بود.

پس از آن‌که دکارت از ارتش استعفا داد، چند سالی در فرانسه زیست، به سراسر اروپا سفر کرد و با دانشمندان دیگر ملاقات‌هایی داشت. در سال ۱۶۲۸ تصمیم گرفت در هلند زندگی کند. در این زمان احساس کرد، باید کاری بنیادی انجام دهد. ولی این فکر را با کسی درمیان نگذاشت. بعدها این کوشش‌ها باعث ایجاد فلسفه‌ی جدیدی به نام «فلسفه‌ی عقل‌گرا» (Rasionalism) شد. و این جمله‌ی معروف از اوست که می‌گوید: «من فکر می‌کنم، پس من وجود دارم.»

دکارت اکثر اوقات به تنهایی و تفکر پناه می‌برد و به دنبال حقیقت بود. در مورد همه چیز مانند فیزیک، نجوم، نور، کیهان‌شناسی، جنین‌شناسی، تشریح بدن، فیزیولوژی، روان‌شناسی، زمین‌شناسی و حتی داروشناسی و تغذیه به مطالعه می‌پرداخت. بالاخره در سال ۱۶۳۷، شاهکار او، کتابی با عنوان «روش دکارت» به چاپ رسید. این روش شامل شناخت روش علمی بود و قسمتی از کتاب هم به هندسه‌ی تحلیلی اختصاص داشت.

هندسه‌ی تحلیلی ترکیبی از جبر و هندسه است. در آن زمان، همه فکر می‌کردند نمی‌توان این دو بخش مستقل ریاضی را به هم پیوند داد. در حالی که هندسه‌ی تحلیلی دکارت، موجب پیدایش نمودارها و تهیه‌ی نقشه و بسیاری چیزهای دیگر شد. با استفاده از دستگاه محورهای مختصات، این امکان به‌وجود آمد که جای هر نقطه‌ای با دو مختص مشخص شود. دکارت نشان داد که هندسه چه قدر می‌تواند برای جبر مفید باشد و بسیاری از معادلات جبری را می‌توان به کمک نمودار حل کرد.

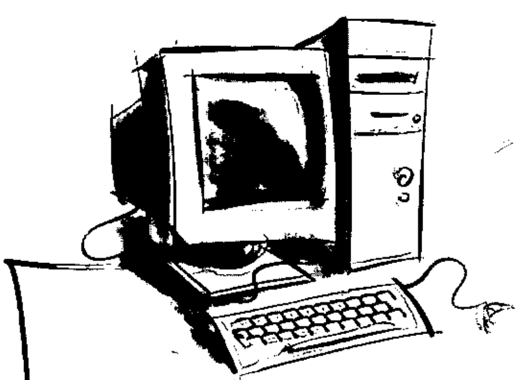
در سال ۱۶۴۹، دکارت به عنوان یک فیلسوف و ریاضی‌دان در اروپا به شهرت رسید. در این سال، او به وسیله‌ی ملکه‌ی جوان سوئد تشویق شد، آکادمی علوم سوئد را سازمان‌دهی کند. این ملکه که نامش کریستینا بود، به مدت سه سال با دکارت مکاتبه داشت تا توانست او را به چنین کاری متقاعد کند. به محض این‌که دکارت تقاضای ملکه را پذیرفت، ملکه یک کشتی اختصاصی برای دکارت فرستاد تا او را به استکهلم بیاورد. پس از ورود دکارت به استکهلم، ملکه تقاضا کرد به او فلسفه بیاموزد و دکارت هم پذیرفت. تدریس به ملکه هفته‌ای سه روز بود که از ساعت پنج صبح شروع می‌شد. برای شخصی مانند دکارت که همیشه عادت داشت در جای گرم و نرمی به مطالعه بپردازد، هوای سرد زمستان استکهلم آزاردهنده بود. دکارت نتوانست خود را با این شرایط سازگار کند. درنهایت، سرمای شدیدی خورد که به سینه‌پهلو منجر شد و در ۱۱ فوریه‌ی سال ۱۶۵۰ درگذشت.

---

1. Rene Descartes

2. La Hage

3. Christina



معرفی سایت‌های ریاضی جهان

● احسان یارمحمدی

● احتمال و آمار (Probability and Statistics)

● مثلثات (Trigonometry)

● ترکیبات و تبدیل (Combinatorics and Permutation)

● واحد تبدیل (Unit Conversion)

■ هندسه (Geometry)

● فرمول‌های هندسی (Geometric Formula)

● زاویه‌ها، زاویه‌های مکمل، زاویه‌های متمم (Angels, Complementary, Supplementary Angels)

● مثلث‌ها (Triangles)

● قضیه‌ی فیثاغورس (Pythagorean Theorem)

● حجم، حجم متریک (Volume, Metric Volume)

● دایره و ویژگی‌های آن (Circle and their Properties)

● چهار گوش‌ها (Rectangles)

● طول، فاصله، مختصات‌ها، طول متریک (Length, Distance, Cooradinates, Metric Length)

● اثبات‌ها در هندسه (Proofs in Geometry)

● اجسام در فضا، جسم سه‌بعدی، استوانه، گوی (Bodies in Space, Right Solid, Cylinder, Sphere)

● متوازی‌الاضلاع‌ها (Paralle lograms)

● نقطه‌ها، خط‌ها، زاویه‌ها، محیط (Points, Lines, Angles, Perimeter)

● چند ضلعی‌ها (Polygons)

● مساحت و مساحت سطح (Area and Surface Area)

مسائل برای حل

ریاضیات ۱

○ مجتبی رفیعی

۱. ساده شده‌ی عبارت زیر را بنویسید.

$$A=\left|\sqrt{2}-\sqrt{3}\right|+\left|\sqrt{3}-\sqrt{2}-1\right|$$

۲. اگر $0<a<1$، ثابت کنید: $0<\frac{8a}{8a+3}<1$

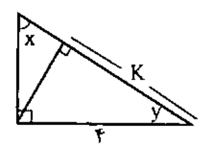
۳. x و y را چنان بیابید که مجموعه‌های $A=\{2x+3y,7\}$ و $B=\{3x-2y,9\}$ با هم برابر باشند.

۴. حاصل عبارت $\frac{2/16\times10^{4}\times(0/1)^{3}}{(0/2)^{2}}$ را به صورت نماد علمی بنویسید.

۵. اگر $a+\sqrt[3]{b}=1$ باشد، حاصل $\frac{a^{3}+3\sqrt[3]{b}}{1-b}$ را بیابید.

۶: عبارت $x^{2}+(x-2)(y+1)-2x$ را تجزیه کنید.

۷. در شکل مقابل مقدار k را بیابید.



۸. عبارت $\frac{1}{(3\sqrt{8}-\sqrt{50}+\sqrt{3})}$ را گویا کنید.

۹. خارج قسمت تقسیم عبارت $x^{3}+8$ بر $x+2$ برابر $x^{m}-kx^{n}+4$ است. حاصل m+n+k چقدر است؟.

۱۰. اگر $A=2x^{3}-1$ و $B=2x^{3}-4$ حاصل عبارت $M=2A^{2}+3B^{2}+6AB$ را پیدا کنید.

۱۱. فروشنده‌ای حساب کرد اگر تخم‌مرغ‌های خود را یکی ۴۵ تومان بفروشد زیان می‌بیند ولی اگر آن‌ها را دانه‌ای ۶۰ تومان بفروشد ۱۰۰۰ تومان سود می‌برد تعداد تخم‌مرغ‌ها و قیمت خرید هر تخم‌مرغ چه‌قدر است؟

۱۲. مثلث ABC با رئوس $A(2,3)$ و $B(3,0)$ و $C(0,2)$ مفروض است.

الف) طول میانه ی وارد بر ضلع BC را محاسبه کنید.

ب) معادله‌ی ارتفاع وارد بر ضلع AB را بنویسید.

۱۳. معادله‌ی $9x^{2}-12x+4=0$ را حل کنید.

۱۴. مکعب مستطیلی با قاعده مربع شکل و ارتفاع ۸ مفروض است. اگر عدد حجم مکعب ۱۰ واحد کمتر از عدد سطح مکعب مستطیل باشد، حجم مکعب کدام است؟

۱۵. مجموعه جواب دستگاه نامعادلات زیر را بیابید.

$$\begin{cases}|x|<2\\(2x-1)<|x|\end{cases}$$

ریاضیات ۲

○ مهر شهرام صدر

۱. عبارت زیر را تعیین علامت کنید.

$$\frac{x^{2}-4}{(3-2x)(4x^{2}-4x+1)}$$

۲. حدود m را طوری تعیین کنید که نامساوی زیر به ازای جمیع مقادیر x برقرار باشد.

$$(-3m)x^{2}+2mx+1>0$$

۳. نامعادلات زیر را حل کنید.

الف) $|3-x|<3$

ب) $|2x+1|\leq|x-2|$

۴. معادله زیر را حل کنید.

$$\frac{x-1}{2x}-\frac{1}{2x+1}=\frac{7-3x}{4x^{2}+2x}$$

۵. اگر $f(x)=ax+b$ باشد، حاصل $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ را حساب کنید.

۶. معکوس تابع زیر را به دست آورید.

$$\begin{cases}f(x)=\frac{3x+7}{x+2}\\R-\{2\}\to R-\{3\}\end{cases}$$

۷. مبدأ مختصات را به نقطه‌ی $o'(-3,2)$ منتقل می‌کنیم، مختصات نقطه‌ی $A(7,3)$ را در دستگاه جدید بنویسید.

۸. اگر ماتریس $A=\begin{bmatrix}-2&3\\1&0\end{bmatrix}$ و $AX=\begin{bmatrix}7&8\\1&2\end{bmatrix}$ باشد، مطلوب است تعیین ماتریس X.

۹. دستگاه دو معادله دومجهولی زیر را به روش ماتریس معکوس حل کنید.

$$\begin{cases}2mx+4y=4\\-4x+2my=2\end{cases}$$

۱۰. به ازای چه مقدار m، دستگاه زیر جواب دارد.

$$\begin{cases}2mx-4y=6\\-4x+2my=2\end{cases}$$

۱۱. عبارات زیر را حساب کنید.

الف) $\log_{25}^{\sqrt{125}}$

ب) $\log_{7}^{49^{2}}$

۱۲. معادله‌ی زیر را حل کنید.

$$2\log_{7}^{x}=\log_{7}^{81}$$

۱۳. اگر جمله‌ی عمومی یک تصاعد حسابی $t_n=2n+1$ باشد مجموع ۳ جمله اول این تصاعد را حساب کنید.

۱۴. چهار واسطه هندسی بین $\frac{3}{8}$ و $\frac{128}{81}$ درج کنید.

۱۵. اگر $\sin\alpha=\frac{2}{3}$ و $\cos\beta=\frac{1}{5}$ (α و β حاده هستند) عبارات زیر را محاسبه کنید.

الف) $\sin2\alpha$

ب) $\cos(\beta+30)$

۱۶. معادله‌ی زیر را حل کنید.

$$2\sin^{2}x-\cos^{2}x=0$$

۱۷. هرگاه $\bar{v}_1=\begin{bmatrix}3\\\sqrt{3}\end{bmatrix}$ و $\bar{v}_2=\begin{bmatrix}2\sqrt{3}\\-2\end{bmatrix}$ باشد، زاویه بین دو بردار را محاسبه کنید.

۱۸. تعیین کنید با ارقام ۲و۳و۵و۶و۷

الف) چند عدد سه رقمی می‌توان نوشت. (بدون تکرار)

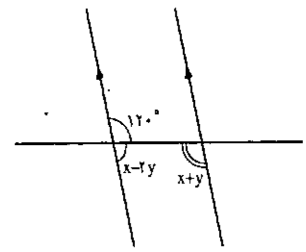
ب) چه تعداد از این اعداد فرد هستند. (بدون تکرار)

ج) چه تعداد از آن‌ها کوچک‌تر از ۴۰۰ هستند. (بدون تکرار)

هندسه‌ی ۱

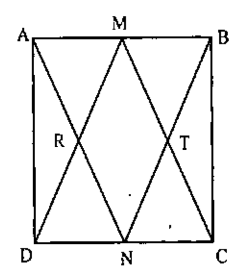
○ محمدهاشم رستمی

۱. اندازه‌ی x و y را تعیین کنید (پیکان‌های هم‌جهت، خط‌های موازی را نشان می‌دهند).

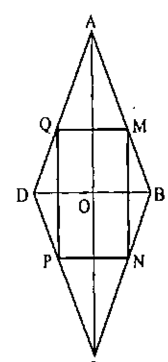


۲. تعداد قطرهای یک nضلعی محدب ۳۵ است. اندازه‌ی مجموع زاویه‌های درونی این nضلعی را تعیین کنید.

۳. چهارضلعی ABCD مربع و نقطه‌های M و N وسط ضلع‌های AB و CD قرار دارند. ثابت کنید چهارضلعی MTNR لوزی است.

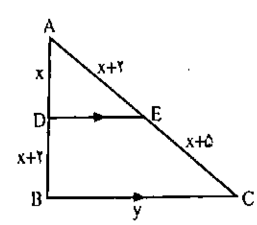


۴. نقطه‌های M، N، P و Q به‌ترتیب وسط ضلع‌های AB، BC، CD و DA از لوزی ABCD هستند. اگر AC = ۶۰ و BD = ۲۴ باشد، اندازه‌ی مساحت چهارضلعی MNPQ را تعیین کنید.

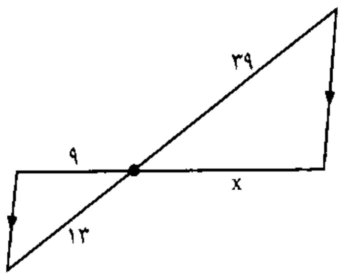


۵. اگر $\frac{۳}{۱}=\frac{y-۳}{y}=\frac{x-y}{۴}$ باشد، آن‌گاه $\frac{۳}{\square}=\frac{x}{\square}$

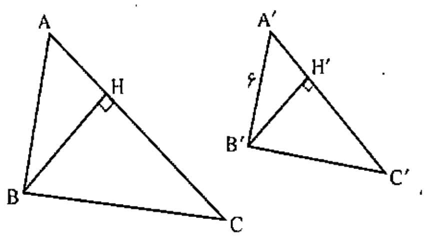
۶. اندازه‌ی x و y را تعیین کنید (پیکان‌های هم‌جهت خط‌های موازی را نشان می‌دهند.)



۷. اندازه‌ی x را در شکل زیر تعیین کنید (پیکان‌های هم‌جهت خط‌های موازی را نشان می‌دهند.)



۸. در شکل داده شده، دو مثلث ABC و A′B′C′ متشابه‌اند و ۲BH = ۳B′H′ است، اندازه‌ی ضلع AB را تعیین کنید.



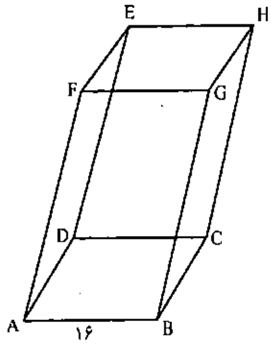
۹. حجم یک مکعب مستطیل ۲۴۰۰۰ واحد حجم و ابعاد آن به نسبت ۲ و ۳ و ۴ هستند:

الف) اندازه‌ی قطر این مکعب مستطیل را تعیین کنید.

ب) اندازه‌ی ضلع مکعبی را که سطح کل آن مساوی سطح کل این مکعب‌مستطیل است، به‌دست آورید.

۱۰. شعاع قاعده‌ی یک مخروط قائم ۱۲ و اندازه‌ی سطح کل این مخروط قائم ۶۲۴π است. اندازه‌ی حجم این مخروط قائم را تعیین کنید.

۱۱. اندازه‌ی ضلع مربع قاعده‌ی متوازی‌السطوح مایل ABCDEFGH مساوی ۱۶ سانتی‌متر و طول یال جانبی آن ۳۶ سانتی‌متر است. اگر زاویه‌ی یال AF با صفحه‌ی قاعده‌ی ABCD مساوی ۶۰ درجه باشد، اندازه‌ی حجم این متوازی‌السطوح را تعیین کنید.



۱۲. سطح کره‌ای را به‌دست آورید که حجم آن مساوی ۲۸۸π سانتی‌متر مکعب است.

حسابان ۱

○ احمد قندهری

۱. اگر $f(x)=\sqrt{2x-6}$ و $g(x)=\sqrt{1-x}$ باشد، بدون تشکیل تابع‌های fog و gof دامنه‌ی تعریف fog و gof را بیابید.

۲. اگر $f(x)=x+3$ و $g(x)=2x^2-x+1$ باشد، a را چنان بیابید تا داشته باشیم: $(fog)(a)=(gof)(a)$.

۳. ثابت کنید: $\sin\frac{\pi}{7}+\sin\frac{2\pi}{7}+\sin\frac{3\pi}{7}=\frac{1}{2}\cot\frac{\pi}{14}$.

۴. مطلوب است محاسبه‌ی حد:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1-\tan x}}$$

۵. در تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}\ ,\ x\neq 1$، $f(1)$ را چنان تعریف کنید که تابع در $x=1$ پیوسته باشد.

۶. تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases}ax^2+1 & , x>1\\ x+b & , x\leq 1\end{cases}$ در $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر است. $(a+b)$ را بیابید.

۷. از نقطه‌ی $P(0,-1)$ دو مماس بر منحنی تابع به معادله‌ی $y=x^4-4x$ رسم کرده‌ایم. طول‌های نقاط تماس را بیابید.

۸. در تابع با ضابطه‌ی $f(x)=x^3+ax^2+b$، a و b را چنان بیابید که نقطه‌ی $F(1,0)$ عطف نمودار تابع باشد. سپس جدول تغییرات و نمودار تابع با ضابطه‌ی $y=x^3-3x^2+2$ را رسم کنید.

۹. در تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\frac{(2a+b)x-5}{x-a+b}$، a و b را چنان بیابید که $O'(4,2)$ مرکز تقارن منحنی تابع باشد. سپس جدول تغییرات و نمودار تابع با ضابطه‌ی $y=\frac{2x-5}{x-4}$ را رسم کنید.

۱۰. جدول تغییرات و نمودار تابع با ضابطه‌ی $y=\sin^2 x+\sin x$ را وقتی $0\leq x\leq 2\pi$ است، رسم کنید.

۱۱. در کره‌ای به شعاع ۶، مخروطی به حجم ماکزیمم محاط کرده‌ایم. ارتفاع مخروط را بیابید.

جبر و احتمال

○ هوشنگ شرقی

۱. با استفاده از استقرای ریاضی ثابت کنید:

$$\frac{1}{1\times 3}+\frac{1}{2\times 4}+\cdots+\frac{1}{n(n+2)}<\frac{n}{n+1}$$

۲. اگر a و b دو عدد حقیقی و مثبت باشند، ثابت کنید:

$$\frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{a}\geq a^2+b^2$$

۳. می‌دانیم $\sqrt{2}$ عددی گنگ است، ثابت کنید، $\sqrt[3]{\sqrt{5}+\sqrt{2}}$ نیز عددی گنگ است.

۴. ثابت کنید در بین دانش‌آموزان یک مدرسه که ۲۱ کلاس پنجاه نفری دارد، حداقل دو دانش‌آموز می‌توان پیدا کرد که حرف اوّل نام و نام خانوادگی آن‌ها دقیقاً مثل هم باشد.

۵. ثابت کنید مجموع مربع‌های هر دو عدد طبیعی متوالی در تقسیم بر ۴ باقی‌مانده‌ی ۱ دارد.

۶. با استفاده از جبر مجموعه‌ها ثابت کنید:

الف) $(A\cup B)-(B\cup C)=(A-B)-C$

ب) $A\subseteq B\Rightarrow A-B=\varnothing$

۷. اگر $A=\{x|x\in Z, x^2<4x\}$ و $B=\{x|x\in \mathbb{R}, x^2\leq 1\}$، $A\times B$ را تشکیل داده و نمودار آن را رسم کنید.

۸. رابطه‌ی R را که به صورت زیر معرفی شده است، به صورت مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب نمایش داده و نمودار آن را رسم کنید:

$$\begin{cases}R: Z\to Z\\ xRy\Rightarrow x+y^2<xy+1\ ,\ x^2\leq 4\end{cases}$$

۹. رابطه‌ی زیر در $\mathbb{R}^2$ تعریف شده است:

$$\begin{cases}R: \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2\\ (x,y)R(z,t)\Leftrightarrow x^2+y^2=z^2+t^2\end{cases}$$

نشان دهید R هم ارزی است و کلاس هم‌ارزی $[(2,-1)]$ را به دست آورید.

۱۰. اعداد طبیعی بازه‌ی (۲۰ و ۳۵) را روی کارت نوشته و پس از مخلوط کردن کارت‌ها یکی از آن‌ها را به تصادف بیرون می‌آوریم. مطلوب است تعیین:

الف) فضای نمونه این تجربه‌ی تصادفی

ب) پیشامد A که در آن عدد روی کارت عددی مضرب ۳ باشد.

ج) پیشامد B که در آن عدد روی کارت عددی اول باشد.

د) پیشامد $A'\cap B'$

۱۱. ده نفر دانش‌آموز در یک ردیف شامل ده صندلی نشسته‌اند. احتمال آن‌که دو نفر آن‌ها که با هم برادرند، کنار هم نشسته باشند، چه‌قدر است؟

۱۲. درون یک مخروط که قطر قاعده و یال آن با هم مساوی‌اند، نقطه‌ای به تصادف انتخاب می‌کنیم، مطلوب است احتمال آن‌که این نقطه درون کره‌ی محاط در مخروط نباشد.

۱۳. تاسی طوری ساخته شده که احتمال آمدن عددهای بزرگ‌تر از ۳ در آن، دو برابر احتمال آمدن عددهای کوچک‌تر از ۳ است. اگر احتمال آمدن عدد ۳ در این تاس با تاس‌های معمولی یکسان باشد، احتمال آمدن ۴ در پرتاب این تاس چه قدر است؟

۱۴. در یک خانواده با ۵ فرزند، احتمال آن‌که سه پسر در خانوده باشد چه قدر است؟

۱۵. یک عدد طبیعی کوچک‌تر یا مساوی ۷۰ انتخاب می‌کنیم، احتمال آن‌که این عدد مضرب ۳ یا ۴ بوده و مضرب ۵ نباشد را به دست آورید.

۱۶. اگر $p(A\cup B)=\frac{2}{3}$ و $p(A)=\frac{1}{6}$ باشد، $p(A'-B')$ را به دست آورید.

هندسه‌ی ۲

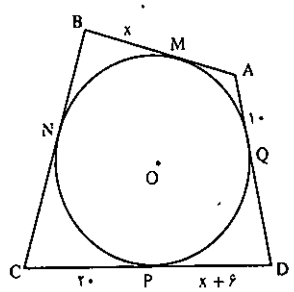
محمد هاشم رستمی

۱. با استفاده از برهان خلف ثابت کنید که در هر مثلث، عمودمنصف‌های هر دو ضلع، متقاطع‌اند.

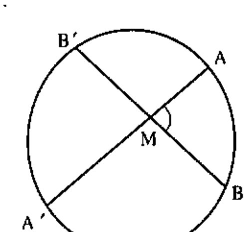
۲. اندازه‌های سه ارتفاع یک مثلث داده شده‌اند. این مثلث را رسم کنید.

۳. طول مستطیلی دو برابر عرض آن است. از برخورد نیم‌سازهای زاویه‌های درونی این مستطیل، مربعی به ضلع ۸ سانتی‌متر ایجاد شده است. اندازه‌ی طول و عرض این مستطیل را بیابید.

۴. چهارضلعی ABCD بر دایره‌ی O محیط است (شکل). اگر محیط این چهارضلعی ۱۲۰ باشد، اندازه‌ی x را تعیین کنید.



۵. دو وتر AA' و BB' از دایره‌ی C، در نقطه‌ی M یکدیگر را قطع کرده‌اند. تعیین کنید:

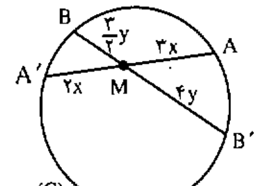


الف) اندازه‌ی زاویه‌ی AMB را اگر $\widehat{AB} = 80^\circ$ و $\widehat{A'B'} = 60^\circ$ باشد.

ب) اندازه‌ی زاویه‌ی AMB را اگر $\widehat{A'B} + \widehat{AB'} = 200^\circ$ باشد.

ج) اندازه‌ی کمان $\widehat{AB}$ را اگر $AMB' = 110^\circ$ و $\widehat{A'B'} = 3\widehat{AB}$ باشد.

۶. اندازه‌ی x و y را در دایره‌ی داده شده بیابید؛ در صورتی که $3AA' = 4BB' - 14$ باشد.



۷. نقطه‌های $A = (2,0)$ ، $B = (5,2)$ ، $C = (4,4)$ و $D = (1,2)$ رأس‌های چهارضلعی ABCD هستند.

الف) این چهارضلعی و تصویرش را تحت تبدیل $H(x,y) = (-x-2, y+3)$ رسم کنید.

ب) تبدیل H را توصیف کنید.

۸. معادله‌ی بازتاب خط $D: 2y - 5 = 0$ را نسبت به هریک از محورهای بازتاب زیر تعیین کنید:

الف) $y = x$

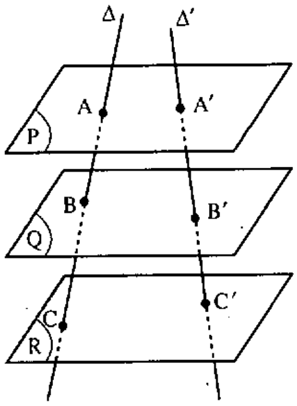
ب) $y = -x$

۹. در انتقال $T(x,y) = (x-2, y+7)$ ، نقطه‌های $A' = (3,5)$ و $B' = (2,-1)$ انتقال یافته‌ی چه نقطه‌هایی هستند؟

۱۰. مثلث ABC در صفحه‌ی P و نقطه‌ی S در خارج آن داده شده‌اند. روی خط‌های SA و SB، دو نقطه‌ی M و N را چنان اختیار می‌کنیم که $\frac{SM}{SA} = \frac{SN}{SB}$ باشد. ثابت کنید فصل مشترک صفحه‌ی P، صفحه‌ی CMN، موازی AB است.

۱۱. سه صفحه‌ی موازی P، Q و R، دو خط Δ و Δ' را در نقطه‌های A، B، C و A' ، B' و C' قطع کرده‌اند.

الف) اگر $AB = 12$ ، $AC = 30$ و $A'B' = 16$ باشد، $B'C'$ را تعیین کنید.



ب) اگر $BC = 18$ ، $A'B' = 12$ و $B'C' = 16$ باشد، اندازه‌ی AB را بیابید.

۱۲. دو نقطه‌ی A و B، صفحه‌ی P و خط Δ روی P داده شده‌اند. نقطه‌ی M را روی خط Δ چنان بیابید که مثلث MAB متساوی‌الساقین باشد (بحث کنید).

پاسخ تشریحی مسائل

ریاضیات ۱

.۱

$$\sqrt{2}-\sqrt{3}<0 \Rightarrow \left|\sqrt{2}-\sqrt{3}\right|=\sqrt{3}-\sqrt{2}$$
$$\sqrt{3}-\sqrt{2}-1<0 \Rightarrow \left|\sqrt{3}-\sqrt{2}-1\right|=\sqrt{2}+1-\sqrt{3}$$
$$\Rightarrow A=\sqrt{3}-\sqrt{2}+\sqrt{2}+1-\sqrt{3}=1$$

.۲

$$0<a<1 \Rightarrow 0<\frac{a}{1}<\frac{7a}{7a} \Rightarrow 0<\frac{a}{1}<\frac{7a+a}{7a+1}<\frac{7a}{7a}$$
$$\Rightarrow 0<\frac{a}{1}<\frac{8a}{7a+1}<1 \Rightarrow 0<\frac{8a}{7a+1}<1 \Rightarrow \frac{0}{a+2}<\frac{8a}{7a+a}<1$$
$$\frac{0}{a+2}<\frac{8a+0}{7a+1+a+2}<\frac{8a}{7a+1}<1$$
$$\Rightarrow \frac{0}{a+2}<\frac{8a+0}{8a+3}<\frac{8a}{7a+1}<1 \Rightarrow 0<\frac{8a}{8a+3}<1$$

.۳

$$\begin{cases}3x-2y=7\\2x+3y=9\end{cases} \Rightarrow \begin{matrix}3\times\\2\times\end{matrix}\begin{cases}3x-2y=7\\2x+3y=9\end{cases} \Rightarrow \begin{matrix}(1)\\(2)\end{matrix}\begin{cases}9x-6y=21\\4x+6y=18\end{cases}$$

رابطه‌ی (۱) و (۲) را با هم جمع می‌کنیم

$$13x=39 \Rightarrow x=\frac{39}{13}=3$$
$$3x-2y=7 \xrightarrow{x=3} 9-2y=7 \Rightarrow y=1$$

.۴

$$\frac{2/16\times10^4\times(0/1)^3}{(0/2)^2}=\frac{2/16\times10^4\times(10^{-1})^3}{(2\times10^{-1})^2}$$
$$=\frac{2/16\times10^4\times10^{-3}}{4\times10^{-2}}=0/54\times10^1\times10^2=5/4\times10^2$$

.۵

$$a+\sqrt[3]{b}=1 \Rightarrow (a+\sqrt[3]{b}=1)^3 \Rightarrow a^3+b+3a\sqrt[3]{b}(a+\sqrt[3]{b})=1$$
$$a^3+b+3a\sqrt[3]{b}=1 \Rightarrow a^3+3a\sqrt[3]{b}=1-b$$
$$\Rightarrow a(a^2+3\sqrt[3]{b})=1-b \Rightarrow \frac{a^2+3\sqrt[3]{b}}{1-b}=\frac{1}{a}$$

.۶

$$x^2+(x-2)(y+1)-2x=x^2+xy+x-2y-2-2x=$$
$$x^2+x(y-1)+(-2y-2)=(x+y+1)(x-2)$$

.۷

در مثلث قائم‌الزاویه‌ی با اضلاع K و ۴ داریم:

$$\frac{k}{4}=\cos y \Rightarrow k=4\cos y$$

با توجه به این‌که x و y دو زاویه‌ی متمم هستند پس:

$$x=\frac{\pi}{2}-y \Rightarrow \sin x=\cos y \Rightarrow k=4\sin x$$

.۸

$$\frac{1}{(3\sqrt{8}-\sqrt{50}+\sqrt{3})}=\frac{1}{6\sqrt{2}-5\sqrt{2}+\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$$

برای گویا کردن کسر، صورت و مخرج را در مزدوج مخرج ضرب می‌کنیم.

$$\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}\times\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2-3}=\sqrt{3}-\sqrt{2}$$

.۹

$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$$
$$x^3+8=(x+2)(x^2-2x+2^2)$$
$$\Rightarrow x^2-2x+2^2=x^m-kx^n+4 \Rightarrow \begin{cases}m=2\\n=1\\k=2\end{cases} \Rightarrow m+n+k=5$$

.۱۰

$$M=2(2x^3-1)^2+3(2x^3-4)^2+6(2x^3-1)(2x^3-4)$$
$$=2(4x^6-4x^3+1)+3(4x^6-16x^3+16)+24x^6-60x^3+24$$
$$=8x^6-8x^3+2+12x^6-48x^3+48+24x^6-60x^3+24$$
$$=44x^6-4x^3+74$$

.۱۱

$$45x+500=60x-1000 \Rightarrow -15x=-1500 \Rightarrow x=100$$

مبلغ خرید برای ۱۰۰ تخم‌مرغ برابر است با ۵۰۰۰=۵۰۰+۱۰۰×۴۵ تومان

$$100y=5000 \Rightarrow y=50$$

یعنی قیمت خرید هر تخم مرغ ۵۰ تومان بوده است.

۱۲. الف)

$$x_M=\frac{x_B+x_C}{2}=\frac{3+0}{2}=\frac{3}{2}\ ,\ y_M=\frac{y_B+y_C}{2}=\frac{0+2}{2}=1$$
$$\Rightarrow AM=\sqrt{(2-\frac{3}{2})^2+(3-1)^2}=\sqrt{\frac{1}{4}+4}=\frac{\sqrt{17}}{2}$$

ب)

$$m_{CH}\times m_{AB}=-1\ ,\ m_{AB}=\frac{y_A-y_B}{x_A-x_B}=\frac{3-0}{2-3}=-3$$
$$\Rightarrow m_{CH}=\frac{1}{3}$$
$$y-y_C=m(x-x_C) \Rightarrow y-2=\frac{1}{3}(x-0) \Rightarrow y=\frac{1}{3}x+2$$

.۱۳

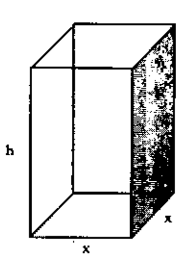
$$9x^2-12x+4=0$$
$$\begin{cases}a=9\\b=12 \Rightarrow \Delta=b^2-4ac=(12)^2-4(9)(4)=144-144=0\\c=4\end{cases}$$
$$\Rightarrow x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-12\pm\sqrt{0}}{2(9)}=\frac{-12}{18}=\frac{-2}{3}$$

.۱۴

حجم مکعب = سطح قاعده × ارتفاع = $x^2\times8$

سطح کل = مجموع سطح دو قاعده + سطح جانبی = $2x^2+4x(8)$

$$\Rightarrow 8x^2=2x^2+32x-10$$
$$\Rightarrow 6x^2=32x-10 \Rightarrow 3x^2-16x+5=0$$
$$\Rightarrow \frac{1}{3}(3x-15)(3x-1)=0$$
$$\Rightarrow \begin{cases}x=5 \Rightarrow V=8x^2=8\times25=200\\x=\frac{1}{3} \Rightarrow V=8x^2=8\times\frac{1}{9}=\frac{8}{9}\end{cases}$$



.۱۵

$$\left.\begin{matrix}x\ge0, x<2, 2x-1<x \Rightarrow x<1 \Rightarrow 0\le x<1\\x<0, -x<2, 2x-1<-x \Rightarrow 3x<1 \Rightarrow x<\frac{1}{3} \Rightarrow -2<x<0\end{matrix}\right\}$$
$$\Rightarrow -2<x<1$$

ریاضیات ۲

۱. ریشه‌ی هر یک از عبارات را محاسبه کنید.

$$A=\frac{x^2-4}{(3-2x)(4x^2-4x+1)}$$

$x^2-4=0 \Rightarrow x^2=4 \Rightarrow x=\pm 2$

$3-2x=0 \Rightarrow -2x=-3 \Rightarrow x=\frac{3}{2}$

$4x^2-4x+1=0;\ \Delta=b^2-4ac=$
$16-4(4)\times 1=16-16=0$

$\Rightarrow x=\frac{-b}{2a}=\frac{+4}{4\times 2}=\frac{1}{2}$ ریشه‌ی مضاعف

ریشه‌ها را از کوچک به بزرگ مرتب می‌کنیم و در جدول قرار می‌دهیم.

x		-2		$\frac{1}{2}$		$\frac{3}{2}$		2	
x^2-4	+		−		−		−		+
$3-2x$	+		+		+		−		−
$4x^2-4x+1$	+		+		+		+		+
A	+		−	ت.ن	−	ت.ن	+		−

۲. در معادله‌ی فوق اگر $\Delta<0$ و $-3m>0$ $(a>0)$ عبارت به ازای جمیع مقادیر x مثبت است.

$\Delta=b^2-4ac=(2m)^2-4(-3m)(1)=4m^2+12m<0$

$4m(m+3)<0 \Rightarrow \begin{cases}4m=0\Rightarrow m=0\\ m+3=0\Rightarrow m=-3\end{cases}$

$-3m>0 \Rightarrow m<0$

m		-3		0	
$4m^2+12m$	+		−		+
$4m^2+12m<0$			جواب		

اشتراک $m<0$ و $-3<m<0$ برابر است با: $-3<m<0$

جواب $\Rightarrow -3<m<0$

۳.

الف) $|3-x|<3 \Rightarrow -3<3-x<3$

حالت اول: $3-x<3 \Rightarrow -x<3-3 \Rightarrow -x<0 \Rightarrow x>0$
حالت دوم: $-3<3-x \Rightarrow -3-3<-x \Rightarrow -6<-x \Rightarrow 6>x$
$\Rightarrow 0<x<6$

ب) $|2x+1|\le|x-2|$

طرفین معادله را به توان ۲ می‌رسانیم.

$(2x+1)^2\le(x-2)^2 \Rightarrow 4x^2+4x+1\le x^2-4x+4 \Rightarrow$
$4x^2+4x+1+4x-x^2-4\le 0 \Rightarrow 3x^2+8x-3\le 0$

$\begin{cases}\Delta=b^2-4ac=64-4(3)(-3)=64+36=100\\ a=3\\ b=8\\ c=-3\end{cases}$

$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow x=\frac{-8\pm\sqrt{100}}{2\times 3} \Rightarrow x=\frac{-8+10}{6}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3},\quad x=\frac{-8-10}{6}=-3$

x		-3		$\frac{1}{3}$	
$3x^2+8x-3$	+		−		+

جواب $= -3\le x\le\frac{1}{3}$

۴. ابتدا دامنه‌ی عبارت را تعیین می‌کنیم، پس باید مخرج تک‌تک کسر را مساوی صفر قرار دهیم.

$2x=0 \Rightarrow x=0$

$2x+1=0 \Rightarrow 2x=-1 \Rightarrow x=-\frac{1}{2}$

$4x^2+2x=0 \Rightarrow 2x(2x+1)=0 \Rightarrow \begin{cases}x=0\\ x=-\frac{1}{2}\end{cases}$

دامنه $D=\mathbb{R}-\left\{0,-\frac{1}{2}\right\}$

مخرج مشترک $4x^2+2x=2x(2x+1)$ است.

$\frac{x-1}{2x}-\frac{1}{2x+1}=\frac{7-3x}{4x^2+2x}$

$\frac{(2x+1)(x-1)-2x}{2x(2x+1)}=\frac{7-3x}{4x^2+2x}$

$(2x+1)(x-1)-2x=7-3x$
$2x^2+x-2x-1-2x=7-3x \Rightarrow 2x^2=8$
$\Rightarrow x^2=4 \rightarrow x=\pm 2$

هر دو ریشه قابل قبول‌اند چون متعلق به دامنه هستند.

۵.

$$f(x)=ax+b \Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$
$$=\frac{a(x+\Delta x)+b-ax-b}{\Delta x}$$
$$=\frac{ax+a\Delta x-ax}{\Delta x}=\frac{a\Delta x}{\Delta x}=a$$

۶. برای این‌که تابع معکوس‌پذیر باشد، باید شرط زیر برقرار باشد. (شرط یک‌به‌یک بودن)

$f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow x_1=x_2$

$\frac{3x_1+7}{x_1+2}=\frac{3x_2+7}{x_2+2}$
$\Rightarrow (3x_1+7)(x_2+2)=(3x_2+7)(x_1+2)$
$\Rightarrow 3x_1x_2+6x_1+7x_2+14=3x_1x_2+6x_2+7x_1+14$
$\Rightarrow 7x_2-6x_2=7x_1-6x_1 \Rightarrow x_2=x_1$

در نتیجه تابع یک‌به‌یک است. برای به‌دست آوردن معکوس باید x را بر حسب y محاسبه کنیم.

$f(x)=y=\frac{3x+7}{x+2} \Rightarrow xy+2y=3x+7 \Rightarrow$

$xy-3x=7-2y \Rightarrow x(y-3)=7-2y \Rightarrow x=\frac{7-2y}{y-3}$

$\Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{7-2x}{x-3}$

در رابطه‌ی بالا به جای yها x قرار می‌دهیم.

۷.

$$O'(-3,2) \Rightarrow \begin{cases}\alpha=-3\\ \beta=2\end{cases} \quad A(7,3) \Rightarrow \begin{cases}x=7\\ y=3\end{cases} \quad \begin{cases}X=?\\ Y=?\end{cases}$$

$$A'\begin{cases}X=x-\alpha\\ Y=y-\beta\end{cases} \Rightarrow A'\begin{cases}7-(-3)\\ 3-2\end{cases} \Rightarrow A'=(10,1)$$

۸. ماتریس $X=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$ را در نظر می‌گیریم.

$$AX=\begin{bmatrix}7 & 8\\ 1 & 2\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix}-2 & 3\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7 & 8\\ 1 & 2\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}-2a+3c & -2b+3d\\ a(1)+0(c) & 1(b)+0(d)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7 & 8\\ 1 & 2\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix}-2a+3c & 3d-2b\\ a & b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7 & 8\\ 1 & 2\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}a=1\\ b=2\\ -2a+3c=7 \overset{a=1}{\Rightarrow} -2\times1+3c=7 \Rightarrow 3c=7+2=9 \Rightarrow c=\frac{9}{3}=3\\ 3d-2b=8 \overset{b=2}{\Rightarrow} 3d-2\times2=8 \Rightarrow 3d=8+4 \Rightarrow 3d=12 \Rightarrow d=4\end{cases}$$

۹.

$$\begin{cases}3x+2y=7\\ -4x-2y=-8\end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix}3 & 2\\ -4 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7\\ -8\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & 2\\ -4 & -2\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}7\\ -8\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\frac{1}{3(-2)-(-4)(2)}\begin{bmatrix}-2 & -2\\ 4 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}7\\ -8\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\frac{1}{-6+8}\begin{bmatrix}-2 & -2\\ 4 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}7\\ -8\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}-2 & -2\\ 4 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}7\\ -8\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & -1\\ 2 & \frac{3}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}7\\ -8\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\times7+(-1)(-8)\\ 2\times7+\frac{3}{2}\times(-8)\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-7+8\\ 14-12\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ 2\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ 2\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases}x=1\\ y=2\end{cases}$$

۱۰. برای این‌که دستگاه فوق جواب داشته باشد دترمینان ماتریس ضرایب صفر نباشد.

$$\begin{cases}2mx-4y=4\\ -4x+2my=2\end{cases} \quad A=\begin{bmatrix}2m & -4\\ -4 & 2m\end{bmatrix} \Rightarrow |A|\neq 0$$

$$\Rightarrow 4m^2-(-4)(-4)\neq 0 \Rightarrow 4m^2-16\neq 0 \Rightarrow m^2-4\neq 0$$

$$m^2\neq 4 \Rightarrow m\neq \pm 2$$

۱۱.

الف) $\log_{25}^{\sqrt{125}}=\log_{5^2}^{\sqrt{5^3}}=\log_{5^2}^{5^{\frac{3}{2}}}=\frac{\frac{3}{2}}{2}\log_5^5$

$$=\frac{\frac{3}{2}}{\frac{2}{1}}\times 1=\frac{3}{4}$$

ب) $\log_7^{49^2}=\log_7^{(7^2)^2}=\log_7^{7^4}=4\log_7^7=4\times1=4$

۱۲.

$$2\log_7^x=\log_7^{81} \Rightarrow \log_7^{x^2}=\log_7^{81} \Rightarrow x^2=81 \Rightarrow x=\pm 9$$

۱۳. باید t_3 و t_2 و t_1 را محاسبه و مجموع آن‌ها را به‌دست آوریم.

$$t_n=2n+1$$
$$\Rightarrow n=1 \Rightarrow t_1=2\times1+1=2+1=3$$
$$n=2 \Rightarrow t_2=2\times2+1=4+1=5$$
$$n=3 \Rightarrow t_3=2\times3+1=6+1=7$$
$$t_1+t_2+t_3=3+5+7=15$$

۱۴. چون باید چهار جمله بین $\frac{3}{8}$ و $\frac{128}{81}$ درج کنیم پس $a=t_1=\frac{3}{8}$ و $t_6=\frac{128}{81}$ است.

$\frac{3}{8}$,	□,	□,	□,	□,	$\frac{128}{81}$
↓	↓	↓	↓	↓	↓
a	t_2	t_3	t_4	t_5	t_6

$$a_n=aq^{n-1} \Rightarrow a_6=aq^5 \Rightarrow \frac{128}{81}=\frac{3}{8}\times q^5$$

$$\Rightarrow q^5=\frac{128}{81}\div\frac{3}{8}=\frac{128}{81}\times\frac{8}{3} \Rightarrow q^5=\frac{1024}{243}$$

$$q^5=\frac{2^{10}}{3^5} \Rightarrow q^5 \Rightarrow (\frac{2^2}{3})^5 \Rightarrow q^5=(\frac{4}{3})^5 \Rightarrow q=\frac{4}{3}$$

$$t_2=aq=\frac{3}{8}\times\frac{4}{3} \Rightarrow t_2=\frac{1}{2}$$

$$t_3=aq^2=\frac{3}{8}\times(\frac{4}{3})^2=\frac{2}{3}$$

$$t_4=aq^3=qt_3=\frac{4}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{8}{9}$$

$$t_5=aq^4=qt_4=\frac{4}{3}\times\frac{8}{9}=\frac{32}{27}$$

۱۵.

$$\sin\alpha=\frac{2}{3} \Rightarrow \cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha=1-(\frac{2}{3})^2=1-\frac{4}{9}=\frac{5}{9}$$

$\cos\alpha=\sqrt{\frac{5}{9}}=\frac{\pm\sqrt{5}}{3}$ حاده $\alpha \Rightarrow \cos\alpha=\frac{\sqrt{5}}{3}$

$$\cos\beta=\frac{1}{5} \Rightarrow \sin^2\beta=1-\cos^2\beta \Rightarrow \sin^2\beta=1-(\frac{1}{5})^2=$$

$1-\frac{1}{25}=\frac{24}{25} \Rightarrow \sin\beta=\sqrt{\frac{24}{25}}=\pm\frac{\sqrt{24}}{5}$ حاده $\beta \Rightarrow \sin\beta$ $=\frac{\sqrt{24}}{5}$

الف) $\sin2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha=2\times\frac{2}{3}\times\frac{\sqrt{5}}{3}=\frac{4\sqrt{5}}{9}$

ب) $\cos(\beta+30)=\cos\beta\cos30-\sin\beta\sin30$

$$=\frac{1}{5}\times\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{24}}{5}\times\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{10}-\frac{\sqrt{24}}{10}=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{24}}{10}$$

۱۶. $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ را در معادله جای‌گذاری می‌کنیم.

$$2\sin^2 x - \cos^2 x = 0 \Rightarrow 2(1-\cos^2 x) - \cos^2 x = 0$$

$$\Rightarrow 2 - 2\cos^2 x - \cos^2 x = 0 \Rightarrow 2 - 3\cos^2 x = 0$$

$$\Rightarrow -3\cos^2 x = -2 \Rightarrow \cos^2 x = \frac{2}{3} \Rightarrow \cos x = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$\cos x = \sqrt{\frac{2}{3}} = \cos\alpha \Rightarrow \alpha = \mathrm{Arc}\cos\sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$\Rightarrow x = 2k\pi \pm \mathrm{Arc}\cos\sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$\cos x = -\sqrt{\frac{2}{3}} \Rightarrow \cos x = \mathrm{Arc}\cos\left(-\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$$

$$\Rightarrow \alpha = \mathrm{Arc}\cos\left(-\sqrt{\frac{2}{3}}\right) \Rightarrow x = 2k\pi \pm \mathrm{Arc}\cos\left(-\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$$

۱۷.

$$\vec{v}_1.\vec{v}_2 = x_1x_2 + y_1y_2 = (2\sqrt{3}\times 3) + (-2\times\sqrt{3})$$

$$= 6\sqrt{3} - 2\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$$

$$\vec{v}_1.\vec{v}_2 = |\vec{v}_1||\vec{v}_2|\cos\theta \Rightarrow 4\sqrt{3} = \sqrt{x_1^2+y_1^2}\times\sqrt{x_2^2+y_2^2}\cos\theta$$

$$\Rightarrow 4\sqrt{3} = \sqrt{3^2+\sqrt{3}^2}\times\sqrt{(2\sqrt{3})^2+(-2)^2}\cos\theta$$

$$\Rightarrow 4\sqrt{3} = (2\sqrt{3})(4)\cos\theta \Rightarrow \cos\theta = \frac{4\sqrt{3}}{8\sqrt{3}} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \cos 60^\circ = \cos\theta \Rightarrow \theta = 60^\circ$$

۱۸. باید تبدیل (جایگشت) ۳ شی از ۵ شی را به دست آوریم.

الف) $p(5,3) = \frac{5!}{2!} = \frac{5\times4\times3\times2!}{2!} = 60$

ب) برای این که اعداد فرد باشند باید رقم یکان آن‌ها فرد باشد پس برای رقم یکان ۳ انتخاب ۳ و ۵ و ۷ را داریم، لذا یکی از این اعداد انتخاب شده و ۴ عدد برای انتخاب دهگان، سپس ۳ عدد برای جایگزینی درصدگان وجود دارند.

یکان دهگان صدگان

$\boxed{3}\ \boxed{4}\ \boxed{3}\quad 3\times4\times3 = 36$

ج) چون اعداد باید از ۴۰۰ کوچک‌تر باشند، لذا در صدگان آن‌ها فقط دو عدد ۲ و ۳ می‌توانند قرار گیرند، پس برای صدگان ۲ انتخاب داریم. پس از انتخاب یکی از اعداد فوق، ۴ انتخاب برای دهگان و سپس ۳ انتخاب برای عدد یکان وجود دارد.

یکان دهگان صدگان

$\boxed{2}\ \boxed{4}\ \boxed{3}\quad 2\times4\times3 = 24$

هندسه ۱

۱. داریم:

$$\begin{cases} x+y = 120^\circ \\ x-2y = 180^\circ - 120^\circ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y = 120^\circ \\ x-2y = 60^\circ \end{cases} \Rightarrow x = 100^\circ,\ y = 20^\circ$$

۲. می‌دانیم که تعداد قطرهای یک nضلعی محدب $\frac{n(n-3)}{2}$ است، پس داریم:

$$\frac{n(n-3)}{2} = 35 \Rightarrow n^2 - 3n = 70 \Rightarrow n^2 - 3n - 70 = 0$$

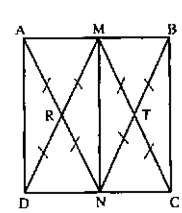
$$\Rightarrow (n-10)(n+7) = 0 \Rightarrow n = 10\ ,\quad n = -7 < 0$$

اما مجموع زاویه‌های درونی هر nضلعی محدب مساوی $(2n-4)$ قائمه و یا $(n-2)\times180^\circ$ است. پس خواهیم داشت:

مجموع زاویه‌های درونی ۱۰ ضلعی محدب:

$n = 10 \Rightarrow 2\times10 - 4 = 16$ قائمه $= 16\times90^\circ = 1440^\circ$

۳. اگر از M به N وصل کنیم، دو مستطیل AMND و MBCN به‌وجود می‌آیند که قطرهای آن‌ها با هم مساوی و منصف یکدیگرند. یعنی داریم:



AR=RN=RM=RD و MT=TC=TB=TN

اما به دلیل هم‌نهشت بودن مثلث‌های AND و BNC به حالت (ض ز ض)، AN=BN است. بنابراین نصف آن‌ها نیز مساوی خواهد بود. یعنی:

MR=RN=NT=TM

و درنتیجه MRNT لوزی است.

۴. می‌دانیم که از وصل کردن وسط‌های ضلع‌های متوالی یک لوزی، یک مستطیل پدید می‌آید. (چرا؟) پس MNPQ یک مستطیل است. اما داریم:

$MN = \frac{AC}{2} = \frac{60}{2} = 30$ و $NP = \frac{BD}{2} = \frac{24}{2} = 12$ (چرا؟)

بنابراین خواهیم داشت:

$S_{MNPQ} = MN\times NP = 30\times12 = 360$ واحد سطح

۵. با توجه به ویژگی نسبت‌های مساوی و خاصیت تناسب داریم:

$$\begin{cases} \frac{(x-y)+(y-3)+3}{4+y+1} = \frac{3}{1} \\ 3y = y-3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x}{4+y+1} = \frac{3}{1} \\ y = -\frac{3}{2} = -1/5 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{4-1/5+1} = \frac{3}{1} \Rightarrow \frac{x}{3/5} = \frac{3}{1} \Rightarrow \frac{x}{7} = \frac{3}{2}$$

پس خواهیم داشت: $\frac{x}{\boxed{7}} = \frac{3}{\boxed{2}}$

نکته: به جای ۷ و ۲ می‌توان $7k$ و $2k$ $(k \in R)$ را در نظر گرفت.

۶. به دلیل موازی بودن DE و BC داریم:

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC} \Rightarrow \frac{x}{x+(x+2)} = \frac{x+2}{(x+2)+(x+5)} = \frac{6}{y}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{2x+2} = \frac{x+2}{2x+7} = \frac{6}{y} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x}{2x+2} = \frac{x+2}{2x+7} \\ \frac{x}{2x+2} = \frac{6}{y} \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2x^2 + 7x = 2x^2 + 6x + 4 \Rightarrow x = 4$$

$$\Rightarrow \frac{4}{8+2} = \frac{6}{y} \Rightarrow \frac{4}{10} = \frac{6}{y} \Rightarrow y = 15$$

۷. بنا به قضیه‌ی تالس (یا تشابه مثلث‌ها) داریم:

$$\frac{x}{9} = \frac{39}{13} \Rightarrow \frac{x}{9} = 3 \Rightarrow x = 27$$

۸ . می‌دانیم که نسبت هر دو پاره‌خط متناظر در دو شکل متشابه، مساوی نسبت تشابه آن دو شکل است. بنابراین داریم:

$$\frac{A'B'}{AB}=\frac{B'H'}{BH} \qquad (۱)$$

اما بنا به فرض $۳B'H'=۲BH$ و یا $\frac{B'H'}{BH}=\frac{۲}{۳}$ (۲) است. از رابطه‌های ۱ و ۲ نتیجه می‌شود:

$$\frac{A'B'}{AB}=\frac{۲}{۳}$$

اما $A'B'=۶$ است. پس خواهیم داشت:

$$\frac{۶}{AB}=\frac{۲}{۳}\Rightarrow AB=۹$$

۹ . ابعاد مکعب مستطیل را $۲k$، $۳k$ و $۴k$ فرض می‌کنیم. داریم:

حجم مکعب مستطیل $=۲k\times ۳k\times ۴k=۲۴k^۳ \Rightarrow ۲۴۰۰۰$
$=۲۴k^۳\Rightarrow k^۳=۱۰۰۰\Rightarrow k=۱۰$

$\Rightarrow$ ابعاد مکعب مستطیل $=۲۰$ و ۳۰ و ۴۰

اما می‌دانیم که اندازه‌ی قطر مکعب مستطیل به ابعاد a، b و c برابر است با:

$$d=\sqrt{a^۲+b^۲+c^۲}$$

بنابراین داریم:

الف)

$$d=\sqrt{۲۰^۲+۳۰^۲+۴۰^۲}=\sqrt{۴۰۰+۹۰۰+۱۶۰۰}=\sqrt{۲۹۰۰}=۱۰\sqrt{۲۹}$$

ب) سطح کل این مکعب مستطیل برابر است با:

S کل = S جانبی + S دو قاعده $=۲(۲۰+۳۰)\times ۴۰+۲(۲۰\times ۳۰)$

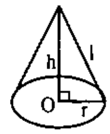
$\Rightarrow$ S کل $=۴۰۰۰+۱۲۰۰=۵۲۰۰$ واحد سطح

از طرف دیگر، سطح کل مکعبی به ضلع a، مساوی $۶a^۲$ است. پس خواهیم داشت:

$$۶a^۲=۵۲۰۰\Rightarrow a^۲=\frac{۵۲۰۰}{۶}=\frac{۲۶۰۰}{۳}\Rightarrow a=۱۰\sqrt{\frac{۲۶}{۳}}$$

ضلع مکعب

۱۰ . اگر h ارتفاع مخروط قائم، l مولد آن و r شعاع قاعده‌اش باشد، داریم:



S کل مخروط قائم = S جانبی + S قاعده $=۲\pi rl+\pi r^۲$

$$\Rightarrow ۶۲۴\pi=۲\pi\times ۱۲\times l+۱۴۴\pi\Rightarrow ۲۴\pi l=۴۸۰\pi\Rightarrow l=۲۰,$$

$$l=\sqrt{h^۲+r^۲}\Rightarrow ۲۰=\sqrt{h^۲+۱۴۴}\Rightarrow ۴۰۰=h^۲+۱۴۴$$

$\Rightarrow h^۲=۲۵۶\Rightarrow h=۱۶.$ ارتفاع مخروط

$\Rightarrow$ حجم مخروط $=\frac{۱}{۳}\pi r^۲h$

$\Rightarrow$ حجم مخروط $=\frac{۱}{۳}\times\pi\times ۱۲^۲\times ۱۶=۷۶۸\pi$ واحد حجم

۱۱ . می‌دانیم که:

ارتفاع × سطح قاعده = حجم متوازی‌السطوح

اما:

ارتفاع متوازی‌السطوح مایل = طول یال $\times\cos ۶۰^\circ=۳۶\times\frac{۱}{۲}$
$=۱۸cm,$ مساحت قاعده $=۱۶^۲=۲۵۶cm^۲$

$\Rightarrow$ حجم متوازی‌السطوح $=۲۵۶\times ۱۸=۴۶۰۸cm^۳$

۱۲ . شعاع کره را R می‌گیریم. داریم:

حجم کره $=\frac{۴}{۳}\pi R^۳\Rightarrow ۲۸۸\pi=\frac{۴}{۳}\pi R^۳\Rightarrow ۲۱۶=R^۳$

$\Rightarrow R=۶cm$

سطح کره $=۴\pi R^۲\Rightarrow$ سطح کره $=۴\pi\times ۶^۲=۱۴۴\pi cm^۲$

حسابان

۱ .

$$f(x)=\sqrt{۲x-۶}\ ,\ ۲x-۶\geq ۰\Rightarrow x\geq ۳\ ,$$

$$g(x)=\sqrt{۱-x}\ ,\ x\leq ۱$$

$$D_{fog}=\{x|x\in D_g, g(x)\in D_f\}$$

$$x\leq ۱\ ,\ \sqrt{۱-x}\geq ۳\Rightarrow ۱-x\geq ۹\Rightarrow x\leq -۸$$

$$\Rightarrow D_{fog}=(-\infty,-۸]$$

$$D_{gof}=\{x\in D_f, f(x)\in D_g\}$$

$$x\geq ۳\ ,\ \sqrt{۲x-۶}\leq ۱\Rightarrow ۲x-۶\leq ۱\Rightarrow x\leq\frac{۷}{۲}\Rightarrow$$

$$D_{gof}=\left[۳,\frac{۷}{۲}\right]$$

۲ .

$$f(g(a))=g(f(a))\Rightarrow f(۲a^۲-a+۱)=g(a+۳)\Rightarrow$$

$$۲a^۲-a+۱+۳=۲(a+۳)^۲-a-۳+۱\Rightarrow$$

$$۲a^۲-a+۴=۲a^۲+۱۱a+۱۶\Rightarrow ۱۲a=-۱۲\Rightarrow a=-۱$$

۳ .

$$\frac{\pi}{۷}=x\ ;\ \sin x+\sin ۲x+\sin ۳x=\frac{۱}{۲}\times\frac{\cos\frac{x}{۲}}{\sin\frac{x}{۲}}$$

$$\underbrace{۲\sin x\sin\frac{x}{۲}}+\underbrace{۲\sin ۲x\sin\frac{x}{۲}}+\underbrace{۲\sin ۳x\sin\frac{x}{۲}}=\cos\frac{x}{۲}$$

$$۲\sin a\sin b=\cos(a-b)-\cos(a+b)$$

$$\cos\frac{x}{۲}-\cos\frac{۳x}{۲}+\cos\frac{۳x}{۲}-\cos\frac{۵x}{۲}+\cos\frac{۵x}{۲}-\cos\frac{۷x}{۲}=\cos\frac{x}{۲}$$

$$\cos\frac{x}{۲}-\underbrace{\cos\frac{\pi}{۲}}_{۰}=\cos\frac{x}{۲}\Rightarrow\cos\frac{x}{۲}=\cos\frac{x}{۲}$$

۴ .

$$\lim_{x\to ۰}\frac{\sin x}{\sqrt{۱+\tan x}-\sqrt{۱-\tan x}}=\frac{۰}{۰}\ ,$$

$$\lim_{x\to ۰}\frac{\sin x}{\sqrt{۱+\tan x}-\sqrt{۱-\tan x}}\times\frac{\sqrt{۱+\tan x}+\sqrt{۱-\tan x}}{\sqrt{۱+\tan x}+\sqrt{۱-\tan x}}$$

$$=\lim_{x\to ۰}\frac{\sin x(\sqrt{۱+\tan x}+\sqrt{۱-\tan x})}{۱+\tan x-۱+\tan x}$$

$$=\lim_{x\to ۰}\frac{\sin x(\sqrt{۱+\tan x}+\sqrt{۱-\tan x})}{۲\tan x}$$

$$\sim\lim_{x\to ۰}\frac{x(\sqrt{۱+x}+\sqrt{۱-x})}{۲x}$$

$$=\lim_{x\to ۰}\frac{\sqrt{۱+x}+\sqrt{۱-x}}{۲}=\frac{\sqrt{۱}+\sqrt{۱}}{۲}=\frac{۲}{۲}=۱$$

۵ .

$$\lim_{x\to ۱}\frac{\sqrt[۳]{x}-۱}{\sqrt{x}-۱}=\frac{۰}{۰}\ ,\ \lim_{x\to ۱}\frac{\sqrt[۳]{x}-۱}{\sqrt{x}-۱}\times\frac{\sqrt[۳]{x^۲}+۱+\sqrt[۳]{x}}{\sqrt[۳]{x^۲}+۱+\sqrt[۳]{x}}\times\frac{\sqrt{x}+۱}{\sqrt{x}+۱}$$

$$=\lim_{x\to ۱}\frac{(x-۱)(\sqrt{x}+۱)}{(x-۱)(\sqrt[۳]{x^۲}+۱+\sqrt[۳]{x})}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt[3]{x^2}+1+\sqrt[3]{x}} = \frac{1+1}{1+1+1} = \frac{2}{3} = f(1)$$

.۶

$$f(x)=\begin{cases} ax^2+1\ , & x>1 \\ x+b\ , & x\le 1\end{cases} \qquad f'(x)=\begin{cases} 2ax\ , & x>1 \\ 1\ , & x\le 1\end{cases}$$

$$f'_{(1^+)} = f'_{(1^-)} \Rightarrow 2a=1 \Rightarrow a=\frac{1}{2}\ ,$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^-} f(x) \Rightarrow a+1=1+b$$

$$\frac{1}{2}+1=1+b \Rightarrow b=\frac{1}{2}$$

.۷

$A\begin{vmatrix} \alpha \\ \alpha^2-4\alpha \end{vmatrix}$ نقطه‌ی تماس

$; y=x^2-4x \Rightarrow y'_x=2x-4 \quad m_{\text{مماس}}=2\alpha-4 \qquad P\begin{vmatrix} 0 \\ -1 \end{vmatrix}$

$$y-y_A=m(x-x_A) \Rightarrow y-\alpha^2+4\alpha=(2\alpha-4)(x-\alpha)$$

این خط مماس باید از p بگذرد.

$$-1-\alpha^2+4\alpha=(2\alpha-4)(-\alpha)$$

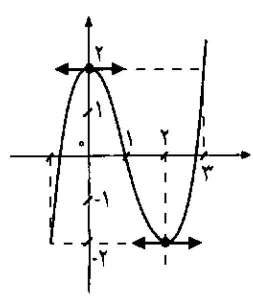
$\Rightarrow -1-\alpha^2+4\alpha=-2\alpha^2+4\alpha \Rightarrow \alpha^2=1 \Rightarrow \alpha=\pm 1$ طول‌های نقاط تماس

.۸

$$y=x^3+ax^2+b\ ,\ y_F=-\frac{a}{3}=1 \Rightarrow a=-3$$

$F(1,0) \xrightarrow{\text{در معادله‌ی تابع}} 0=1+a+b \Rightarrow 0=1-3+b \Rightarrow b=2$

$$y=x^3-3x^2+2 \Rightarrow y'_x=3x^2-6x=0 \Rightarrow x=0,2$$



x	$-\infty$		-1		0		1		2		3		$+\infty$
y'_x		+		+	0	−		−	0	+		+	
y	$-\infty$	↗	-2	↗	2	↘	0	↘	-2	↗	2	↗	$+\infty$

.۹

$y=\frac{(2a+b)x-5}{x-a+b} \qquad O'\begin{vmatrix} 4 \\ 2 \end{vmatrix} \Rightarrow$ $x=4$ معادله‌ی مجانب قائم، $y=2$ معادله‌ی مجانب افقی

مجانب قائم: $x-a+b=0 \Rightarrow 4-a+b=0 \Rightarrow a-b=4$

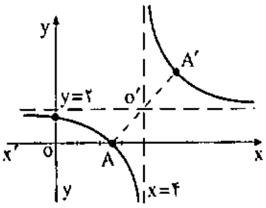
مجانب افقی: $y=2a+b \Rightarrow 2=2a+b \Rightarrow 2a+b=2$

$$\Rightarrow \begin{cases} a-b=4 \\ 2a+b=2 \end{cases} \Rightarrow a=2\ ,\ b=0$$

$y=\frac{2x-5}{x-4} \qquad$ $x=4$ معادله‌ی مجانب قائم، $y=2$ معادله‌ی مجانب افقی

$y'_x=\frac{-3}{(x-4)^2}<0 \quad$ $x>4$ یا $x<-4$

$$x=0 \Rightarrow y=\frac{5}{4}\ ,\ y=0 \Rightarrow x=\frac{5}{2}$$



x	$-\infty$		0		$\frac{5}{2}$		4		$+\infty$
y'		−		−		−	‖	−	
y	2	↘	$\frac{5}{4}$	↘	0	↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	2

.۱۰

$$y=\sin^2x+\sin x \quad 0\le x\le 2\pi \quad y'_x=2\cos x\sin x+\cos x=0$$

$$\cos x(2\sin x+1)=0\ ,\ \cos x=0 \Rightarrow x=\frac{\pi}{2}\ ,\ \frac{3\pi}{2}$$

$$2\sin x+1=0 \Rightarrow \sin x=\frac{-1}{2}$$

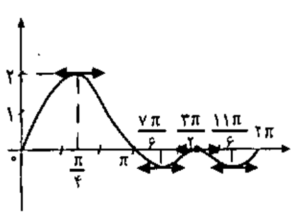
$$\sin x=\sin\frac{7\pi}{6} \Rightarrow \begin{cases} x=2k\pi+\frac{7\pi}{6} \\ x=2k\pi+\pi-\frac{7\pi}{6}\end{cases} \Rightarrow x=\frac{7\pi}{6}\ ,\ \frac{11\pi}{6}$$

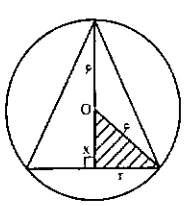
$$y=0 \Rightarrow \sin^2x+\sin x=0 \Rightarrow \sin x(\sin x+1)=0$$

$$\Rightarrow \sin x=0 \Rightarrow x=0,\pi,2\pi,\ \sin x+1=0$$

$$\Rightarrow \sin x=-1 \Rightarrow x=\frac{3\pi}{2}$$

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{7\pi}{6}$		$\frac{3\pi}{2}$		$\frac{11\pi}{6}$		2π
y'_x		+	0	−		−	0	+	0	−	0	+	
y		↗	2	↘	0	↘	$-\frac{1}{4}$	↗	0	↘	$-\frac{1}{4}$	↗	0





.۱۱

$h=x+6$ ارتفاع مخروط

در مثلث قائم‌الزاویه ی شکل داریم: $x^2+r^2=36 \Rightarrow r^2=36-x^2$

$V=\text{سطح قاعده}\times\frac{\text{ارتفاع}}{3} \Rightarrow V=\pi r^2\times\frac{h}{3}$

$$V=\frac{1}{3}\pi r^2h \Rightarrow V=\frac{\pi}{3}(36-x^2)(x+6)$$

$$V'_x=\frac{\pi}{3}\left[-2x(x+6)+(36-x^2)\right]=0$$

$$-2x(x+6)+(6-x)(6+x)=0 \Rightarrow (6+x)(-2x+6-x)=0$$

$6+x>0$ پس: $-2x+6-x=0$

$\Rightarrow -3x=-6 \Rightarrow x=2 \Rightarrow h=8$ ارتفاع مخروط

جبر و احتمال

۱.

$$n=1:\ \frac{1}{1\times3}<\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{1}{3}<\frac{1}{2}$$

$$n=k:\ \frac{1}{1\times3}+\frac{1}{2\times4}+\dots+\frac{1}{k(k+2)}<\frac{k}{k+1}\ \text{(فرض استقرا)}$$

$$n=k+1:\ \frac{1}{1\times3}+\frac{1}{2\times4}+\dots+\frac{1}{k(k+2)}+\frac{1}{(k+1)(k+3)}<\frac{k+1}{k+2}\ \text{(حکم استقرا)}$$

دو طرف فرض را با $\frac{1}{(k+1)(k+3)}$ جمع می‌کنیم:

$$\frac{1}{1\times3}+\frac{1}{2\times4}+\dots+\frac{1}{k(k+2)}+\frac{1}{(k+1)(k+3)}<\frac{1}{(k+1)(k+3)}+\frac{k}{k+1}$$

حال برای رسیدن از این فرض به حکم، کافی است نشان دهیم:

$$\frac{1}{(k+1)(k+3)}+\frac{k}{k+1}\le\frac{k+1}{k+2}$$

$$\Rightarrow\frac{k^2+3k+1}{(k+1)(k+3)}\le\frac{k+1}{k+2}\Leftrightarrow k^3+3k^2+k+2k^2+6k+2\le(k+1)^2(k+3)$$

$$=(k^2+2k+1)(k+3)=k^3+5k^2+7k+3\Leftrightarrow 2\le3$$

و چون همه‌ی مراحل برگشت‌پذیرند، لذا نامساوی فوق صحیح بوده و از ترکیب آن با فرض جدید به حکم می‌رسیم:

$$\begin{cases}\frac{1}{1\times3}+\frac{1}{2\times4}+\dots+\frac{1}{k(k+2)}+\frac{1}{(k+1)(k+3)}<\frac{1}{(k+1)(k+3)}+\frac{k}{k+1}\\ \frac{1}{(k+1)(k+3)}+\frac{k}{k+1}\le\frac{k+1}{k+2}\end{cases}$$

$$\Rightarrow\frac{1}{1\times3}+\frac{1}{2\times4}+\dots+\frac{1}{(k+1)(k+3)}<\frac{k+1}{k+2}$$

۲. به کمک استدلال بازگشتی حکم ثابت می‌شود:

$$\frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{a}\ge a^2+b^2\Leftrightarrow\frac{a^4+b^4}{ab}\ge a^2+b^2$$

$$a^4+b^4\ge a^3b+ab^3\Leftrightarrow a^4-a^3b+b^4-ab^3\ge0$$

$$\Leftrightarrow a^3(a-b)-b^3(a-b)\ge0\Leftrightarrow(a-b)(a^3-b^3)\ge0$$

$$\Leftrightarrow(a-b)^2(a^2+ab+b^2)\ge0$$

a^2+ab+b^2 یک سه‌جمله‌ای همواره مثبت است و $(a-b)^2\ge0$ پس، نتیجه آخر همواره درست و همه‌ی مراحل نیز برگشت‌پذیرند.

۳. اثبات با برهان خلف: فرض کنیم $\sqrt{\sqrt5+\sqrt2}$ عددی گنگ نباشد:

$$\sqrt{\sqrt5+\sqrt2}=\frac{m}{n}\ \text{و}\ m,n\in Z\ \text{و}\ n\ne0\Rightarrow\sqrt5+\sqrt2=\frac{m^2}{n^2}$$

$$\Rightarrow\sqrt5=\frac{m^2}{n^2}-\sqrt2\Rightarrow5=\frac{m^4}{n^4}+2-\frac{2\sqrt2m^2}{n^2}$$

$$\Rightarrow\left(\frac{2m^2}{n^2}\right)\sqrt2=\frac{m^4}{n^4}-3=\frac{m^4-3n^4}{n^4}\Rightarrow\sqrt2=\frac{\frac{m^4-3n^4}{n^4}}{\frac{2m^2}{n^2}}$$

$$\Rightarrow\sqrt2=\frac{m^4-3n^4}{2m^2n^2}=\frac{p}{q},\ p,q\in Z,q\ne0\Rightarrow\sqrt2\in Q\ \text{(تناقض)}$$

۴. تعداد دانش‌آموزان مدرسه ۱۰۵۰=۵۰×۲۱ تا است و تعداد ترکیب‌های مختلف حروف اول نام و نام خانوادگی به کمک اصل ضرب، ۱۰۲۴=۳۲×۳۲ است. و درنتیجه طبق اصل لانه کبوتری لااقل دو نفر یافت می‌شوند که حرف اول نام و نام خانوادگی آن‌ها دقیقاً یکسان است.

۵.

$$n^2+(n+1)^2=n^2+n^2+2n+1=2n^2+2n+1=2n(n+1)+1$$

و چون n و $n+1$ دو عدد متوالی هستند پس لااقل یکی از آن‌ها زوج است و درنتیجه حاصلضرب آن‌ها زوج است:

$$n(n+1)=2k\Rightarrow n^2+(n+1)^2=4k+1$$

۶.

الف) $(A\cup B)-(B\cup C)=(A\cup B)\cap(B\cup C)'=(A\cup B)\cap(B'\cap C')$

$$=[(A\cup B)\cap B']\cap C'=[(A\cap B')\cup\underbrace{(B\cap B')}_{\varnothing}]\cap C'$$

$$=(A\cap B')\cap C'=(A-B)-C$$

ب) $A\subseteq B\Rightarrow A\cup B=B\Rightarrow(A\cup B)\cap B'=B\cap B'$

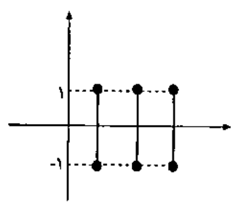
$$\Rightarrow(A\cap B')\cup\underbrace{(B\cap B')}_{\varnothing}=\varnothing\Rightarrow A\cap B'=\varnothing\Rightarrow A-B=\varnothing$$

۷.

$$x^2<4x\Rightarrow x(x-4)<0\Rightarrow0<x<4$$

$$\Rightarrow x=1,2,3\ \Rightarrow\ A=\{1,2,3\},\ B=[-1,1]$$

$$\Rightarrow A\times B=\{(x,y)|x=1,2,3,\ y\in R,\ -1\le y\le1\}$$



۸.

$x^2\le4\Rightarrow-2\le x\le2\Rightarrow x=-2$ یا -1 یا 0 یا 1 یا 2

$$x=-2\Rightarrow y^2-2<-2y+1\Rightarrow y^2+2y-3<0\Rightarrow-3<y<1$$

$\Rightarrow y=-2$ یا -1 یا 0

$$x=-1\Rightarrow y^2-1<-y+1\Rightarrow y^2+y-2<0$$

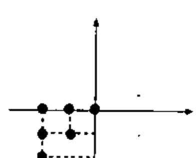
$\Rightarrow-2<y<1\Rightarrow y=-1$ یا 0

$$x=0\Rightarrow y^2<1\Rightarrow-1<y<1\Rightarrow y=0$$

$$x=1\Rightarrow y^2+1<y+1\Rightarrow y^2-y<0\Rightarrow0<y<1\Rightarrow y\in Q$$

$$x=2\Rightarrow y^2+2<2y+1\Rightarrow y^2-2y+1<0\Rightarrow(y-1)^2<0\Rightarrow y\in Q$$

$$\Rightarrow R=\{(-2,-2),(-2,-1),(-2,0),(-1,-1),(-1,0),(0,0)\}$$



۹.

خاصیت انعکاسی: $(x,y)R(x,y)\Rightarrow x^2+y^2=x^2+y^2$

خاصیت تقارنی: $(x,y)R(z,t)\Leftrightarrow(z,t)R(x,y)$

$$x^2+y^2=z^2+t^2\Leftrightarrow z^2+t^2=x^2+y^2$$

خاصیت تعدی: $(x,y)R(z,t),(z,t)R(r,s)\Rightarrow$

$$x^2+y^2=z^2+t^2,\ z^2+y^2=r^2+s^2\Rightarrow x^2+y^2=r^2+s^2$$

$$\Rightarrow(x,y)R(r,s)$$

$$(-1,2)R(x,y)\Rightarrow x^2+y^2=1+4=5$$

$$\Rightarrow[(-1,2)]=\{(x,y)|x,y\in R,\ x^2+y^2=5\}$$

۱۰.

الف) $S=\{21,22,23,24,25,26,27,28,29,30,31,32,33,34\}$

ب) $A=\{21,24,27,30,33\}$

ج) $B=\{23,29,31\}$

د)

$$A \cup B = \{21, 23, 24, 27, 29, 30, 31, 33\}$$

$$A' \cap B' = (A \cup B)' = \{22, 25, 26, 28, 32, 34\}$$

۱۱. $$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{9! \times 2!}{10!} = \frac{9! \times 2}{10 \times 9!} = \frac{1}{5}$$

۱۲. $$AB = AC = BC \text{ و } OA = \frac{2}{3}AH \text{ و } \Delta AOH' : \sin 30^\circ = \frac{OH'}{OA} = \frac{1}{2}$$

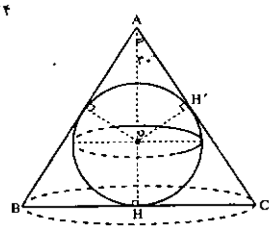
$$\Rightarrow OH' = r = \frac{1}{2}OA = \frac{1}{3}AH \ , \ AH = \frac{\sqrt{3}}{2}AB$$

$$\Rightarrow AH = \frac{\sqrt{3}}{2}a \ , \ BC = a \ , \ r = \frac{\sqrt{3}}{6}a$$

$$\Rightarrow (\text{کره}) \ V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{1}{12} \times \frac{\sqrt{3}}{6}a^3\right) = \frac{\pi\sqrt{3}a^3}{54}$$

$$\Rightarrow (\text{مخروط}) \ V = \frac{1}{3}\pi BH^2 . AH = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right) = \frac{\pi\sqrt{3}a^3}{24}$$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{\frac{\pi\sqrt{3}a^3}{54}}{\frac{\pi\sqrt{3}a^3}{24}} = \frac{24}{54} = \frac{4}{9} \Rightarrow P(A') = 1 - P(A) = \frac{5}{9}$$



۱۳.

$$P(1) = P(2) = x, P(4) = P(5) = P(6) = 2x, P(3) = \frac{1}{6} \Rightarrow$$

$$P(1) + P(2) + P(3) + P(4) + P(5) + P(6) = 8x + \frac{1}{6} = 1$$

$$\Rightarrow x = \frac{5}{48} \Rightarrow p(4) = 2x = \frac{5}{12}$$

۱۴. $$P(A) = \frac{\binom{5}{3}}{2^5} = \frac{10}{32} = \frac{5}{16}$$

۱۵. اگر A را پیشامد مضرب ۳ بودن، B را پیشامد مضرب ۴ بودن و C را پیشامد مضرب ۵ بودن عدد انتخاب شده بگیریم، خواهیم داشت:

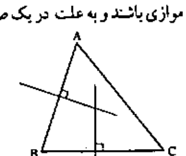
$$P((A \cup B) \cap C') = P((A \cup B) - C) = P(A \cup B) - P[(A \cup B) \cap C]$$
$$= P(A) + P(B) - P(A \cap B) - P[(A \cap C) \cup (B \cap C)]$$
$$= P(A) + P(B) - P(A \cap B) - [P(A \cap C) + P(B \cap C) - P(A \cap B \cap C)]$$
$$= P(A) + P(B) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C) =$$
$$\frac{\left[\frac{70}{3}\right]}{70} + \frac{\left[\frac{70}{4}\right]}{70} - \frac{\left[\frac{70}{12}\right]}{70} - \frac{\left[\frac{70}{15}\right]}{70} - \frac{\left[\frac{70}{20}\right]}{70} + \frac{\left[\frac{70}{60}\right]}{70} =$$
$$\frac{23 + 17 - 5 - 4 - 3 + 1}{70} = \frac{29}{70}$$

۱۶.

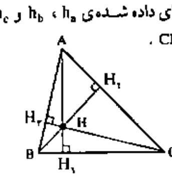
$$P(A' - B') = P(A' \cap B) = P(B - A) = P(B) - P(A \cap B)$$
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(A) + P(A' - B')$$
$$\Rightarrow \frac{2}{3} = \frac{1}{6} + P(A' - B') \Rightarrow P(A' - B') = \frac{2}{3} - \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$$

هندسه ۲

۱. مثلث ABC را در نظر می‌گیریم و عمودمنصف‌های دو ضلع از این مثلث، مثلاً عمودمنصف‌های ضلع‌های AB و BC را رسم می‌کنیم. اگر این دو عمودمنصف متقاطع باشند، حکم مسئله ثابت شده است. اما اگر این دو عمودمنصف متقاطع نباشند، چون در یک صفحه قرار دارند، با هم موازی خواهند بود که در این صورت A، B و C روی یک خط راست قرار خواهند داشت. یعنی مثلثی تشکیل نمی‌دهند و این خلاف فرض مثلث بودن ABC است. پس دو عمودمنصف رسم شده نمی‌توانند موازی باشند و به علت در یک صفحه قرار داشتن، متقاطع‌اند.



۲. فرض می‌کنیم مسئله حل شده و مثلث ABC جواب مسئله باشد؛ یعنی مثلثی باشد که اندازه‌ی سه ارتفاع آن مقدارهای داده شده‌ی h_a، h_b و h_c باشد. بنابراین داریم: $AH_1 = h_a$، $BH_2 = h_b$ و $CH_3 = h_c$.



اگر نقطه‌ی برخورد ارتفاع‌های این مثلث را H بنامیم، به طوری که دیده می‌شود، هیچ مثلثی از مثلث‌های تشکیل دهنده‌ی شکل، مثلاً مثلث‌های AH_1B، AH_1C، HBC، HH_1B و HH_1C و...، با اندازه‌های معلوم h_a، h_b و h_c قابل رسم نیستند. پس لازم است با توجه به معلومات مسئله، مثلثی قابل رسم پیدا کنیم.

می‌دانیم، رابطه‌ای در مثلث که اندازه‌ی ارتفاع‌های مثلث در آن دخالت دارند، رابطه‌ی مساحت مثلث $S = \frac{1}{2}a.h_a = \frac{1}{2}b.h_b = \frac{1}{2}c.h_c$ است. این رابطه را می‌توانیم به صورت زیر بنویسیم:

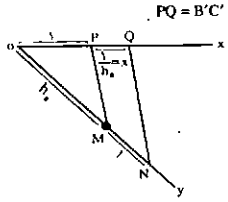
$$\frac{a}{\frac{1}{h_a}} = \frac{b}{\frac{1}{h_b}} = \frac{c}{\frac{1}{h_c}}$$

فرض می‌کنیم $B'C' = \frac{1}{h_a}$، $A'C' = \frac{1}{h_b}$ و $A'B' = \frac{1}{h_c}$ باشد. در این صورت خواهیم داشت:

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'}$$

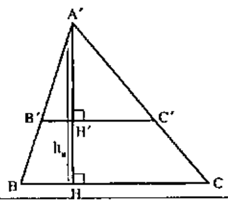
این رابطه نشان می‌دهد که مثلث $A'B'C'$ که ضلع‌های آن $\frac{1}{h_a}$، $\frac{1}{h_b}$ و $\frac{1}{h_c}$ هستند، با مثلث ABC متشابه است. بنابراین برای حل مسئله، یعنی رسم مثلث ABC که سه ارتفاع آن داده شده، کافی است مثلث $A'B'C'$ را که سه ضلع آن $\frac{1}{h_a}$، $\frac{1}{h_b}$ و $\frac{1}{h_c}$ هستند و متشابه با مثلث ABC است، رسم کنیم و آن‌گاه مثلثی متشابه با $A'B'C'$ بکشیم که ارتفاع‌های آن h_a، h_b و h_c باشند.

برای انجام این کار، نخست پاره‌خط‌هایی به طول $\frac{1}{h_a}$، $\frac{1}{h_b}$ و $\frac{1}{h_c}$ رسم می‌کنیم. برای رسم پاره‌خط $A'B' = \frac{1}{h_a}$، این رابطه را به صورت $\frac{1}{A'B'} = \frac{h_a}{1}$ در می‌آوریم و آن‌گاه چنین عمل می‌کنیم: زاویه‌ی دل‌خواه xoy را رسم می‌کنیم. روی ox، پاره‌خط‌های $OM = h_a$ و $MN = 1$ و روی ضلع oy پاره‌خط $OP = 1$ را جدا می‌کنیم. آن‌گاه خطی از M به P می‌کشیم و از N خطی موازی MP رسم می‌کنیم تا oy را در نقطه‌ی Q قطع کند. خواهیم داشت: $PQ = B'C' = \frac{1}{h_a}$.



به روش مشابه پاره‌خط‌های $A'C' = \frac{1}{h_b}$ و $A'B' = \frac{1}{h_c}$ را رسم می‌کنیم. اکنون مثلث $A'B'C'$ را با معلوم بودن اندازه‌ی سه ضلع آن، یعنی $A'B'$، $A'C'$ و $B'C'$ رسم می‌کنیم. حال ارتفاع $A'H'$ از این مثلث را رسم می‌کنیم و پاره‌خط $A'H_1 = h_a$ را روی $A'H'$ و در جهت از A' به H' جدا می‌کنیم. از نقطه‌ی H_1 خطی موازی $B'C'$ رسم می‌کنیم تا خط‌های $A'B'$ و $A'C'$ را در نقطه‌های B و C قطع کند. مثلث $A'BC$ همان مثلث ABC جواب مسئله است؛ یعنی مثلثی است که اندازه‌ی سه ارتفاعش h_a، h_b و h_c است.

سؤال: چرا دو ارتفاع دیگر مثلث $A'BC$، همان h_b و h_c هستند.



۳. طول مستطیل را a و عرض آن را b می‌گیریم. داریم: $a = ۲b \quad (۱)$

از طرف دیگر می‌دانیم، طول ضلع مربعی که از برخورد نیم‌سازهای زاویه‌های درونی مستطیلی به طول a و عرض b ایجاد می‌شود، برابر است با:

$$\text{ضلع مربع حاصل} = \frac{(a-b)\sqrt{۲}}{۲}$$

بنابراین داریم:

$$۸ = \frac{(a-b)\sqrt{۲}}{۲} \Rightarrow a-b = ۸\sqrt{۲} \qquad (۲)$$

از (۱) و (۲) داریم:

$$\begin{cases} a = ۲b \\ a-b = ۸\sqrt{۲} \Rightarrow b = ۸\sqrt{۲}\ ,\ a = ۱۶\sqrt{۲} \end{cases}$$

۴. در چهارضلعی محیطی ABCD داریم:

$$AB+CD = BC+AD \Rightarrow \text{محیط } ABCD = ۲(AB+CD)$$

اما $AM = AQ = ۱۰$ است، پس داریم:

$$\text{محیط } ABCD = ۲(۱۰+x+x+۶+۲۰) \Rightarrow ۱۲۰ = ۲(۳۶+۲x)$$

$$\Rightarrow ۳۶+۲x = ۶۰ \Rightarrow ۲x = ۲۴ \Rightarrow x = ۱۲$$

۵. می‌دانیم که: $\hat{AMB} = \frac{\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{A'B'}}{۲}$. پس داریم:

الف) $\hat{AMB} = \frac{۸۰^\circ + ۶۰^\circ}{۲} = ۷۰^\circ$

ب) $\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{A'B'} = ۳۶۰^\circ - (\overset{\frown}{A'B} + \overset{\frown}{AB'}) = ۳۶۰^\circ - ۲۰۰^\circ = ۱۶۰^\circ$

$$\Rightarrow \hat{AMB} = \frac{۱۶۰^\circ}{۲} = ۸۰^\circ$$

ج) $\hat{AMB'} = ۱۱۰^\circ \Rightarrow \hat{AMB} = ۱۸۰^\circ - ۱۱۰^\circ = ۷۰^\circ$

$$\hat{AMB} = \frac{\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{A'B'}}{۲} \Rightarrow ۷۰^\circ = \frac{\overset{\frown}{AB} + ۳\overset{\frown}{AB}}{۲} \Rightarrow \overset{\frown}{AB} = ۳۵^\circ$$

۶. با توجه به رابطه‌ی طولی در دایره داریم:

$$MA.MA' = MB.MB' \Rightarrow ۳x \times ۲x = \frac{۳}{۲}y \times ۴y \Rightarrow$$

$$۶x^۲ = ۶y^۲ \Rightarrow x^۲ = y^۲ \Rightarrow x = y \qquad (۱)$$

از طرف دیگر بنا به فرض داریم:

$$۳AA' = ۴BB' - ۱۴ \Rightarrow ۳(۳x+۲x) = ۴(\frac{۳}{۲}y + ۴y) - ۱۴$$

$$\Rightarrow ۱۵x = ۲۲y - ۱۴ \Rightarrow ۷y = ۱۴ \Rightarrow y = ۲ \Rightarrow x = ۲$$

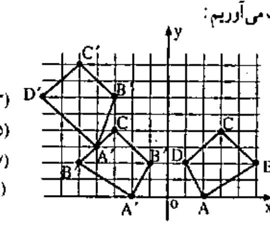
۷. الف) تصویر رأس‌های A، B، C و D از چهارضلعی ABCD تحت تبدیل $T(x,y) = (-x-۲, y+۳)$ را به ترتیب A'، B'، C' و D' می‌نامیم و مختصات این نقطه‌ها را به‌دست می‌آوریم:

$$A' = T(A) = T(۲,۰) = (-۲-۲, ۰+۳) = (-۴,۳)$$

$$B' = T(B) = T(۵,۲) = (-۵-۲, ۲+۳) = (-۷,۵)$$

$$C' = T(C) = T(۳,۴) = (-۳-۲, ۴+۳) = (-۵,۷)$$

$$D' = T(D) = T(۱,۲) = (-۱-۲, ۲+۳) = (-۳,۵)$$



اکنون نقطه‌های A، B، C، D و A'، B'، C'، D' را در یک دستگاه محورهای مختصات تعیین می‌کنیم و چهارضلعی‌های ABCD و $A'B'C'D'$ را رسم می‌کنیم.

ب) تحت بازتاب $R(x,y)=(-x,y)$، چهارضلعی ABCD به چهارضلعی $A_۱B_۱C_۱D_۱$، و چهارضلعی $A_۱B_۱C_۱D_۱$ تحت انتقال با بردار انتقال $\vec{V} = (-۲,۳)$، به چهارضلعی $A'B'C'D'$ تبدیل می‌شود. پس تبدیل H نتیجه‌ی ترکیب یک بازتاب و یک انتقال است.

۸. دو نقطه‌ی دل‌خواه از خط $۲y - ۵ = ۰$ یا $y = \frac{۵}{۲}$ را درنظر می‌گیریم. برای مثال، نقطه‌های $A = (۰, \frac{۵}{۲})$ و $B = (۱, \frac{۵}{۲})$ از آن را انتخاب می‌کنیم و تصویر آن‌ها را تحت بازتاب‌های (الف) و (ب) به‌دست می‌آوریم. آن‌گاه معادله‌ی خط تصویر در هر یک از این دو بازتاب را می‌نویسیم:

الف) ضابطه‌ی بازتاب نسبت به خط y=x، $R(x,y) = (y,x)$ است. پس داریم:

$$A' = R(A) = R(۰, \frac{۵}{۲}) = (\frac{۵}{۲}, ۰) \Rightarrow A' = (\frac{۵}{۲}, ۰)$$

$$B' = R(B) = R(۱, \frac{۵}{۲}) = (\frac{۵}{۲}, ۱) \Rightarrow B' = (\frac{۵}{۲}, ۱)$$

معادله‌ی تصویر خط داده شده تحت بازتاب نسبت به خط y=x: $\Rightarrow A'B': x = \frac{۵}{۲}$

ب) ضابطه‌ی نگاشت بازتاب نسبت به خط y=-x، $R(x,y)=(-y,-x)$ است. بنابراین داریم:

$$A''=R(A)=R(0,\frac{5}{2})=(-\frac{5}{2},0)$$

$$B''=R(B)=R(1,\frac{5}{2})=(-\frac{5}{2},-1)$$

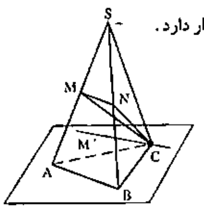
معادله‌ی بازتاب خط داده شده نسبت به خط y=-x: $\Rightarrow A''B'':x=-\frac{5}{2}$

۹. فرض می‌کنیم $A=(x,y)$ باشد. داریم:

$$A'=(3,5)\Rightarrow\begin{cases}x-2=3\\y+7=5\end{cases}\Rightarrow A\begin{vmatrix}x=5\\y=-2\end{vmatrix}$$

$$B'=(2,-1)\Rightarrow\begin{cases}x-2=2\\y+7=-1\end{cases}\Rightarrow B\begin{vmatrix}x=4\\y=-8\end{vmatrix}$$

۱۰. از رابطه‌ی $\frac{SM}{SA}=\frac{SN}{SB}$ نتیجه می‌شود که MN موازی AB است؛ در نتیجه با صفحه‌ی P موازی است. زیرا خط AB روی صفحه‌ی P قرار دارد.



بنابراین هر صفحه‌ای که بر MN بگذرد، صفحه‌ی P را در فصل مشترکی موازی خط MN قطع خواهد کرد. در نتیجه، صفحه‌ی CMN صفحه‌ی P را در فصل مشترکی موازی MN قطع می‌کند که از نقطه‌ی C می‌گذرد.

۱۱. بنابر قضیه‌ی تالس در فضا، $\frac{AB}{BC}=\frac{A'B'}{B'C'}$ است. بنابراین داریم:

الف)

$$AC=30, BC=AC-AB=30-12=18,\ \frac{AB}{BC}=\frac{A'B'}{B'C'}$$

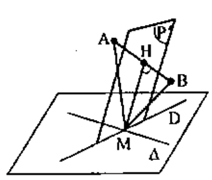
$$\Rightarrow\frac{12}{18}=\frac{16}{B'C'}\Rightarrow B'C'=24$$

ب)

$$BC=18, A'B'=12, B'C'=16, \frac{AB}{BC}=\frac{A'B'}{B'C'}$$

$$\Rightarrow\frac{AB}{18}=\frac{12}{16}\Rightarrow AB=13/5$$

۱۲. فرض می‌کنیم مثلث MAB جواب مسئله باشد. یعنی مثلثی باشد که رأس M آن روی خط Δ در صفحه‌ی P و MA=MB است.



این یعنی نقطه‌ی M به یک فاصله از دو نقطه‌ی A و B است. پس به مکان هندسی نقطه‌ای از فضا تعلق دارد که از دو نقطه‌ی A و B به یک فاصله است. اما می‌دانیم، مکان هندسی نقطه‌ای از فضا که از دو نقطه‌ی A و B به یک فاصله است، صفحه‌ی عمودمنصف پاره‌خط AB است. بنابراین برای حل مسئله چنین عمل می‌کنیم:

۱. صفحه‌ی عمودمنصف پاره‌خط AB را رسم می‌کنیم و آن را صفحه‌ی P' می‌نامیم.

۲. فصل مشترک صفحه‌ی P' با صفحه‌ی P را D می‌نامیم.

۳. نقطه‌ی برخورد خط Δ و خط D را M می‌نامیم.

۴. از M به A و B وصل می‌کنیم. مثلث متساوی‌الساقین ABC جواب مسئله است.

بحث:

۱. اگر صفحه‌ی P' موازی صفحه‌ی P و متمایز از P باشد و این در صورتی است که راستای AB عمود بر صفحه‌ی P باشد؛ مسئله جواب ندارد.

۲. اگر صفحه‌ی P' صفحه‌ی P را در خط D قطع کند؛ بنابراین آن خط D: الف) متقاطع با Δ باشد؛ ب) موازی Δ باشد؛ ج) منطبق بر Δ باشد.

مسئله به ترتیب یک جواب، هیچ جواب و یا بی‌شمار جواب دارد. شکل‌ها را خودتان رسم کنید.

۶ . رساله فی حجة المنسوبه الی سقراط فی المربع و قطره

توسط ایدین صایبلی به زبان انگلیسی ترجمه شده است .

۷ . مقاله فی عمل شکل مجسم ذی اربع عشره قاعده تحیط به کره معلوم

نشر و به زبان آلمانی ترجمه شده است .

۸ . کتاب فی قطوع الاستوانه و بسیطها

۹ . کتاب فی مساحة قطع المخروط الذی یسمی المکافی

به زبان آلمانی ترجمه شده است .[4]

۱۰ . مساحة المجسمة المکافیه

به زبان آلمانی بررسی و ترجمه شده است .

۱۱ . قول فی تصحیح مسائل الجبر بالبراهین الهندسیه

به زبان آلمانی بررسی و ترجمه شده است .[5]

۱۲ . کتاب فی الاعداد المتحابه

این مشهورترین اثر ریاضی ثابت‌بن قره است . متن عربی آن در سال ۱۹۷۷ میلادی توسط احمد سعیدان در اردن به چاپ رسیده است . همین کتاب با عنوان زیر موجود است : «مقاله فی استخراج الاعداد المتحابه بسهولة المسلک الی ذلک .»[6]

۱۳ . مسأله فی عمل المتوسطین و قسمة الزاویه معلومه بثلاثه اقسام متساویه

۱۴ . کتاب الی ابن وهب فی التأتی لاستخراج عمل المسائل الهندسیه

۱۵ . رساله فی العلة التی رتب اقلیدس اشکال کتابه ذلک الترتیب

۱۶ . مسأله اذا خرج (فی الدائره) ضلع المثلث و ضلع المسدس فی جهة واحده عن المرکز کان سطح الذی یحاز بینهما مثل سدس الدائره .

۱۷ . رساله درباره‌ی یک مسأله مربوط به مقاله‌ی سیزدهم اقلیدس

۱۸ . کتاب المفروضات

تحریر این کتاب توسط نصیرالدین طوسی به چاپ رسیده است .[7]

ب. آثار ریاضی یونانی که ثابت ترجمه یا اصلاح کرده است.

۱۹ . شرح الشکل الملقب بالقطاع من کتاب المجسطی .

۲۰ . اصلاح کتاب المعطیات اقلیدس

۲۱ . مقاله فی برهان المصادرة المشهوره من اقلیدس

۲۲ . اصلاح ترجمه‌ی اصول اقلیدس توسط اسحاق بن حنین

۲۳ . ترجمه‌ی کتاب الکرة و الاسطوانه لارشمیدس

۲۴ . ترجمه‌ی کتاب عمل الدائرة المقسومه بسبع اقسام متساویه لارشمیدس

۲۵ . ترجمه‌ی رساله فی اصول الهندسه

۲۶ . ترجمه‌ی رساله فی الدوائر المتماسه

۲۷ . ترجمه‌ی کتاب المأخوذات لارشمیدس مع شرحها لعلی بن احمد النسوی

۲۸ . کتاب الکرة المتحرکه لاطولوقس

۲۹ . المدخل الی علم العدد الذی وضعه نیقوماخس الجاراسینی

۳۰ . کتاب الکره لثاوذوسیوس

۳۱ . کتاب اوطوقیوس فی حکایة ما استخرجه القدماء من خطین بین خطین حتی یتوالی الاربعة متناسبه

۳۲ . کتاب المخروطات لابولونیوس

ثابت‌بن قره مقالات پنجم تا هفتم این کتاب را ترجمه کرده است .

زیرنویس

۱ . فهرست رضوی، ج۸، ص۳۴۳-۳۴۴/ فهرست سپهسالار، ج۵، ص۲۵۵ / فهرست میکروفیلم‌ها، ج۱ ، ص۴۶۸/ نشریه‌ی دانشگاه تهران، ج۳، ص۱۹۱ .

۲ . فهرست سپهسالار، بخش پنجم، ص۲۵۵ .

۳ . فهرست میکروفیلم‌ها، ج۱، ص۴۶۸، ش۶ .

۴ . فهرست سپهسالار، بخش چهارم، ص۳۷۴ .

۵ . نسخه‌های خطی آن در ایران : فهرست رضوی، ج۸، ص۳۴۶، فهرست میکروفیلم‌ها، ج۱ ، ص۴۶۸ (ش۳) .

۶ . نسخه‌های خطی آن : فهرست مجلس، ج۱ ، ص۵۴، فهرست رضوی، ج۸، ص۳۹۰ و نشریه‌ی دانشگاه تهران، ج۳، ص۱۶۸ و ۲۲۸ .

۷ . طوسی : (نه رساله، رساله‌ی دوم) و نسخه‌های خطی آن در ایران موجود است : فهرست میکروفیلم‌ها، ج۱ ، ص۴۶۸ (ش۴)، نشریه‌ی دانشگاه تهران، ج۳، ص۱۵۹ و ۲۲۹ .

منبع

زندگی‌نامه ریاضی‌دانان دوره‌ی اسلامی / ابوالقاسم قربانی / مرکز نشر دانشگاهی

منطق ریاضی در سخن سعدی (قضیه دمورگان)



محال است که هنرمندان بمیرند و بی‌هنران جای ایشان بگیرند.

در این نوشتار، از منطق ریاضی برای صحیح خواندن سخن حکیمانه‌ی یاد شده کمک می‌گیریم. عبارت یاد شده را با علامت‌های منطق ریاضی می‌نویسیم. دو گزاره‌ی زیر را در نظر می‌گیریم:

۱) هنرمندان می‌میرند.

۲) بی‌هنران جای هنرمندان را می‌گیرند.

گزاره‌ی نخست را با p و گزاره‌ی دوم را با q نشان می‌دهیم. علامت‌های منطقی $\sim$ ، $\wedge$ و $\vee$ را به ترتیب برای

ناقض	به جای	چنین نیست که
عاطف	به جای	و
فاصل	به جای	یا (منطقی)

به کار می‌بریم.

عبارت مورد بحث را در دو صورت می‌توان خواند که با علامت‌های منطقی به صورت‌های زیر نوشته می‌شوند:

$$(۳) \quad (\sim p)\wedge q$$

$$(۴) \quad \sim(p\wedge q)$$

در عبارت ۳، دامنه‌ی عمل ناقض، مؤلفه‌ی ساده‌ی p است. در عبارت ۴ دامنه‌ی عمل ناقض، ترکیب عطفی $p\wedge q$ است.

چون گزاره‌ی q نادرست است (زیرا بی‌هنران هرگز نمی‌توانند جای هنرمندان را بگیرند)، پس گزاره‌ی مرکب ۳ نادرست است (زیرا می‌دانیم که ترکیب عطفی دو گزاره، فقط و فقط وقتی درست است که هر دو مؤلفه‌اش درست باشند).

اکنون گزاره‌ی مرکب ۴ را بنا بر قاعده‌ی دمورگان به صورت زیر می‌نویسیم:

$$(۵) \quad (\sim p)\vee(\sim q)$$

(توضیح: ترکیب منطقی «چنین نیست که (pوq)» معادل است با ترکیب منطقی «چنین نیست که p یا چنین نیست که q».)

چون در ترکیب فصلی ۵ مؤلفه‌ی $(\sim q)$ درست است (زیرا $\sim q$ به این معنی است که بی‌هنران نمی‌توانند جای هنرمندان را بگیرند)، پس گزاره‌ی مرکب ۵ درست است (زیرا می‌دانیم که ترکیب فصلی دو گزاره، فقط و فقط وقتی نادرست است که هر دو مؤلفه‌اش نادرست باشند).

بنابراین، عبارت مورد بحث را باید طوری خواند که ناقض «محال است که» دامنه‌ی عمل خود را بر عبارت «هنرمندان بمیرند و بی‌هنران جای ایشان بگیرند.» بگستراند.

لازم است که در عبارت مورد بحث، «بمیرند و» به صورت «بمیرندُ» تلفظ شود و سپس بدون مکث جمله‌ی «بی‌هنران جای ایشان را بگیرند» گفته شود.

به کارگیری منطق ریاضی برای خواندن درست سخن سعدی، نشان می‌دهد که در این سخن، اثری از قضیه‌ی دمورگان وجود دارد. هنگامی که سخن سعدی را درست بخوانیم شکوه آوایی آن جلوه‌گر می‌شود.

برگرفته از کتاب ریاضی دلاویز در ادب گهرریز / پژوهش و نگارش دکتر احمد شرف‌الدین / انتشارات مدرسه

ISSN:1735-4951
www.roshdmag.ir

رشد برهان

مجله ی ریاضی

دوره ی متوسطه

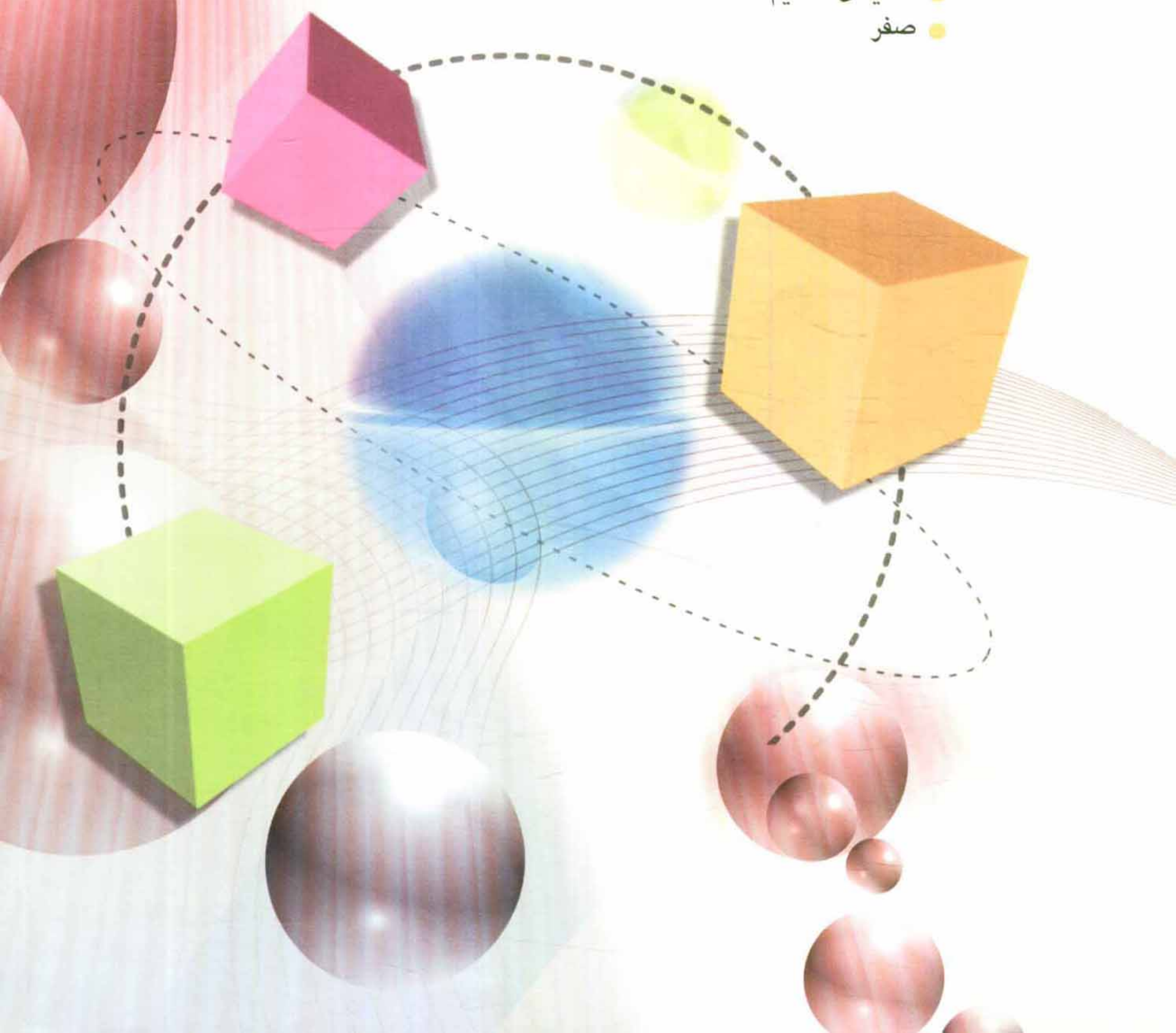
۶۲

وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش وبرنامه ریزی آموزشی
دفتر انتشارات کمک آموزشی

فصلنامه ی آموزشی، تحلیلی و اطلاع رسانی

• دوره‌ی هجدهم • شماره‌ی ۴ • تابستان ۱۳۸۸ • بها: ۴۰۰۰ ریال

- یادی از معلمی فروتن و اهل قلم
- تعمیم قضیه ی مربع ارتفاع مثلث قائم الزاویه
- مجموعه ی Q منتهاشماراست
- قضیه ی تقسیم
- صفر



ریاضی‌دانان مسلمان

محمد بن حسین کرجی



ریاضی دان ایرانی

تا چندی پیش وی را به غلط کرخی می نامیدند و او را به «کَرخ» واقع در حومه‌ی بغداد منسوب می کردند و از اهل عراق می شمردند. وی از ریاضیدانان بزرگ ایران در نیمه‌ی دوم سده‌ی چهارم و اوایل سده‌ی پنجم و از مردم کرج (واقع در نزدیکی تهران کنونی) بوده است. ظاهراً کرجی در شهر ری که در آن زمان مرکز دانشمندان بوده به تحصیل پرداخته و سپس به بغداد رفته و با ابوغالب محمدبن علی بن خلف واسطی ملقب به فخر الملک (متوفی به سال ۴۰۷) وزیر بهاء‌الدوله[۱] و وزیر پسر او سلطان‌الدوله[۲] ارتباط داشته و کتاب معروف خود الفخری را به نام وی نوشته است. کرجی در حدود سال ۴۰۳ یا پیش از آن تاریخ از عراق به زادگاه خود بازگشته و برای ابوغانم معروف بن محمد[۳] کتابی درباره‌ی «استخراج آب های پنهانی»[۴] نوشته است.

کرجی در مقدمه‌ی کتاب انباط المیاه الخفیه (= استخراج آب های پنهانی) نوشته است:

«چون به سرزمین عراق وارد شدم و مردم آن دیار را از کوچک و بزرگ دوستدار دانش دیدم، دریافتم که دانش و اهل دانش را بزرگ و محترم می شمارند، در مدتی که در آن جا بودم تصنیفی در حساب و هندسه پرداختم. سرانجام وقتی به سرزمین جبل (=طبرستان) بازگشتم مطالبی که از اوضاع عراق تصنیف کرده بودم در جبل گم شد و ناپدید گشت. شعله‌ی اشتیاق تصنیف فرو نشست و طبع آماده به تألیف فرو افسرد تا آن که خدا سرزمین جبل و مردم آن را به دیدار مولانا الوزیر، الرئیس، السیدالاجل المنصور ولی‌النعم ابوغانم معروف‌بن محمد یاری فرمود.»

از عبارات فوق نتیجه می شود که اولا کرجی از اهل عراق نبوده بلکه از زادگاه خود بدانجا سفر کرده و بعد هم به طبرستان مراجعت کرده است. ثانیاً تاریخ مراجعت کرجی را از عراق به ایران می توان در حدود سال ۴۰۳ یا کمی قبل از آن دانست. زیرا ابوغانم معروف‌بن محمدوزیر منوچهربن قابوس بوده و منوچهر از سال ۴۰۳ به بعد سلطنت کرده است و به‌طوری که از نوشته‌ی کرجی برمی آید وی پیش از وزارت ابوغانم به طبرستان بازگشته است.

کرجی در کتاب استخراج آب های پنهانی از مشاهدات خود در بعضی از شهرهای ایران و از جمله ساوه و اصفهان گفت‌وگو کرده است. سوتر تاریخ وفات کرجی را در حدود سال ۴۲۰ تعیین کرده است.

آثار ریاضی موجود کرجی

۱. الفخری فی (صناعة) الجبر و المقابله

این کتاب از جهت تاریخ ریاضیات مهم است. زیرا علاوه بر آن‌که بسیاری از مطالب آن بدیع و تازه است مؤلف این کتاب را با شرح چگونگی محاسبات جبری شروع کرده و فصلی را به این مبحث اختصاص داده که در کتاب‌های جبر پیش از وی دیده نمی شود.

بسم الله الرحمن الرحیم

رشد برهان ۶۲
مجله‌ی ریاضی
دوره‌ی آموزش متوسطه
ISSN 1735 - 4951
فصلنامه‌ی آموزشی، تحلیلی و اطلاع‌رسانی
دوره‌ی هجدهم /شماره‌ی ۴/ تابستان ۱۳۸۸/شمارگان: ۱۰۰۰۰ نسخه

◆ مدیر مسئول: محمد ناصری
◆ سردبیر: حمیدرضا امیری
◆ مدیر داخلی: میرشهرام صدر
◆ طراح گرافیک: آزیتا کوثری
◆ اعضای هیئت تحریریه: حمیدرضا امیری، محمد هاشم رستمی، احمد قندهاری، میرشهرام صدر، هوشنگ شرقی، سید محمدرضا هاشمی موسوی، غلامرضا یاسی پور
و با تشکر از همکاری ارزنده‌ی استاد پرویز شهریاری
◆ ویراستار ادبی: کبری محمودی
◆ چاپ و صحافی: شرکت افست (سهامی عام)

www.roshdmag.ir
صندوق الکترونیکی سردبیر: Borhanm@roshdmag.ir
پیام‌گیر نشریات رشد: ۸۸۳۰۱۴۸۲-۸۸۸۳۹۲۳۲
◆ نشانی دفتر مجلّه: تهران، صندوق پستی ۱۵۸۷۵/۶۵۸۵ تلفن دفتر مجله: ۸۸۳۰۵۸۶۲
تلفن امور مشترکین: ۷۷۳۳۶۶۵۶ـ۷۷۳۳۵۱۱۰

رشد برهان متوسطه، تمامی دبیران محترم و دانش‌آموزان عزیز را در زمینه‌های زیر به همکاری دعوت می کند:

■ نگارش مقاله‌های کمک درسی (شرح و بسط و رفع مشکلات مباحث درسی کتاب‌های ریاضی دوره‌ی متوسطه و پیش‌دانشگاهی)
■ طرح مسائل کلیدی به همراه حل آن‌ها (برای دانش‌آموزان)
■ طرح مسائل مسابقه‌ای به همراه حل آن‌ها (برای دانش‌آموزان)
■ طرح معماهای ریاضی
■ نگارش یا ترجمه‌ی مقاله‌های عمومی ریاضی (مانند تاریخ ریاضیات، زندگینامه‌ی علمی و اجتماعی ریاضیدانان، نکته‌های تازه و لطیف ریاضیات، آموزش ریاضیات، آموزش کامپیوتر و ...)

رشد برهان متوسطه هر سه ماه، یکبار منتشر می شود.
مجلّه در حک، اصلاح، حذف و اضافه ی مقاله ها آزاد است.
مقاله های وارده، باید خوانا و حتی‌الامکان کوتاه باشد.
مقاله های رسیده مسترد نمی شود.

حرف اول

یادداشت سردبیر

عزیزان دانش‌آموز و علاقه‌مندان به درس شیرین ریاضی، سلام. سلامی به گرمی تابستان؛ تابستانی که ان‌شاءالله با برنامه‌ریزی مناسب بتوانید بهترین استفاده را از آن ببرید و سال تحصیلی جدید را با دستی پر آغاز کنید. در شماره‌ی قبل راجع به یکی از ارکان آموزش، یعنی کتاب درسی، با شما صحبت کردم. در این فرصت می‌خواهیم راجع به اصلی‌ترین رکن آموزش و پرورش یعنی معلم حرف بزنیم که بعد از خداوند تبارک و تعالی و پدر و مادر، سنگین‌ترین مسئولیت‌ها یعنی مسئولیت انسان‌سازی و تربیت بر عهده‌ی اوست. اگرچه به حق، قلم و زبان قاصر از بیان ویژگی‌ها و جایگاه رفیع معلم است، اما آن‌چه را در حد این صفحه امکان‌پذیر است، با هم درمیان می‌گذاریم. در عظمت و بزرگی جایگاه مقام معلم همین دو روایت کفایت می‌کند که پیامبر اکرم(ص) فرمودند: «انّی بُعِثتُ مُعلّما» و حضرت علی(ع) فرمودند: «من علمنی حرفا فقد صیرنی عبدا». همین معلم است که ما باید در محضر او قرار گیریم و از او بیاموزیم.

دوست عزیز، به واسطه‌ی حضور و وجود معلم است که کلاس درس و فضای آموزشی و میز و نیمکت‌های کلاس از قداست و معنویت برخوردار است.

آموزه‌های دینی ما متذکر این مهم هستند که همواره باید در حضور و محضر استاد با ادب و آداب خاصی قرار گیریم و با تمام وجود گوش دل و سر را متوجه درس او سازیم. معلم در کلاس درس باید ویژگی‌های خاصی برای ارائه‌ی مطالب درسی داشته باشد. باید حضور ذهن و تمرکز داشته باشد، باید احساس کند مخاطبانش با همه‌ی وجود، حضور فیزیکی و ذهنی دارند و با حواس جمع درس او را گوش می‌دهند. این تمرکز می‌تواند با یک حرکت نابه‌جا، با خنده‌ای بی‌موقع، شیطنتی کوچک و حتی با یک سؤال بی‌مورد و بدون ارتباط با موضوع، به‌هم بخورد و سررشته‌ی کلام از دست معلم خارج شود که در این صورت بیشترین ضرر متوجه شما خواهد بود.

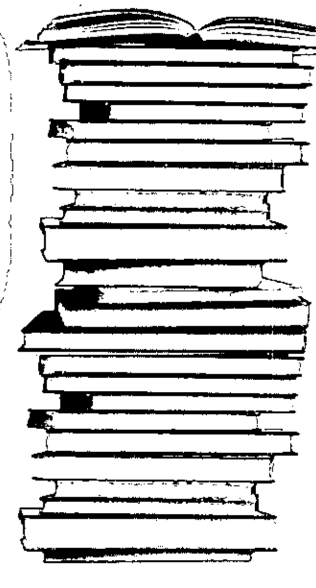
با ادب نشستن، با ادب سؤال کردن، با خضوع جواب دادن و با تواضع بحث کردن در محضر معلم، جزو اصلی‌ترین سفارشات و آموزه‌های دینی ما به شمار می‌رود که رعایت نمودن این موارد، در درجه‌ی اول به نفع خود دانش‌آموزان است.

همان‌طور که معلم به عنوان یک الگو موظف است با ظاهری آراسته و ساده در کلاس حاضر شود، دانش‌آموزان نیز باید با ظاهری کاملاً ساده و به اصطلاح دانش‌آموزی، در این فضای مقدس یعنی کلاس درس حاضر شوند و بیرون کلاس نیز موظف‌اند با معلمان خود در نهایت ادب و تواضع برخورد کنند و احترام به معلم و مقام معلم فقط محدود و منحصر به داخل کلاس نیست. مگر نه این‌که حضرت امیر(ع) فرمودند: هرکس حرفی (یا مطلبی) به من بیاموزد، مرا بنده‌ی خود کرده است.»

آیا سزاوار است که شاگرد در برابر معلم خود بی‌احترامی کند؟ بدون اجازه از کلاس خارج و یا به کلاس وارد شود؟ هرگز سزاوار نیست! از پدران یا پدربزرگ‌های خود سؤال کنید، وقتی یکی از معلمان خود را حتی بیرون از مدرسه و در کوچه و خیابان می‌دیدند، چه عکس‌العملی نشان می‌دادند و با چه احترامی با آن‌ها برخورد می‌کردند. آیا این فرهنگ بسیار باارزش و گران‌قدر به آن‌ها کمک نمی‌کرد که در کلاس درس هم بتوانند از وجود و محضر معلم خود استفاده‌ی بهینه داشته باشند؟

عزیزان دانش‌آموز، ان‌شاءالله با احیای این فرهنگ پسندیده و پرمحتوا، بتوانید به وظیفه‌ی اصلی خودتان، یعنی آموختن دانش عمل کنید و آن را به نسل‌های بعد از خود انتقال دهید.

والسلام



ریاضیات در ایران (۴)

فرزندان موسی شاکر

● پرویز شهریاری



● تصویر ساز: امیر سیاوش

موسی شاکر یک نام پُرآوازه در دربار مأمون[1] بود. او از اهالی خراسان بود و به ستاره‌شناسی علاقه‌ی زیادی داشت و این فن را از پدران خود یاد گرفته بود. بسیاری شب‌ها دور از روشنایی خانه‌ها، در بیابان‌های اطراف به مشاهده و جست‌وجو در رفتار ستارگان می‌پرداخت. از طلوع و غروب آن‌ها باخبر بود و پیوسته مشاهداتش را یادداشت می‌کرد.

مأمون با آن‌که منجمان زیادی داشت که طالع او و حوادث آینده را پیشگویی می‌کردند، اما به دلیل بیان امیدبخش موسی در گفته‌هایش، به او علاقه‌ی خاصی داشت. به همین دلیل موسی به سرعت در قصر مأمون شهرت و مقامی شایسته پیدا کرد. اما او حتی پس از آن‌که جایگاه ویژه و بی‌نظیرش را به‌دست آورد، دست از رصد ستارگان و شب‌زنده‌داری در بیابان‌های اطراف شهر برنداشت.

موسی مردی امین، باادب، منظم و دقیق بود. کارهای محوله را به‌خوبی و به موقع انجام می‌داد. سال‌ها به همین منوال گذشت تا این‌که در اطراف شهر مرو که مقر حکومت مأمون بود، راهزن‌ها، جاده‌ها را ناامن کردند و بسیاری از کاروان‌ها را مورد دستبرد قرار دادند. ناامنی و غارت اموال، مردم را عاصی کرد؛ به طوری که پی‌درپی به دربار پیغام می‌فرستادند و اعتراض و نارضایتی خود را به گوش مأمون می‌رساندند. ناامنی به‌قدری شدید شد که شک و بدگمانی را بین درباریان دامن زد و فرصت خوبی برای کینه‌ها و حسادت‌های فروخفته فراهم ساخت. رفت‌وآمدهای شبانه‌ی موسی عامل مناسبی برای تهمت زدن و لکه‌دار کردن شرافت او بود. خبرِ دست داشتن موسی در راهزنی‌های شبانه به گوش مأمون رسید؛ اما مردم همگی شهادت دادند که موسی را جز به نماز و عبادت، رفع مشکلات مردم و مطالعه‌ی رفتار ستارگان ندیده‌اند. مأمون هم تن به آن ادعاهای دروغ نداد و موسی این بار به لطف خداوند رحمان سربلند شد.

موسی سه پسر داشت: **محمد**، **احمد** و **حسن**. بعد از مرگ پدر این سه برادر در دربار مأمون[1] می‌مانند، به تحصیل رو می‌آورند و در ریاضیات، مکانیک و اخترشناسی مشهور می‌شوند. آن‌ها را به نام «بنی‌موسی» و یا «بنوموسی» می‌شناسند. نوشته‌های آن‌ها را به دشواری می‌توان از هم جداکرد.

برادر بزرگ‌تر، یعنی **محمد** که به «ابوجعفر» مشهور است و در سال ۸۷۳ میلادی درگذشت، کمتر به ریاضیات می‌پرداخت و مهم‌ترین نوشته‌ی او کتابی است به نام «معرفة مساحة الاشکال بسیطه و کرویه» که به احتمالی دو برادر دیگر هم در تنظیم آن نقش داشته‌اند. این کتاب شامل ۱۸ قضیه است درباره‌ی مساحت و حجم سطح‌های متفاوت هندسی. **نصیرالدین توسی** این کتاب را به‌عنوان یک کتاب درسی درآورده است (چهار سده بعد از پیدایش آن). **لئوناردو داوینچی** (۱۵۱۷-۱۴۴۳ میلادی) ایتالیایی، در کتاب «هندسه‌ی کاربردی»، از قضیه‌های کتاب پسران موسی استفاده کرده است.

کتاب «معرفة مساحة...»، اول‌بار در سده‌ی دوازدهم میلادی به زبان لاتین ترجمه و در سال ۱۸۸۵ میلادی منتشر شد. در این کتاب به‌جز مساحت‌ها و حجم‌ها، درباره‌ی تقسیم زاویه به سه بخش برابر و تعیین واسطه‌ی بین دو مقدار نیز بحث شده است.

احمد فرزند موسی بیشتر در زمینه‌ی مکانیک کار می‌کرده و کتاب «الحیل» او نمونه‌ای از آن است. این کتاب را در زبان عربی «حیل» (یعنی حیله‌ها) می‌گفتند. درضمن، احمد و حسن تلاش کردند کتاب «سطح‌های مخروطی» **آپولونیوس** را به زبان عربی برگردانند، ولی ناتمام ماند.

پسران موسی امکانات مالی بسیاری در اختیار داشتند که سخاوتمندانه از آن‌ها در راه ترویج دانش استفاده می‌کردند. آن‌ها برای گردآوری کتاب، هیئت‌هایی را به روم و یونان می‌فرستادند و به برگردانان (مترجمان) و پژوهشگران علم یاری‌های فراوان می‌رساندند.

فرزندان موسی شاکر، قضیه‌ای را که به «قضیه‌ی هرون» (در سده‌ی اول میلادی) مشهور شده است و مربوط به محاسبه‌ی مساحت مثلث به یاری ضلع‌های آن می‌شود، ثابت کردند.

اروپایی‌ها برای نخستین‌بار، محاسبه‌ی مساحت مثلث به کمک طول‌های سه ضلع آن را، بین نوشته‌های **هرون** پیدا کردند. به همین مناسبت، این دستور را «دستور هرون» نام نهادند، در حالی که **ارشمیدس** (سده‌ی سوم پیش از میلاد) این دستور را پیدا کرده بود. ریاضی‌دانان ایرانی، از جمله ابوریحان بیرونی (۹۹۸-۹۴۷ میلادی) که خود اثبات دیگری درباره‌ی این دستور ارائه داده است، از اثبات ارشمیدس یاد کرده‌اند. اثبات ارشمیدس را ابوریحان بیرونی به عربی بازگردانده است. اگر طول ضلع‌های مثلث را a، b و c فرض کنیم و نصف مجموع سه‌ضلع را p بگیریم، این دستور چنین می‌شود:

$$S = \sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)}$$

قضیه‌ی مربوط به این دستور را، هرون در کتاب اول متریک خود آورده و آن را ثابت کرده و دستورها و قضیه‌های زیادی را، با کاربرد آن‌ها، برای اثبات ارائه شده است. او در کتاب خود می‌نویسد:

«تو می‌توانی اندازه‌ی مساحت مثلث را این‌گونه محاسبه کنی: طول ضلع‌های مثلث را یکی برابر ۱۳، دومی برابر ۱۴ و سومی برابر ۱۵ می‌گیریم. برای این‌که مساحت آن را پیدا کنیم، بدین‌ترتیب عمل می‌کنیم: ۱۳، ۱۴ و ۱۵ را با هم جمع می‌کنیم، ۴۲ به‌دست می‌آید. این را نصف می‌کنیم می‌شود ۲۱. ضلع‌های مثلث را یکی پس از دیگری از آن کم می‌کنیم: در آغاز ۱۳ را کم می‌کنیم، ۸ به‌دست می‌آید. بعد ۱۴ را که ۷ حاصل می‌گردد و سرانجام ۱۵ را که ۶ نتیجه می‌دهد. اکنون ۲۱ را در ۸ ضرب می‌کنیم، ۱۶۸ به‌دست می‌آید، این عدد را ۷ برابر می‌کنیم، می‌شود ۱۱۷۶. و این را ۶ برابر می‌کنیم، به‌دست می‌آید: ۷۰۵۶ که ریشه‌ی دوم آن ۸۴ می‌شود. این، مقدار مساحت را به ما می‌دهد.»

همین دستور را در سده‌ی نهم میلادی محمد، احمد و حسن پسران موسی هم مطرح کردند که می‌توان آن را در کتاب «اندازه‌گیری مساحت شکل‌های صفحه و شکل‌های کروی» دید. این کتاب در سده‌ی دوازدهم میلادی به‌وسیله‌ی **جرارد کوبنایی** به زبان لاتین ترجمه شد (این برگردان در «بازل» به نام «کتاب سه برادر درباره‌ی هندسه» نگه‌داری می‌شود.)

نصیرالدین توسی هم این کتاب را تحریر کرده است. درضمن برای مساحت مثلث، وقتی طول ضلع‌های آن معلوم باشد، یعنی قضیه‌ی هفتم، استدلال تازه‌ای آورده است که نسخه‌هایی از آن در کتاب‌خانه‌ی مرکزی دانشگاه تهران، کتاب‌خانه‌ی مجلس و کتاب‌خانه‌ی سپهسالار وجود دارد.

❑

آن‌چه در این جا آمد، استدلال ریاضی‌دانان قدیمی درباره‌ی مساحت مثلث برحسب طول ضلع‌های آن بود که بیشتر از نظر تاریخ ریاضیات اهمیت دارد. به‌ویژه راه‌حل فرزندان موسی شاکر، بعد از راه‌حل ارشمیدس و هرون، برای ما جالب است. در سال‌های بعد و به‌ویژه در هندسه‌های اخیر، راه‌حل‌های ساده‌تری برای این قضیه پیشنهاد شدند که در این جا از آن‌ها می‌گذریم.

---

۱. ابوالعباس عبدالله ملقب به مأمون‌بالله، هفتمین خلیفه عباسی بود که در سال ۱۷۰ ق به دنیا آمد و در سال ۲۱۸ ق درگذشت. مأمون دوستدار دانش بود و به علوم عقلی توجه داشت. او امام رضا(ع) را به قصد محدود کردن قیام شیعیان به عنوان ولیعهد به دربار خود دعوت کرد.

یادی از معلمی فروتن و اهل قلم



بارها اتفاق می‌افتاد، وقتی در دفتر مجله مشغول مطالعه بودم، نگاهم را که از روی دست‌نوشته‌ها برمی‌داشتم و به در اتاق توجه می‌کردم، می‌دیدم که مردی بلندقامت با موهایی سفید و تبسم بر لب به من نگاه می‌کند و با کمال ادب و فروتنی، با لهجه‌ی شیرین آذری سلام می‌کند و اجازه‌ی ورود می‌خواهد. ناخودآگاه شرمنده و خجل می‌شدم و از خدا می‌خواستم که کمکم کند تا بتوانم همراه مناسبی برای استاد علی حسن‌زاده ماکویی باشم.

قبل از این، در ایام تحصیل در دوره‌ی متوسطه، کتاب‌های ریاضی ایشان را مطالعه کرده و از دقت و حسن نظر استاد در طراحی سؤال‌های ریاضی استفاده برده بودم. اما از وقتی که توفیق همکاری با مجله‌ی رشد برهان متوسطه را پیدا کردم، از نزدیک با این استاد گران‌قدر آشنا شدم. هر وقت که می‌آمد، با همه‌ی بزرگی علم و تجربه‌اش، آن‌قدر محبت و احترام می‌کرد که هیچ‌گاه نتوانستم به‌طور شایسته پاسخ‌گوی فروتنی و محبت‌های ایشان باشم. به‌درستی این معلم دلسوز، الگوی ادب و قلم محسوب می‌شود.

استاد علی حسن‌زاده ماکویی در سال ۱۳۰۹ شمسی در شهرستان خوی دیده به جهان گشود. ایشان با سختی‌ها و مشکلات فراوان مراحل تحصیل را پشت‌سر گذاشت و مدرک کارشناسی ریاضی خود را از دانش‌سرای عالی دریافت کرد. از آن پس با عشق و علاقه‌ی فراوان به شغل معلمی روی آورد.

ایشان با جدیت در عمق و قدرت بخشیدن به پایه‌ی ریاضی دانش‌آموزان می‌کوشید و این تلاش همواره برایشان لذت‌بخش بود. خلاصه‌ای از فعالیت‌های ایشان از این قرار است:

- تدریس در مناطق محروم، مانند شهرستان‌های ماکو و گناباد
- همکاری با شهید آیت‌الله دکتر بهشتی در دبیرستان‌های قم
- تألیف کتاب‌های درسی مثلثات دوره‌ی متوسطه نظام قدیم
- عضویت در شورای عالی نظارت بر تألیف کتاب‌های درسی (قبل از سال ۱۳۶۰ شمسی)
- عضویت در هیئت مؤسس گروه فرهنگی خوارزمی
- تألیف بیش از ۴۰ جلد کتاب ریاضی در زمینه‌های جبر و مثلثات برای دوره‌ی متوسطه
- همکاری با مجله‌ی ریاضی رشد برهان متوسطه و گروه ریاضی انتشارات مدرسه

این معلم زحمت‌کش و عاشق در اسفندماه سال ۱۳۸۶ در سن ۷۸ سالگی به دلیل عارضه‌ی قلبی بدرود حیات گفت، در حالی که تا آخرین روزهای عمر پربرکت خویش، برای آموزش و تحقیق در زمینه‌ی ریاضیات تلاش می‌کرد.

در شماره‌های قبل، مقاله‌هایی از این استاد فرزانه را مطالعه کرده‌اید. در این شماره نیز نوشته‌ای از ایشان را مطالعه می‌کنید. اکنون گرچه جایشان بین ما خالی است، ولی اثرات آن معلم عاشق بین ما حضور دارد. روحش شاد و یادش گرامی باد.

ان شاءالله

میرشهرام صدر

دنباله‌های عددی

تعریف دنباله

برد تابعی مانند $f:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$، مجموعه‌ای از عددهای حقیقی را تولید می‌کند که اگر این عددها را پشت سر هم قرار دهیم، به آن یک «دنباله»[1] می‌گویند. برای مثال، تابع $\begin{cases} f:\mathbb{N}\to\mathbb{R} \\ f(n)=(-1)^n \end{cases}$ را در نظر می‌گیریم. بُرد این تابع مجموعه‌ی $R=\{-1,1\}$ است و دنباله‌ی زیر توسط این مجموعه تولید می‌شود:

دنباله‌ی f : $-1,1,-1,1,-1,1,-1,1,\cdots$

مگر آن که دامنه‌ی آن زیر مجموعه‌ی متناهی از ($\mathbb{N}$) باشد.

مثال: جمله‌های دنباله‌ی $f(n)=\frac{1}{n}$ عبارت‌اند از:

$$a_1=1\ ,\ a_2=\frac{1}{2}\ ,\ a_3=\frac{1}{3}\ ,\ \cdots,a_n=\frac{1}{n}\ ,\cdots$$

حد دنباله

دنباله‌ی نامتناهی $\{a_n\}$ وقتی دارای حد است که وقتی $n\to\infty$ جمله‌ی عمومی آن به سمت عدد حقیقی l میل کند ($\lim_{n\to\infty} a_n = l$). و یا به ازای هر $\varepsilon>0$ عددی مانند $M\in\mathbb{N}$ موجود باشد؛ به قسمی که به ازای $n\geq M$ داشته باشیم:

$|a_n - L| < \varepsilon$. در حالت خاص، a_n را وقتی بی‌نهایت کوچک می‌گویند که: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. دنباله‌ای که حد داشته باشد، «همگرا»ست و در غیر این صورت، دنباله را «واگرا» می‌گویند.

حد نامتناهی

نماد $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ یعنی:

$$\forall N > 0, \exists M \in \mathbb{N}: n \geq M \Rightarrow |a_n| > N$$

هرگاه حد دنباله‌ی $\{a_n\}$ نامتناهی باشد، $|a_n|$ را بی‌نهایت بزرگ می‌گویند. یادآوری می‌شود که نماد $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$، یک نماد سمبلیک است؛ زیرا مفهوم حد با نماد ∞ نه تنها سازگار نیست، بلکه متناقض نیز هست.

چند نکته درباره‌ی حد دنباله

فرض می‌کنیم: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L_1$ و $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = L_2$ و $L_1, L_2 \in \mathbb{R}$.

داریم:

۱. $a_n \leq b_n \Rightarrow L_1 \leq L_2$

۲. $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = L_1 \pm L_2$

۳. $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n . b_n) = L_1 . L_2$

۴. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{L_1}{L_2} \quad b_n, L_2 \neq 0$

۵. اگر دنباله‌ی $\{a_n\}$ همگرا و دنباله‌ی $\{b_n\}$ واگرا باشد، آن‌گاه دنباله‌ی $\{a_n + b_n\}$ واگرا ولی دنباله‌ی $\{a_n . b_n\}$ ممکن است همگرا یا واگرا باشد.

مثال: دنباله‌ی همگرای $\{a_n\} = \left\{\frac{2n}{n^2 - 1}\right\}$ و دنباله‌ی واگرای $\{b_n\} = \left\{\frac{n^2 + 1}{3n}\right\}$ را درنظر می‌گیریم. دنباله‌ی $\{a_n + b_n\} = \left\{\frac{n^4 + 6n^2 - 1}{3n^3 - 3n}\right\}$ واگرا و دنباله‌ی $\{a_n . b_n\} = \left\{\frac{2(n^2 + 1)}{3(n^2 - 1)}\right\}$ همگراست.

۶. اگر دنباله‌های $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ واگرا باشند، در مورد همگرایی یا واگرایی دنباله‌های: $\{a_n + b_n\}$ و $\{a_n . b_n\}$ نمی‌توان قضاوت کرد.

مثال: دنباله‌های $\{a_n\} = \{1 - (-1)^n\}$ و $\{b_n\} = \{1 + (-1)^n\}$ واگرا، ولی دنباله‌های $\{a_n + b_n\}$ و $\{a_n . b_n\}$ همگرا هستند.

هم‌چنین دنباله‌های $\{a_n\} = \left\{\frac{n^2}{n + 4}\right\}$ و $\{b_n\} = \left\{\frac{n^2}{3 - n}\right\}$ واگرا هستند، ولی دنباله‌ی $\{a_n + b_n\}$ همگرا و دنباله‌ی $\{a_n . b_n\}$ واگراست.

۷. اگر $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ و $\{b_n\}$ دنباله‌ی نامشخصی باشد، آن‌گاه همواره نمی‌توان نتیجه گرفت: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n . b_n = 0$.

مثال: دنباله‌های $\{a_n\} = \left\{\sin\frac{\pi}{n}\right\}$ و $\{b_n\} = \left\{\frac{n}{2}\right\}$ را درنظر می‌گیریم. داریم:

$$\lim_{n\to\infty} a_n . b_n = \frac{\pi}{2} . \lim_{n\to\infty} \frac{\sin(\pi/n)}{(\pi/n)} = \frac{\pi}{2}$$

۸. هرگاه $a_n . b_n = 0$ باشد، آن‌گاه همواره نمی‌توان نتیجه گرفت که: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ یا $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$.

مثال: دنباله‌های $\{a_n\} = \left\{\frac{1 + (-1)^n}{3}\right\}$ و $\{b_n\} = \left\{\frac{1 - (-1)^n}{2}\right\}$ را درنظر بگیرید.

۹. هرگاه $\{A_n\} = \{L + a_n\}$ و $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ (a_n بی‌نهایت کوچک باشد)، آن‌گاه: $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = L$.

مثال: تحقیق کنید: $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

حل:

$$\sqrt[n]{n} = 1 + a_n \Rightarrow n = (1 + a_n)^n$$

$$\Rightarrow n = 1 + na_n + \frac{n(n-1)}{2!} a_n^2 + \cdots + a_n^n$$

به‌ازای $n > 1$، همه‌ی جمله‌های بسط بالا مثبت هستند. پس داریم:

$$n > 1 + \frac{n(n-1)}{2} . a_n^2 \text{ یا } n - 1 > \frac{n(n-1)}{2} . a_n^2 \Rightarrow a_n < \sqrt{\frac{2}{n}}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

تمرین

الف) بزرگ‌ترین جمله‌ی دنباله‌های زیر را معین کنید.

۱. $\{a_n\} = \left\{\frac{n^2}{2^n}\right\}$

۲. $\{a_n\} = \left\{\frac{\sqrt{n}}{100 + n}\right\}$

۳. $\{a_n\} = \left\{\frac{1000^n}{n!}\right\}$

ب) کوچک‌ترین جمله‌ی دنباله‌های زیر را معین کنید.

۴. $\{a_n\} = \{n^2 - 9n - 100\}$

۵. $\{a_n\} = \left\{n + \frac{100}{n}\right\}$

ج) با استفاده از تعریف حد دنباله (تعیین $M(\varepsilon)$ برای هر $\varepsilon > ۰$)، ثابت کنید حد دنباله‌های زیر برابر صفر است (یعنی بی‌نهایت کوچک هستند).

۶. $\{a_n\} = \{(-۱)^n (۰/۹۹۹)^n\}$

۷. $\{a_n\} = \left\{\dfrac{(-۱)^{n+۱}}{n}\right\}$

۸. $\{a_n\} = \left\{\dfrac{۲n}{n^۳+۱}\right\}$

۹. $\{a_n\} = \left\{\dfrac{۱}{n!}\right\}$

د) با استفاده از تعریف حد نامتناهی دنباله (تعیین $M(N)$ برای هر عدد $N > ۰$)، ثابت کنید دنباله‌های زیر حد نامتناهی دارند (یعنی بی‌نهایت بزرگ هستند).

۱۰. $\{a_n\} = \{۲^{\sqrt{n}}\}$

۱۱. $\{a_n\} = \{\log\log n\}\ ,\ n \ge ۲$

هـ) حاصل عبارت‌های زیر را بنویسید $(n \in \mathbb{N})$.

۱۲. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[۳]{n^۲}\sin(n!)}{n+۱}$

۱۳. $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{n+۱} - \sqrt{n})$

۱۴. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(-۲)^n + ۳^n}{(-۲)^{n+۱} + (۳)^{n+۱}}$

۱۵. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{۱+a+\cdots+a^n}{۱+b+\cdots+b^n}\ ,\ |a|,|b| < ۱$

۱۶. $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{۲}.\sqrt[۴]{۲}.\sqrt[۸]{۲}\cdots\sqrt[۲^n]{۲})$

راهنمایی و جواب تمرین‌ها

۱. a_k وقتی بزرگ‌ترین جمله‌ی دنباله است که داشته باشیم:

$$a_k - a_{k-۱} > ۰ \Rightarrow ۱ \le k < ۲+\sqrt{۲}\ ,\ a_k - a_{k+۱} > ۰$$
$$\Rightarrow k > ۱+\sqrt{۲} \Rightarrow ۱+\sqrt{۲} < k < ۲+\sqrt{۲}\ ,\ k \in \mathbb{N}$$
$$\Rightarrow k = ۳ \Rightarrow a_۳ = \frac{۹}{۸}$$ بزرگ‌ترین جمله

۲. $$(a_k)^۲ - (a_{k-۱})^۲ > ۰ \Rightarrow ۱ \le k < \frac{۱+\sqrt{۴۰۰۰۱}}{۲}$$
$$(a_k)^۲ - (a_{k+۱})^۲ > ۰ \Rightarrow k > \frac{-۱+\sqrt{۴۰۰۰۱}}{۲}$$
$$\Rightarrow k = ۱۰۰\ ,\ a_{۱۰۰} = \frac{۱}{۲۰}$$

۳. $a_{۱۰۰۰} = \dfrac{۱۰۰۰^{۱۰۰۰}}{۱۰۰۰!}$

۴. $a_k - a_{k-۱} < ۰\ ,\ a_k - a_{k+۱} < ۰ \Rightarrow a_۴ = a_۵ = -۱۲۰$

۵. $a_{۱۰} = ۲۰$

۶. $\varepsilon > ۰\ ,\ |a_n| < \varepsilon \Rightarrow n\log(۰/۹۹۹) < \log\varepsilon$

$\log(۰/۹۹۹) < ۰\ ,\ ۰ < \varepsilon < ۱ \Rightarrow \log\varepsilon < ۰$

$$n > \frac{\log\varepsilon}{\log(۰/۹۹۹)}\ ,\ \frac{۱}{\log(۰/۹۹۹)} \approx -۲۳۰۱$$
$$\Rightarrow M > ۲۳۰۱\left\lfloor \log\frac{۱}{\varepsilon}\right\rfloor$$
$$\forall\varepsilon > ۰\ \exists \in \mathbb{N} : n \ge M \Rightarrow |a_n| < \varepsilon$$

۷. $M > \left\lfloor \dfrac{۱}{\varepsilon} \right\rfloor$

۸. $M > \left\lfloor \sqrt{\dfrac{۲}{\varepsilon}} \right\rfloor$

۹. به آسانی می‌توان ثابت کرد: $n! \ge ۲^n\ ,\ n > ۱$ و $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow n! \ge ۲^{n-۱}$.

$$\varepsilon > ۰\ ,\ \frac{۱}{n!} < \varepsilon \Rightarrow n! \ge ۲^{n-۱} > \frac{۱}{\varepsilon} \Rightarrow M > ۱ + \left\lfloor \frac{\log(۱/۴)}{\log ۲} \right\rfloor$$

۱۰. $$N > ۰\ ,\ a_n > N \Rightarrow ۲^{\sqrt{n}} > N \Rightarrow \sqrt{n} > \frac{\log N}{\log ۲}$$
$$\Rightarrow M > \left\lfloor \left(\frac{\log N}{\log ۲}\right)^۲ \right\rfloor$$
$$\Rightarrow \forall N > ۰, \exists M \in N : n \ge M \Rightarrow a_n > N$$

۱۱. $M \ge ۱۰^{۱۰^N}$

۱۲. $L = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sin(n!)}{n^{۱/۳} + \dfrac{۱}{n^{۲/۳}}} = ۰$

۱۳. $L = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{۱}{\sqrt{n+۱} + \sqrt{n}} = ۰$

۱۴. $L = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(-۲/۳)^n + ۱}{-۲\times(-۲/۳)^n + ۳} = \dfrac{۱}{۳}$

۱۵.
$$L = \frac{۱-b}{۱-a}.\lim_{n\to\infty}\frac{۱-a^n}{۱-b^n}\ ,\ \lim_{n\to\infty} a^n = \lim_{n\to\infty} b^n = ۰ \Rightarrow L = ۱$$

۱۶. $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲^۲} + \cdots + \frac{۱}{۲^n}\right) = ۱$$
$$\Rightarrow L = \lim_{n\to\infty} ۲^{۱/۲} \times ۲^{۱/۲^۲} \times \cdots \times ۲^{۱/۲^n} = ۲$$

1. Sequence

صفر

● غلامرضا یاسی‌پور

در دوران جوانی، ورودی متزلزل به سرزمین اعداد داریم. می‌آموزیم که ۱ اولین عدد «الفبای اعداد» است که به معرفی اعداد شمارش ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ و... می‌پردازد. اعداد شمارش آن‌هایی هستند که اشیای حقیقی از قبیل سیب، پرتقال، موز و گلابی را می‌شمرند. تنها مدتی بعد است که می‌توانیم شمار سیب‌های جعبه‌ای را، زمانی که سیبی در آن نیست، بشمریم.

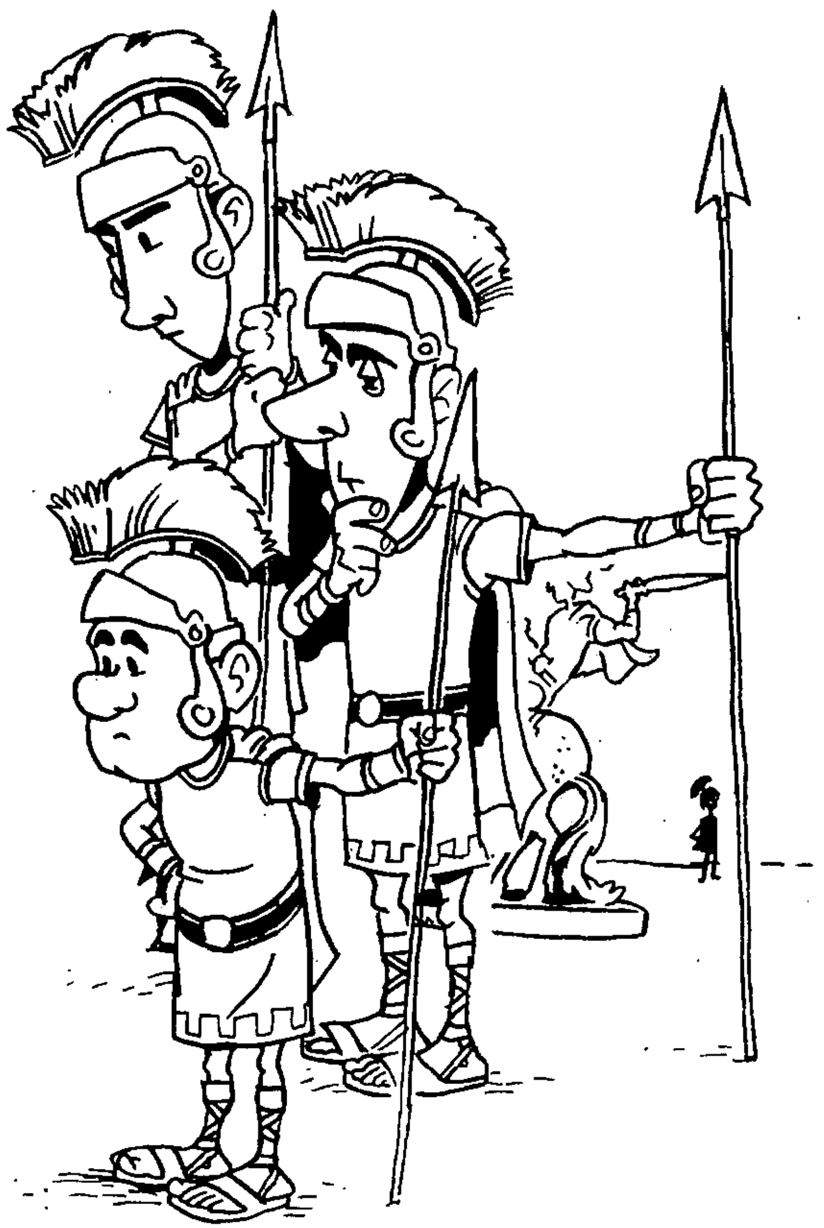
حتی یونانیان قدیم که در علوم و ریاضیات به پیشرفت‌های عظیمی نائل شدند، و رومیان که به خاطر کارهای برجسته‌شان در امور مهندسی معروف‌اند، در برخورد با تعداد سیب‌های واقع در جعبه‌های تهی، فاقد روشی مؤثر بودند و در دادن نامی به «هیچ»[1] توفیق نیافتند. رومیان روش خودشان را در ترکیب I، V، X، L، D، M و C داشتند، اما صفر در کجا قرار داشت؟ آن‌ها نیز «هیچ» را به شمار نمی‌آوردند.

چگونه صفر پذیرفته شد؟

تصور بر این است که کاربرد نماد نمایش‌دهنده‌ی «هیچی»[2] از هزاران سال پیش آغاز شده است. تمدن «مایاها»[3] در سرزمینی که اینک مکزیک نامیده می‌شود، صفر[4] را به صورت‌های گوناگون به کار برده است. اندکی بعد، بطلمیوس[5] که منجّم بود، در دستگاه عددی‌اش، تحت نفوذ بابلی‌ها[6]، از نمادی مشابه صفر روزگار خودمان، به‌عنوان «جانگه‌دار» استفاده کرد. صفر، به عنوان جانگه‌دار، می‌توانست برای متمایز کردن دو مثال (در نمادنویسی امروزه) چون ۷۵ و ۷۰۵، به جای استفاده از موردی که بابلی‌ها به‌کار می‌بردند، به‌کار رود. این موضوع را می‌توان با معرفی «کاما» در ادبیات مقایسه کرد، چرا که در هر دو مورد به خواندن مفهوم درست کمک می‌رسانند؛ اما همان‌گونه که کاما برای کاربردش، با مجموعه‌ای از قواعد به کار می‌رود، برای استفاده از صفر نیز، باید قواعدی در دست باشد.

براهماگوپتا[7]، ریاضی‌دان هندی قرن هفتم میلادی، صفر را به‌عنوان «عدد»[8] و نه صرفاً یک جانگه‌دار، در نظر گرفت و برای به‌کار بردن آن، قواعدی به‌دست داد. قواعد مزبور از این قبیل بودند: «مجموع یک عدد مثبت و صفر، مثبت است» و «مجموع صفر و صفر، صفر است.» وی در تصور صفر به‌عنوان یک عدد، و نه یک جانگه‌دار، کاملاً پیشرو بود. دستگاه شمارش هند و عربی، که شامل صفر در این روش است، بار اول در غرب توسط لئوناردوی پیسایی[9]، فیبوناتچی[10]، در «کتاب شمارش»[11] وی که ابتدا به سال ۱۲۰۲ میلادی منتشر شد، رواج یافت. وی که در شمال آفریقا بزرگ شده و در مکتب هند و عربی تعلیم یافته بود، توانمندی کاربرد علامت اضافی را در ترکیب با نمادهای هندی ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸و ۹ دریافت.

وارد کردن صفر در دستگاه شمارش، پرسشی را به‌وجود آورد که براهماگوپتا به اختصار این گونه آن را مطرح کرد: با این «تازه‌وارد

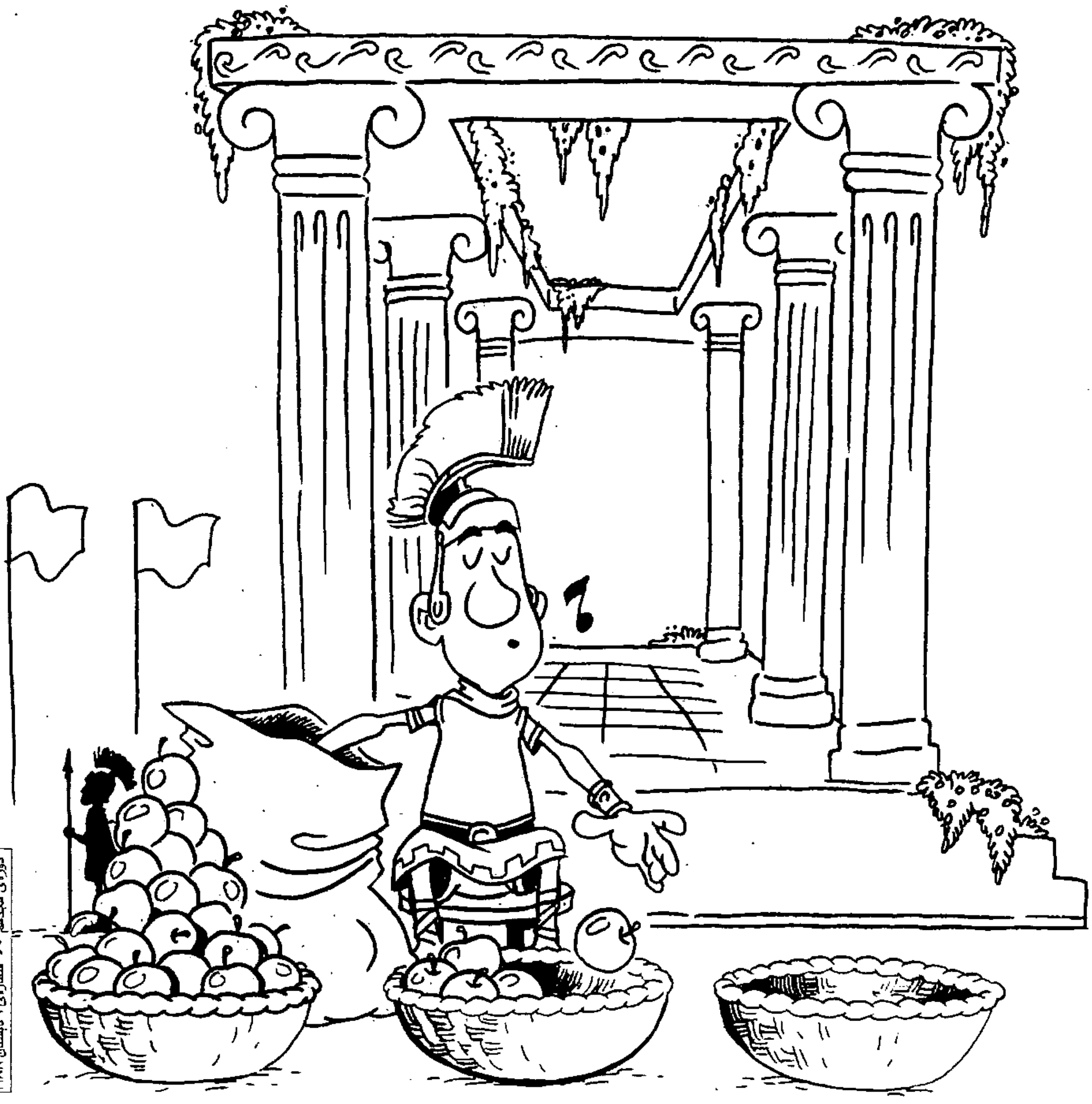


فضول» چگونه باید برخورد کرد؟ وی کلید شروع کار را زد، اما چاره‌جویی‌اش مبهم بود. در واقع، چگونه صفر می‌توانست به گونه‌ای دقیق‌تر، در دستگاه حساب موجود، تنظیم و به آن ملحق شود؟ بعضی از تنظیم‌ها ساده بودند. یعنی چون ۰ به جمع و ضرب وارد می‌شد، به پاکیزگی جا می‌گرفت، اما دو عمل تفریق و تقسیم به سادگی با «بیگانه‌ی مورد بحث» کنار نمی‌آمدند. پس برای اطمینان از این‌که ۰ با مابقی حساب مورد قبول، هماهنگ است، به مفاهیمی تازه نیاز بود.

کارکرد صفر چگونه است؟

جمع و ضرب با صفر، ساده و بی دردسر است؛ چون می‌توان، برای به‌دست آوردن صد، ۰ را به ۱۰ افزود. ولی ما جمع کردن یا «افزودن» را به طریقی، با تصور و تخیلی کمتر، در عمل حسابی‌مان به کار خواهیم برد. جمع صفر با یک عدد، آن عدد را بدون تغییر باقی می‌گذارد، در حالی‌که ضرب ۰ در هر عدد، همواره ۰ را به‌عنوان پاسخ به‌دست می‌دهد. برای مثال داریم: $7+0=7$ و $7\times 0=0$. تفریق عملی ساده است، اما می‌تواند به منفی‌ها منجر شود: $7-0=7$ و $0-7=-7$ در حالی‌که تقسیم شامل صفر، به مشکلاتی می‌انجامد.

فرض می‌کنیم، طولی را با چوب اندازه‌گیری‌مان، اندازه گرفته باشیم. نیز فرض می‌کنیم، طول چوب اندازه‌گیری، در واقع ۷ واحد طول باشد. در این صورت می‌خواهیم بدانیم، چوب اندازه‌گیری چندبار در امتداد طول مورد نظرمان قرار می‌گیرد. اگر طول مورد نظر عملاً ۲۸ واحد باشد، پاسخ ۲۸ تقسیم بر ۷ است. یا به زبان



نمادها: ۴ = ۷ ÷ ۲۸ . نماد بهتر در بیان این تقسیم، عبارت است از:

$$\frac{۲۸}{۷} = ۴$$

و آن‌گاه می‌توانیم آن را با «طرفین ـ وسطین» کردن، به صورت ضرب بنویسیم: ۲۸ = ۷ × ۴ . اینک در تقسیم ۰ بر ۷ چه می‌توانیم گفت؟ برای کمک به دادن پاسخ در این حال، پاسخ را a می‌نامیم، به‌طوری که:

$$\frac{۰}{۷} = a$$

این رابطه، با طرفین و وسطین کردن، هم‌ارز ۰ = ۷ × a است! اما اگر چنین باشد، تنها مقدار ممکن برای ۰ خود ۰ است، زیرا اگر ضرب دو عدد، ۰ را حاصل کند، یکی از آن‌دو باید ۰ باشد. واضح است که ۷ چنین نیست، پس a باید صفر باشد. ولی این مشکل اصلی عمل با صفر نیست، مرحله‌ی تقسیم بر صفر است. اگر در مورد $\frac{۷}{۰}$ نیز به همان طریق $\frac{۰}{۷}$ عمل کنیم، معادله‌ی $b = \frac{۷}{۰}$ را خواهیم داشت.

در این صورت، با طرفین وسطین کردن، ۷ = ۰ × b و با این گزاره‌ی مهمل برخورد می‌کنیم که ۷ = ۰ . بنابراین، با پذیرفتن امکان عدد بودن $\frac{۷}{۰}$ امکان هرج و مرجی شمارشی را در مقیاسی عظیم خواهیم داشت. طریق بیرون شدن از این ماجرا، آوردن این سخن است که $\frac{۷}{۰}$ «تعریف نشده»[۱۲] است. یعنی مجاز نیستیم که از عمل تقسیم ۷ (یا هر عدد ناصفر دیگر) بر ۰، مطلب معنی‌داری به دست آوریم. بنابراین، خیلی ساده، اجازه نمی‌دهیم این عمل رخ بدهد؛ همان‌گونه که به طریقی مشابه، مجاز نیست بدون رسیدن به موضوعی مهمل، کامایی در میان یک کلمه قرار داده شود.

در قرن دوازدهم میلادی، بهاسکارا[۱۳]، ریاضی‌دان هندی، در تعقیب کارهای براهماگوپتا، تقسیم بر ۰ را بررسی و پیشنهاد کرد، حاصل عدد تقسیم شده بر ۰، بی‌نهایت است. این سخن معقول بود، زیرا در صورتی که عددی را بر عدد بسیار کوچکی تقسیم کنیم، پاسخ بسیار بزرگ خواهد شد. به عنوان نمونه، ۷ تقسیم بر یک دهم، می‌شود ۷۰، و بر یک صدم، می‌شود ۷۰۰. به این ترتیب با کوچک‌تر و کوچک‌تر کردن مخرج، پاسخ به‌دست آمده بزرگ‌تر و بزرگ‌تر خواهد شد. و در کوچک نهایی، یعنی خود صفر، پاسخ باید بی‌نهایت باشد. با پذیرفتن این قسم استدلال، به موقعیت توضیح مفهومی حتی وهمی‌تر، یعنی بی‌نهایت می‌رسیم. اما سروکله زدن با بی‌نهایت به جایی نمی‌رسد. زیرا «بی‌نهایت»[۱۴] (با نماد متعارف ∞) با قواعد معمول حساب تطبیق نمی‌کند و عدد به مفهوم معمول نیست.

لکن، در صورتی که $\frac{۷}{۰}$ مشکل ایجاد کند، با مورد حتی وهمی‌تر $\frac{۰}{۰}$، چه می‌توان کرد؟ اگر $c = \frac{۰}{۰}$ باشد، با طرفین وسطین کردن، به تساوی ۰ = ۰ × c و به این واقعیت می‌رسیم که: ۰ = ۰ . این رابطه، گرچه روشنگری ندارد، ولی مهمل نیز نیست. در واقع c می‌تواند هر عددی باشد که در این صورت، به موردی ناممکن نرسیده‌ایم. پس به این نتیجه می‌رسیم که حاصل تقسیم $\frac{۰}{۰}$ می‌تواند هر عددی باشد که به زبان ریاضی مهذّب، «نامعین»[۱۵] نامیده می‌شود.

به این ترتیب، با توجه به تمام موارد، چون تقسیم بر صفر را مورد بررسی قرار دهیم، به این نتیجه می‌رسیم که بهتر آن است، این عمل را از مسیری که محاسبات را انجام می‌دهیم، خارج کنیم؛ چه ریاضیات را می‌توان بدون آن نیز به شادابی اداره کرد.

کاربرد صفر چیست؟

اما بدون صفر به سادگی نمی‌توان به کارها پرداخت، زیرا پیشرفت علوم وابسته به آن است. در علوم، از طول صفر درجه،

همه‌چیز درباره‌ی هیچ

مجموع صفر و یک عدد مثبت، مثبت است.
مجموع صفر و یک عدد منفی، منفی است.
مجموع یک عدد مثبت و یک عدد منفی، تفاضل آن‌هاست؛ یا، اگر برابر باشند، صفر است.
صفر تقسیم بر یک عدد مثبت یا منفی، یا صفر است یا به عنوان کسری با صفر در صورت، و مقداری متناهی در مخرج، بیان می‌شود.
براهماگوپتا ۶۲۸ میلادی





درجه‌ی صفر بر مقیاس دما، نیز انرژی صفر، و ثقل صفر سخن می‌گوییم. این پدیده، به زبان غیرعلمی، با مفاهیمی چون ساعت صفر و تحمل صفر نیز وارد شده است. برای صفر، حتی می‌توان کاربردهای بیشتری در نظر گرفت.

ریاضیات نمی‌تواند بدون صفر سر کند. چه این پدیده در هسته‌ی مرکزی مفاهیمی از ریاضیات قرار دارد که دستگاه شمارش، جبر و هندسه را به حرکت درمی‌آورند. در «محورها»[16] صفر، عددی است که اعداد مثبت را از اعداد منفی جدا می‌کند، و به این ترتیب موقعیتی ممتاز اختیار می‌نماید، در دستگاه دهدهی، صفر به‌عنوان جانگه‌دار به‌کار می‌رود که به ما توانایی می‌دهد، هم از اعداد عظیم و هم از ارقام میکروسکوپی استفاده به‌عمل آوریم.

طی گذشت قرن‌ها، صفر پذیرفته شده، مورد استفاده قرار گرفته و یکی از بزرگ‌ترین اختراعات بشر به شمار رفته است. در قرن نوزدهم میلادی، هالستد[17]، ریاضی‌دان آمریکایی، با اقتباس از نمایش نامه‌ی «رؤیای نیمه شب تابستان»[18] اثر شکسپیر[19]، از صفر به‌عنوان موتور پیشرفتی یاد کرد که به «هیچ واهی، نه تنها محل سکونت، نام، تصویر، و نماد می‌داد، بلکه از آن به‌عنوان توان یاری دهنده‌ای سخن می‌گفت که شاخصه‌ی نژاد هندیانی است که صفر از میانشان برخاسته است.»

صفر هنگامی که معرفی شد باید به‌عنوان موجودی عجیب و غریب در نظر گرفته شده باشد، اما ریاضی‌دانان بر این عادت‌اند که به مفاهیم غریبی بپردازند که فایده‌شان بعدها به اثبات می‌رسد. هم‌ارز عدد صفر در روزگار ما، در نظریه‌ی مجموعه‌ها رخ می‌دهد که در آن مفهوم «مجموعه»[20] کلکسیونی از عناصر است. در این نظریه $\varnothing$ مجموعه‌ای بدون عضو را نمایش می‌دهد؛ مجموعه‌ای که به نام «مجموعه‌ی تهی»[21] موسوم است. این ایده، گرچه در حال حاضر عجیب به نظر می‌رسد، اما مانند صفر وجودش ضروری و اجتناب‌ناپذیر است.

چند تاریخچه

۷۰۰ قبل از میلاد: بابلی‌ها، در دستگاه شمارشان از صفر به‌عنوان جانگه‌دار استفاده می‌کردند.

۶۲۸ میلادی: براهماگوپتا صفر را به‌کار برد، و قواعدی برای استفاده از آن با سایر اعداد بیان کرد.

۸۳۰ میلادی: ماهاویرا[22]، مفاهیمی را درباره‌ی چگونگی برخورد صفر با سایر اعداد به‌کار برد.

۱۱۰۰ میلادی: بهاسکارا از ۰ به عنوان نمادی در جبر استفاده کرد و سعی در به‌کار بردن آن داشت..

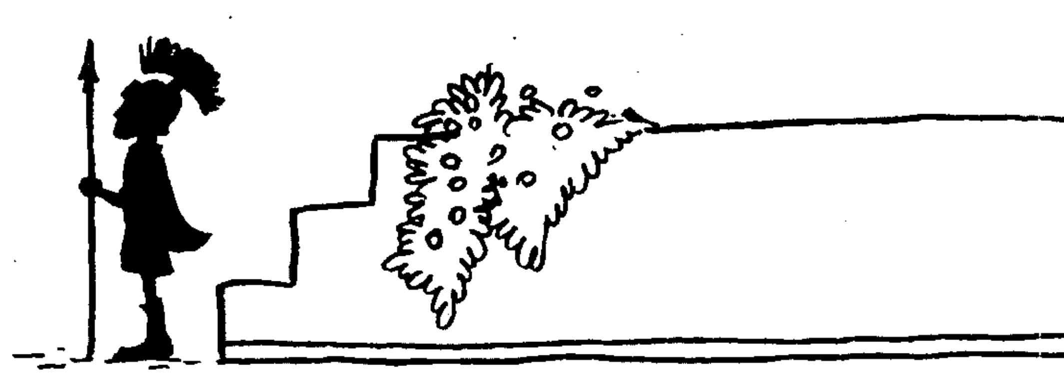
۱۲۰۲ میلادی: فیبوناتچی از نماد اضافی ۰ در دستگاه شمارش هندی-عربی ۱، ۲، ۳، ... و ۹، اما نه به‌عنوان عددی برابر با این اعداد، استفاده کرد.

خلاصه‌ی کلام

هیچ، در واقع، چیزی است.

---

1. nothing
2. nothingness
3. Maya civilization
4. zero
5. Claudius Ptolemy
6. Babylonians
7. Brahmagupta
8. number
9. Leonardo of Pisa
10. Fibonacci
11. Liber Abaci
12. undefined
13. Bhaskara
14. infinity
15. indeterminate
16. number lines
17. G.B. Halsted
18. Midsummer Night's Dream
19. Shakespeare
20. Set
21. empty set
22. Mahavira



قضیه‌ی تقسیم (۲)



● حمیدرضا امیری

اشاره

در این قسمت می‌خواهیم با توجه به ویژگی‌ها و خواص رابطه‌ی «عاد کردن» که در قسمت قبل مورد بررسی و تجزیه و تحلیل قرار گرفت، نمونه‌هایی از کاربرد آن‌ها را در حل مسائل بخش‌پذیری مطرح کنیم. بنابراین قبل از مطالعه‌ی این قسمت، یک بار دیگر ویژگی‌های رابطه‌ی عاد کردن را مرور کنید تا آمادگی استفاده از آن‌ها را داشته باشید.

مسئله‌ی ۱. اگر $a|a-b$ ، ثابت کنید: $a|b$ و سپس نشان دهید: $a|a^n-b^n$.

حل:

طبق فرض: $a|a-b$

می‌دانیم: $a|a$

$$\Rightarrow a|[a-(a-b)] \Rightarrow a|b$$

$$\left.\begin{array}{ll} \text{ثابت شد:} & a|b \Rightarrow a|b^n \\ \text{می‌دانیم:} & a|a \Rightarrow a|a^n \end{array}\right\} \Rightarrow a|a^n-b^n$$

مسئله‌ی ۲. اگر $a-b|a$ ، ثابت کنید: $a-b|b$.

(فکر می‌کنم دقیقاً شبیه مسئله‌ی قبل و به راحتی قابل حل است. اقدام کنید!)

مسئله‌ی ۳. اگر $4|5k-1$ ، آن‌گاه ثابت کنید: $16|45k^2+6k-3$.

حل: برای رسیدن از رابطه‌ی $4|x$ به رابطه‌ی $16|y$ ، به دو طریق می‌توان عمل کرد: یا طرفین را به توان ۲ رساند ($4^2|x^2$) و یا طرفین را در ۴ ضرب کرد ($16|4x$):

$$4|5k-1 \Rightarrow 16|25k^2-10k+1 \quad (1)$$

$$4|5k-1 \Rightarrow 16|20k-4 \quad (2)$$

حال اگر سمت راست رابطه‌های (۱) و (۲) را با هم جمع کنیم و از سمت راست رابطه‌ی حکم کم کنیم، به عبارت $(20k^2-4k)$ می‌رسیم که با ضرب سمت راست رابطه‌ی (۲) در k تأمین می‌شود!

$$16|20k-4 \xrightarrow{\text{در } k \text{ ضرب می‌شود}} 16|20k^2-4k \quad (3)$$

$$(1) \text{ و } (2) \text{ و } (3) \Rightarrow 16|45k^2+6k-3$$

مسئله‌ی ۴. اگر $ab|c$ ، ثابت کنید: $a|c$ و $b|c$.

حل:

$$ab|c \Rightarrow c=abq \Rightarrow \begin{cases} c=a(\underbrace{bq}_{q'}) \Rightarrow a|c \\ c=b(\underbrace{aq}_{q''}) \Rightarrow b|c \end{cases}$$

مسئله‌ی ۵. برای مسئله‌ی ۴ حالت کلی را بیان و اثبات کنید و سپس از $a^n|c$ نتیجه بگیرید: $a|c$. «اگر: $a_1 \times a_2 \times \cdots \times a_n|c$ ، آن‌گاه: $a_1|c$ و $a_2|c,\cdots,a_n|c$ »

حل: اثبات به روش استقرا روی n:

$n=1: a_1|c \Rightarrow a_1|c$

$n=2: a_1 \times a_2|c \xrightarrow{\text{مسئله‌ی ۴}} a_1|c, a_2|c$

فرض استقرا $n=k: a_1 \times a_2 \times \cdots \times a_k|c \Rightarrow a_1|c,\cdots,a_k|c$

حکم استقرا $n=k+1: a_1 \times \cdots \times a_k \times a_{k+1}|c \Rightarrow a_1|c,\cdots,a_{k+1}|c$

فرض کنیم: $a_1 \times a_2 \times \cdots \times a_k \times a_{k+1}|c \Rightarrow (a_1 \times \cdots \times a_k) \times a_{k+1}|c$

$$\xrightarrow{\text{مسئله‌ی ۴}} \underbrace{(a_1 \times \cdots \times a_k)|c}_{\text{استفاده از فرض استقرا}}, a_{k+1}|c \Rightarrow a_1|c,\cdots,a_k|c, a_{k+1}|c$$

حال اگر فرض کنیم: $a_1=a_2=\cdots=a_k=a$ ، در این صورت داریم:

$$a \times a \times \cdots \times a|c \quad \text{یا} \quad a^n|c \Rightarrow a|c$$

مسئله‌ی ۶. برای هر $b>1$ ثابت کنید: اگر $m|n$، آن‌گاه: $(b^m-1)|(b^n-1)$.

حل:

(۱) طبق فرض: $m|n \Rightarrow n=mq$

از طرف دیگر با توجه به (۱) می‌دانیم: $b^n-1=b^{mq}-1=(b^m)^q-1$

$$=(b^m-1)(\underbrace{(b^m)^{q-1}+(b^m)^{q-2}+\dots+1}_{t})$$

$$\Rightarrow b^n-1=(b^m-1)\times t \Rightarrow b^m-1|b^n-1$$

مسئله‌ی ۷. عکسِ مسئله‌ی ۶ را بیان و ثابت کنید.

(برای هر $b>1$ ثابت کنید: اگر $b^m-1|b^n-1$، آن‌گاه: $m|n$.)

حل: کافی است (b^n-1) را بر (b^m-1) تقسیم کنیم و باقی‌مانده را، مثلاً پس از k مرحله، مساوی با صفر قرار دهیم که در این صورت خواهیم داشت:

$$\begin{array}{l|l}
b^n-1 & b^m-1 \\
\underline{b^n-b^{n-m}} & b^{n-m}+b^{n-2m}-b^{n-3m}\dots \\
b^{n-m}-1 & \\
\underline{b^{n-m}-b^{n-2m}} & \\
b^{n-2m}-1 & \\
\vdots & \\
b^{n-km}-1 &
\end{array}$$

باقی‌مانده‌ی تقسیم $=b^{n-km}-1=0 \Rightarrow b^{n-km}=1 \xrightarrow{b>1} n-km=0$

$$\Rightarrow n=km \Rightarrow m|n$$

(این مسئله از طریق لِم اقلیدس نیز قابل حل است که بعداً بیان خواهد شد.)

مسئله‌ی ۸. اگر $a|6k+5$ و $a|5k+4$، ثابت کنید: $a=\pm1$.

حل: می‌دانیم معادلِ حکم، یعنی $a=\pm1$، آن است که ثابت شود: $a|1$.

$$\left.\begin{array}{l} a|6k+5 \Rightarrow a|30k+25 \\ a|5k+4 \Rightarrow a|30k+24 \end{array}\right\} \Rightarrow a|(30k+25)-(30k+24)$$

$$\Rightarrow a|1 \Rightarrow a=\pm1$$

مسئله‌ی ۹. چند نقطه با هر دو مختص صحیح، روی منحنی به معادله‌ی $y=\frac{2x^2-3x+4}{x+1}$ قرار دارند؟

حل: اگر بخواهیم $y\in Z$ باشد، باید صورت کسر بر مخرج بخش‌پذیر باشد؛ یعنی: $x+1|2x^2-3x+4$ (۱)

(۲) از طرف دیگر: $x+1|x+1 \xrightarrow{\text{ضرب در } 2x} x+1|2x^2+2x$

(۱) و (۲) $\Rightarrow x+1|(2x^2+2x)-(2x^2-3x+4)$

(۳) $\Rightarrow x+1|5x-4$

(۴) هم‌چنین می‌دانیم: $x+1|x+1 \Rightarrow x+1|5x+5$

(۳) و (۴) $\Rightarrow x+1|(5x+5)-(5x-4) \Rightarrow x+1|9$

$\Rightarrow x+1=\pm1$ یا ±3 یا $\pm9 \Rightarrow x\in\{0,-2,2,-4,8,-10\}$

به ازای هر x با قرار دادن در معادله‌ی منحنی، یک y در z حاصل می‌شود. درنتیجه روی این منحنی فقط ۶ نقطه با هر دو مختص صحیح وجود دارند.

مسئله‌ی ۱۰. اگر $y=\frac{f(x)}{x-a}$، ثابت کنید: طولِ نقاط با مختصات صحیح که روی منحنی به معادله‌ی مذکور قرار دارند، از رابطه‌ی $x-a|f(a)$ به‌دست می‌آید.

حل: می‌دانیم، شرط این‌که $y\in Z$ باشد آن است که: $x-a|f(x)$. از طرف دیگر می‌دانیم، اگر $f(x)$ را بر $(x-a)$ تقسیم کنیم، خواهیم داشت: $f(x)=(x-a)q(x)+r$ که: $r=f(a)$.

بنابراین:

$$\left.\begin{array}{l} x-a|(x-a)q(x)+r \\ \text{از طرف دیگر: } x-a|(x-a)q(x) \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{از هم کم می‌کنیم}} x-a|r \Rightarrow x-a|f(a)$$

مسئله‌ی ۱۱. چند نقطه با هر دو مختص صحیح، روی منحنی به معادله‌ی $y=\frac{2x^3+2x^2+x}{x+2}$ قرار دارند؟

حل:

$$y\in Z \xrightarrow{\text{مسئله‌ی ۱۰}} x+2|2(-2)^3+2(-2)^2+(-2) \Rightarrow x+2|-10$$

$\Rightarrow x+2=\pm1$ یا ±2 یا ±5 یا ±10

پس ۸ نقطه با مختصات صحیح روی منحنی واقع هستند.

مسئله‌ی ۱۲. به ازای چند عدد طبیعی و کمتر از ۵۰ داریم: $126|5^n+1$.

یادآوری: می‌دانیم که a^n+b^n به ازای هر n فرد بر $a+b$ بخش‌پذیر است و a^n-b^n برای هر n بر $(a-b)$ بخش‌پذیر خواهد بود. عبارت a^n-b^n نیز به ازای هر n زوج بر $a+b$ بخش‌پذیر است.

حل:

$$126|5^n+1 \Rightarrow 5^3+1|5^n+1 \Rightarrow 5^3+1 \Big| (5^3)^{\frac{n}{3}}+1$$

بنابر یادآوری فوق، باید $\frac{n}{3}$ عددی صحیح و فرد باشد تا رابطه‌ی اخیر برقرار شود:

$$\frac{n}{3}=k,\ k=2t+1 \Rightarrow \frac{n}{3}=2t+1 \Rightarrow n=6t+3 \qquad 0\le t\le 7$$

$$\Rightarrow n\in\{3,9,15,21,27,33,39,45\}$$

مسئله‌ی ۱۳. اگر $a^2-b^2|a$، ثابت کنید: $a-b|b$.

حل:

$$a^2-b^2|a \Rightarrow (a-b)(a+b)|a$$

$$\xrightarrow{\text{مسئله‌ی ۴}} (a-b)|a \xrightarrow{\text{مسئله‌ی ۲}} a-b|b$$

مسئله‌ی ۱۴. اگر $x-y|5x+1$ و $x^2-y^2|5x$، ثابت کنید x و y متوالی‌اند.

حل:

$$x^2-y^2|5x \overset{\text{مسئله‌ی ۴}}{\Rightarrow} (x-y)|5x\ ,\ x-y|5x+1 \Rightarrow x-y|1$$

$\Rightarrow x-y=\pm1 \Rightarrow$ x و y متوالی‌اند

مسئله‌ی ۱۵. به ازای چند عدد دو رقمی، رابطه‌ی $33|2^n-1$ برقرار است؟

حل:

$$33=2^5+1|2^n-1 \Rightarrow 2^5+1\Big|(2^5)^{\frac{n}{5}}-1$$

می‌دانیم، عبارت a^n-b^n فقط به ازای nهای زوج بر $(a+b)$ بخش‌پذیر است. پس:

$$\frac{n}{5}=2k \Rightarrow n=10k\ ,\ 10\le 10k\le 99 \Rightarrow 1\le k\le 9$$

یعنی دقیقاً ۹ عدد دو رقمی وجود دارد که در رابطه‌ی فوق صدق می‌کند.

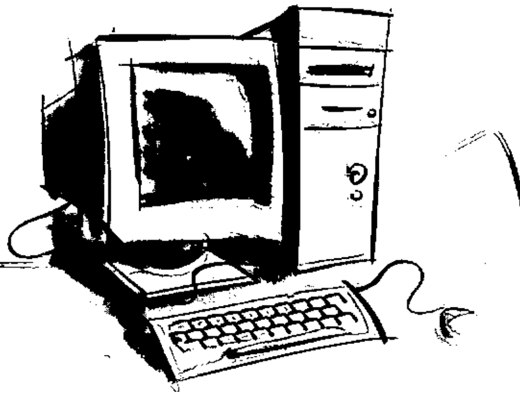
مسئله‌ی ۱۶. چند عدد طبیعی مانند n وجود دارند، به طوری که داشته باشیم: $n|330$ و $15|n$؟

حل: چون $15|n$، پس: $n=15k$ و باید $15k|330$، پس: $k|22$. بنابراین: $k\in\{1,2,11,22\}$ و: $n\in\{15,30,165,330\}$.

یعنی ۴ عدد طبیعی چون n در رابطه‌های فوق صدق می‌کند.

در مقاله‌ی بعدی ان‌شاءالله به سراغ قضیه‌ی تقسیم و کاربردهای آن در Z خواهیم رفت و مشاهده خواهید کرد که رابطه‌ی عاد کردن و ویژگی‌های آن هم‌چنان کاربرد دارند و از آن‌ها استفاده خواهد شد.

ادامه دارد...



معرفی سایت‌های ریاضی جهان

• احسان یارمحمدی

اسم سایت: **MATH-KAL**

آدرس اینترنتی سایت: **http://www.mathkalusa.com**

در بالای صفحه اصلی سایت **MATH-KAL** عنوان‌های زیر ملاحظه می‌شود.

- صفحه اصلی **(Home)**
- تابع **(Products)**
- نمونه نمایشی **(Demo)**
- سفارشات **(Orders)**
- عنوان‌های ریاضی **(Math Topics)**
- تماس **(Contact)**
- پرسش‌های اغلب پاسخ داده شده **(FAQ)**[1]

عناوین ریاضی این سایت عبارتند از:

■ ویژگی‌ها **(Features)**

- آموزش خصوصی محاوره‌ای **(Interactive Tutorial)**
- کتاب درسی الکترونیکی **(Electronic Textbook)**
- محیط کاوش **(Exploration Enviroment)**
- جعبه ابزار کار معلم **(Teacher Tool kit)**
- تکلیف‌ساز **(Homework Generator)**
- آزمون‌های زمان‌دار **(On Screen Timed Tests)**

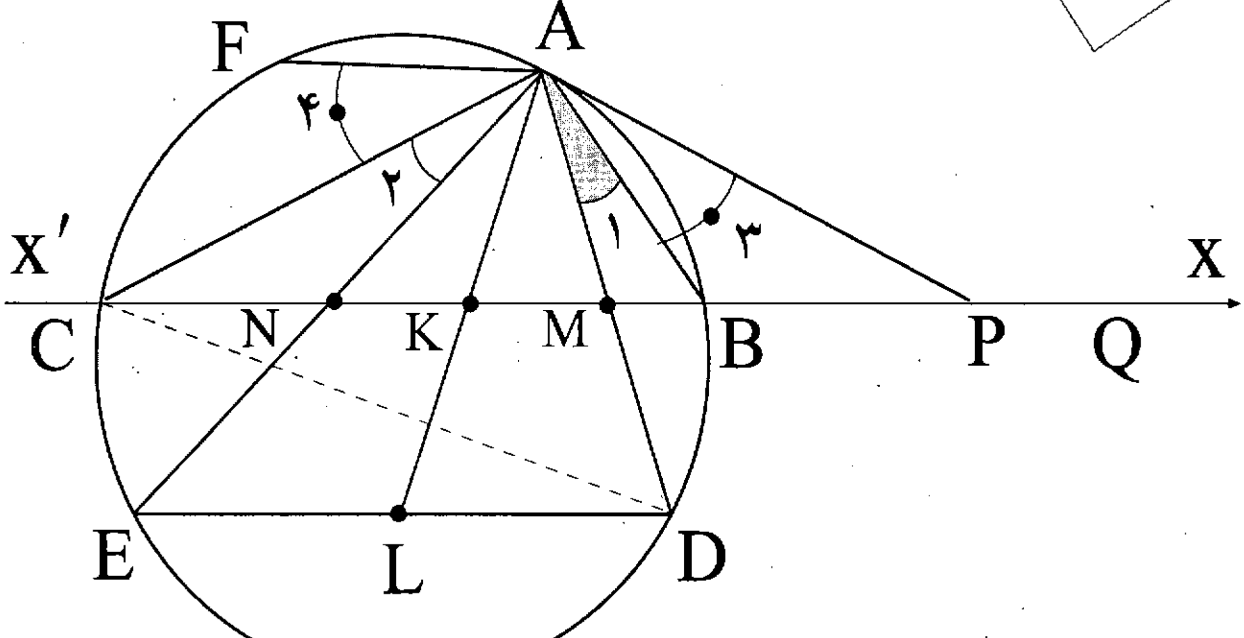
■ تابع **(Products)**

- جبر ۱ **(Algebra 1)**
- جبر ۲ **(Algebra 2)**
- مثلثات و مختصات **(Trigonometry & Coordinate)**
- هندسه **(Geometry)**
- مسائل توضیحی[2] و احتمال **(Word Problems & Probability)**

ادامه در صفحه‌ی ۵۰

تعمیم قضیه‌ی مربع ارتفاع مثلث قائم‌الزاویه

● دکتر احمد شرف‌الدین



چکیده

در مثلث قائم‌الزاویه قضیه‌ای داریم به نام «مربع ارتفاع»؛ این چنین: در مثلث قائم‌الزاویه، مربع ارتفاع وارد بر وتر برابر است با حاصل ضرب دو قطعه‌ای که ارتفاع روی وتر پدید می‌آورد.

نگارنده، قضیه‌ی ارتفاع مثلث قائم‌الزاویه را تعمیم داده است؛ این چنین: مثلث دل‌خواه ABC را درنظر می‌گیریم و محور $X'X$ را بر یکی از اضلاع آن، مثلاً بر ضلع BC اختیار می‌کنیم. می‌خواهیم بر محور یاد شده نقطه‌ای چون M بیابیم که رابطه‌ی $\overline{MA}^2 = \left|\overline{MB}.\overline{MC}\right|$ برقرار باشد. ($\overline{MB}$ و $\overline{MC}$، اندازه‌های جبریِ بردارهای $\overrightarrow{MB}$ و $\overrightarrow{MC}$، روی محور $X'X$ هستند). ثابت می‌کنیم روی محور $X'X$، چهار نقطه وجود دارد که در رابطه‌ی مطلوب صدق می‌کنند. از این چهار نقطه، سه نقطه در فاصله‌ی متناهی است و یکی نقطه‌ای است که به سوی بی‌نهایت رفته است. برای اثبات نکته‌ی اخیر، از یک حکم جبری بهره می‌گیریم که اکنون

یاد می‌کنیم: در معادله‌ی درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ ، اگر a به سوی صفر میل کند، یک جواب به‌سوی مقدار $-\frac{c}{b}$ و یک جواب به سوی بی‌نهایت میل می‌کند.

❁ ❁ ❁

۱ . **(قضیه‌ی مثلث قائم‌الزاویه)** . در مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABC که BC وتر و AH ارتفاع وارد بر وتر است، چنین داریم:

$\overline{AH}^2 = HA.HB$

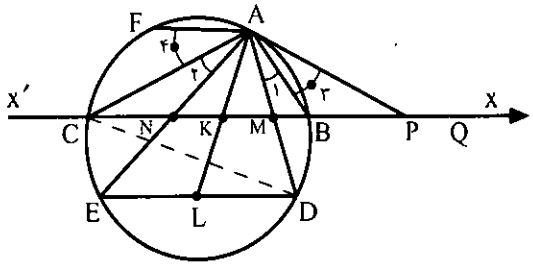
برهان: از تشابه دو مثلث AHB و AHC، رابطه‌ی موردنظر به‌دست می‌آید.

❁

۲ . **قضیه** . مثلث دل‌خواه ABC و محور X′X را منطبق بر یکی از اضلاع آن مثلاً ضلع BC درنظر می‌گیریم. می‌خواهیم نقطه‌ای چون M بر محور X′X بیابیم که رابطه‌ی زیر برقرار باشد:

$(1)\ \overline{MA}^2 = \overline{MB}.\overline{MC}$

$\overline{MB}$ و $\overline{MC}$ اندازه‌های جبری دو بردار $\overrightarrow{MB}$ و $\overrightarrow{MC}$ روی محور X′X می‌باشند.



شکل۱

چهار نقطه از محور X′X در رابطه‌ی مطلوب صدق می‌کنند. از این چهار نقطه، سه نقطه در فاصله‌ی متناهی‌اند و یک نقطه به‌سوی بی‌نهایت میل می‌کند.

برهان: نقطه‌ی دل‌خواه K را روی پاره‌خط BC اختیار می‌کنیم و روی خط AK نقطه‌ی L را طوری اختیار می‌کنیم که AK = AL باشد. از نقطه‌ی L خط l را موازی خط BC رسم می‌کنیم و نقاط برخورد آن را با دایره‌ی محیطی مثلث ABC، با D و E نشان می‌دهیم. نقطه‌ی برخورد پاره‌خط BC را با دو خط AD و AE به ترتیب M و N می‌نامیم. ثابت می‌کنیم رابطه‌های زیر برقرارند:

$(2)\ \overline{MA}^2 = -\overline{MB}.\overline{MC}$

$(3)\ \overline{NA}^2 = -\overline{NB}.\overline{NC}$

برهان: چون دو خط BC و DE موازی‌اند و نقطه‌ی K، وسط پاره‌خط AL است، پس: AM = MD و AN = NE . دو مثلث ABM و MDC، متشابه‌اند، زیرا زاویه‌های آن‌ها متساوی‌اند: دو زاویه‌ی BAM و BCD مقابل به کمان BD‌اند و دو زاویه‌ی ABM و MDC مقابل به کمان FC هستند. از تشابه دو مثلث یاد شده، رابطه‌ی ۲ حاصل می‌شود و از تشابه دو مثلث ANC و BNE، رابطه‌ی ۳ به‌دست می‌آید. پس دو نقطه‌ی M و N جواب‌هایی از مسئله‌اند. آیا مسئله جواب‌های دیگری نیز دارد؟ ـ آری، خواهیم دید.

❁

تبصره: دو خط AM و AN نسبت به دو خط AB و AC هم‌زاویه‌اند (منظور از این اصطلاح آن است که دو زاویه‌ی MAB و NAC برابرند). برای اثبات می‌گوییم، این دو زاویه روبه‌روی دو کمان برابرند، زیرا دو خط BC و ED موازی‌اند. پس دو کمان $\overset{\frown}{BD}$ و CE برابرند و لذا زاویه‌ی A_1 با زاویه‌ی A_2 برابر است.

❁

جواب‌های دیگر مسئله کدام‌اند؟

نقطه‌ی برخورد خط مماس بر دایره‌ی محیطی مثلث ABC، در نقطه‌ی A با خط BC را، با P نشان می‌دهیم. نقطه‌ی P، جواب دیگری از مسئله است. برای اثبات می‌گوییم، دو مثلث APB و APC متشابه‌اند. (این دو مثلث در زاویه‌ی P مشترک‌اند و اندازه‌ی دو زاویه‌ی BCA و BAP برابر است. زیرا اندازه‌ی این دو زاویه نصف اندازه‌ی کمان AB است). از تشابه این دو مثلث نتیجه می‌شود: $\overline{PA}^2 = \overline{PB}.\overline{PC}$

❁

حل کامل مسئله

در آن‌چه گذشت ثابت کردیم، دو جواب مسئله (یعنی دو نقطه‌ی M و N) روی پاره‌خط BC قرار دارند و یک جواب، نقطه‌ی برخورد خط BC با مماسی است که از نقطه‌ی A بر دایره‌ی محیطی مثلث رسم شود (یعنی نقطه‌ی P). اکنون می‌گوییم، مسئله یک جواب دیگر دارد و آن نقطه‌ای است از خط BC که به سوی بی‌نهایت رفته است. برای رسیدن به این نکته، حکم جبری زیر را به‌کار می‌بریم:

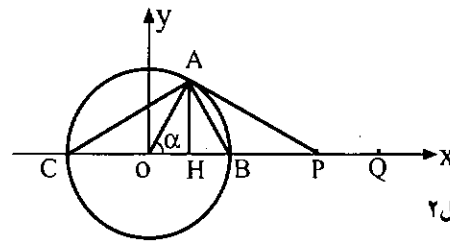
حکم: در معادله‌ی درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ ، اگر ضریب a به سوی صفر میل کند، یکی از جواب‌ها به سوی $-\frac{c}{b}$ میل می‌کند و جواب دیگر به سوی بی‌نهایت.

برای اثبات این که نقطه‌ی بی‌نهایت خط BC، جواب دیگری از مسئله است، نقطه‌ی دل‌خواه Q را روی خط BC، خارج از پاره‌خط BC درنظر می‌گیریم و آن را به سوی بی‌نهایت میل می‌دهیم و به آسانی ثابت می‌کنیم:

$$\lim_{BQ\to\infty} \frac{\overline{QA}^2}{\overline{QB}.\overline{QC}} = 1$$

اثبات آسان است و به خواننده واگذار می‌شود.

اکنون مطلب را با به‌کارگیری دستگاه مختصات دکارتی ثابت می‌کنیم: در شکل۲، دستگاه مختصات xoy را چنان اختیار می‌کنیم که محور ox منطبق بر خط BC و محور oy منطبق بر عمودمنصف پاره‌خط BC باشد (انتخاب مثلث ABC به صورت قائم‌الزاویه و انتخاب محورهای مختصات در جایگاهی که گفته شد، برای سهولت محاسبه است. حل مسئله در حالت کلی همان است، ولی محاسبه اندکی طولانی می‌شود). اندازه‌ی شعاع دایره‌ی محیطی مثلث ABC را r و اندازه‌ی زاویه‌ی BOA را α می‌نامیم.



شکل۲

معادله‌ی هندسی $\overline{QA}^2 = \left|\overline{QB}.\overline{QC}\right|$ (۴) را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

مختصات دو نقطه‌ی A و Q را نیز چنین می‌نویسیم: $A(r\cos\alpha, r\sin\alpha)$ و $Q(x,0)$. رابطه‌ی موردنظر به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\overline{QA}^2 = (x - r\cos\alpha)^2 + (0 - r\sin\alpha)^2$$

اگر نقطه‌ی Q روی پاره‌خط BC باشد، معادله‌ی ۱ به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$(x - r\cos\alpha)^2 + r^2\sin^2\alpha = -(x^2 - r^2) \quad (5)$$

اگر نقطه‌ی Q خارج پاره‌خط BC باشد، معادله‌ی ۱ به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$(x - r\cos\alpha)^2 + r^2\sin^2\alpha = x^2 - r^2 \quad (6)$$

معادله‌ی ۵ پس از ساده شدن به صورت زیر درمی‌آید:

$$2x^2 - (2r\cos\alpha)x = 0$$

جواب‌های این معادله $x = 0$ و $x = r\cos\alpha$ می‌باشند. معادله‌ی (۶) پس از اختصار به صورت $(r\cos\alpha)x - r^2 = 0$ درمی‌آید. جواب این معادله $x = \frac{r}{\cos\alpha}$ می‌شود. $\frac{r}{\cos\alpha}$ طول نقطه‌ی P است. (نقطه‌ی P، نقطه‌ی برخورد خط BC و خط مماس بر دایره در نقطه A است).

❊

آیا مسئله جواب دیگری دارد؟

آری. برای این‌که ثابت کنیم مسئله جواب دیگری دارد، آن را به صورت کلی‌تر مطرح می‌کنیم. بدین قرار که پارامتری در مسئله وارد می‌کنیم تا کلی‌تر شود. حال مسئله‌ی کلی‌تر را بررسی می‌کنیم. در بررسی، پارامتر را به سوی ۱ میل می‌دهیم؛ این‌چنین:

طرح مسئله به صورت کلی‌تر. مثلث ABC مفروض است. بر خط BC نقطه‌ای چون M تعیین کنید که رابطه‌ی زیر برقرار باشد.

$$\overline{MA}^2 = k\overline{MB}.\overline{MC} \quad (7)$$

k پارامتری مثبت است

اگر نقطه‌ی M روی پاره‌خط BC باشد، معادله‌ی هندسی ۷ به صورت تحلیلی ۸ نوشته می‌شود و اگر نقطه‌ی M روی پاره‌خط BC نباشد، معادله‌ی ۷ به صورت ۹ نوشته می‌شود.

$$(x - r\cos\alpha)^2 + r^2\sin^2\alpha = -k\overline{MB}.\overline{MC} = -k(x^2 - r^2) \quad (8)$$

$$(x - r\cos\alpha)^2 + r^2\sin^2\alpha = k\overline{MB}.\overline{MC} = k(x^2 - r^2) \quad (9)$$

معادله‌ی ۸ دارای دو جواب است. معادله‌ی ۹ را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$(1-k)x^2 - (2r\cos\alpha)x + (1+k)r^2 = 0$$

در معادله‌ی درجه دوم بالا، پارامتر k را به سوی یک میل می‌دهیم؛ یعنی ضریب x^2 را به سوی صفر میل می‌دهیم. هنگامی که k به سوی یک میل می‌کند، یک جواب معادله که آن را x_1 می‌نامیم، به سوی $\frac{r}{\cos\alpha} = -\frac{c}{b}$ میل می‌کند. $\frac{r}{\cos\alpha}$ طول نقطه‌ی P است و جواب دیگر مسئله که آن را x_2 می‌نامیم، به سوی بی‌نهایت میل می‌کند:

$$x_2 = \frac{c}{a}.\frac{1}{x_1} = \frac{(1+k)r^2}{1-k}.\frac{\cos\alpha}{r}$$

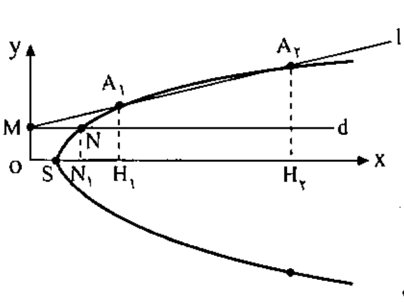
$$\underset{k\to 1}{\text{حد}}\ x_2 = \infty$$

❊❊❊

توضیح بیشتر درباره‌ی معادله‌ی درجه دومی که ضریب جمله‌ی درجه دوم آن به سوی صفر میل می‌کند

در بعضی مسائل هندسی که معادله‌ی درجه دوم به کار می‌آید، ممکن است ضریب جمله‌ی درجه دوم به سوی صفر میل کند. در سطرهای آینده دو مثال می‌آوریم:

مثال۱. سهمی p به معادله‌ی $y = \sqrt{x-1}$ را در نظر می‌گیریم. از نقطه‌ی $M(0,1)$، خط l به معادله‌ی $y = mx + 1$ را رسم می‌کنیم. طول‌های نقطه‌های برخورد خط l و سهمی p را حساب کنید.



شکل۳

مختصات نقاط تقاطع خط l و سهمی β، جواب‌های دستگاه معادلات زیرند.

$$\begin{cases} y = \sqrt{x-1} \\ y = mx + 1 \end{cases}$$

طول‌های نقاط برخورد l و p جواب‌های معادله‌ی زیرند.

$$m^2x^2 + (2m-1)x + 2 = 0 \qquad (10)$$

نقطه‌های برخورد خط l و p را A_1 و A_2 می‌نامیم. از نقطه‌ی $M(1,0)$، خطی موازی خط ox رسم می‌کنیم و نقطه‌ی برخورد آن را با سهمی p، با N نشان می‌دهیم. تصویرهای سه نقطه‌ی A_1، A_2 و N را روی محور ox به ترتیب H_1 و H_2، و N_1 می‌نامیم. جواب‌های معادله‌ی ۱۰ که آن‌ها را x_1 و x_2 می‌نامیم، طول‌های دو نقطه‌ی H_1 و H_2 است.

وقتی در معادله‌ی ۱۰، پارامتر m به سوی صفر میل می‌کند، خط l دور نقطه‌ی A می‌چرخد و به طرف خط d میل می‌کند. در ضمن، نقطه‌ی A_1 روی سهمی حرکت و به سوی نقطه‌ی N میل می‌کند و نقطه‌ی A_2 روی سهمی p حرکت و به سوی بی‌نهایت می‌رود. با حرکت خط l، نقطه‌ی H_1 به سوی نقطه‌ی N می‌رود و نقطه‌ی H_2 به سوی بی‌نهایت.

در معادله‌ی ۱۰، وقتی m به‌سوی صفر میل می‌کند، جواب x_1 به سوی $-\frac{c}{b}$ میل می‌کند (بنابر حکم ۴).

$$\lim_{m\to 0} \frac{-c}{b} = \lim_{m\to 0} \frac{-2}{2m-1} = 2$$

عدد «۲»، طول نقطه‌ی N است. در معادله‌ی درجه دوم ۱۰، وقتی m به سوی صفر میل می‌کند، جواب x_2 (یعنی طول نقطه‌ی A_2)، به سوی بی‌نهایت می‌رود:

$$x_1x_2 = \frac{c}{a} = \frac{2}{m^2}$$

$$x_2 = \frac{c}{a} \times \frac{1}{x_1}$$

$$\lim_{m\to 0} x_2 = \lim_{m\to 0} \frac{2}{m^2} \times \lim_{m\to 0} \frac{1}{x_1} = \infty$$

* * *

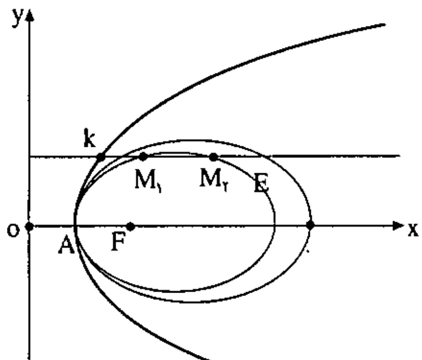
مثال هندسی که هم‌اکنون یاد کردیم، به درک حکم جبری ۴ کمک می‌کند و برعکس.

مثال۲. قضیه‌ی هندسی جالبی که در سطرهای زیر یاد می‌شود، به درک حکم جبری ۴ کمک می‌کند و برعکس.

قضیه: سهمی شکل حدی بیضی متغیری است که یک رأس و کانون مجاور آن ثابت بماند، در حالی که محور بزرگ آن بی‌نهایت افزایش یابد.

مسئله: بیضی متغیر E که کانون F و رأس A‌ی آن ثابت است و محور بزرگ آن بی‌نهایت افزایش می‌یابد و نیز سهمی p را که دارای همان کانون F در رأس A است، درنظر می‌گیریم.

خط $y = m$، بیضی E را در نقاط M_1 و M_2 و سهمی p را در نقطه‌ی K قطع می‌کند.



شکل۴

معادله‌ای که طول نقاط M_1 و M_2 را به‌دست می‌دهد، از درجه‌ی دوم است. هنگامی که طول محور بزرگ بیضی E افزایش می‌یابد، نقطه‌ی M_1 به سوی نقطه‌ی K و نقطه‌ی M_2 به سوی بی‌نهایت می‌رود.

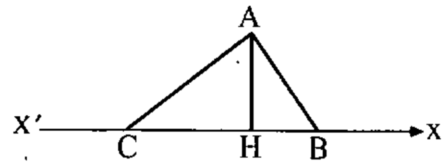
توجه: لازم است حکم جبری ۴ و دو مثال ۱ و ۲ یاد شده در بالا، با هم مطالعه شوند تا درک شود، دلیل این‌که در بعضی مسائل هندسی، معادله‌ی موردنظر به جای آن‌که درجه دوم شود، درجه اول می‌شود، چیست.

* * *

تبصره: قضیه‌ی ۲ نه‌تنها تعمیم قضیه‌ی مربع ارتفاع مثلث قائم‌الزاویه است، بلکه به ما می‌آموزد که قضیه‌ی مربع ارتفاع مثلث قائم‌الزاویه و قضیه‌ی مربع ضلع مجاور به زاویه‌ی قائمه یکسان‌اند. در سطرهای آینده، در این مورد توضیح می‌دهیم:

۱. قضیه‌ی مربع ارتفاع مثلث قائم‌الزاویه: در مثلث قائم‌الزاویه، مربع ارتفاع وارد بر وتر برابر است با حاصل‌ضرب دو قطعه‌ای که ارتفاع روی وتر پدید می‌آورد.

$\overline{AH}^2 = HB.HC$



شکل ۵

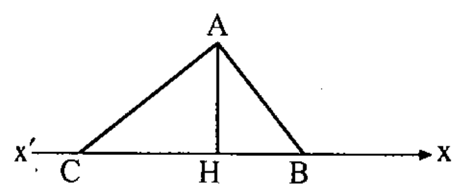
II. **قضیه ضلع مجاور به زاویه قائمه**: در مثلث قائم‌الزاویه، مربع ضلع مجاور به زاویه قائمه مساوی است با حاصل‌ضرب وتر در تصویر همان ضلع بر وتر.

$\overline{AB}^2 = BC.BH$

$\overline{AC}^2 = BC.CH$

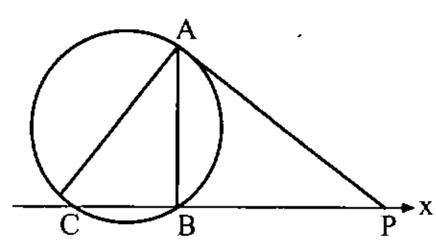
اثبات یکسانی دو قضیه‌ی I و II

I′ . مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABC را که در آن A رأس زاویه‌ی قائمه است، درنظر می‌گیریم. محور X′X را منطبق بر وتر BC اختیار می‌کنیم. در قضیه‌ی ۲ ثابت کردیم، بر پاره‌خط BC نقطه‌ای چون H وجود دارد؛ به طوری که $\overline{HA}^2 = HB.HC$ (H پای ارتفاع است).



شکل ۶

II′ . مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABC را که در آن BC وتر است، درنظر می‌گیریم و محور X′X را بر یکی از اضلاع پهلوی زاویه‌ی قائمه اختیار می‌کنیم. در قضیه‌ی ۲ ثابت کردیم که روی محور X′X و خارج از پاره‌خط BC، نقطه‌ای چون P وجود دارد؛ به طوری که: $\overline{PA}^2 = PB.PC$.



شکل ۷

افزون بر این ثابت کردیم، خط PA بر دایره‌ی محیطی مثلث ABC مماس است. می‌گوییم، چون AC قطر دایره است، پس خط PA بر خط AC عمود است. بنابراین، زاویه‌ی A قائمه است. در مثلث قائم‌الزاویه‌ی PAC، پاره‌خط PA ضلع مجاور زاویه‌ی قائمه است و پاره‌خط PC وتر است. رابطه‌ی $\overline{PA}^2 = PB.PC$ بیان می‌کند، مربع ضلع مجاور به زاویه‌ی قائمه، برابر حاصل‌ضرب وتر در تصویر همان ضلع بر وتر است.

مختصر این‌که، وقتی قضیه‌ی ۲ را در مثلث قائم‌الزاویه به‌کار می‌بریم، اگر محور X′X روی وتر اختیار شود، قضیه‌ی مربع ارتفاع به‌دست می‌آید و اگر محور X′X را روی ضلع مجاور زاویه‌ی قائمه اختیار کنیم، قضیه‌ی مربع ضلع مجاور به زاویه‌ی قائمه حاصل می‌شود. پس قضیه‌ی مربع ارتفاع مثلث قائم‌الزاویه و قضیه‌ی مربع ضلع مجاور به زاویه‌ی قائمه‌ی مثلث قائم‌الزاویه، همان قضیه‌ی ۲ در مورد مثلث قائم‌الزاویه است.

***

مسئله‌ای برای سرگرمی

مسئله‌ای درباره‌ی قضیه‌ی ۲ مطرح می‌کنیم: مثلث ABC داده شده است. بر خط BC، نقطه‌ی M را چنان انتخاب کنید که رابطه‌ی زیر برقرار باشد:

$\overline{MA}^2 = MB \times MC$

روی خط BC و خارج از پاره‌خط BC، همواره یک نقطه در فاصله‌ی متناهی وجود دارد که در رابطه‌ی یادشده صدق می‌کند. اما روی پاره‌خط BC ممکن است دو نقطه‌ی متمایز یا یک نقطه‌ی مضاعف وجود داشته باشد که در رابطه‌ی یاد شده صدق کند. ثابت کنید شرط وجود جواب چنین است:

$\overline{AD}^2 \le \frac{1}{2} AB \times AC$

نقطه‌ی D پای نیم‌ساز زاویه‌ی داخلی A است. نامساوی در مورد دو جواب متمایز و تساوی در مورد جواب مضاعف است.



اشاره

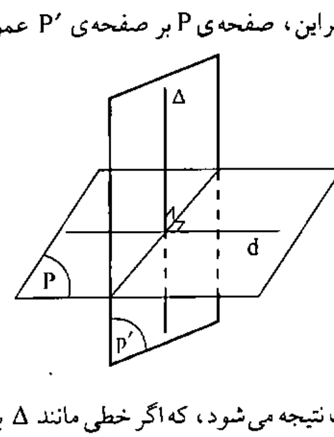
یکی از مهم‌ترین پیوندها و اتصال‌ها در همه‌ی ریاضیات، اتصال و پیوند بین هندسه و جبر است.
در این شماره نیز (از استانداردهای NCTM) این اتصال و ارتباط را در فضای سه‌بعدی بررسی می‌کنیم.
نکته‌ی مهم: ضمن بررسی رویکرد هندسی- رویکرد جبری در آموزش هندسه، برخی از راهبردهای مهم برای حل مسئله‌های هندسه را مطرح می‌کنیم.

رویکرد هندسی- رویکرد جبری در آموزش هندسه (۷)

● محمدهاشم رستمی

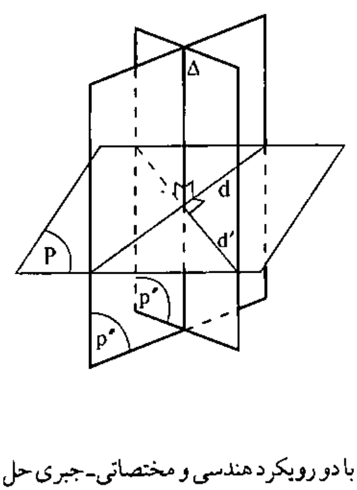
مثال ۸: از هر خط L که بر صفحه‌ی P، عمود نیست، یک و تنها یک صفحه می‌گذرد که بر صفحه‌ی P عمود باشد.

حل: نخست تعریف دو صفحه‌ی عمود بر هم را می‌بینیم:
تعریف دو صفحه‌ی عمود بر هم: دو صفحه را عمود بر هم می‌نامیم، هرگاه خطی در یکی از این دو صفحه وجود داشته باشد که بر دیگری عمود باشد: در شکل ۱ خط Δ از صفحه‌ی P بر صفحه‌ی P′ عمود است. بنابراین، صفحه‌ی P بر صفحه‌ی P′ عمود است.



شکل ۱

از این تعریف نتیجه می‌شود، که اگر خطی مانند Δ بر صفحه‌ی P عمود باشد، هر صفحه‌ای که بر خط Δ بگذرد، بر صفحه‌ی P عمود است. در شکل ۲ خط Δ بر صفحه‌ی P عمود است و دو صفحه‌ی دل‌خواه P′ و P″ بر خط Δ گذشته‌اند. پس این دو صفحه بر صفحه‌ی P عمودند.



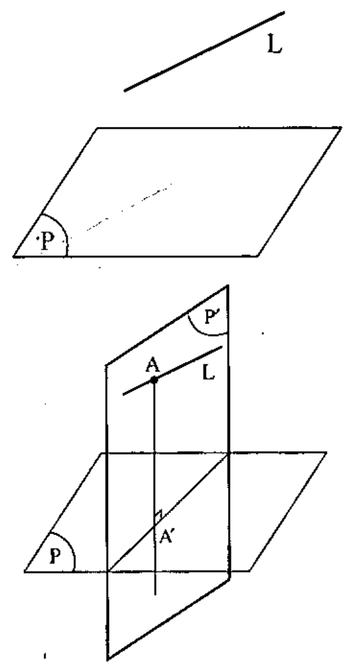
شکل ۲

اینک مسئله را با دو رویکرد هندسی و مختصاتی- جبری حل می‌کنیم.

الف) رویکرد هندسی

صفحه‌ی P و خط L را که بر صفحه‌ی P عمود نیست در نظر می‌گیریم. نخست ثابت می‌کنیم صفحه‌ای مانند P' وجود دارد که بر خط L می‌گذرد و بر صفحه‌ی P عمود است و سپس ثابت می‌کنیم، صفحه‌ی P' یکتاست.

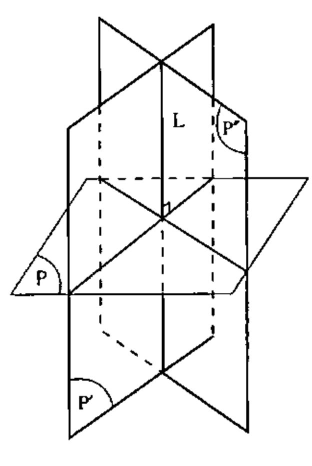
برای اثبات، از یک نقطه‌ی دل‌خواه مانند A واقع بر خط L، خط AA' را عمود بر صفحه‌ی P رسم می‌کنیم. صفحه‌ای را که بر دو خط متقاطع L و AA' می‌گذرد، صفحه‌ی P' می‌نامیم. این صفحه بر صفحه‌ی P عمود است، زیرا بنا به تعریف، شامل خط AA' است که این خط عمود بر صفحه‌ی P است.



شکل۳

نکته: روش رسم خطی که از یک نقطه بر یک صفحه عمود می‌شود، در کتاب درسی آمده است.

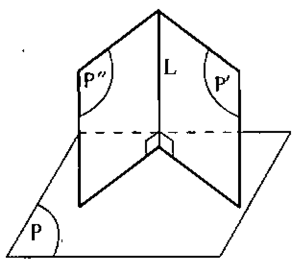
اکنون ثابت می‌کنیم که صفحه‌ی P' یکتا (منحصر به فرد) است.



شکل۴

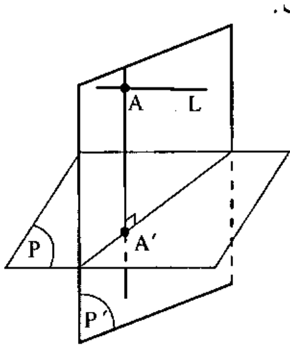
برای اثبات از برهان خلف استفاده می‌کنیم. بدین ترتیب که فرض می‌کنیم صفحه‌ی P' یکتا نباشد.

در این صورت، صفحه‌ی دیگری مانند P'' وجود دارد که بر خط L می‌گذرد و بر صفحه‌ی P عمود است. دو صفحه‌ی P' و P'' که هر دو بر صفحه‌ی P عمودند، در خط L مشترک‌اند. به بیان دیگر، خط L فصل مشترک دو صفحه‌ی P' و P'' است که هر دو بر صفحه‌ی P عمودند. بنابراین، خط L بر صفحه‌ی P عمود است، اما این مطلب خلاف فرض مسئله است؛ زیرا بنا به فرض، خط L بر صفحه‌ی P عمود نیست. پس هیچ صفحه‌ی دیگری غیر از صفحه‌ی P' وجود ندارد که بر خط L بگذرد و بر صفحه‌ی P عمود باشد. درنتیجه صفحه‌ی P' یکتاست.



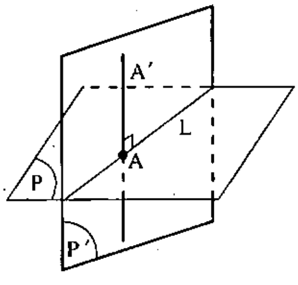
شکل۵

نکته: می‌دانیم که اگر دو صفحه‌ی متقاطع P' و P'' بر یک صفحه مانند P عمود باشند، فصل مشترک آن‌ها (خط L در شکل۵) بر صفحه‌ی P عمود است.



شکل۶

بحث: خط L می‌تواند موازی صفحه‌ی P و یا روی این صفحه باشد. در این دو حالت نیز روش حل مسئله مشابه روش حلی است که بیان شد. تنها در حالتی که خط L روی صفحه‌ی P است، از نقطه‌ی دل‌خواه A واقع بر L، باید عمود AA' را بر صفحه‌ی P اخراج کنیم و آن‌گاه صفحه‌ی P' را بر L و AA' بگذرانیم. ادامه‌ی اثبات همانند حالتی است که L روی صفحه‌ی P نیست.



شکل۷

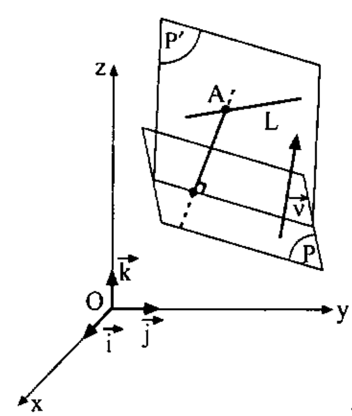
نکته‌ی ۱ : وقتی خط L موازی صفحه‌ی P و یا روی این صفحه باشد، بدیهی است که بر این صفحه عمود نخواهد بود. یعنی شرط عمود نبودن L بر P به خودی‌خود برقرار است(شکل۷).

نکته‌ی ۲ : بنا به قرارداد، وقتی خطی هیچ نقطه‌ی مشترکی با یک صفحه نداشته باشد و یا تمام نقاط آن روی آن صفحه باشند، آن خط را موازی آن صفحه می‌نامند. با توجه به این قرارداد می‌توانیم دو خط ذکر شده در بالا را یک حالت و آن هم حالت موازی بودن خط L با صفحه‌ی P در نظر بگیریم.

ب) رویکرد مختصاتی- جبری

دستگاه مختصات قائم $o-xyz$ را در نظر می‌گیریم. در این دستگاه مختصات، صفحه‌ی P به معادله‌ی $P: ax+by+cz+d=0$ و L به معادله‌ی $L: \frac{x-x_1}{p}=\frac{y-y_1}{q}=\frac{z-z_1}{r}$ است که با فرض عمود نبودن خط L بر صفحه‌ی P داریم:

$$\frac{a}{p}\neq\frac{b}{q}=\frac{c}{r} \text{ یا } \frac{a}{p}=\frac{b}{q}\neq\frac{c}{r} \text{ یا } \frac{a}{p}\neq\frac{b}{q}\neq\frac{c}{r}$$



شکل۸

با توجه به نکات بالا می‌خواهیم ثابت کنیم، یک و تنها یک صفحه وجود دارد که بر خط $L: \frac{x-x_1}{p}=\frac{y-y_1}{q}=\frac{z-z_1}{r}$ می‌گذرد و بر صفحه‌ی $P: ax+by+cz+d=0$ عمود است.

برای اثبات، یک نقطه‌ی دلخواه از خط L مثلاً نقطه‌ی $A=(x_1,y_1,z_1)$ را اختیار می‌کنیم و معادله‌ی خط AA' را که از نقطه‌ی A بر صفحه‌ی P عمود می‌شود، می‌نویسیم. می‌دانیم که خط AA' با بردار قائم صفحه‌ی P یعنی با بردار $\vec{V}=(a,b,c)$ موازی است. بنابراین یک دسته پارامترهای هادی خط AA' همان (a,b,c) است. پس معادله‌ی خط AA' به‌صورت زیر است:

$$AA': \frac{x-x_1}{a}=\frac{y-y_1}{b}=\frac{z-z_1}{c}$$

اکنون معادله‌ی صفحه‌ی P' را که بر دو خط L و AA' می‌گذرد، می‌نویسیم.

داریم:

$$P': \begin{cases} \frac{x-x_1}{p}=\frac{y-y_1}{q}=\frac{z-z_1}{r} \\ \frac{x-x_1}{a}=\frac{y-y_1}{b}=\frac{z-z_1}{c} \end{cases}$$

اگر بخواهیم معادله‌ی کانونیک صفحه‌ی P را به‌دست آوریم، می‌توانیم بردار قائم آن را که بر دو خط L و AA' عمود است، مشخص سازیم و با داشتن مختصات نقطه‌ای از این صفحه از جمله نقطه‌ی $A=(x_1,y_1,z_1)$ معادله‌ی صفحه‌ی P' را بنویسیم. داریم:

$$\vec{V}_{P'}=\vec{V}_L\times\vec{V}_{AA'}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ p & q & r\\ a & b & c\end{vmatrix}$$

$$=\vec{i}(qc-br)+\vec{j}(ar-pc)+\vec{k}(pb-aq)\Rightarrow \vec{V}_{P'}$$
$$=(qc-br, ar-pe, pb-aq)\Rightarrow P':(qc-br)(x-x_1)$$
$$+(ar-pc)(y-y_1)+(pb-aq)(z-z_1)=0$$

برای یکتایی صفحه‌ی P' می‌توان مشابه روش هندسی، از برهان خلف استفاده کرد. هم‌چنین می‌توانیم با تغییر نقطه‌ی A و اختیار نقطه‌های دیگری روی L مانند B ، C و ... و رسم عمودهای BB' ، CC' و ... و نوشتن معادله‌ی صفحه‌های (L,BB') ، (L,CC') و ... ببینیم که معادله‌ی تمام این صفحه‌ها، همان معادله‌ی صفحه‌ی P' است که قبلاً به‌دست آوردیم.

پرسش: نظر شما درباره‌ی این روش و روش قبلی برای یکتایی صفحه‌ی P' چیست؟ برای ما بنویسید.

نکته‌ی مهم: برای نوشتن صفحه‌ی P' می‌توانیم معادله‌ی دسته صفحه‌ای را که بر خط L می‌گذرد بنویسیم و از بین صفحه‌های این دسته صفحه، صفحه‌ای منحصربه‌فرد اختیار کنیم که بر صفحه‌ی P عمود است.

اینک نمونه‌ای از این مسئله را با روش مختصاتی- جبری حل می‌کنیم.

مسئله: خط $L:\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{3}=\frac{z}{-1}$ و صفحه‌ی $P:2x-y+z+1=0$ داده شده‌اند.

اولاً: ثابت کنید که خط L بر صفحه‌ی P عمود نیست.

ثانیاً: معادله‌ی صفحه‌ی P' را بنویسید که بر خط L می‌گذرد و بر صفحه‌ی P عمود است.

ثالثاً: ثابت کنید صفحه‌ی P' یکتاست.

حل: داریم:

اولاً:

$$\vec{V}_L=(2,3,-1)\ ,\ \vec{V}_P=(2,-1,1)$$

$$\frac{2}{3}\neq\frac{3}{-1}\neq\frac{1}{-1}\Rightarrow$$ خط L بر صفحه‌ی P عمود نیست

ثانیاً: برای نوشتن معادله‌ی صفحه‌ی P' به یکی از روش‌های زیر عمل می‌کنیم:

روش اول: معادله‌ی خط AA' را که $A\in L$ و $AA'\perp P$ است می‌نویسیم. داریم:

$$A=(1,-2,0)\in L \text{ و } \vec{V}_P=(2,-1,1)$$

$$\Rightarrow AA':\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z}{1}$$

اکنون معادله‌ی صفحه‌ی گذرنده بر L و AA' را می‌نویسیم. داریم:

$$\begin{cases} L: & \frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{3}=\frac{z}{-1} \\ AA': & \frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z}{1} \end{cases}$$

این معادله را می‌توانیم به صورت کانونیک درآوریم:

$$\vec{V}_{P'}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}=\vec{i}(3-1)+\vec{j}(-2-2)+\vec{k}(-2-6)$$

$$=2\vec{i}-4\vec{j}-8\vec{k}$$

$$\Rightarrow \vec{V}_{P'}=(2,-4,-8)\Rightarrow P':2(x-1)-4(y+2)-8(z-0)=0$$

$$\Rightarrow P':2x-4y-8z-10=0\Rightarrow P':x-2y-4z-5=0$$

روش دوم: معادله‌ی دسته صفحه‌ی گذرنده بر L را می‌نویسیم و از بین صفحه‌های این دسته صفحه، معادله‌ی صفحه‌ای را که بر صفحه‌ی P عمود است، می‌نویسیم. این صفحه یکتاست.

$$L:\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{3}=\frac{z}{-1}\Rightarrow \begin{matrix} P_1: \\ P_2: \end{matrix}\begin{cases} 3x-3=2y+4 \\ -x+1=2z \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} P_1: \\ P_2: \end{matrix}\begin{cases} 3x-2y-7=0 \\ x+2z-1=0 \end{cases}\Rightarrow P_1+\lambda P_2=0$$

$$\Rightarrow 3x-2y-7+\lambda(x+2z-1)=0$$

$$\Rightarrow (3+\lambda)x-2y+2\lambda z-\lambda-7=0$$

معادله‌ی دسته صفحه‌ی گذرنده بر L

$$\Rightarrow \vec{V}_{\text{دسته صفحه}}=(3+\lambda,-2,2\lambda) \text{ و } \vec{V}_P=(2,-1,1)$$

شرط عمود بودن دو صفحه $\vec{V}_{\text{دسته صفحه}}\cdot\vec{V}_P=0$

$$\Rightarrow (3+\lambda)(2)+(-2)(-1)+(2\lambda)(1)=0$$

$$\Rightarrow 6+2\lambda+2+2\lambda=0\Rightarrow 4\lambda+8=0\Rightarrow \lambda=-2$$

$$\lambda=-2\xrightarrow{\text{در معادله‌ی دسته صفحه}}(3-2)x-2y-4z+2-7=0$$

$$\Rightarrow P':x-2y-4z-5=0$$

که این معادله، همان معادله‌ی صفحه‌ی P' به‌دست آمده در روش اول است.

ثالثاً: یکتا بودن صفحه‌ی P' در روش دوم ثابت شده است، زیرا از بین صفحه‌های یک دسته صفحه، تنها و تنها یک صفحه وجود دارد که بر صفحه‌ی مفروضی عمود باشد. با وجود این، می‌توانیم یکتا بودن صفحه‌ی P' را با استفاده از برهان خلف مانند روش هندسی، ثابت کنیم.

نکته‌ی مهم: همان‌طور که در مثال‌های قبلی این بحث گفتیم، انتخاب دستگاه مختصات در ساده‌تر شدن راه‌حل جبری اهمیت زیادی دارد. در راه‌حل جبری ارائه شده، برای مثال ۸، دستگاه مختصات $o-xyz$ را به‌صورت کلی اختیار کردیم. اکنون می‌خواهیم ببینیم که با انتخاب این دستگاه مختصات به‌صورتی دیگر، آیا می‌توانیم محاسبه‌ها را ساده‌تر کنیم؟ به نظر شما دستگاه مختصات را چگونه انتخاب کنیم تا راه‌حل جبری ساده‌تر شود؟

پیشنهاد و راه‌حل خودتان را به نشانی مجله‌ی رشد برهان متوسطه ارسال کنید. بهترین راه‌حل، با ذکر نام فرستنده‌ی آن، در شماره‌ی بعدی مجله چاپ خواهد شد.

مجانب‌ها، حدّ و پیوستگی (۳)

● احمد قندهاری

اشاره

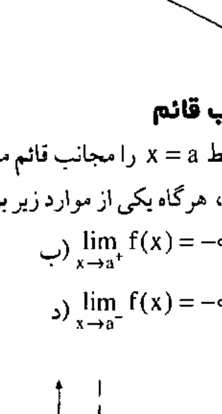
در شماره‌های قبل مفاهیم حد چپ و راست تابع و حد تابع در یک نقطه بررسی شد و به قضایای حد اشاره کردیم، و به‌دنبال آن هم‌ارزی‌های حدی و رفع ابهام در حالت‌های گوناگون را مطرح کردیم. اینک ادامه‌ی مطالب را در پی می‌آوریم.

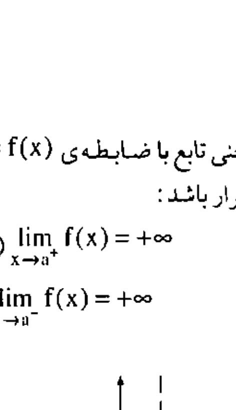
مجانب قائم

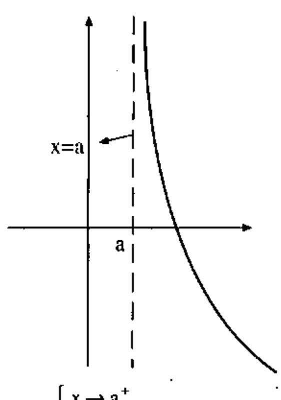
خط $x = a$ را مجانب قائم منحنی تابع با ضابطه‌ی $y = f(x)$ گوییم، هرگاه یکی از موارد زیر برقرار باشد:

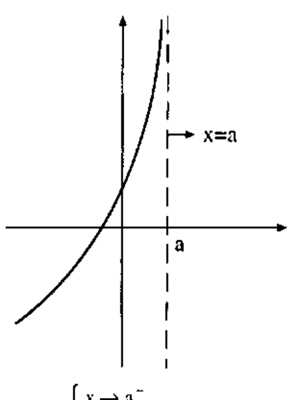
الف) $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = +\infty$ ب) $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = -\infty$

ج) $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = +\infty$ د) $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = -\infty$









توجه: مجانب قائم، در تابع‌های به معادله‌ی کسری وجود دارد. برای تعیین معادله‌ی مجانب قائم، مخرج کسر را مساوی صفر قرار می‌دهیم.

مثال ۱. مجانب قائم هریک از تابع‌ها به معادله‌های زیر را بیابید.

الف) $f(x) = \dfrac{۲x - ۱}{x - ۴}$

حل:

خطی به معادله‌ی $x = ۴$، مجانب قائم منحنی تابع f است.

مجانب قائم: $x - ۴ = ۰ \Rightarrow x = ۴$

زیرا: $x \to ۴\ ;\ \lim f(x) = \pm\infty$

ب) $f(x) = \dfrac{3}{x^3 - x}$

مجانب قائم: $x^3 - x = 0 \Rightarrow x(x^2 - 1) = 0 \Rightarrow x = 0\ ,\ \pm 1$

پس خط‌ها به معادله‌های $x = 0$ ، $x = 1$ و $x = -1$ ، مجانب‌های قائم منحنی این تابع است.

مثال۲ . به ازای چه مقادیر m ، منحنی تابع با ضابطه‌ی

$f(x) = \dfrac{4}{x^2 + mx + 4}$ یک مجانب قائم دارد؟

حل: معادله‌ی $x^2 + mx + 4 = 0$ باید یک ریشه‌ی حقیقی داشته باشد. پس باید:

$$\Delta = b^2 - 4ac = 0 \Rightarrow m^2 - 16 = 0 \Rightarrow m^2 = 16 \Rightarrow m = \pm 4$$

مثال۳ . اگر دو خط $x = 2\sqrt{2} - 3$ و $x = 2\sqrt{2} + 3$ معادله‌های مجانب‌های قائم منحنی تابع با ضابطه‌ی

$f(x) = \dfrac{x^2 + 5}{2x^2 + ax + b}$ باشند، a و b را بیابید.

حل: $2x^2 + ax + b = 0$

ریشه‌های مخرج عبارت‌اند از: $(2\sqrt{2} - 3)$, $(2\sqrt{2} + 3)$.

$$\text{مجموع ریشه‌ها} = -\frac{a}{2} = (2\sqrt{2} + 3) + (2\sqrt{2} - 3) = 4\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow -\frac{a}{2} = 4\sqrt{2} \Rightarrow a = -8\sqrt{2}$$

$$\text{حاصل‌ضرب ریشه‌ها} = \frac{b}{2} = (2\sqrt{2} + 3)(2\sqrt{2} - 3) = 8 - 9 = -1$$

$$\Rightarrow \frac{b}{2} = -1 \Rightarrow b = -2$$

نکته۱ . قبل از تعیین معادله‌ی مجانب قائم، اگر کسر قابل ساده شدن باشد، اول کسر را ساده کنید و سپس مجانب قائم را بیابید.

مثال۴ . مجانب‌های قائم منحنی تابع با ضابطه‌ی

$f(x) = \dfrac{(x^2 - 4x + 3)(x - 5)}{(x - 1)^2(x^2 - 25)}$ را بیابید.

حل: ابتدا کسر را ساده می‌کنیم:

$$f(x) = \frac{(x-1)(x-3)(x-5)}{(x-1)^2(x-5)(x+5)} = \frac{x-3}{(x+1)(x+5)}\ ;\ x \neq 1, 5$$

مجانب قائم: $(x+1)(x+5) = 0 \Rightarrow x = -1\ ,\ x = -5$

اگر $x \to -1\ ;\ f(x) \to \pm\infty$

اگر $x \to -5\ ;\ f(x) \to \pm\infty$

پس خط‌های به معادله‌های $x = -1$ و $x = -5$ مجانب‌های قائم منحنی این تابع هستند.

نکته۲ . مجانب قائم وقتی قابل قبول است که به ازای آن، عبارت داخل رادیکال‌ها با فرجه‌ی زوج را به عدد منفی تبدیل نکند.

مثال۵ . معادله‌های مجانب‌های قائم منحنی تابع با ضابطه‌ی

$f(x) = \dfrac{(x-1)\sqrt{x^2 - 2}}{x(x-3)(x-4)}$ را بیابید.

حل:

مجانب قائم: $x(x-3)(x-4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 3 \\ x = 4 \end{cases}$

$x = 0$ قابل قبول نیست، زیرا داخل رادیکال صورت را به عدد منفی تبدیل می‌کند. پس $x = 3$ و $x = 4$ معادله‌های مجانب‌های قائم منحنی این تابع‌اند.

حد در بی‌نهایت

تعریف: فرض می‌کنیم تابع f در بازه‌ی $(a,+\infty)$ **تعریف شده** باشد. می‌گوییم حدّ تابع f وقتی $x\to+\infty$، برابر عدد حقیقی L است، هرگاه $|f(x)-L|$ را بتوانیم به هر اندازه که بخواهیم کوچک کنیم؛ به شرطی که x را به اندازه‌ی کافی بزرگ اختیار کنیم. در این صورت می‌نویسیم:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=L$$

هم‌چنین، اگر تابع f در بازه‌ی $(-\infty,a)$ **تعریف شده** باشد، می‌گوییم: حدّ تابع f وقتی $x\to-\infty$، برابر عدد حقیقی L است، هرگاه $|f(x)-L|$ را بتوانیم به هر اندازه که بخواهیم کوچک کنیم؛ به شرطی که x را به اندازه‌ی کافی کوچک اختیار کنیم. در این صورت می‌نویسیم:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=L$$

مثال۱. اگر $\lim_{x\to+\infty}\frac{2x-1}{x}=2$ باشد، چنان‌چه بخواهیم داشته باشیم: $\left|\frac{2x-1}{x}-2\right|<\frac{1}{10^6}$، آن‌گاه باید x را چه قدر بزرگ اختیار کنیم؟

حل:

$$\left|\frac{2x-1}{x}-2\right|<\frac{1}{10^6}\Rightarrow\left|\frac{2x-1-2x}{x}\right|<\frac{1}{10^6}$$

$$\left|\frac{-1}{x}\right|<\frac{1}{10^6}\Rightarrow\frac{1}{|x|}<\frac{1}{10^6}\Rightarrow|x|\underset{x\to+\infty}{>}10^6\Rightarrow x>10^6$$

پس باید x را بزرگ‌تر از 10^6 انتخاب کنیم.

مثال۲. اگر $\lim_{x\to-\infty}\frac{x+1}{2x}=\frac{1}{2}$ باشد، چنان‌چه بخواهیم داشته باشیم: $\left|\frac{x+1}{2x}-\frac{1}{2}\right|<\frac{1}{10^8}$، آن‌گاه باید x را چه قدر کوچک اختیار کنیم؟

حل:

$$\left|\frac{x+1}{2x}-\frac{1}{2}\right|<\frac{1}{10^8}\Rightarrow\left|\frac{x+1-x}{2x}\right|<\frac{1}{10^8}$$

$$\Rightarrow\left|\frac{1}{2x}\right|<\frac{1}{10^8}\Rightarrow\frac{1}{2|x|}<\frac{1}{10^8}\Rightarrow 2|x|>10^8\Rightarrow|x|>\frac{10^8}{2}$$

$$x\to-\infty\ ;\ |x|=-x$$

$$\Rightarrow -x>\frac{10^8}{2}\Rightarrow x<-\frac{10^8}{2}$$

پس باید x را کوچک‌تر از $-\frac{10^8}{2}$ اختیار کنیم.

مثال۳. مطلوب است محاسبه‌ی حدهای زیر:

$$\text{(الف)}\ A=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x^3-5x^2+4x-1}{x^3+x+5}=\frac{\infty}{\infty}$$

حل:

$$A=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3(2-\frac{5}{x}+\frac{4}{x^2}-\frac{1}{x^3})}{x^3(1+\frac{1}{x^2}+\frac{5}{x^3})}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2-\frac{5}{x}+\frac{4}{x^2}-\frac{1}{x^3}}{1+\frac{1}{x^2}+\frac{5}{x^3}}$$

$$=\frac{2-0+0-0}{1+0+0}=\frac{2}{1}=2$$

$$\text{(ب)}\ B=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+4x}+\sqrt{x^2+x}}{\sqrt{4x^2+x}+\sqrt{x^2-x}}=\frac{\infty}{\infty}$$

حل:

$$B=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2(1+\frac{4}{x})}+\sqrt{x^2(1+\frac{1}{x})}}{\sqrt{x^2(4+\frac{1}{x})}+\sqrt{x^2(1-\frac{1}{x})}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{|x|\sqrt{1+\frac{4}{x}}+|x|\sqrt{1+\frac{1}{x}}}{|x|\sqrt{4+\frac{1}{x}}+|x|\sqrt{1-\frac{1}{x}}}$$

توجه: $x\to+\infty\ ;\ |x|=x$

$$B=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\sqrt{1+\frac{4}{x}}+x\sqrt{1+\frac{1}{x}}}{x\sqrt{4+\frac{1}{x}}+x\sqrt{1-\frac{1}{x}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x(\sqrt{1+\frac{4}{x}}+\sqrt{1+\frac{1}{x}})}{x(\sqrt{4+\frac{1}{x}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}})}$$

$$=\frac{\sqrt{1+0}+\sqrt{1+0}}{\sqrt{4+0}+\sqrt{1-0}}=\frac{1+1}{2+1}=\frac{2}{3}$$

نکته‌ی مهم: اگر در مسئله‌ای، وقتی $x\to+\infty$ یا $x\to-\infty$، حد تابع به صورت $(+\infty-\infty)$ شود، برای حل، عبارت مسئله را در عبارت مناسبی ضرب می‌کنیم تا این حالت حذف شود. سپس مانند مثال‌های قبلی، حد مسئله را محاسبه می‌کنیم. به این مثال‌ها توجه کنید.

مثال۴. مطلوب است محاسبه‌ی حدهای زیر:

الف) $C=\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2-4x+1}-\sqrt{x^2+2x})$

حل:

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2-4x+1}-\sqrt{x^2+2x})=+\infty-\infty$$

عبارت مسئله را در مزدوج خودش ضرب و تقسیم می‌کنیم:

$$C=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{x^2-4x+1}-\sqrt{x^2+2x})(\sqrt{x^2-4x+1}+\sqrt{x^2+2x})}{\sqrt{x^2-4x+1}+\sqrt{x^2+2x}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-4x+1-x^2-2x}{\sqrt{x^2(1-\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2})}+\sqrt{x^2(1+\frac{2}{x})}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-6x+1}{|x|\sqrt{1-\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}}+|x|\sqrt{1+\frac{2}{x}}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x(-6+\frac{1}{x})}{x\sqrt{1-\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}}+x\sqrt{1+\frac{2}{x}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x(-6+\frac{1}{x})}{x(\sqrt{1-\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1+\frac{2}{x}})}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-6+\frac{1}{x}}{\sqrt{1-\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1+\frac{2}{x}}}=\frac{-6}{\sqrt{1}+\sqrt{1}}=\frac{-6}{2}=-3$$

حل:

ب) $D=\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt[3]{x^3+2x^2}-x)=-\infty+\infty$

نکته:

$$a-b=(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b})(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2}+\sqrt[3]{ab})$$

$$D=\lim_{x\to-\infty}(\sqrt[3]{x^3+2x^2}-x)\times\frac{\sqrt[3]{(x^3+2x^2)^2}+x^2+x\sqrt[3]{x^3+2x^2}}{\sqrt[3]{(x^3+2x^2)^2}+x^2+x\sqrt[3]{x^3+2x^2}}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3+2x^2-x^3}{\sqrt[3]{x^6(1+\frac{2}{x})^2}+x^2+x\sqrt[3]{x^3(1+\frac{2}{x})}}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^2}{x^2\sqrt[3]{(1+\frac{2}{x})^2}+x^2+x^2\sqrt[3]{1+\frac{2}{x}}}$$

$$D=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^2}{x^2(\sqrt[3]{(1+\frac{2}{x})^2}+1+\sqrt[3]{1+\frac{2}{x}})}$$

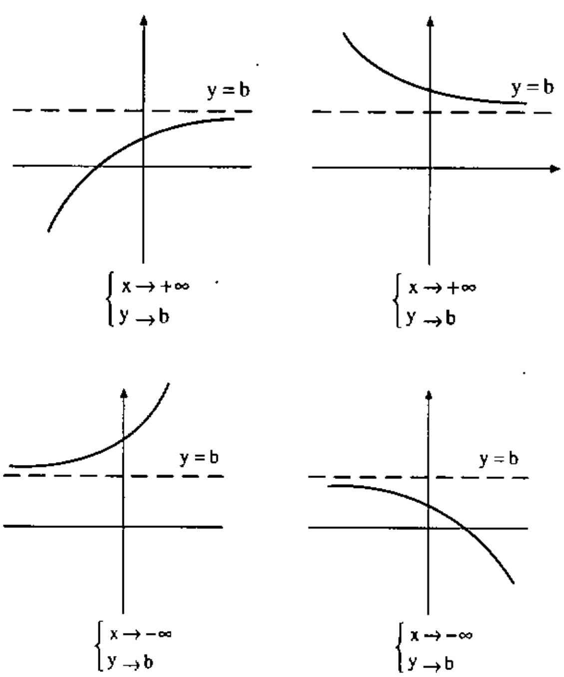
$$=\frac{2}{(\sqrt[3]{(1+0)^2}+1+\sqrt[3]{1+0})}=\frac{2}{1+1+1}=\frac{2}{3}$$

مجانب افقی

خط $y=b$ را مجانب افقی منحنی تابع با ضابطه‌ی $y=f(x)$ گوییم، هرگاه فقط و فقط یکی از سه مورد زیر وجود داشته باشد:

الف) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=b$　　ب) $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=b$

ج) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}f(x)=b$



برای تعیین مجانب افقی یک تابع، x را به سمت ∞ میل می‌دهیم و حد تابع را محاسبه می‌کنیم.

نکته: تابعی که ضابطه‌ی آن کسری باشد، وقتی مجانب افقی دارد

که صورت و مخرج هم‌درجه باشند (در این صورت $y=\frac{a}{a'}$ مجانب افقی است)، یا درجه‌ی صورت کمتر از درجه‌ی مخرج باشد (در این صورت $y=0$ مجانب افقی است).

مثال ۱. مجانب افقی تابع های به معادله های زیر را بیابید.

الف) $y=\frac{2x-1}{x-4}$

حل:

مجانب افقی: $x\to\pm\infty \Rightarrow \lim y=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x-1}{x-4}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x(2-\frac{1}{x})}{x(1-\frac{4}{x})}$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2-\frac{1}{x}}{1-\frac{4}{x}}=\frac{2-0}{1-0}=2$$; معادله‌ی مجانب افقی $y=2$

ب) $y=\frac{4x+5}{x^2+1}$

حل:

مجانب افقی: $x\to\pm\infty \Rightarrow \lim y=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{4x+5}{x^2+1}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x(4+\frac{5}{x})}{x^2(1+\frac{1}{x^2})}$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{4+\frac{5}{x}}{x(1+\frac{1}{x^2})}=\lim_{n\to\pm\infty}\frac{4}{x}=0$$; معادله‌ی مجانب افقی $y=0$

ج) $y=\frac{\sqrt{x^2+2x}}{2x+5}$

حل:

مجانب افقی: $x\to\pm\infty \Rightarrow \lim y=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\sqrt{x^2+2x}}{2x+5}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\sqrt{x^2(1+\frac{2}{x})}}{x(2+\frac{5}{x})}$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{|x|\sqrt{1+\frac{2}{x}}}{x(2+\frac{5}{x})}$$

$$1)\ \lim_{x\to+\infty}\frac{|x|\sqrt{1+\frac{2}{x}}}{x(2+\frac{5}{x})}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\sqrt{1+\frac{2}{x}}}{x(2+\frac{5}{x})}=\frac{1}{2}$$

پس $y=\frac{1}{2}$ معادله‌ی مجانب افقی است، وقتی: $x\to+\infty$.

$$2)\ \lim_{x\to-\infty}\frac{|x|\sqrt{1+\frac{2}{x}}}{x(2+\frac{5}{x})}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x\sqrt{1+\frac{2}{x}}}{x(2+\frac{5}{x})}=-\frac{1}{2}$$

پس $y=-\frac{1}{2}$ هم معادله‌ی مجانب افقی دیگر این منحنی است، وقتی: $x\to-\infty$.

مثال ۲. مجانب افقی تابع با ضابطه‌ی $f(x)=(\sqrt{x^2+10x+5}-x)$ را وقتی $x\to+\infty$، بیابید.

حل:

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+10x+5}-x)=+\infty-\infty$$

عبارت مسئله را در مزدوج خودش ضرب و تقسیم می‌کنیم:

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+10x+5}-x)\times\frac{\sqrt{x^2+10x+5}+x}{\sqrt{x^2+10x+5}+x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+10x+5-x^2}{\sqrt{x^2(1+\frac{10}{x}+\frac{5}{x^2})}+x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{10x+5}{|x|\sqrt{1+\frac{10}{x}+\frac{5}{x^2}}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x(10+\frac{5}{x})}{x\sqrt{1+\frac{10}{x}+\frac{5}{x^2}}+x}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x(10+\frac{5}{x})}{x(\sqrt{1+\frac{10}{x}+\frac{5}{x^2}}+1)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{10+\frac{5}{x}}{\sqrt{1+\frac{10}{x}+\frac{5}{x^2}}+1}$$

$$=\frac{10}{\sqrt{1}+1}=\frac{10}{2}=5$$

پس $y=5$ معادله‌ی مُجانب افقی این تابع است.

تمرین: معادله‌های مجانب‌های قائم و افقی هریک از تابع‌های به این معادله‌ها را بیابید.

1) $y=\frac{x^2-4x}{2x^2-8}$

2) $y=\frac{x-1}{x^2-1}$

۳) $y = \tan x$

۴) $y = \dfrac{x-5}{\sqrt{4x^2 - 8x}}$

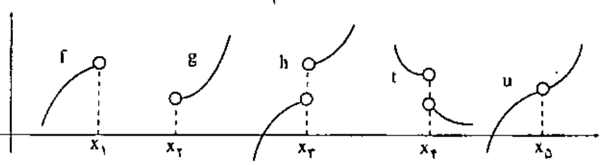
۵) $y = \cot x$

۶) $y = (\sqrt{x^2 + 2x} + x)$

پیوستگی‌ها

حد و پیوستگی به‌طریقه‌ی شهودی

۱ . حد : نقطه‌ی تو خالی در نمودارها را نقطه‌ی حد گوییم . اگر نمودار در سمت چپ نقطه‌ی تو خالی باشد، آن نقطه را «حد چپ» و اگر در سمت راست نقطه‌ی توخالی باشد، آن نقطه را «حد راست» گوییم . هم‌چنین، اگر در دو طرف نقطه‌ی توخالی نمودار وجود داشته باشد، آن نقطه را «نقطه‌ی حد» گوییم . به نمودارهای زیر توجه کنید :



نتایج :

۱ . تابع f در x_1 فقط حد چپ دارد .

۲ . تابع g در x_2 فقط حد راست دارد .

۳ . تابع h در x_3 ، حد راست و حد چپ دارد، ولی برابر نیستند . حد راست تابع بیشتر از حد چپ آن است .

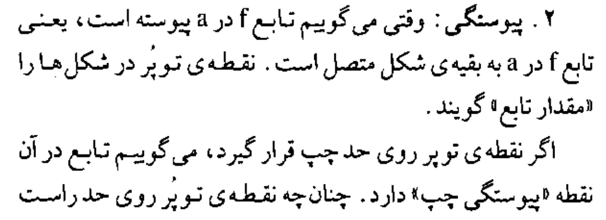
۴ . تابع t در x_4 ، حد راست و حد چپ دارد، ولی برابر نیستند . حد چپ تابع بیشتر از حد راست آن است .

۵ . تابع u در x_5 حد دارد .

۲ . پیوستگی : وقتی می‌گوییم تابع f در a پیوسته است، یعنی تابع f در a به بقیه‌ی شکل متصل است . نقطه‌ی توپُر در شکل‌ها را «مقدار تابع» گویند .

اگر نقطه‌ی توپر روی حد چپ قرار گیرد، می‌گوییم تابع در آن نقطه «پیوستگی چپ» دارد . چنان‌چه نقطه‌ی توپُر روی حد راست قرار گیرد، می‌گوییم تابع در آن نقطه «پیوستگی راست» دارد .

چنان‌چه نقطه‌ی توپُر روی حد قرار گیرد، می‌گوییم تابع در آن نقطه پیوسته است . به نمودارهای زیر توجه کنید :



نتایج شکل

۱ . تابع f در x_1 فقط پیوستگی چپ دارد .

۲ . تابع g در x_2 فقط پیوستگی راست دارد .

۳ . تابع h در x_3 فقط پیوستگی راست دارد و حد چپ هم دارد .

۴ . تابع t در x_4 فقط پیوستگی چپ دارد و حد راست هم دارد .

۵ . تابع u در x_5 حد دارد، ولی نه پیوستگی راست دارد و نه پیوستگی چپ .

۶ . تابع v در x_6 پیوسته است .

۷ . تابع w و تابع s به‌ترتیب در x_7 و x_8 ناپیوستگی رفع‌نشدنی دارند .

با این مقدمات و آشنایی به تعریف ریاضی پیوستگی می‌پردازیم .

تعریف پیوستگی تابع در یک نقطه

تابع f را در نقطه‌ی x_0 وقتی پیوسته گوییم که این تابع در یک همسایگی x_0 تعریف شده باشد و حد تابع در x_0 مساوی مقدار تابع $(f(x_0))$ در x_0 باشد . پس :

۱ . اگر داشته باشیم: $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0)$ ،
آن‌گاه می‌گوییم تابع در x_0 پیوسته است؛ مانند نقطه‌ی x_6 در تابع v .

۲ . اگر داشته باشیم: $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0) \neq \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ ،
آن‌گاه می‌گوییم تابع در x_0 پیوسته نیست و فقط پیوستگی راست دارد؛ مانند نقطه‌ی x_3 در تابع h .

۳ . اگر داشته باشیم : $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0) \neq \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ ،
آن‌گاه می‌گوییم تابع در x_0 پیوسته نیست و فقط پیوستگی چپ دارد؛ مانند نقطه‌ی x_4 در تابع t .

۴ . اگر داشته باشیم: $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) \neq f(x_0)$ ،
آن‌گاه می‌گوییم تابع در x_0 حد دارد، ولی هیچ نوع پیوستگی ندارد؛ مانند نقطه‌ی x_5 در تابع u .

۵ . در دو تابع w و s، تابع در همسایگی x_7 و x_8 تعریف نشده است، پس بحث پیوستگی مورد ندارد . ولی اصطلاحاً به این نوع ناپیوستگی، ناپیوستگی رفع نشدنی هم می‌گویند .

مثال ۱ . در تابع با ضابطه‌ی زیر، پیوستگی تابع را در $x = 0$ بررسی کنید .

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2\sqrt{1-\cos 2x}}{x\sqrt{2}} & , \ x \neq 0 \\ -2 & , \ x = 0 \end{cases}$$

حل: ضابطه‌ی دوم تابع، مقدار تابع را نشان می‌دهد. پس برای حل باید حد راست و حد چپ تابع را محاسبه کرد.

مقدار تابع $f(0)=-2$

الف) $$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{2\sqrt{1-\cos 2x}}{x\sqrt{2}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{2\sqrt{2\sin^2 x}}{x\sqrt{2}}$$

$$\sim \lim_{x\to 0^+}\frac{2\sqrt{2x^2}}{x\sqrt{2}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{2\sqrt{2}|x|}{x\sqrt{2}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{2\sqrt{2}x}{x\sqrt{2}}=2$$ حد راست

ب) $$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{2\sqrt{1-\cos 2x}}{x\sqrt{2}}=\lim_{x\to 0^-}\frac{2\sqrt{2\sin^2 x}}{x\sqrt{2}}$$

$$\sim \lim_{x\to 0^-}\frac{2\sqrt{2x^2}}{x\sqrt{2}}=\lim_{x\to 0^-}\frac{2\sqrt{2}|x|}{x\sqrt{2}}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-2\sqrt{2}x}{x\sqrt{2}}=-2$$

حد چپ

چون در این تابع در نقطه‌ی $x=0$، فقط حد چپ برابر مقدار تابع است، بنابراین این تابع در ۰ فقط پیوستگی چپ دارد.

مثال ۲. تابع با ضابطه‌ی $f(x)=x^2+2x+\lfloor x\rfloor$ مفروض است. پیوستگی این تابع را در $x_0=2$ بررسی کنید.

$$\lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^+}(x^2+2x+\lfloor x\rfloor)=4+4+\lfloor 2^+\rfloor$$

حد راست تابع $=4+4+2=10$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^-}(x^2+2x+\lfloor x\rfloor)=4+4+\lfloor 2^-\rfloor$$

حد چپ تابع $=4+4+1=9$

مقدار تابع $f(2)=4+4+\lfloor 2\rfloor=4+4+2=10$

چون در این مسئله در $x=2$، فقط حد راست برابر مقدار تابع شده است، می‌گوییم تابع f در $x=2$ پیوسته نیست، ولی فقط پیوستگی راست دارد.

مثال ۳. پیوستگی تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\lfloor x+\lfloor x\rfloor\rfloor.\lfloor 1-x+\lfloor x\rfloor\rfloor$ را در $x=0$ بررسی کنید.

حل:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lfloor 0^+ +\lfloor 0^+\rfloor\rfloor.\lfloor 1+0^- +\lfloor 0^+\rfloor\rfloor=\lfloor 0^+ +0\rfloor.\lfloor 1^- +0\rfloor$$

حد راست $=\lfloor 0^+\rfloor.\lfloor 1^-\rfloor=0(0)=0$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lfloor 0^- +\lfloor 0^-\rfloor\rfloor.\lfloor 1+0^+ +\lfloor 0^-\rfloor\rfloor=\lfloor 0^- -1\rfloor.\lfloor 1^+ -1\rfloor$$

حد چپ $=\lfloor -1^-\rfloor.\lfloor 0^+\rfloor=-2(0)=0$

مقدار تابع $f(0)=\lfloor 0+\lfloor 0\rfloor\rfloor.\lfloor 1-0+\lfloor 0\rfloor\rfloor=\lfloor 0\rfloor.\lfloor 1\rfloor=(0)(1)=0$

پس این تابع در $x=0$ پیوسته است.

مثال ۴. تابع f با ضابطه‌ی زیر مفروض است.

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{ax-x^2}{|x|} & , x>0\\ b+\lfloor x-\sqrt{5}\rfloor & , x=0\\ \lfloor 4+x\rfloor & , x<0\end{cases}$$

اگر این تابع در $x=0$ پیوسته باشد، a و b را بیابید.

حل:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{ax-x^2}{|x|}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x(a-x)}{x}$$

حد راست $=\lim_{x\to 0^+}(a-x)=a$

حد چپ $\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\lfloor 4+x\rfloor=\lfloor 4+0^-\rfloor=\lfloor 4^-\rfloor=3$

مقدار تابع $=f(0)=b+\lfloor 0-\sqrt{5}\rfloor=b-3$ مقدار تابع

$a=3\ ,\ b-3=3\Rightarrow b=6$

مثال ۵. تابع f با ضابطه‌ی زیر مفروض است.

$$f(x)=\begin{cases}2ax^2+b|x| & , x<1\\ \lfloor x^2-\sqrt{7}\rfloor & , x=1\\ a\sin(x-1)+b\lfloor x\rfloor & , x>1\end{cases}$$

اگر این تابع در $x=1$ پیوسته باشد، a و b را بیابید.

حل:

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}(a\sin(x-1)+b\lfloor x\rfloor)$$

حد راست $=a\sin 0+b\lfloor 1^+\rfloor=0+b=b$

حد چپ $\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}(2ax^2+b|x|)=2a+b$

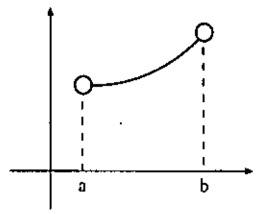
مقدار تابع $=f(1)=\lfloor 1-\sqrt{7}\rfloor=\lfloor 1-2/6\rfloor=\lfloor -1/6\rfloor=-2$

$b=-2\ ,\ 2a+b=-2\Rightarrow 2a-2=-2\Rightarrow a=0$

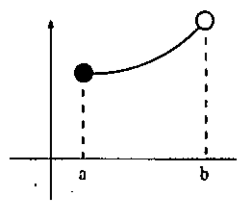
نکته: اگر تابع f در x_0 و تابع g در $f(x_0)$ پیوسته باشند، آن‌گاه تابع gof در x_0 پیوسته است و اگر تابع g در x_0 و تابع f در $g(x_0)$ پیوسته باشد، آن‌گاه تابع fog در x_0 پیوسته است.

پیوستگی در یک بازه

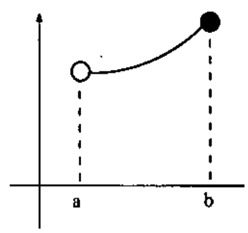
۱ . تابع f را در بازه‌ی (a,b) وقتی پیوسته گوییم که f در تمام نقاط این بازه پیوسته باشد .



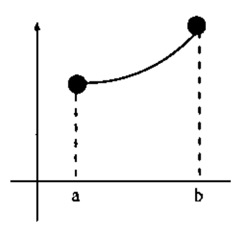
۲ . تابع f را در بازه‌ی $[a,b)$ وقتی پیوسته گوییم که :
اولاً، در تمام نقاط بازه‌ی (a,b) پیوسته باشد .
ثانیاً، در a پیوستگی راست داشته باشد .



۳ . تابع f را در بازه‌ی $(a,b]$ وقتی پیوسته گوییم که :
اولاً، در بازه‌ی (a,b) پیوسته باشد .
ثانیاً، در b پیوستگی چپ داشته باشد .



۴ . تابع f را در بازه‌ی $[a,b]$ وقتی پیوسته گوییم که :
اولاً، در بازه‌ی (a,b) پیوسته باشد .
ثانیاً، در a پیوستگی راست و در b پیوستگی چپ داشته باشد .



مثال ۱ . ثابت کنید تابع با ضابطه‌ی $f(x)=2x+\lfloor x\rfloor$ در بازه‌ی $[1,2)$ پیوسته است .

حل : اولاً ، باید ثابت کنیم، این تابع در بازه‌ی $(1,2)$ پیوسته است .

$$1<x_0<2 \Rightarrow \begin{cases}1<x_0^+<2\\1<x_0^-<2\end{cases}$$

حد راست $\lim_{x\to x_0^+} f(x)=2x_0+\lfloor x_0^+\rfloor=2x_0+1$

حد چپ $\lim_{x\to x_0^-} f(x)=2x_0+\lfloor x_0^-\rfloor=2x_0+1$

مقدار تابع $f(x_0)=2x_0+\lfloor x_0\rfloor=2x_0+1$

پس این تابع در بازه‌ی $(1,2)$ پیوسته است .

ثانیاً ، باید ثابت کنیم، این تابع در ۱ از راست پیوسته است .

حد راست $\lim_{x\to 1^+} f(x)=2+\lfloor 1^+\rfloor=2+1=3$

مقدار تابع $f(1)=2+\lfloor 1\rfloor=2+1=3$

پس این تابع در $x=1$ از راست پیوسته است .

مثال ۲ . تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ مفروض است . ثابت کنید، این تابع در بازه‌ی $[-1,1]$ پیوسته است .

حل :

$$1-x^2=0 \Rightarrow x=\pm 1$$

x	$-\infty$	-1		1	$+\infty$
$1-x^2$	$-$	0	$+$	0	$-$

اولاً ، باید ثابت کنیم، این تابع در بازه‌ی $(-1,1)$ پیوسته است .

$$-1<x_0<1 \Rightarrow \begin{cases}-1<x_0^+<1\\-1<x_0^-<1\end{cases}$$

حد راست $\lim_{x\to x_0^+} f(x)=\sqrt{1-x_0^2}$

حد چپ $\lim_{x\to x_0^-} f(x)=\sqrt{1-x_0^2}$

مقدار تابع $f(x_0)=\sqrt{1-x_0^2}$ ثانیاً، باید ثابت کنیم، این تابع در $x=-1$ پیوستگی راست و در $x=1$ پیوستگی چپ دارد .

$\lim_{x\to -1^+} f(x)=\sqrt{0^+}=\sqrt{0}$ و $f(-1)=\sqrt{0}=0$

$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\sqrt{0^+}=\sqrt{0}$ و $f(1)=\sqrt{0}=0$

بنابراین، این تابع در بازه‌ی $[-1,1]$ پیوسته است .

مجموعه‌ی Q منتها شماراست
$Q \sim \mathbb{N}$

میرشهرام صدر

اشاره

با مفهوم تابع و تابع های یک به یک و پوششی، در پایه دوم متوسطه آشنا شده‌اید و مطالب تکمیلی را در حسابان سال سوم فرا گرفته‌اید. در این مقاله با استفاده از این مفاهیم نشان می‌دهیم که مجموعه‌ی اعداد گویا، قابل شمارش و نامتناهی (منتهاشمارا) هستند؛ یعنی مجموعه‌ی Q با $\mathbb{N}$ هم‌ارز است. به تعبیر دیگر، ثابت می‌کنیم که تعداد اعداد طبیعی و اعداد گویا با هم برابر است.



مجموعه‌های متناهی و نامتناهی

شما با اصطلاحات «مجموعه‌ی متناهی» و «مجموعه‌ی نامتناهی» آشنایی دارید. مجموعه‌ی انگشتان یک دست خود را مجموعه‌ای متناهی و مجموعه‌ی اعداد طبیعی و مجموعه‌ی نقاط واقع بر یک قطعه خط مستقیم را نامتناهی می‌شماریم. در حالت کلی، مجموعه‌ای متناهی است که یا تهی و یا به طور دقیق شامل n عضو باشد، که n عدد صحیح مثبت است. یا به عبارت دیگر، مجموعه‌ای متناهی است که شامل تعداد معینی عضو متفاوت باشد و در شمارش عضوهای متفاوت مجموعه، کار شمارش به پایان برسد. در غیر این صورت مجموعه نامتناهی است.

مثال۱. فرض کنیم مجموعه‌ی M روزهای هفته باشد، آن‌گاه M متناهی است.

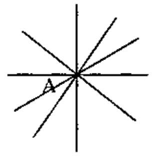
M={شنبه، یکشنبه، دوشنبه، سه‌شنبه، چهارشنبه، پنج‌شنبه، جمعه}

مثال۲. فرض کنیم: P={x| رودخانه‌ای در دنیا: x}. اگرچه شمردن همه‌ی رودخانه‌های دنیا مشکل است، اما با توجه به تعریف، مجموعه‌ی P متناهی است.

مثال۳. مجموعه‌ی دایره‌هایی که از مبدأ مختصات می‌گذرند، مجموعه‌ای نامتناهی است.

مثال۴ . مجموعه جواب‌های معادله‌ی $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$ متناهی است، زیرا معادله دارای این مجموعه جواب است: $\{-3, -1, 1, 3\}$.

مثال۵ . مجموعه‌ی اعداد طبیعی و مجموعه‌ی خطوط گذرنده از یک نقطه‌ی ثابت، مجموعه‌هایی نامتناهی می‌باشند.



عدد اصلی یک مجموعه

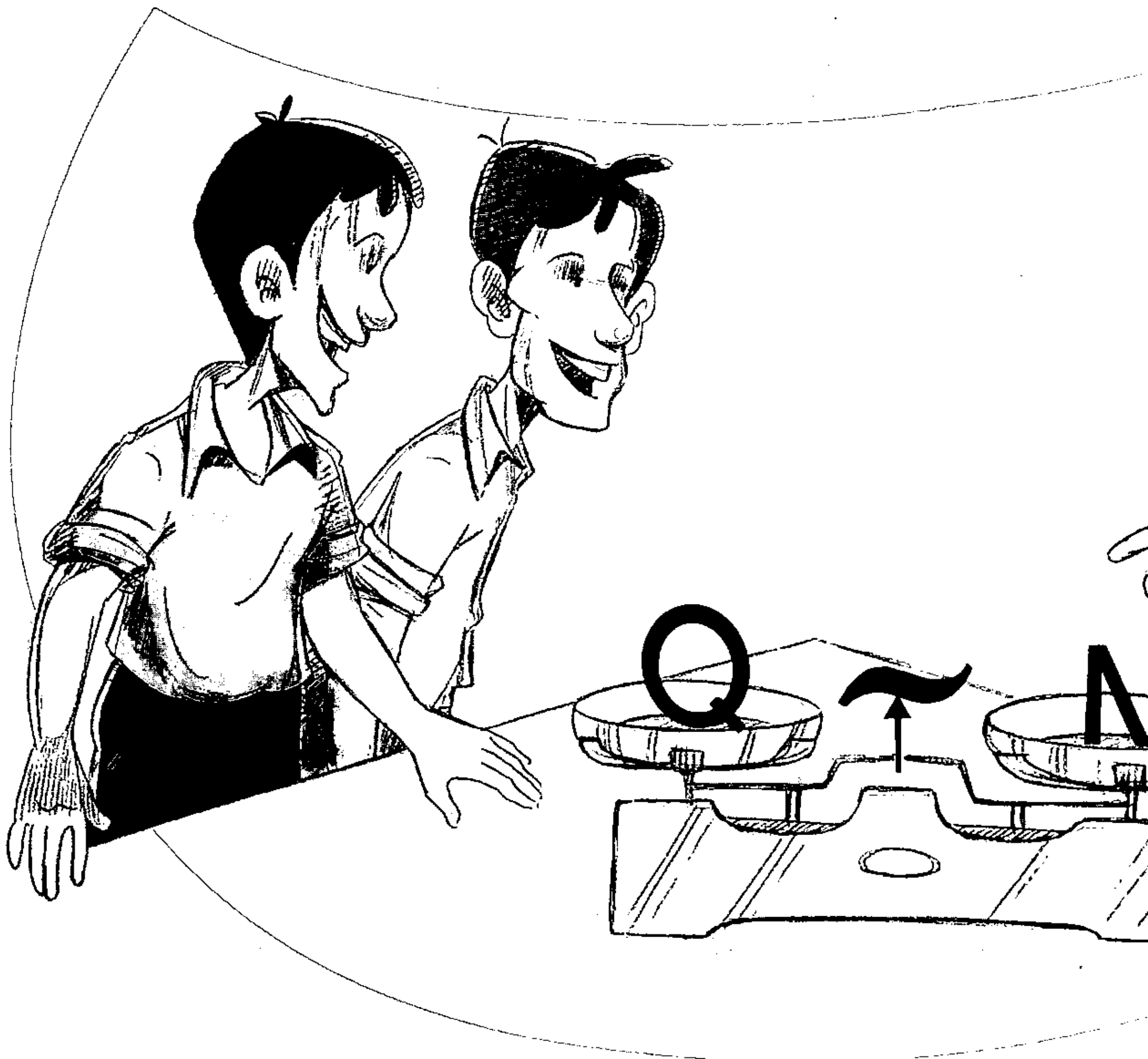
فرض کنیم، A مجموعه‌ای متناهی باشد. با توجه به تعریفی که از مجموعه‌ی متناهی بیان شد، اعضای مجموعه‌ی A قابل شمارش هستند. تعداد اعضای مجموعه A را عدد اصلی مجموعه‌ی A می‌گوییم و با نماد $n(A)$ نشان می‌دهیم.

عدد اصلی هر یک از مجموعه‌های $\varnothing$ ، $\{a_1\}$ ، $\{a_1, a_2\}$ ، $\{a_1, a_2, a_3\}$ ، $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ و ... به ترتیب برابر با ۰ ، ۱ ، ۲ ، ۳ ، ۴ و ... است. بنابراین عدد اصلی هر مجموعه‌ی متناهی مانند A ، عدد صحیح و نامنفیِ $n(A)$ است، به‌طوری که: $0 \leq n(A) \leq k \;;\; k \in \mathbb{N}$.

عدد اصلی مجموعه‌های نامتناهی را در مبحث مجموعه‌های «شمارا» و «ناشمارا» بیان خواهیم کرد.

مجموعه‌ی هم‌ارز

فرض کنید کلاسی که شما در آن درس می‌خوانید، ۳۰ دانش‌آموز دارد. یک روز معلم ریاضی وارد کلاس می‌شود و به هر یک از دانش‌آموزان یکی از اعداد ۱ تا ۳۰ را نسبت می‌دهد؛ به‌طوری که اگر هر عددی بین ۱ تا ۳۰ انتخاب شود، دانش‌آموزی هست که منتسب به آن عدد باشد و برعکس، اگر دانش‌آموزی را در نظر بگیریم، یکی از اعداد ۱ تا ۳۰ منتسب به آن دانش‌آموز است. در این حالت می‌گوییم، مجموعه‌ی دانش‌آموزان و مجموعه‌ی اعداد ۱ تا ۳۰ هم‌ارز هستند. بنابراین، مجموعه‌ی



ناتهی A را هم‌ارز با مجموعه‌ی ناتهی B گوییم، هرگاه هر عضو A فقط و فقط با یک عضو B و هر عضو B فقط و فقط با یک عضو A مرتبط باشد، و می‌نویسیم: $A \sim B$.

نکته‌ی ۱ . در صورتی‌که: $A \sim B$، آن‌گاه عدد اصلی A با عدد اصلی B برابر است؛ یعنی:

$$A \sim B \Rightarrow n(A) = n(B)$$

مسئله‌ی ۱ . نشان‌دهید که مجموعه‌ی اعداد طبیعی با مجموعه‌ی اعداد زوج طبیعی هم‌عدد هستند.

حل: برای این‌که نشان دهیم، عدد اصلی دو مجموعه‌ی $\mathbb{N}$ و E با یکدیگر برابرند، کافی است نشان دهیم که این دو مجموعه می‌توانند هم‌ارز باشند. با توجه به نمودار ۱ ملاحظه می‌کنیم که: $\mathbb{N} \sim E$، در نتیجه دو مجموعه‌ی $\mathbb{N}$ و E هم عدد هستند.

$$\begin{array}{lcccccccc} \mathbb{N}: & ۱ & ۲ & ۳ & ۴ & \cdots & n & \cdots \\ & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & & \updownarrow & \\ E: & ۲ & ۴ & ۶ & ۸ & \cdots & ۲n & \cdots \end{array}$$

(نمودار ۱)

با توجه به نمودار ۱ ملاحظه می‌کنیم که برای هر عدد طبیعی n، فقط و فقط یک عضو منحصر به‌فرد مانند ۲n از اعداد زوج وجود دارد که با آن مرتبط است. و برعکس، برای هر ۲n از مجموعه‌ی E، فقط و فقط عضو منحصر به فرد $n = \frac{۲n}{۲}$ از $\mathbb{N}$ وجود دارد که با آن در ارتباط است.

نکته‌ی ۲ . مجموعه‌ی $\mathbb{N}_k = \{۱,۲,...,k\}$ را قطعه‌ای از اعداد طبیعی می‌گوییم، هرگاه A مجموعه‌ای متناهی باشد و: $A \neq \varnothing$. در این صورت A می‌تواند با قطعه‌ای از اعداد طبیعی هم‌ارز باشد. یعنی برای هر مجموعه‌ی متناهی $A \neq \varnothing$ داریم:

$$A \sim \mathbb{N}_k$$

اکنون این سؤال پیش می‌آید که آیا درباره‌ی هر دو مجموعه‌ی دل‌خواه می‌توان گفت تعداد عضوهایشان مساوی است یا نه. درباره‌ی مجموعه‌های متناهی با شمردن عضوها و یا جفت کردن اعضای آن می‌توان به این سؤال پاسخ داد، اما درباره‌ی مجموعه‌های نامتناهی، جواب سؤال بستگی به این دارد که تعداد مساوی عضو داشتن را چگونه تعریف کنیم تا بگوییم دو مجموعه «هم‌عدد» هستند.

برای بررسی هم‌ارزی بین دو مجموعه‌ی نامتناهی، تعریف زیر را که نظریه‌ی مجموعه‌ها را دگرگون کرد و به ریاضی‌دان آلمانی، **ژرژ کانتور** منسوب است، مطرح کنیم.

مجموعه‌ی A هم‌ارز با مجموعه B است، اگر تابعی چون $f: A \to B$ موجود باشد، به‌طوری که f هم یک‌به‌یک و هم پوششی باشد. در این صورت می‌گویند: تابع f تناظری یک‌به‌یک بین مجموعه‌های A و B تعریف می‌کند.

مسئله‌ی ۲ . مجموعه‌ی $M = \{۱,۱۰,۱۰۰,۱۰۰۰,...\}$ را در نظر بگیرید. ثابت کنید: $\mathbb{N} \sim M$.

حل: باید تابعی یک‌به‌یک و پوششی بین $\mathbb{N}$ و M تعریف کنیم. تابع f را به‌صورت زیر درنظر می‌گیریم:

$$\begin{cases} f: \mathbb{N} \longrightarrow M \\ f(n) = ۱۰^{n-۱} \end{cases}$$

این تابع یک‌به‌یک است، زیرا:

$$\begin{aligned} f(n_۱) = f(n_۲) &\Rightarrow ۱۰^{n_۱-۱} = ۱۰^{n_۲-۱} \\ &\Rightarrow n_۱ - ۱ = n_۲ - ۱ \\ &\Rightarrow n_۱ = n_۲ \end{aligned}$$

تابع f پوششی است، زیرا برای هر $y \in M$، یک عدد طبیعی مانند $n = ۱ + \log y$ وجود دارد، به‌طوری که: $y = f(n)$.

یعنی برای هر $y \in M$، وجود دارد: $n \in \mathbb{N}$، به‌طوری که:

$$\begin{aligned} y = ۱۰^{n-۱} &\Rightarrow \log y = \log ۱۰^{n-۱} \\ &\Rightarrow \log y = n - ۱ \\ &\Rightarrow n = (۱ + \log y) \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

مثال ۶ . بین مجموعه‌ی اعداد طبیعی و مجموعه‌ی اعداد طبیعی که مجذور کامل هستند، توسط تابع f به صورت زیر تناظری یک‌به‌یک موجود است .

مجموعه‌ی اعداد طبیعی مجذور کامل $\mathbb{N} = \{۱, ۲, ۳, ...\}$; $A = \{۱, ۴, ۹, ۱۶, ۲۵, ۳۶, ...\}$

$$\begin{cases} f: \mathbb{N} \to A \\ f(x) = x^{۲} \end{cases}$$

تابع f با ضابطه‌ی فوق، یک‌به‌یک و پوششی است (چرا؟) لذا: $\mathbb{N} \sim A$.

مجموعه‌های شمارا و ناشمارا

تا این‌جا دیدیم که مجموعه‌های متناهی قابل شمارش هستند. هم‌چنین، با مجموعه‌هایی نامتناهی آشنا شدید که با اعداد طبیعی هم عدد یا هم‌ارز بودند. بنا به تعریف، مجموعه‌ی A را «شمارا» یا «شمارش‌پذیر» می‌گوییم، هرگاه متناهی باشد، یا: $A \sim \mathbb{N}$.

مجموعه‌های $\mathbb{N}$ ، E ، O (مجموعه‌ی اعداد فرد طبیعی) و هر زیر مجموعه‌ی نامتناهی از $\mathbb{N}$ را مجموعه‌هایی «شمارا» و نامتناهی یا «منتها شمارا» می‌گوییم.

مسئله‌ی ۳ . ثابت کنید مجموعه‌ی اعداد صحیح «منتهاشمارا» است.

اثبات: به این منظور ثابت می‌کنیم که: $\mathbb{N} \sim Z$.

تابع f با ضابطه‌ی زیر یک‌به‌یک و پوششی است (چرا؟)

$$\begin{cases} f: \mathbb{N} \to Z \\ f(n) = \begin{cases} \dfrac{n}{۲} & \text{زوج } n \\ \dfrac{۱-n}{۲} & \text{فرد } n \end{cases} \end{cases}$$

در نتیجه: $\mathbb{N} \sim Z$. چون N نامتناهی و شماراست، در نتیجه Z منتها شماراست.

با توجه به تابع f، دو مجموعه‌ی $\mathbb{N}$ و Z به‌صورت نمودار ۲ هم‌ارزند:

$$\begin{array}{lccccccc} \mathbb{N}: & ۱ & ۲ & ۳ & ۴ & ۵ & ۶ & \cdots \\ & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \\ Z: & ۰ & ۱ & -۱ & ۲ & -۲ & ۳ & \cdots \end{array}$$

(نمودار ۲)

نکته‌ی ۳ . اگر A زیرمجموعه‌ی نامتناهی از Z باشد، در این صورت داریم:

$\mathbb{N} \sim Z \sim E \sim O \sim A$

همه‌ی مجموعه‌های فوق هم‌عدد هستند و بنابه تعریف، عدد اصلی همگی آنان را $\aleph_0$ (الف صفر) می‌نامیم. بنابراین داریم:

$|\mathbb{N}| = |Z| = |E| = |O| = |A| = \aleph_0$

حال فرض کنیم، مجموعه‌ی اعداد حقیقی بین ۲ و ۳ (شامل خود ۲ و خود ۳) در دست باشد و بخواهیم این مجموعه، یعنی $A = \{x \in \mathbb{R} | ۲ \le x \le ۳\}$ را برچسب‌گذاری کنیم. واضح است که اولین عضو این مجموعه را می‌توان عدد ۲ در نظر گرفت و برچسب شماره‌ی ۱ را به عدد ۲ اختصاص داد. بلافاصله به‌دنبال دومین عدد بعد از ۲ می‌گردیم تا برچسب شماره‌ی ۲ را که آماده کرده‌ایم، روی آن بچسبانیم. آیا می‌توان یک عدد حقیقی بلافاصله بعد از ۲ نام برد؟ جواب منفی است. ما نمی‌توانیم عدد حقیقی بلافاصله پس از ۲ را معرفی یا پیدا کنیم؛ به گونه‌ای که بین آن عدد و عدد ۲ هیچ عدد حقیقی دیگری وجود نداشته باشد. زیرا ثابت شده است که: «همواره بین هر دو عدد حقیقی متمایز، بی‌نهایت عدد حقیقی وجود دارد.» بنابراین، هم‌چنان در به‌کار بردن برچسب شماره‌ی ۲ ناتوان می‌مانیم. پس، مجموعه‌ی فوق شمارش‌ناپذیر یا ناشماراست.

تعریف: مجموعه‌ی A را شمارش‌ناپذیر می‌نامیم، هرگاه شمارش‌پذیر نباشد و به‌عبارت دیگر «متناهی نباشد و با $\mathbb{N}$ هم‌ارز نباشد». پس:

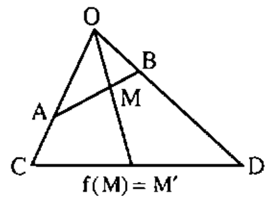
$A \sim \mathbb{N}$ و (A نامتناهی است) $\Leftrightarrow$ A شمارش‌ناپذیر است.

مثال ۷ . مجموعه‌ی اعداد حقیقی، یعنی $\mathbb{R}$ و تمام زیرمجموعه‌های $\mathbb{R}$ به شکل $A = \{x \in \mathbb{R} | a \le x \le b\}$ (که نقاط ابتدایی و انتهایی مجموعه‌ی A تأثیری در «ناشمارایی» ندارند.) و مجموعه‌ی اعداد گنگ، «ناشمارا» یا شمارش‌ناپذیر هستند.

مثال ۸ . فرض کنیم: $G = [۰,۱]$ و $H = [۲,۵]$. ملاحظه می‌کنیم که دو مجموعه‌ی H و G ناشمارا هستند. تابع $f: G \to H$ با ضابطه‌ی $f(x) = ۳x + ۲$ را در نظر می‌گیریم. با کمی دقت ملاحظه می‌کنیم که f هم یک‌به‌یک است و هم پوششی. پس: $G \sim H$ ؛ یعنی G هم‌ارز H می‌باشد؛ زیرا:

$$y = [۲,۵] \Rightarrow ۲ \le ۳x + ۲ \le ۵ \Rightarrow ۰ \le x \le ۱$$

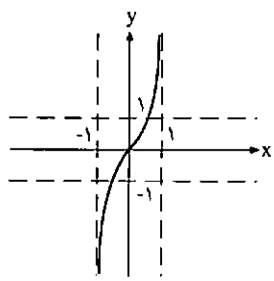
مثال ۹ . فرض کنیم AB پاره خط مستقیمی به طول یک سانتی‌متر و CD قطعه خطی مستقیم به طول دل‌خواه باشد. مطابق شکل ۲، تابع f را بر مجموعه‌ی نقاط AB با این ضابطه تعریف می‌کنیم که f(M) یا M′ نقطه‌ی تقاطع خط OM با CD است. به‌وضوح می‌توان دید که f تناظر یک‌به‌یک بین مجموعه‌ی نقاط پاره‌خط AB و مجموعه‌ی نقاط پاره‌خط CD برقرار می‌کند.



مثال ۱۰ . تابع $f: (-۱,۱) \to \mathbb{R}$ با ضابطه‌ی $f(x) = \frac{x}{۱-|x|}$ یک‌به‌یک و پوشاست. بنابراین، بازه‌ی $(-۱,۱)$ هم‌ارز مجموعه‌ی اعداد حقیقی است. یعنی مجموعه‌ی اعداد حقیقی و بازه‌ی (۱ و ۱−) «هم‌عدد» هستند. چون تابع f(x) دارای قدرمطلق است، بنابراین f(x) تابعی دوضابطه‌ای، به‌صورت زیر است:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{۱-x} & x \ge ۰ \\ \frac{x}{۱+x} & x < ۰ \end{cases}$$

با توجه به دامنه و ضابطه‌ی تابع f، نمودار آن به صورت نمودار ۳ است. نمودار به روشنی نشان می‌دهد که f یک‌به‌یک و پوششی است.



(نمودار ۳)

نکته‌ی ۴ . اگر A بازه‌ای از اعداد حقیقی $\mathbb{R}$ باشد، در این صورت داریم:

$$A \sim \mathbb{R}$$

بنا به تعریف، عدد اصلی $\mathbb{R}$ و A را با α نمایش می‌دهیم. بنابراین داریم:

$$|\mathbb{R}| = |A| = \alpha$$

اگر بخواهیم مقایسه‌ای بین α و $\aleph_0$ داشته باشیم، باید بگوییم که α به‌مراتب بزرگ‌تر از $\aleph_0$ است. در تئوری مجموعه‌های پیشرفته ثابت می‌کنند که: $\alpha = ۲^{\aleph_0}$.

مثال ۱۱ . هر دنباله‌ی نامتناهی $a_۱, a_۲, a_۳, \cdots$ با عضوهای متمایز شمارای نامتناهی است. زیرا هر دنباله، اساساً تابعی مانند $\begin{cases} f: \mathbb{N} \to R_f \\ f(n) = a_n \end{cases}$ است که این تابع یک‌به‌یک و پوششی است. برای مثال، هریک از مجموعه‌های زیر شمارای نامتناهی (منتها شمارا) هستند:

$$\left\{۱, \frac{۱}{۲}, \frac{۱}{۳}, \frac{۱}{۴}, \ldots, \frac{۱}{n}, \ldots\right\}$$

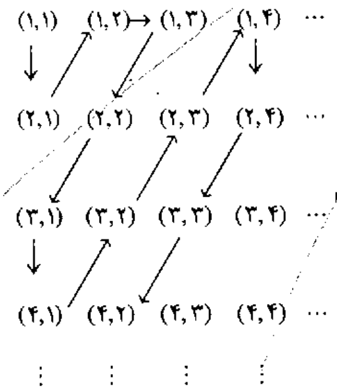
$$\left\{۱,-۲,۳,-۴,\cdots,(-۱)^{n-۱}n,\cdots\right\}$$

$$\left\{(۱,۱),(۴,۸),(۹,۲۷),\cdots,(n^{۲},n^{۳}),\cdots\right\}$$

مسئله‌ی ۴ . ثابت کنید $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ متنها شماراست .

حل :

روش اول : با توجه به مسئله‌ی قبل و نمودار زیر ، مجموعه‌ی $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ متنها شماراست .



(نمودار ۴)

$$\mathbb{N}\times\mathbb{N}=\left\{(۱,۱),(۲,۱),(۱,۲),(۱,۳),(۲,۲),(۳,۱),(۴,۱),(۳,۲),\cdots\right\}$$

روش دوم : تابع زیر یک به یک و پوششی است و نشان می‌دهد که : $\mathbb{N}\times\mathbb{N}\sim\mathbb{N}$. چون $\mathbb{N}$ متنهاشماراست ، پس $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ نیز متنهاشماراست .

$$\begin{cases} f:\mathbb{N}\times\mathbb{N}\rightarrow\mathbb{N} \\ f(m,n)=۲^{m-۱}(۲n-۱) \end{cases}$$

f یک به یک است ، زیرا :

$$f(m_۱,n_۱)=f(m_۲,n_۲)\Rightarrow ۲^{m_۱-۱}(۲n_۱-۱)=۲^{m_۲-۱}(۲n_۲-۱)$$

$$\Rightarrow m_۱=m_۲,n_۱=n_۲\Rightarrow (m_۱,n_۱)=(m_۲,n_۲)$$

از طرف دیگر ، برای هر $y\in\mathbb{N}$ می‌توان نوشت :

$$y=۲^{m-۱}(۲n-۱)$$

زیرا با استفاده از تقسیم همواره می‌توان نوشت :

$$y=۲^{i}\times l\ ;\quad i\in W,l\in O$$

اکنون اگر قرار دهیم : $m=i+۱$ و $n=\frac{۱}{۲}(l+۱)$ ، خواهیم داشت :

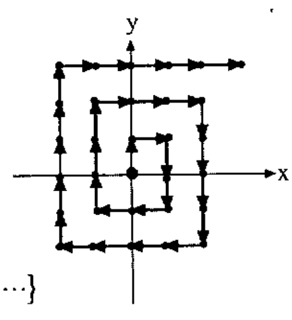
$$f(m,n)=y=۲^{m-۱}(۲n-۱)$$

پس f پوششی است و درنتیجه : $\mathbb{N}\times\mathbb{N}\sim\mathbb{N}$.

مسئله‌ی ۵ . نشان دهید $Z\times Z$ متنهاشماراست .

حل :

روش اول : با توجه به مثال ۱۱ و نمودار۵ ، می‌توان $Z\times Z$ را به صورت دنباله‌ای نامتناهی نوشت :



(نمودار ۵)

$$Z\times Z=\left\{(۰,۰),(۰,۱),(۱,۱),(۱,۰),(۱,-۱),(۰,-۱),\cdots\right\}$$

روش دوم: اجتماع چند مجموعه‌ی متناهاشمارا یک مجموعه‌ی متناهاشماراست.

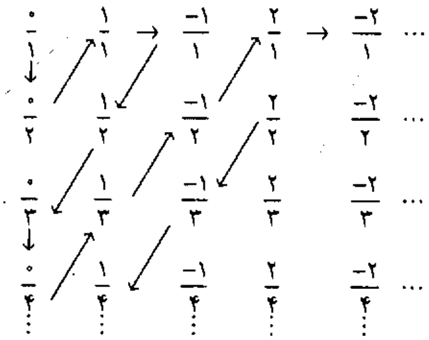
$$Z \times Z = [\mathbb{N}\times\mathbb{N}] \cup [-\mathbb{N}\times\mathbb{N}] \cup [\mathbb{N}\times(-\mathbb{N})] \cup [(-N)\times(-N)] \cup [Z\times\{۰\}] \cup [\{۰\}\times Z]$$

نتیجه: $Z\times\mathbb{N}$ متناهاشماراست.

مسئله‌ی ۶. ثابت کنید Q متناهاشماراست.

حل:

روش اول: با توجه به مسئله‌ی ۱ و نمودار ۶، Q را به صورت دنباله‌ای نامتناهی می‌توان نوشت.



(نمودار ۶)

عوامل تکراری را حذف می‌کنیم و از روی نمودار ۶ مجموعه‌ی Q را می‌نویسیم:

$$Q = \left\{۰, ۱, -۱, \frac{۱}{۲}, \frac{۱}{۳}, -\frac{۱}{۲}, ۲, -۲, -\frac{۱}{۳}, \frac{۱}{۴}, \cdots\right\} = \left\{\frac{m}{n} \middle| m \in Z, n \in \mathbb{N}\right\}$$

روش دوم: مجموعه‌ی تمام اعداد گویای مثبت را با نماد Q^+ و مجموعه‌ی تمام اعداد گویای منفی را با نماد Q^- نمایش می‌دهیم. واضح است که:

$$Q = Q^+ \cup \{۰\} \cup Q^-$$

چون: $Q^+ \sim Q^-$، پس برای این‌که ثابت کنیم Q متناهاشماراست، کافی است نشان دهیم که Q^+ متناهاشماراست. به این منظور تابع زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} f: Q^+ \to \mathbb{N}\times\mathbb{N} \\ f(\frac{m}{n}) = (m,n) \end{cases}$$

در این تابع m و n نسبت به هم اول‌اند، یعنی: $(m,n) = ۱$.

تابع f یک به یک و پوششی است. (چرا؟) پس داریم:

$$Q^+ \sim f(Q^+) \subset \mathbb{N}\times\mathbb{N}$$

چون $\mathbb{N}$ نامتناهی و $\mathbb{N} \subset Q^+$، پس Q^+ نامتناهی است. درنتیجه $f(Q^+)$ یک زیر مجموعه‌ی نامتناهی مجموعه‌ی متناهاشمارای $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ است. از این رو $f(Q^+)$ متناهاشمارا و درنتیجه Q^+ متناهاشماراست.

در اثبات این قسمت، از قضیه‌ی زیر استفاده کرده‌ایم که آن را بدون اثبات می‌پذیریم:

قضیه: هر زیرمجموعه‌ی نامتناهی از یک مجموعه‌ی متناهاشمارا، مجموعه‌ای متناهاشماراست.

ملاحظه کردید که Q^+ متناهاشمار است، چون: $Q^+ \sim Q^-$. پس Q^- نیز متناهاشماراست. از آن‌جا که اجتماع چند مجموعه‌ی متناهاشمارا، یک مجموعه‌ی متناهاشماراست، پس Q متناهاشماراست.

۱. نگرشی به چند مفهوم اساسی در نظریه مجموعه‌ها، میرشهرام صدر، برهان ۱۵ متوسطه

۲. مقدمه‌ای بر منطق و نظریه‌ی مجموعه‌ها، تألیف محمد رجبی طرخورانی

۳. نظریه مجموعه‌ها، نوشته‌ی سیمور لیپ شوتس، ترجمه‌ی محمود مهدی‌زاده

۴. نظریه مجموعه‌ها، نوشته واسلاو سرپینکی، پرویز شهریاری

نظریه‌ی مجموعه‌های فازی (۴)

● دکتر محمدعلی فریبرزی عراقی
عضو هیئت علمی دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکزی



اشاره

همان‌طور که در قسمت‌های قبلی مطرح شد، «نظریه‌ی مجموعه‌های فازی» در سال ۱۹۶۵ توسط پروفسور لطفی عسگرزاده در آمریکا ابداع شد. وی در «مجله‌ی اطلاعات و کنترل» که خود سردبیر آن بود، مقاله‌ی «مجموعه‌های فازی» خویش را چاپ کرد. نظریه‌ی مجموعه‌های فازی، حاصل توسعه‌ی نظریه‌ی مجموعه‌های معمولی است و منطق فازی، حاصل توسعه‌ی منطق دوارزشی است. فازی بودن نوعی ابهام و عدم‌قطعیت را بیان می‌کند و با مفهوم عدم‌اطمینان در علم احتمالات متفاوت است.



در مفاهیم فازی، دیدگاه شخصی افراد معیار سنجش است و هر مفهوم به سلیقه‌ی افراد وابستگی کامل دارد. مثلاً «جوان بودن» یک مفهوم فازی است، چرا که مثلاً یک فرد ۳۰ ساله ممکن است بین جمعی از افراد بالای ۶۰ سال جوان تلقی شود، ولی بین محصلین دوره‌ی ابتدایی جوان به حساب نیاید. هر مفهوم فازی، به موقعیتی که در آن به کار گرفته می‌شود، بستگی دارد و نظریه‌ی منطق و مجموعه‌های فازی، با دیدگاه ریاضی به بررسی این ابهامات می‌پردازد. در این قسمت به معرفی چند عمل و مفاهیم دیگر روی مجموعه‌های فازی می‌پردازیم.

تعریف: فرض کنیم $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ دو مجموعه‌ی فازی روی مجموعه‌ی مرجع X باشند. در این صورت، جمع جبری و ضرب جبری این دو مجموعه، مجموعه‌های فازی به‌صورت $\tilde{A}+\tilde{B}$ و $\tilde{A}.\tilde{B}$ هستند که توابع عضویت آن‌ها برای هر $x \in X$ به این صورت تعریف می‌شود:

$$\mu_{\tilde{A}+\tilde{B}}(x) = \mu_{\tilde{A}}(x) + \mu_{\tilde{B}}(x) - \mu_{\tilde{A}}(x).\mu_{\tilde{B}}(x),$$

$$\mu_{\tilde{A}.\tilde{B}}(x) = \mu_{\tilde{A}}(x).\mu_{\tilde{B}}(x)$$

با توجه به تعریف، ضرب جبری توان mام مجموعه‌ی فازی

$\tilde{A}$، مجموعه‌ای فازی به‌صورت $\tilde{A}^m$ است که تابع عضویت آن به این صورت تعریف می‌شود:

$$\mu_{\tilde{A}^m}(x) = \left(\mu_{\tilde{A}}(x)\right)^m \quad , \quad m \in \mathbb{N}$$

هم‌چنین، جمع کران‌دار و تفریق کران‌دار این دو مجموعه‌ی فازی، مجموعه‌های فازی به صورت $\tilde{A} \oplus \tilde{B}$ و $\tilde{A} - \tilde{B}$ هستند که توابع عضویت آن‌ها برای هر $x \in X$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mu_{\tilde{A} \oplus \tilde{B}}(x) = \min\left\{۱, \mu_{\tilde{A}}(x) + \mu_{\tilde{B}}(x)\right\} \ ,$$

$$\mu_{\tilde{A} - \tilde{B}}(x) = \max\left\{۰, \mu_{\tilde{A}}(x) + \mu_{\tilde{B}}(x) - ۱\right\}$$

مثال: دو مجموعه‌ی فازی $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ روی $\mathbb{R}$ به صورت زیر تعریف شده‌اند:

$$\tilde{A} = \{(۱, ۰/۳), (۳, ۱), (۴, ۰/۷)\}$$

$$\tilde{B} = \{(۱, ۰/۲), (۴, ۱), (۵, ۰/۶)\}$$

در زیر مجموعه‌های فازی، $\tilde{A} + \tilde{B}$ ، $\tilde{A} - \tilde{B}$ ، $\tilde{A}^۲$ ، $\tilde{A} \oplus \tilde{B}$ و $\tilde{A} - \tilde{B}$ مشخص شده‌اند.

$$\tilde{A} + \tilde{B} = \{(۱, ۰/۴۴), (۳, ۱), (۴, ۱), (۵, ۰/۶)\}$$

به عنوان مثال:

$$\mu_{\tilde{A}+\tilde{B}}(۱) = \mu_{\tilde{A}}(۱) + \mu_{\tilde{B}}(۱) - \mu_{\tilde{A}}(۱).\mu_{\tilde{B}}(۱)$$
$$= ۰/۳ + ۰/۲ - ۰/۳ \times ۰/۲ = ۰/۴۴$$

$$\tilde{A}.\tilde{B} = \{(۱, ۰/۰۶), (۴, ۰/۷)\}$$

به عنوان مثال:

$$\mu_{\tilde{A}+\tilde{B}}(۳) = \mu_{\tilde{A}}(۳).\mu_{\tilde{B}}(۳) = ۱ \times ۰ = ۰$$

چون مقدار تابع عضویت در $x = ۳$ صفر شده، این عضو در مجموعه نیامده است.

$$\tilde{A}^۲ = \{(۱, ۰/۰۹), (۳, ۱), (۴, ۰/۴۹)\}$$

$$\tilde{A} \oplus \tilde{B} = \{(۱, ۰/۵), (۳, ۱), (۴, ۱), (۵, ۰/۶)\}$$

به عنوان مثال:

$$\mu_{\tilde{A} \oplus \tilde{B}}(۴) = \min\left\{۱, \mu_{\tilde{A}}(۴) + \mu_{\tilde{B}}(۴)\right\}$$
$$= \min\{۱, ۰/۷ + ۱\} = ۱$$

$$\tilde{A} - \tilde{B} = \{(۴, ۰/۷)\}$$

به عنوان مثال:

$$\mu_{\tilde{A}-\tilde{B}}(۱) = \max\left\{۰, \mu_{\tilde{A}}(۱) + \mu_{\tilde{B}}(۱) - ۱\right\}$$
$$= \max\{۰, ۰/۳ + ۰/۲ - ۱\} = \max\{۰, -۰/۵\} = ۰$$

چون مقدار تابع عضویت در $x = ۱$ صفر شده، این عضو در مجموعه منظور نشده است.

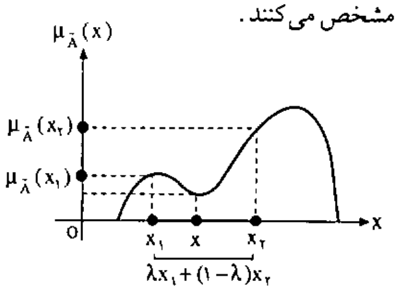
همان‌گونه که ملاحظه شد، اعمال ریاضی روی مجموعه‌های فازی به‌طور مستقیم از روی توابع عضویت آن‌ها تعریف می‌شود.

در ادامه به معرفی محدب بودن یک مجموعه‌ی فازی می‌پردازیم.

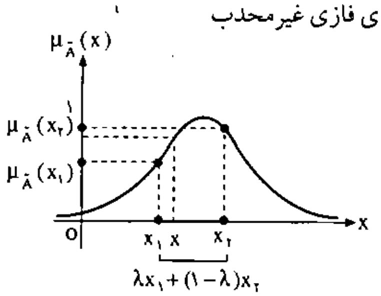
تعریف: مجموعه‌ی فازی $\tilde{A}$ را محدب گوییم، هرگاه به ازای هر $x_۱, x_۲ \in X$ و هر $\lambda \in [۰, ۱]$ رابطه‌ی زیر برقرار باشد:

$$\mu_{\tilde{A}}(\lambda x_۱ + (۱-\lambda)x_۲) \geq \min\left\{\mu_{\tilde{A}}(x_۱), \mu_{\tilde{A}}(x_۲)\right\}$$

اشکال زیر نمونه‌ای از یک مجموعه‌ی فازی محدب و غیرمحدب را مشخص می‌کنند.



مجموعه‌ی فازی غیرمحدب



مجموعه‌ی فازی محدب

می‌دانیم، اگر $۰ \leq \lambda \leq ۱$ باشد، مقادیر $\lambda x_۱ + (۱-\lambda)x_۲$ ، روی پاره‌خط واصل بین دو نقطه‌ی $x_۱$ و $x_۲$ واقع هستند. بنابراین، در صورتی که $\tilde{A}$ مجموعه‌ی فازی محدبی باشد، مقدار درجه‌ی عضویت هر عضو روی این پاره‌خط بزرگ‌تر یا مساوی حداقل مقدار درجه‌های عضویت در دو سر این پاره‌خط است. قضیه‌ی زیر یک شرط لازم و کافی برای محدب بودن یک مجموعه‌ی فازی را مطرح می‌کند.

قضیه: شرط لازم و کافی برای آن‌که مجموعه‌ی فازی $\tilde{A}$ محدب باشد آن است که مجموعه‌ی α- برش $\tilde{A}$ به ازای هر $۰ \leq \alpha \leq ۱$ محدب باشد. یعنی اگر $x_۱, x_۲$ دو عضو دل‌خواه A_α باشند، آن‌گاه $\lambda x_۱ + (۱-\lambda)x_۲$ نیز برای هر $۰ \leq \lambda \leq ۱$ در A_α باشد.

مثال: ثابت کنید، مجموعه‌ی فازی زیر نمونه‌ای از یک مجموعه‌ی فازی محدب است.

$$\tilde{A} = \left\{(x, \mu_{\tilde{A}}(x)) \middle| x \in \mathbb{R}\right\} \ , \ \mu_{\tilde{A}}(x) = e^{-x^۲}$$

برای اثبات این موضوع می‌توانیم ثابت کنیم مجموعه‌ی α- برش $\tilde{A}$ محدب است. ابتدا A_α را می‌یابیم:

$$e^{-x^۲} \geq \alpha \Rightarrow -x^۲ \geq \ln\alpha \Rightarrow x^۲ \leq -\ln\alpha$$

$$\Rightarrow -\sqrt{-\ln\alpha} \le x \le \sqrt{-\ln\alpha}$$

$$\Rightarrow A_\alpha = \left[-\sqrt{-\ln\alpha}, \sqrt{-\ln\alpha}\right], \quad 0 \le \alpha \le 1$$

توجه می‌کنیم که: $\ln\alpha \le 0$. لذا زیر رادیکال مقداری نامنفی است. حال اگر داشته باشیم: $x_1, x_2 \in A_\alpha$، آن‌گاه:

$$-\sqrt{-\ln\alpha} \le x_1 \le \sqrt{-\ln\alpha} \xrightarrow{\times\lambda} -\lambda\sqrt{-\ln\alpha} \le \lambda x_1 \le \lambda\sqrt{-\ln\alpha}$$

$$-\sqrt{-\ln\alpha} \le x_2 \le \sqrt{-\ln\alpha}$$

$$\xrightarrow{\times(1-\lambda)} -(1-\lambda)\sqrt{-\ln\alpha} \le (1-\lambda)x_2 \le (1-\lambda)\sqrt{-\ln\alpha}$$

با جمع بستن طرفین این نامساوی‌ها داریم:

$$-\sqrt{-\ln\alpha} \le \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \le \sqrt{-\ln\alpha}$$

بنابراین: $\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \in A_\alpha$ که $0 \le \lambda \le 1$. به این ترتیب A_α مجموعه‌ای محدب است و درنتیجه بنابر قضیه‌ی فوق، $\tilde{A}$ مجموعه‌ی فازی محدبی است.

با استفاده از مفهوم فوق، تعریف زیر را برای یک عدد فازی مطرح می‌کنیم:

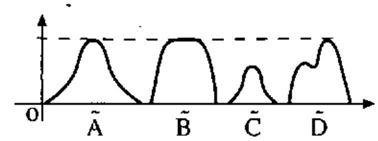
تعریف: فرض کنیم $\tilde{A}$ یک مجموعه‌ی فازی روی $\mathbb{R}$ باشد. در این صورت $\tilde{A}$ را یک عدد فازی گوییم، هرگاه:

الف) $\tilde{A}$ مجموعه‌ی فازی محدب باشد.

ب) تنها یک نقطه‌ی $x_0 \in \mathbb{R}$ وجود داشته باشد که: $\mu_{\tilde{A}}(x_0) = 1$

ج) تابع $\mu_{\tilde{A}}$ به طور قطعه‌ای پیوسته باشد.

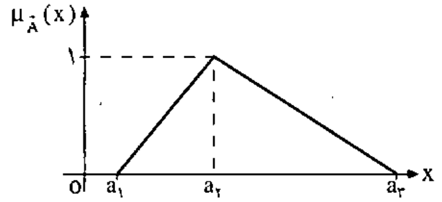
در شکل زیر فقط مجموعه‌ی فازی $\tilde{A}$ و یک عدد فازی است، ولی مجموعه‌های فازی $\tilde{B}$، $\tilde{C}$ و $\tilde{D}$ اعداد فازی نیستند.



مقدار تابع عضویت $\tilde{B}$ در بیش از یک نقطه برابر با ۱ شده است. مقدار تابع عضویت $\tilde{C}$ در هیچ نقطه‌ای برابر ۱ نشده است و $\tilde{D}$ یک مجموعه‌ی فازی محدب نیست.

یکی از اعداد فازی مشهور، «عدد فازی مثلثی» است. تابع عضویت این عدد فازی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} \dfrac{x-a_1}{a_2-a_1} & a_1 \le x < a_2 \\ \dfrac{a_3-x}{a_3-a_2} & a_2 \le x < a_3 \\ 0 & \text{در غیراین صورت} \end{cases}$$



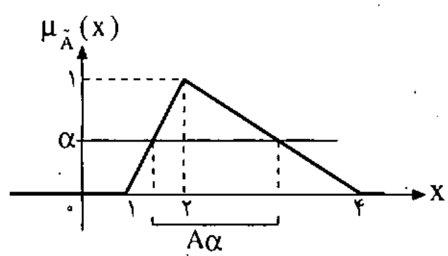
یک عدد فازی مثلثی

در این حالت، عدد فازی $\tilde{A}$ را به صورت $\tilde{A} = (a_1, a_2, a_3)$ نمایش می‌دهیم. به نقطه‌ی a_2 که به ازای آن داریم: $\mu_{\tilde{A}}(a_2) = 1$، «میانه» می‌گوییم.

مثال: تابع عضویت عدد فازی مثلثی $\tilde{A} = (1, 2, 4)$ و مجموعه‌ی $\alpha-$ برش این عدد فازی به صورت زیر هستند:

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} x-1 & 1 \le x < 2 \\ 2-\dfrac{x}{2} & 2 \le x < 4 \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

و $A_\alpha = [\alpha+1, 4-2\alpha]$



تابع عضویت عدد فازی $\tilde{A} = (1, 2, 4)$

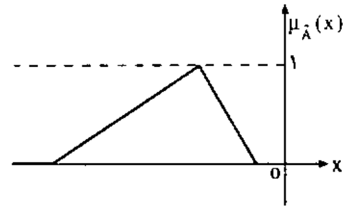
ملاحظه می‌کنیم که: $A_1 = \{2\}$ (مجموعه ۱ـ برش $\tilde{A}$) و $A_0 = [1, 4]$ (مجموعه ۰ـ برش $\tilde{A}$)

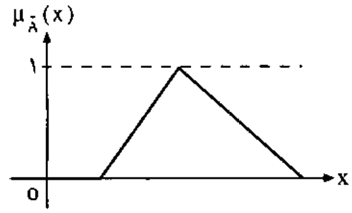
در حالت کلی، مجموعه‌ی $\alpha-$ برش عدد فازی مثلثی $\tilde{A} = (a_1, a_2, a_3)$ به صورت زیر است:

$$A_\alpha = [a_1 + (a_2 - a_1)\alpha, a_3 - (a_3 - a_2)\alpha], \quad 0 \le \alpha \le 1$$

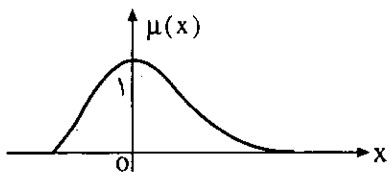
تعریف: عدد فازی $\tilde{A}$ را مثبت گوییم، هرگاه: $\mu_{\tilde{A}}(x) = 0 \ , \ \forall x < 0$، و منفی گوییم، هرگاه: $\mu_{\tilde{A}}(x) = 0 \ , \ \forall x > 0$.

شکل صفحه بعد نمونه‌ای از یک عدد فازی مثبت و یک عدد فازی منفی را نمایش می‌دهد.





برای مثال، عدد فازی مثلثی $\tilde{A}=(1,2,4)$ در مثال بالا یک عدد فازی مثبت است. لازم به ذکر است که یک عدد فازی می‌تواند نه مثبت باشد و نه منفی. شکل زیر نمونه‌ای از یک عدد فازی است که نه مثبت است و نه منفی.



در ادامه چند تمرین برای خواننده مطرح کرده‌ایم که با توجه به آن‌چه شرح دادیم، می‌تواند به حل آن‌ها بپردازد.

۱. تابع عضویتی برای هریک از مجموعه‌های فازی زیر تعیین کنید:

الف) مجموعه‌ی فازی تقریباً ۳

ب) مجموعه‌ی فازی تقریباً بین ۱ و ۳

ج) مجموعه‌ی فازی خیلی بزرگ‌تر از ۳

۲. درباره‌ی محدب بودن هریک از مجموعه‌های فازی زیر تحقیق کنید:

$$\tilde{A}=\left\{(x,\mu_{\tilde{A}}(x))\mid x\in\mathbb{R}\right\},\ \ \mu_{\tilde{A}}(x)=\frac{1}{1+(\frac{1}{x-10})}$$

$$\tilde{B}=\left\{(x,\mu_{\tilde{B}}(x))\mid x\in\mathbb{R}\right\},\ \ \mu_{\tilde{B}}(x)=\frac{1}{1+(x-10)^2}$$

۳. دو مجموعه‌ی فازی $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ در $\mathbb{R}$ به صورت زیر تعریف شده‌اند:

$$\tilde{A}=\{(1,0/2),(3,0/4),(4,0/7),(5,1),(6,0/8),(7,0/5)\}$$

$$\tilde{B}=\{(2,0/4),(3,0/7),(4,1),(5,0/7),(7,0/3)\}$$

مطلوب است محاسبه‌ی: $\tilde{A}+\tilde{B}$ ، $\tilde{A}^2$ ، $\tilde{A}.\tilde{B}$ ، $\tilde{A}\oplus\tilde{B}$ و $\tilde{A}-\tilde{B}$ و $\tilde{A}\times\tilde{B}$.

۴. مجموعه‌ی α- برش عدد فازی مثلثی زیر را بیابید و مشخص کنید، این عدد فازی مثبت است یا منفی.

$$\tilde{A}=\left\{(x,\mu_{\tilde{A}}(x))\mid x\in\mathbb{R}\right\}$$

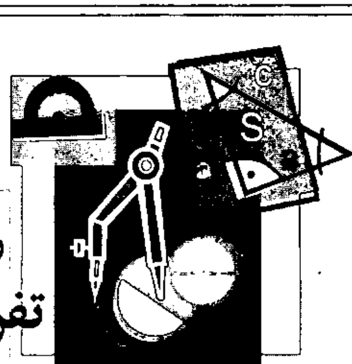
$$\mu_{\tilde{A}}(x)=\begin{cases}\dfrac{x+2}{2} & -2<x\le 0\\ 1-x & 0<x\le 1\\ 0 & \text{در غیر این صورت}\end{cases}$$

در قسمت بعدی، ضمن راهنمایی و حل این تمرین‌ها، خواننده را با مفاهیمی دیگر در مجموعه‌ها و منطق فازی آشنا می‌کنیم.

1. Zimmermann, H. J. Fuzzy Sets theory and its applications, kluwer academic publishers 1996.

۲. کازوتاناکا. مقدمه‌ای بر منطق فازی برای کاربردهای عملی آن. ترجمه‌ی دکتر علی وحیدیان و دکتر حامد رضا طارقیان. ۱۳۸۱.

سؤالات تفریح اندیشه



۱. دستگاه زیر را حل کنید:

$$\begin{cases}x^2+y^2=208\\ xy=96\end{cases}$$

جواب ۱:

$$D=\{(12,8),(8,12),(-8,-12),(-12,-8)\}$$

۲. مجموع پنج زاویه از زاویه‌های یک هشت‌ضلعی، ۸۴۵° است. از سه زاویه‌ی باقی‌مانده، دو زاویه، متمم یکدیگر و دو زاویه، مکمل یکدیگرند. اندازه‌ی این سه زاویه را بیابید.

جواب: ۳۵° ، ۵۵° و ۱۴۵°

۳. همه‌ی مقادیر x را چنان بیابید که به‌ازای آن‌ها، عبارت زیر عددی حقیقی باشد:

$$z=[-x+10+(x+2)i](x-i)$$

جواب: ۲و۵-

مسابقه‌های ریاضی در کشورهای مختلف
المپیاد ریاضی در سوئد

● هوشنگ شرقی

سابقه‌ی برگزاری المپیاد ریاضی در کشور سوئد، به سال ۱۹۶۱ برمی‌گردد. مسابقه‌ی ریاضی دانش‌آموزی در کشور سوئد در دو مرحله برگزار می‌شود و در هر مرحله، عده‌ای از دانش‌آموزان برگزیده می‌شوند تا تیم نهایی المپیاد ریاضی این کشور برای شرکت در مسابقه‌ی جهانی انتخاب شود. سوئد جزو نخستین کشورهای اروپای غربی بود که در «المپیاد بین‌المللی ریاضی» شرکت کرد.

نخستین المپیاد بین‌المللی ریاضی در سال ۱۹۵۹ و تنها بین تعدادی از کشورهای بلوک شرق اروپا برگزار شد و تا سال ۱۹۶۵ نیز، تنها کشورهای اروپای شرقی در آن شرکت داشتند.

از این سال با شرکت کشور فنلاند، پای کشورهای اروپای غربی نیز به آن باز شد. کشور سوئد از سال ۱۹۶۷ در این المپیاد شرکت کرده و تا امروز نیز همواره در آن حضور داشته و مقام‌های خوبی به‌دست آورده است. یک بار هم به سال ۱۹۹۱، میزبان این رقابت‌ها بوده است.

در این جا به منظور آشنایی خوانندگان مجله، نمونه سؤال‌هایی از مسابقات ریاضی این کشور را در سال ۱۹۸۶، همراه با راه‌حل‌های آن‌ها آورده‌ایم. سطح سؤالات در مقایسه با المپیادهای کشورهای سطح اول المپیاد ریاضی (مانند شوروی، آمریکا، چین، ایران، رومانی و ویتنام) پایین است، ولی برای علاقه‌مندان به المپیادهای ریاضی و به عنوان آماده‌سازی، سؤال‌های بدی نیستند و ارزش اندیشیدن دارند.

صورت مسائل

۱. ثابت کنید برای هر مقدار $a > b > 0$، نابرابری‌های زیر برقرارند:

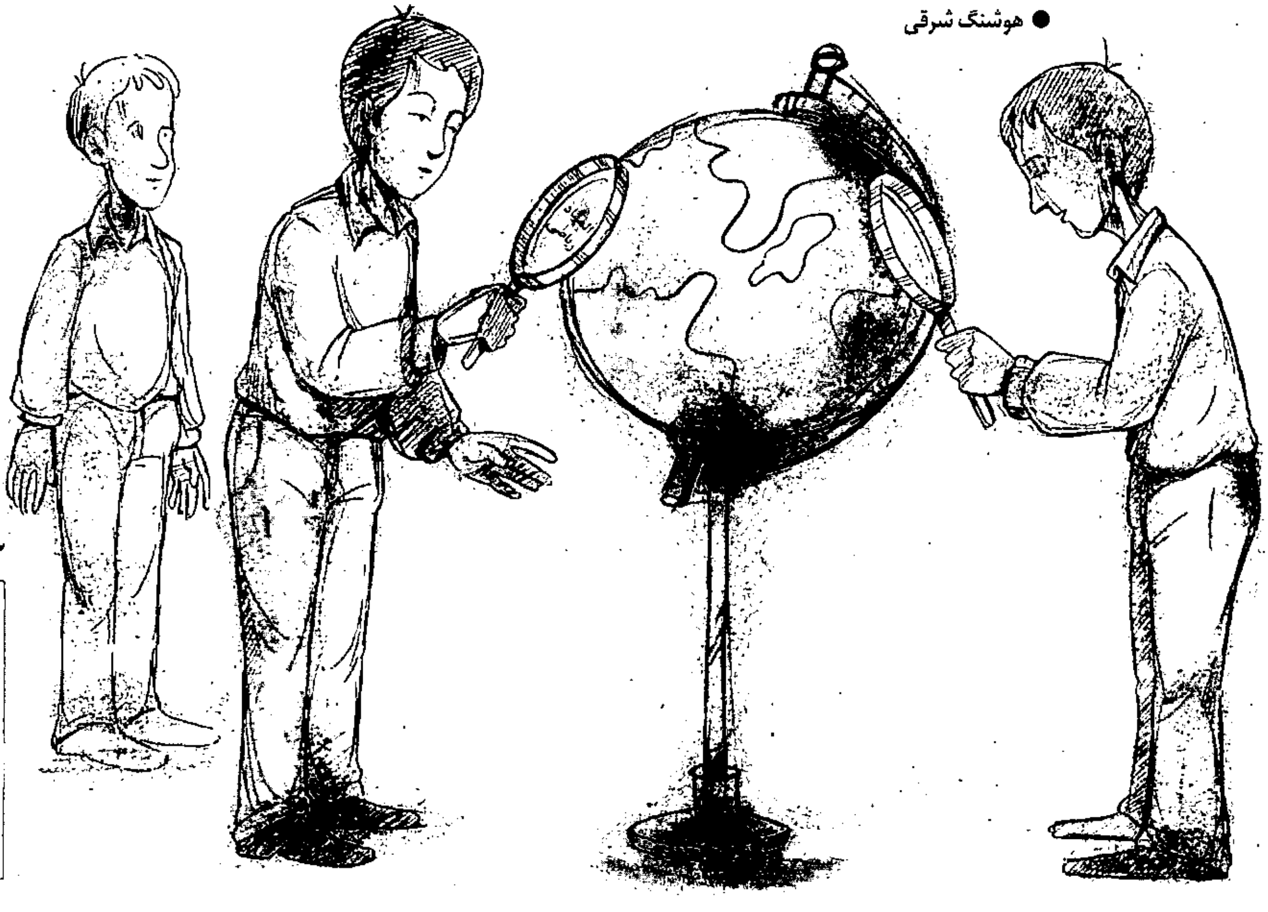
$$\frac{(a-b)^2}{8a} < \frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} < \frac{(a-b)^2}{8b}$$

۲. کوچک‌ترین عدد طبیعی را پیدا کنید که دارای این ویژگی باشد: «اگر رقم اول آن را (از سمت چپ) به آخر بریم (در عددنویسی پایه‌ی ۱۰)، عدد مفروض $\frac{7}{2}$ برابر شود.»

۳. $(a,0)$، $(0,b)$ و (c,d) را مختصات رأس‌های مثلث ABC می‌گیریم که در آن a، b، c و d عددهای مثبتی هستند. اگر o مبدأ مختصات باشد، درستی نابرابری زیر را ثابت کنید:

$$AB + BC + CA \geq 2CO$$

۴. نقطه‌های A، B و C روی محیط دایره‌ای به شعاع r، و نقطه‌ی D در درون این دایره طوری قرار گرفته‌اند که AB=BC و مثلث BCD متساوی‌الاضلاع شده است. نیم‌خط راست AD، محیط دایره را در E قطع می‌کند. ثابت کنید: DE=r.



حل مسائل

۱. اگر از روش بازگشتی استفاده کنیم، خواهیم داشت:

$$\frac{(a-b)^2}{8a}<\frac{a+b-2\sqrt{ab}}{2}<\frac{(a-b)^2}{8a}$$

$$\Rightarrow \frac{(a-b)^2}{4a}<(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2<\frac{(a-b)^2}{4b}$$

و با جای‌گذاری $\sqrt{a}-\sqrt{b}=\dfrac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$ داریم:

$$\frac{(a-b)^2}{4a}<\frac{(a-b)^2}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}<\frac{(a-b)^2}{4b}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4a}<\frac{1}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}<\frac{1}{4b}$$

$$\Rightarrow 4a>(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2>4b$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{a}>\sqrt{a}+\sqrt{b}>2\sqrt{b}$$

با توجه به فرض $b<a$، درستی نابرابری‌های فوق واضح است. (چرا؟) در ضمن، تمام مراحل نیز بازگشت پذیرند و می‌توانید با برگشت از مسیر فوق، درستی نابرابری‌ها را به‌طور هم‌زمان اثبات کنید.

۲. اگر عدد فوق را n رقمی و با ارقام a_0 و a_1 و... و a_n فرض کنیم، مسئله به‌صورت زیر مدل‌سازی می‌شود:

$$\frac{7}{2}\overline{a_n a_{n-1}\cdots a_2 a_1 a_0}=\overline{a_{n-1}a_{n-2}\cdots a_2 a_1 a_0 a_n}$$

با بسط در مبنای ده و ساده‌کردن طرفین تساوی خواهیم داشت:

$$7(10^n a_n+10^{n-1}a_{n-1}+\cdots+100a_2+10a_1+a_0)$$
$$=2(10^n a_{n-1}+10^{n-1}a_{n-2}+\cdots+10^3a_2+10^2a_1+10a_0+a_n)$$
$$\Rightarrow (7\times10^n-2)a_n=10^{n-1}a_{n-1}(20-7)+10^{n-2}(20-7)a_{n-2}$$
$$+\cdots+100a_2(20-7)+10a_1(20-7)+(20-7)a_0$$
$$=13(10^{n-1}a_{n-1}+10^{n-2}a_{n-2}+\cdots+100a_2+10a_1+a_0)$$
$$\Rightarrow (7\times10^n-2)a_n=13\overline{a_{n-1}a_{n-2}\cdots a_2a_1a_0}$$
$$\Rightarrow 13 \mid 7\times10^n-2$$

اکنون با امتحان کردن مقادیر n، نخستین مقدار n که برای آن $7\times10^n-2$ بر ۱۳ بخش‌پذیر باشد، ۵ به‌دست می‌آید:

$$7\times10^5-2=699998=13\times53846$$
$$\Rightarrow 13\times53846a_5=13a_4a_3a_2a_1a_0$$
$$\Rightarrow 53846a_5=a_4a_3a_2a_1a_0$$

و با فرض $a_5=1$ نتیجه می‌شود:

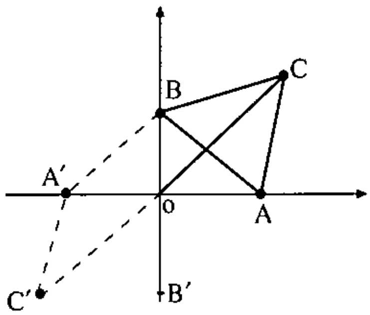
$$a_5a_4a_3a_2a_1a_0=153846$$

که با شرط مسئله نیز سازگار است:

$$538461=\frac{7}{2}\times153846$$

لذا کوچک‌ترین عدد با ویژگی فوق، عدد شش رقمی ۱۵۳۸۴۶ است.

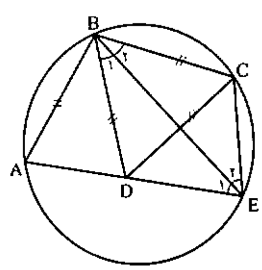
۳. قرینه‌های نقاط A، B و C نسبت به O را A'، B' و C' می‌نامیم. حال واضح است که داریم: $OC=OC'$ و $A'C'=AC$ و $A'B=AB$.



هم‌چنین، در چهار ضلعی $C'A'BC$ داریم:

$$A'C'+A'B+BC>CC'$$
$$\Rightarrow AB+BC+CA>2CO$$

۴. با توجه به شکل می‌توان نوشت:



$$AB=BC\Rightarrow \widehat{AB}=\widehat{BC}\Rightarrow \hat{E}_1=\hat{E}_2=\alpha$$

$$\begin{cases}\Delta BCE: \dfrac{BC}{\sin E_2}=\dfrac{BE}{\sin(B\hat{C}E)}\\ \Delta BDE: \dfrac{BD}{\sin E_1}=\dfrac{BE}{\sin(B\hat{D}E)}\\ BC=BD\end{cases}$$

$$\Rightarrow \sin(B\hat{C}E)=\sin(B\hat{D}E)\Rightarrow B\hat{C}E=B\hat{D}E$$
یا $B\hat{C}E+B\hat{D}E=180^\circ$

اگر داشته باشیم: $B\hat{C}E+B\hat{D}E=180^\circ$، در این صورت BCED یک چهارضلعی محاطی و دایره‌ی محیطی آن، همان دایره‌ی محیطی مثلث BCE، یعنی دایره‌ی اصلی است. در نتیجه D روی محیط دایره واقع می‌شود. یعنی AD وتری از دایره است و دایره را در نقطه‌ی دیگری قطع نمی‌کند و در این حالت مسئله جواب ندارد. بنابراین باید $B\hat{C}E=B\hat{D}E$ باشد و لذا با توجه به مجموع زوایا، خواهیم داشت:

$$\hat{B}_1=\hat{B}_2=30^\circ,\ \Delta BDE: DE=2r\sin\hat{B}_1=2r\sin30^\circ=r$$

یک مسئله با پاسخی به ظاهر صحیح!

برای دانش آموزان سال سوم ریاضی و تجربی و بالاتر

● **عنایت‌اله راستی‌زاده**
دبیر ریاضی دبیرستان‌های شیراز

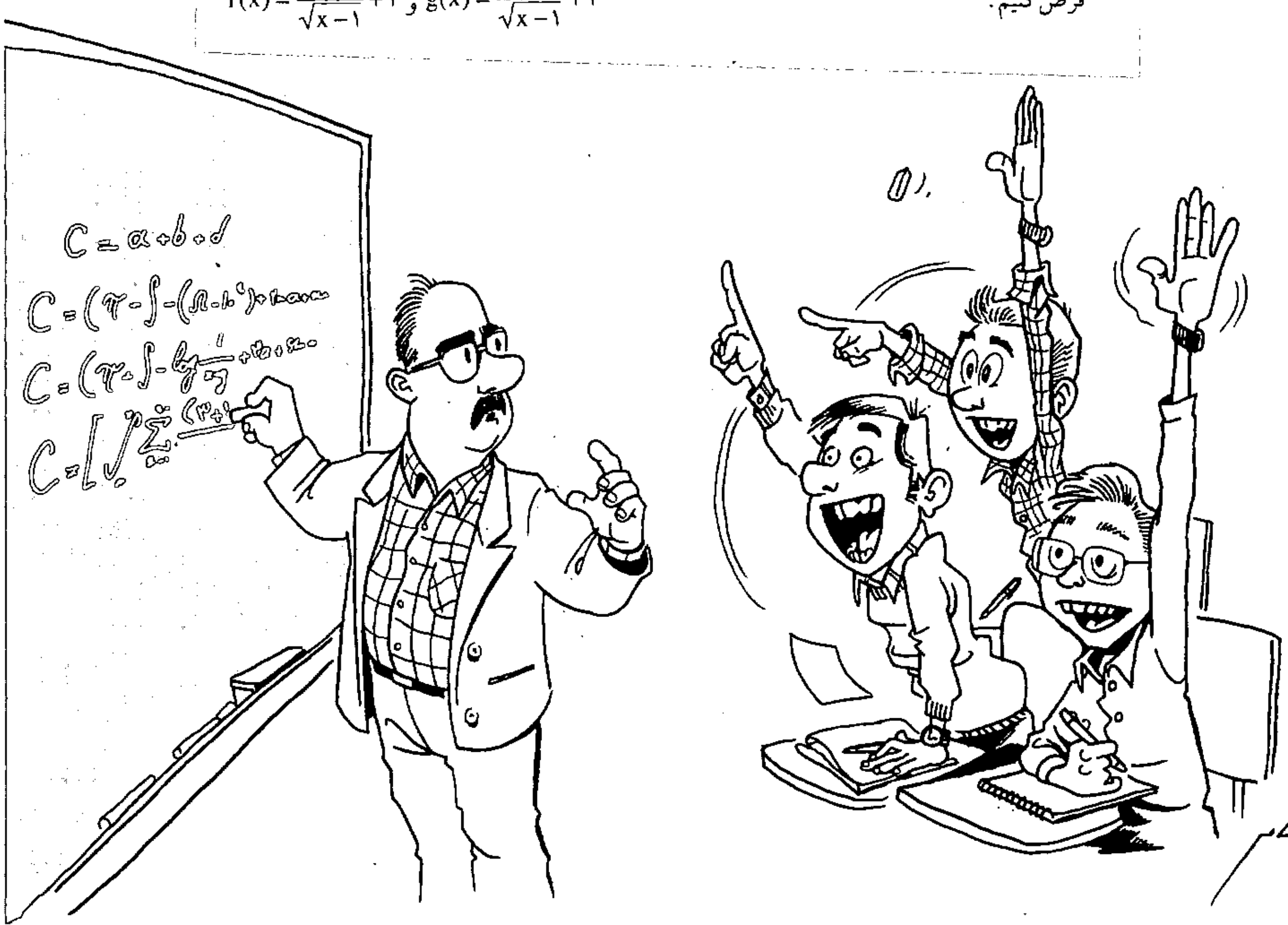
اشاره

غالباً اتفاق می‌افتد که دانش‌آموزان در پاسخ دادن به بعضی سؤالات، عجله می‌کنند و بدون توجه به تمام جوانب مسئله، پاسخ را می‌یابند، اما از آن می‌گذرند. به نمونه‌ای از این گونه مسئله‌ها توجه کنید:

مسئله: دو تابع مانند f و g مثال بزنید که هیچ‌کدام در نقطه‌ی a پیوسته نباشند، اما حاصل جمع آن‌ها در نقطه‌ی a پیوسته شود.

دانش‌آموزی برای حل این مسئله چنین نوشته است:

فرض کنیم: $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x-1}}+1$ و $g(x)=\frac{-1}{\sqrt{x-1}}+1$



دو تابع f و g در نقطه‌ی $x_0 = 1$ تعریف نشده‌اند، پس در این نقطه پیوسته نیستند. اما تابع حاصل جمع آن‌ها با ضابطه‌ی:

$$(f+g)(x) = 2$$

تابع ثابت است و همه‌جا، از جمله در نقطه‌ی $x_0 = 1$ پیوسته است!

چرا این پاسخ اشتباه است؟

اشتباه پاسخ در این‌جاست که دانش‌آموز به دامنه‌ی تعریف تابع $f+g$ توجه نکرده است! می‌دانیم، دامنه‌ی تعریف تابع $f+g$، اشتراک دامنه‌های دو تابع f و g است و چون: $D_f = D_g = (1,+\infty)$، لذا: $D_{f+g} = (1,+\infty)$.

یعنی تابع $f+g$ در نقطه‌ی $x_0 = 1$ تعریف نشده است و لذا در این نقطه پیوسته نیست.

آموزنده است که نمودار تابع f، g و $f+g$ اخیر را در یک دستگاه مختصات رسم کنید و ناپیوستگی تابع $f+g$ را در نقطه‌ی $x_0 = 1$ از روی نمودار هم مشاهده کنید!

دانش‌آموز دیگری در پاسخ به این سؤال،

$$g(x) = 1 - [x] \text{ و } f(x) = 1 + [x]$$

را در نظر گرفته است که در این صورت

$$(f+g)(x) = 2 \text{ و } D_{f+g} = R$$

f و g در نقاط صحیح پیوسته نیستند، چون در این نقاط حد ندارند. اما تابع $f+g$ در تمام نقاط صحیح پیوسته است.

یک پاسخ متفاوت اما صحیح دیگر

این پاسخ چنین است:

فرض کنیم دو تابع f و g به صورت زیر تعریف شده باشند:

$$f(x) = \begin{cases} x+2 & (x > 1) \\ x & (x \le 1) \end{cases} \text{ و } g(x) = \begin{cases} x-1 & (x > 1) \\ 2x & (x \le 1) \end{cases}$$

از آن‌جایی که:

$\lim_{x \to 1^+} f(x) = 3$ و $\lim_{x \to 1^-} f(x) = 1$، لذا f در نقطه‌ی ۱ حد ندارد و پیوسته نیست.

هم‌چنین:

$\lim_{x \to 1^+} g(x) = 0$ و $\lim_{x \to 1^-} g(x) = 2$ درنتیجه g نیز در نقطه‌ی ۱ حد ندارد و پیوسته نیست.

اما تابع حاصل جمع آن‌ها که به صورت زیر تعریف شده است:

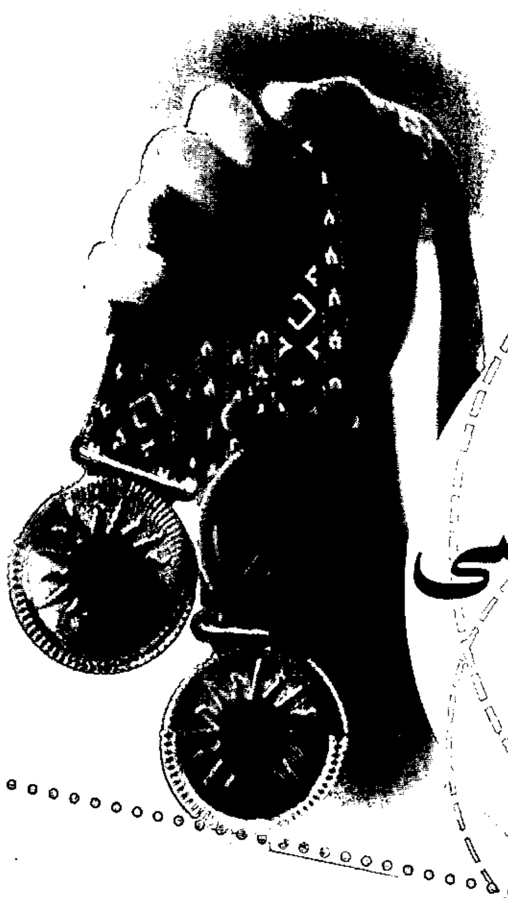
$$(f+g)(x) = \begin{cases} 2x+1 & (x > 1) \\ 3x & (x \le 1) \end{cases}$$

در نقطه‌ی ۱ دارای حد چپ و راست برابر با ۳ است و:

$$(f+g)(x) = 3$$

بنابراین در این نقطه پیوسته است.

آموزنده است که نمودار توابع f و g و $f+g$ اخیر را در یک دستگاه مختصات رسم کنید و پیوستگی تابع $f+g$ را در نقطه‌ی $x_0 = 1$ از روی نمودار هم مشاهده کنید!



با راهیان المپیادهای ریاضی (۱۴)

● غلامرضا یاسی‌پور

درباره‌ی یک اتحاد جبری

این بخش با مسائلی سر و کار دارد که می‌توانند با استفاده از اتحاد جبری زیر حل شوند:

$$x^4+\frac{1}{4}y^4=(x^2+xy+\frac{1}{2}y^2)(x^2-xy+\frac{1}{2}y^2)$$

در این مورد، دو مثال به‌دست می‌دهیم.

الف) مجموع زیر را محاسبه کنید:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{4k}{4k^4+1}$$

با استفاده از اتحاد فوق، به دست می‌آوریم:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{4k}{4k^4+1}=\sum_{k=1}^{n}\frac{(2k^2+2k+1)-(2k^2-2k+1)}{(2k^2+2k+1)(2k^2-2k+1)}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}(\frac{1}{2k^2-2k+1}-\frac{1}{2(k+1)^2-2(k+1)+1})$$

$$=1-\frac{1}{2n^2+2n+1}$$

و به این ترتیب، کار به سامان می‌رسد.

ب) با مفروض بودن ماتریس $n\times n$، A با ویژگی $A^3=0$، ثابت کنید ماتریس

$$M=\frac{1}{2}A^2+A+I_n$$

وارون‌پذیر است.

در واقع، وارون این ماتریس عبارت است از:

$$\frac{1}{2}A^2-A+I_n$$

زیرا حاصل ضرب دو ماتریس، $\frac{1}{4}A^4+I_n$ را می‌دهد که برابر اتحاد مورد بحث است. البته در این حالت می‌توان نتیجه را از این واقعیت استخراج کرد که ویژه مقدارهای M ناصفرند و این خود پیامد مستقیمی از «قضیه‌ی نگاشت طیفی»[۵] است.

در ادامه مثال‌های بیشتری از کاربرد این اتحاد به دست می‌دهیم.

۱. ثابت کنید، به ازای هر عدد صحیح $n>2$، عدد $2^{2^n-2}+1$ اول نیست.

۲. ثابت کنید هر دنباله‌ی صادق در بازگشتی

$$x_{n+1}+x_{n-1}=\sqrt{2}x_n$$

دوره‌ای است.

۳. این مجموع را محاسبه کنید:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2-\frac{1}{2}}{k^4+\frac{1}{4}}$$

۴ . محاسبه کنید:

$$\frac{(1^4+\frac{1}{4})(3^4+\frac{1}{4})\cdots((2n-1)^4+\frac{1}{4})}{(2^4+\frac{1}{4})(4^4+\frac{1}{4})\cdots((2n)^4+\frac{1}{4})}$$

۵ . نشان دهید، به ازای هر n، بی‌نهایت عدد a چنان موجود است که عدد n^4+a اول نیست.

۶ . نشان دهید n^4+4^n اول است، اگر و تنها اگر: $n=1$.

۷ . چندجمله‌ای

$$P(X)=X^4+6X^2-4X+1$$

را در نظر می‌گیریم. ثابت کنید $P(X^4)$ را می‌توان به صورت دو چندجمله‌ای با ضرایب صحیح و درجه‌ی هر یک بزرگ‌تر از ۱ نوشت.

۸ . ثابت کنید، به ازای هر عدد صحیح n بزرگ‌تر از ۱، عدد $n^{12}+64$ را می‌توان به صورت حاصل ضرب چهار عدد صحیح متمایز بزرگ‌تر از ۱ نوشت.

۹ . فرض می‌کنیم m و n اعدادی صحیح و مثبت باشند. ثابت کنید هرگاه m زوج باشد، آن‌گاه

$$\sum_{k=0}^{m}(-4)^k n^{4(m-k)}$$

اول نیست.

حل مسئله‌ها

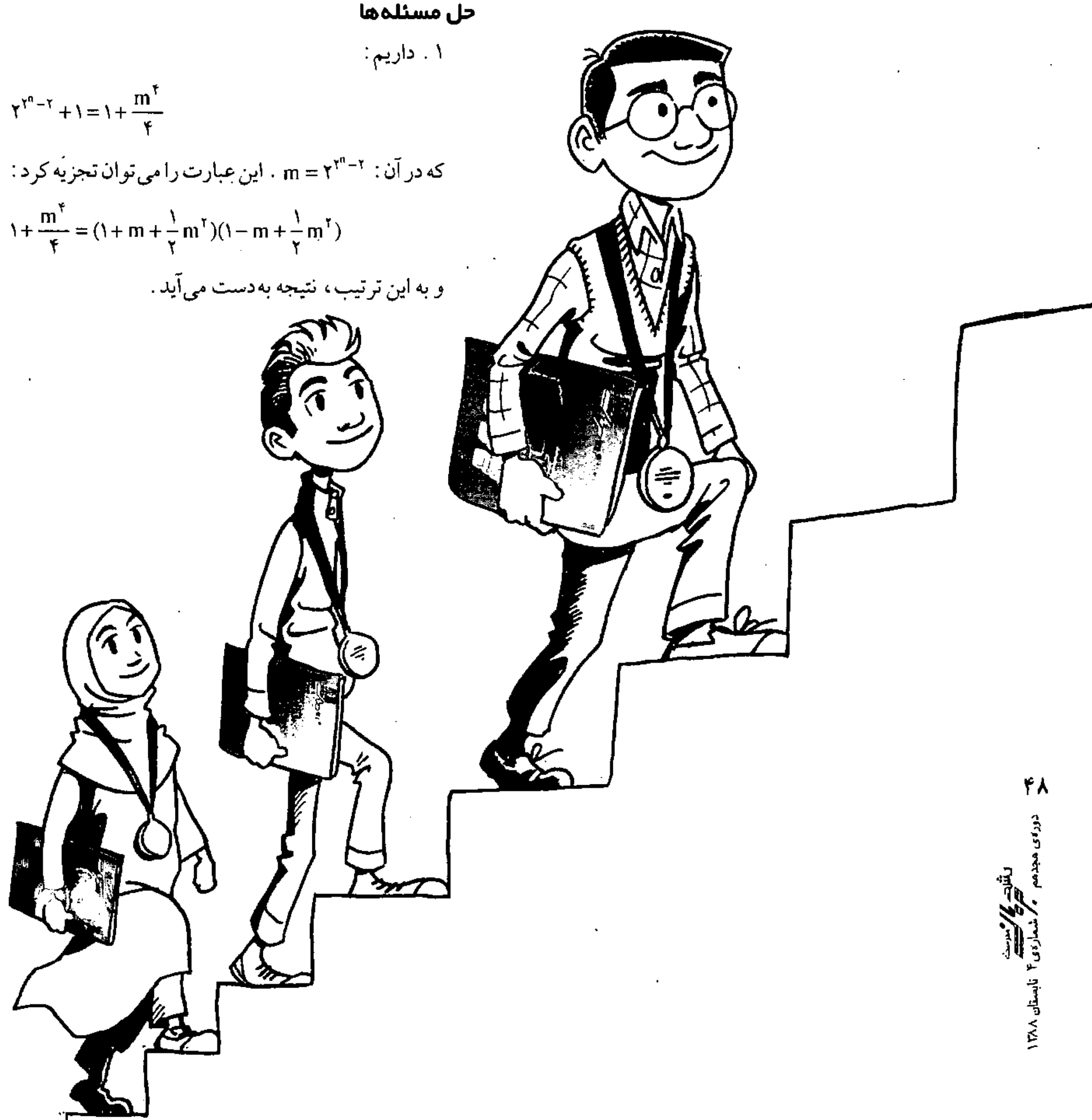
۱ . داریم:

$$2^{2^n-2}+1=1+\frac{m^4}{4}$$

که در آن: $m=2^{2^{n-2}}$. این عبارت را می‌توان تجزیه کرد:

$$1+\frac{m^4}{4}=(1+m+\frac{1}{2}m^2)(1-m+\frac{1}{2}m^2)$$

و به این ترتیب، نتیجه به دست می‌آید.



۲. توجه داشته باشید که تجزیه‌ی x^4+1 می‌دهد:

$$X^4+1=4((X/\sqrt{2})^4+\frac{1}{4})$$

$$=4((X/\sqrt{2})^2+X/\sqrt{2}+\frac{1}{2})((X/\sqrt{2})^2-X/\sqrt{2}+\frac{1}{2})$$

$$=(X^2-\sqrt{2}X+1)(X^2+\sqrt{2}X+1)$$

که نشان می‌دهد، α ، β و ریشه‌های معادله‌ی مشخصه‌ی دنباله، یعنی:

$$X^2-\sqrt{2}X+1=0$$

ریشه‌های X^4+1 هستند. بنابراین ریشه‌های هشتم واحدند. جمله‌ی عمومی دنباله به‌صورت

$$x_n=a\alpha^n+b\beta^n$$

به‌ازای a و b ای است، و درنتیجه دنباله‌ی متناوب با دوره‌ی تناوب ۸ است.

(kvant (Quantum))

۳. از آن‌جا که:

$$k^4+\frac{1}{4}=(k^2-k+\frac{1}{2})(k^2+k+\frac{1}{2})$$

داریم:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2-\frac{1}{2}}{k^4+\frac{1}{4}}=\sum_{k=1}^{n}(\frac{k-\frac{1}{2}}{k^2-k+\frac{1}{2}}-\frac{k+\frac{1}{2}}{k^2+k+\frac{1}{2}})$$

$$=\sum_{k=1}^{n}(\frac{k-\frac{1}{2}}{k^2-k+\frac{1}{2}}-\frac{(k+1)-\frac{1}{2}}{(k+1)^2-(k+1)+\frac{1}{2}})$$

که مجموعی ادغامی، و برابر است با:

$$1-(2n+1)/(2n^2+2n+1)$$

(T. Andreescu)

۴. تجزیه‌ی زیر را به‌کار می‌بریم:

$$m^4+\frac{1}{4}=(m^2+m+\frac{1}{2})(m^2-m+\frac{1}{2})$$

در این صورت، حاصل‌ضرب می‌شود:

$$\prod_{k=1}^{n}\frac{(2k-1)^4+\frac{1}{4}}{(2k)^4+\frac{1}{4}}$$

$$=\prod_{k=1}^{n}\frac{((2k-1)^2+(2k-1)+\frac{1}{2})((2k-1)^2-(2k-1)+\frac{1}{2})}{((2k)^2+2k+\frac{1}{2})((2k)^2+2k+\frac{1}{2})}$$

از آن‌جا که:

$$m^2-m+\frac{1}{2}=(m-1)^2+(m-1)+\frac{1}{2}$$

عامل‌های واقع در صورت، با عوامل واقع در مخرج را، به استثنای $1^2-1+\frac{1}{2}$ در صورت و $(2n)^2+2n+\frac{1}{2}$ در مخرج، حذف می‌کنند. درنتیجه، پاسخ عبارت است از:

$$1/(8n^2+4n+1)$$

۵. اگر $a=4k^4$ را، با $k>1$ انتخاب کنیم، آن‌گاه:

$$n^4+4k^4=(n^2+2nk+2k^2)(n^2-2nk+2k^2)$$

از آن‌جا که:

$$n^2+2nk+2k^2>k>1$$

و:

$$n^2-2nk+2k^2=(n-k)^2+k^2>k^2>1$$

هیچ‌یک از اعداد n^4+4k^4 اول نیست.

(یازدهمین المپیاد بین‌المللی ریاضی، ۱۹۶۹)

۶. اگر n زوج باشد، عدد به‌طور واضح بر ۲ بخش‌پذیر است. اگر n فرد، مثلاً $n=2k+1$ باشد، آن‌گاه با به کار بردن اتحاد، به‌ازای $X=n$ و $Y=2^{k+1}$ به‌دست می‌آوریم:

$$n^4+4^n=n^4+\frac{1}{4}4^{2k+2}$$

$$=(n^2+2^{k+1}n+2^{2k+1})(n^2-2^{k+1}n+2^{2k+1})$$

اگر $n>1$ باشد، هر دو عامل بزرگ‌تر از ۱ هستند که اثبات می‌کند در این حالت، عدد مرکب است.

البته هنگامی که $n=1$ باشد، داریم: $4^n+n^4=5$ که اول است.

۷. داریم:

$$P(X^4)=X^{16}+6X^8-4X^4+1=(X^4-1)^4+4(X^3)^4$$

این عبارت را می‌توان به‌صورت زیر تجزیه کرد:

$$\left[(X^4-1)^2+2(X^4-1)X^3+2(X^3)^2\right]\times$$
$$\left[(X^4-1)^2-2(X^4-1)X^3+2(X^3)^2\right]$$

و به این ترتیب، کار تمام است.

۸. با استفاده از اتحاد، $n^{12}+64$ را به‌صورت زیر تجزیه می‌کنیم:

$$(n^6-4n^3+8)(n^6+4n^3+8)$$

از طرف دیگر، $64 + n^{12}$ مجموع دو مکعب است؛ درنتیجه به این صورت تجزیه می‌شود:

$$(n^4+4)(n^8-4n^4+16)$$

با استفاده از همین اتحاد:

$$n^4+4=(n^2-2n+2)(n^2+2n+2)$$

چندجمله‌ای‌های $n^2 - 2n + 2$ و $n^2 + 2n + 2$ روی حلقه‌ی چندجمله‌ای های با ضرایب صحیح تحویل‌ناپذیرند. درنتیجه، در ترتیبی چندجمله‌ای‌های $n^6 - 4n^3 + 8$ و $n^6 + 4n^3 + 8$ را می‌شمارند. بررسی حالات، دو مورد زیر را به‌دست می‌دهد:

$$n^6+4n^3+8=(n^2-2n+2)(n^4+2n^3+2n^2+4n+4)$$

و:

$$n^6-4n^3+8=(n^2+2n+2)(n^4-2n^3+2n^2-4n+4)$$

به این ترتیب:

$$n^{12}+64=(n^2-2n+2)(n^2+2n+2)$$
$$(n^4-2n^3+2n^2-4n+4)\times(n^4+2n^3+2n^2+4n+4)$$

چهار عامل موجود، در همین ترتیب، اکیداً صعودی و بنابراین متمایزند.

(T. Andreescu)

۹. با مجموع‌یابی به صورت تصاعد هندسی به‌دست می‌آوریم:

$$\sum_{k=0}^{m}(-4)^k n^{4(m-k)} = n^{4m}\sum_{k=0}^{m}(-\frac{4}{n})^k = \frac{(n^4)^{m+1}+4^{m+1}}{n^4+4}$$

$$=\frac{(n^{m+1})^4+4(2^{m/2})^4}{n^4+4}$$

صورت را با استفاده از اتحاد بحث شده در این بخش، می‌توان به صورت حاصل‌ضرب‌های زیر نوشت:

$$n^{2(m+1)}+2^{m/2+1}n^{m+1}+2^{m+1}$$

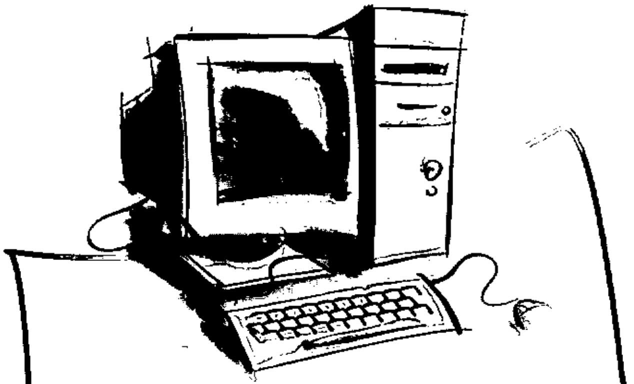
و:

$$n^{2(m+1)}-2^{m/2+1}n^{m+1}+2^{m+1}$$

از آن‌جا که $m \geq 2$ است، مخرج از هریک از این دو عامل کوچک‌تر است. بنابراین پس از حذف‌های ممکن عدد باقی‌مانده هنوز حاصل‌ضرب دو عدد بزرگ‌تر از یک است (یکی از عامل اول و یکی از عامل دوم) و مسئله حل می‌شود.

(T. Andreescu)

1. spectral mapping theorem



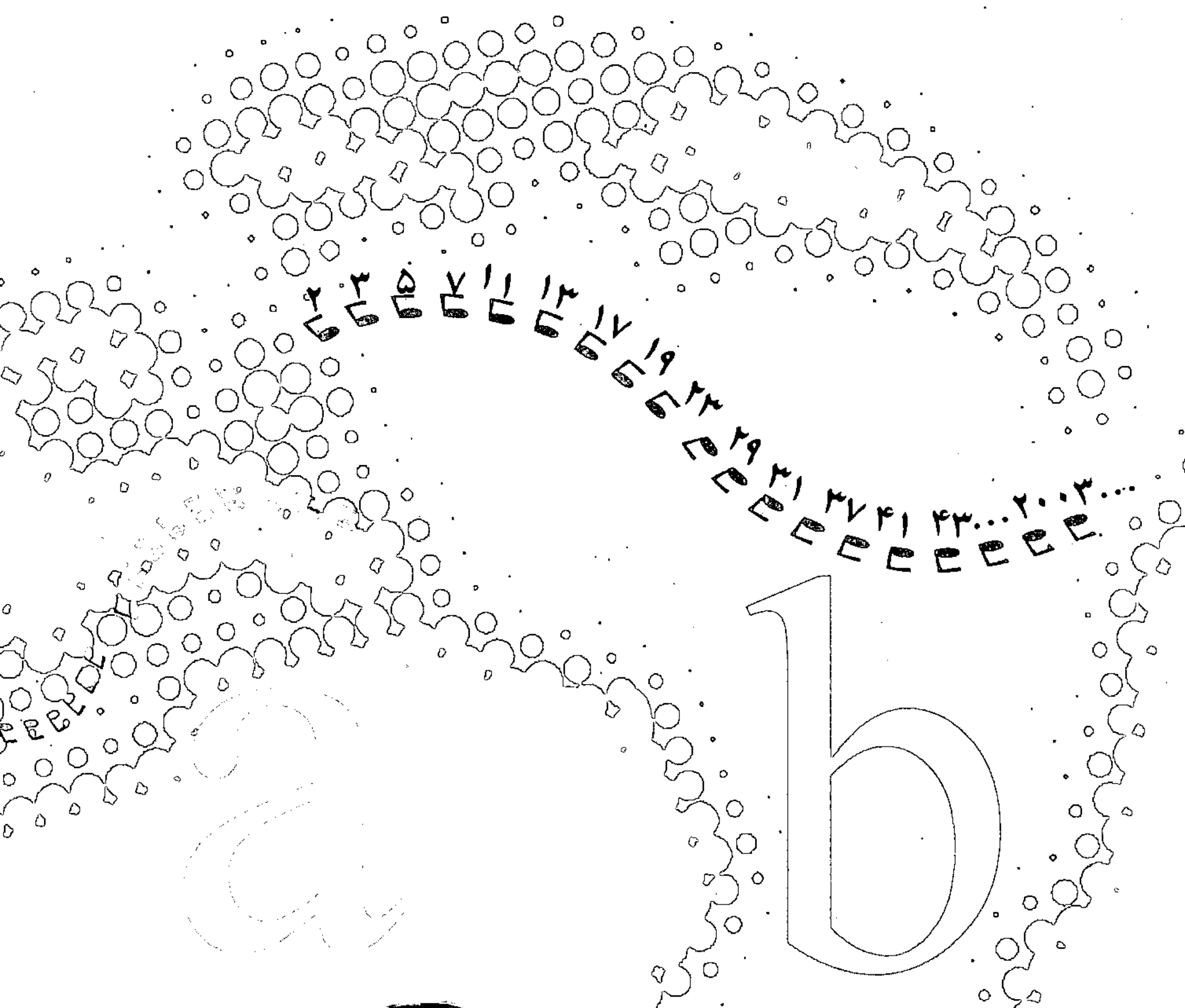
ادامه‌ی مطالب صفحه ۱۴

- حساب دیفرانسیل و برنامه‌ریزی خطی (Calculus & Linear Programming)

■ عنوان‌های ریاضیات (Mathematical Topics)
- عبارات جبری ۱ (Algebraic Expressions 1)
- عبارات جبری ۲ (Algebraic Expressions 2)
- مساحت و حجم (Area and Volume)
- معادلات ۱ (Equations 1)
- معادلات ۲ (Equations 2)
- معادلات ۳ (Equations 3)
- معادلات ۴ (Equations 4)
- مسائل توضیحی۱ (Word Problems 1)
- مسائل توضیحی۲ (Word Problems 2)
- دنباله‌ها (Sequences)
- مثلثات ۱ (Trigonometry 1)
- مثلثات ۲ (Trigonometry 2)
- هندسه مختصاتی (Coordinate Geometry)
- آنالیز ۱ مشتق‌ها (Analysis 1 Dervatives)
- آنالیز ۲ مشتق‌ها (Analysis 2 Dervatives)
- آنالیز ۳ انتگرال‌ها (Analysis 3 Integrals)
- برنامه‌ریزی خطی (Linear Programming)
- احتمال ۱ (Probability 1)
- احتمال ۲ (Probability 2)

۱. FAQ مخفف Frequently Asked Questions می‌باشد.

۲. منظور از مسائل توضیحی(Word Problems)، مسائلی است که صورت مسأله به شکل متن و بدون فرمول ریاضی ارائه گردیده است و خواننده برای حل این نمونه مسائل باید معادله‌های مناسب و متناسب با صورت مسأله را بنویسد، سپس آن را حل نماید.



هم‌نهشتی و کاربردهای آن
قسمت ۶

سید محمدرضا هاشمی موسوی

اشاره

در قسمت قبل، به برخی از کاربردهای هم‌نهشتی اشاره شد. در این قسمت نیز به ادامه‌ی مطلب با عنوان قضیه‌ی اویلر، تعمیمی از قضیه‌ی کوچک فرما و کاربردهای آن در حل مسئله‌ها و معادله‌های سیاله‌ی خطی و درجه‌ی nام و تعیین باقی‌مانده‌ی تقسیم و دیگر مسئله‌های خلاق می‌پردازیم. در آخر مبحث، تمرین‌هایی هدف‌دار طراحی شده‌اند که با مشاهده‌ی مثال‌های متن درس می‌توانید، آن‌ها را حل کنید. برای فراگیری بهتر مطالب، بکوشید مثال‌هایی

نظیر و یا در تعمیم مسئله‌ها طراحی و حل کنید.

قضیه‌ی اویلر و کاربردهای آن

قضیه‌ی اویلر که می‌توان آن را به‌عنوان یک قضیه‌ی مستقل معرفی کرد، در واقع تعمیمی از قضیه‌ی فرماست. ابتدا به عنوان این قضیه‌ی بسیار مهم و اثبات آن می‌پردازیم. توجه به این نکته لازم است که فرما قضیه‌ی کوچک خود را حدود ۸۰سال قبل از اویلر بیان کرد.

قضیه‌ی اویلر: اگر m عددی طبیعی و a عددی صحیح باشد و $(m,a)=1$، آن‌گاه: $a^{\varphi(m)} \overset{m}{\equiv} 1$

تبصره‌ی ۱: تابع φ را تابع حسابی اویلر می‌نامند و این یک تابع ضربی است که برای $m>1$ در واقع برابر تعداد اعداد طبیعی و کوچک‌تر از m است که نسبت به m اول‌اند و به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$m = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdots p_n$$

$$\varphi(m) = m(1-\frac{1}{p_1})(1-\frac{1}{p_2})(1-\frac{1}{p_3})\cdots(1-\frac{1}{p_n})$$

در این رابطه، p_1، p_2، ... و p_n اعداد اول هستند که m به حاصل‌ضرب n عدد اول تجزیه شده است. بدیهی است، اگر m برابر عددی اول باشد:

$$m = p:\ \varphi(m) = \varphi(p) = p(1-\frac{1}{p}) = p-1$$

برای مثال، $\varphi(1)$، $\varphi(2)$، $\varphi(6)$، $\varphi(60)$ و $\varphi(2003)$ را تعیین می‌کنیم:

$$\varphi(1)=1,\ \ \varphi(2)=1,\ \ \varphi(6)=6(1-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{3})=2$$

$$\varphi(60)=60(1-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{3})(1-\frac{1}{5})=16,$$

$$\varphi(2003)=2003-1=2002$$

(عدد $p=2003$ اول است و $60=2^2\times3\times5$)

تبصره‌ی ۲. چون φ یک تابع ضربی است، از تعریف $\varphi(m)$ داریم:

$$1)\ \ m,n\in \mathbb{N},\ (m,n)=d:\varphi(mn)=\varphi(m).\varphi(n)\times\frac{d}{\varphi(d)}\ \ (*)$$

(d: بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک دو عدد طبیعی m و n)

اگر m و n نسبت به هم اول باشند، یعنی

$$\varphi(mn)=\varphi(m).\varphi(n)\ :\ (m,n)=1$$

$$m=1,\ n=p(\ \ );\ (p,1)=1$$

$$\varphi(1\times p)=\varphi(1).\varphi(p)=1.\varphi(p)=p-1$$

$$2)\ \varphi(10^n)=10^n(1-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{5})=10^{n-1}\times4$$

$$3)\ \varphi(2n)^{*}=\begin{cases}2\varphi(n) & n \text{ زوج}\\ \varphi(n) & n \text{ فرد}\end{cases}$$

$$4)\ \varphi(3n)\overset{(*)}{=}\begin{cases}3\varphi(n) & 3|n\\ 2\varphi(n) & 3\nmid n\end{cases}$$

$$5)\ n=2^k:\ \varphi(n)=\varphi(2^k)=2^k(1-\frac{1}{2})=\frac{2^k}{2}=\frac{n}{2}$$

$$6)\ n\in\mathbb{N}:\ \varphi(n^2)=\varphi(n,n)\overset{(*)}{=}\varphi(n).\varphi(n).\frac{(n,n)}{\varphi(n,n)}=n\varphi(n)$$

$$7)\ (a,b)=d,\ [a,b]=c:\ \varphi(a)\varphi(b)=\varphi(c)\varphi(d)$$

$$(d=1;\ c=ab:\ \varphi(ab)=\varphi(a).\varphi(b))$$

$$8)\ \sum_{i=1}^{k}\varphi(d_i)=m(d_1,d_2,\ldots,d_k)\ :m \text{ شمارنده‌های مثبت}$$

اثبات قضیه‌ی اویلر

اگر $(a,m)=1$ و فرض کنیم x_1، x_2، ... و x_n که در آن $n=\varphi(m)$، دسته‌ی ساده‌ی باقی‌مانده، به پیمانه‌ی m باشند، واضح است که عددهای ax_1، ax_2، ... و ax_n نیز دسته‌ی باقی‌مانده‌ها، به پیمانه‌ی m هستند؛ زیرا:

$$(a,m)=1,\ \ n=\varphi(m):\ \ ax_1\overset{m}{\equiv}x_1$$

$$ax_2\overset{m}{\equiv}x_2$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$ax_n\overset{m}{\equiv}x_n$$

از ضرب هم‌نهشتی‌ها:

$$a^n x_1.x_2.\dots x_n \overset{m}{\equiv} x_1.x_2.\dots x_n$$

چون $(m, x_1x_2\dots x_n)=1$، پس از اختصار لازم خواهیم داشت:

$$a^n \overset{m}{\equiv} 1\ ;\ a^{\varphi(m)} \overset{m}{\equiv} 1$$

بدیهی است، اگر m عدد اولی مثل p باشد، قضیه‌ی اویلر به حالت خاص، یعنی قضیه‌ی کوچک‌فرما تبدیل می‌شود:

$m=p:\ \varphi(p)=p-1\ ;\ a^{p-1}\overset{p}{\equiv}1$ (قضیه‌ی فرما)

تذکر: در قسمت‌های قبل ثابت شد، قضیه‌ی لایبنیتز حالت خاصی از قضیه‌ی ویلسن و قضیه‌ی ویلسن نیز نتیجه‌ای از قضیه‌ی کوچک‌فرماست. بنابراین، در این جا ثابت می‌شود، از قضیه‌ی اویلر، قضیه‌های لایبنیتز، ویلسن و فرما نتیجه خواهد شد:

(قضیه‌ی ویلسن) $(p-1)!\overset{p}{\equiv}-1\ ,\ (p-2)!\overset{p}{\equiv}1$ (قضیه‌ی لایبنیتز)

هم‌چنین می‌توان ثابت کرد، قضایای فرما و ویلسن جمعاً با این حکم معادل‌اند که به ازای هر عدد اول p و هر عدد صحیح a، عدد p عبارت عددی $M = a^p + (p-1)!a$ را می‌شمارد:

$P|M$

مثال: باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد 7^{83} بر ۳۰ را بیابید.

حل: با توجه به قضیه‌ی اویلر و برابری $30=2\times3\times5$، می‌توان نوشت:

$$7^{\varphi(30)}\overset{30}{\equiv}1\ ;\ \varphi(30)=30(1-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{3})(1-\frac{1}{5})=8\ ;$$

$$7^8\overset{30}{\equiv}1\ ;\ 7^{80}\overset{30}{\equiv}1\ ;\ 7^{83}\overset{30}{\equiv}7^3=7(7^2)\overset{30}{\equiv}7(19)\overset{30}{\equiv}13$$

مثال: باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد $N=87\times47^{2008}$ بر ۱۲ را بیابید.

حل: $(47,12)=1\ ,\ 47^{\varphi(12)}\overset{12}{\equiv}1\ ;\ 47^4\overset{12}{\equiv}1\ ;\ (47^4)^{502}\overset{12}{\equiv}1$

$47^{2008}\overset{12}{\equiv}1\ ;\ 87\overset{12}{\equiv}3\ ;\ 87\times47^{2008}\overset{12}{\equiv}3$ (باقی‌مانده‌ی تقسیم)

$(\varphi(12)=\varphi(2^2\times3)=12(1-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{3})=4)$

مثال: تعداد اعداد طبیعی کوچک‌تر از ۳۹۰ را که نسبت به ۶۰ و ۳۶ اول‌اند تعیین کنید.

حل:

$390=2\times3\times5\times13\ ,\ (a,60)=1\ ;\ (a,2^2\times3\times5)=1$ (1)

$(a,36)=1\ ;\ (a,2^2\times3^2)=1$ (2) $\xrightarrow{(2),(1)}(a,2\times3\times5)=1$

جواب مسئله $=390(1-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{3})(1-\frac{1}{5})=390\times\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{4}{5}=104$

۱۰۴ عدد طبیعی وجود دارد که نسبت به دو عدد ۳۶ و ۶۰ اول‌اند.

مثال: دو رقم سمت راست عدد N را بیابید:

$$N=3^{1367}\times2008$$

حل:

$(3,100)=1\ ,\ \varphi(100)=\varphi(10^2)=10^{2-1}\times4=40$

با توجه به قضیه‌ی اویلر:

$$3^{\varphi(100)}\overset{100}{\equiv}1\ ;\ 3^{40}\overset{100}{\equiv}1\ ;\ (3^{40})^{34}\overset{100}{\equiv}1\ ;\ 3^{1360}\overset{100}{\equiv}1$$

$$3^{1360}\times3^7\overset{100}{\equiv}3^7=2187\overset{100}{\equiv}87\ ;\ 2008\overset{100}{\equiv}8$$

$$N=3^{1367}\times2008\overset{100}{\equiv}87\times8=696\overset{100}{\equiv}96$$

(دو رقم سمت راست N)

مثال: اگر $(m,n)=1$، نشان دهید:

$$m^{\varphi(n)}+n^{\varphi(m)}\overset{mn}{\equiv}1$$

حل: با توجه به قضیه‌ی اویلر می‌توان نوشت:

$(m,n)=1\ ;\ m^{\varphi(n)}\overset{n}{\equiv}1$ (1) $,\ n^{\varphi(m)}\overset{m}{\equiv}1$ (2)

از طرفی، هم‌نهشتی‌های زیر بدیهی است:

$m^{\varphi(n)}\overset{m}{\equiv}0$ (3) $,\ n^{\varphi(m)}\overset{n}{\equiv}0$ (4)

از جمع هم‌نهشتی‌ها

$(1)+(4):\ m^{\varphi(n)}+n^{\varphi(m)}\overset{n}{\equiv}1$ (5),

$(2)+(3):\ n^{\varphi(m)}+m^{\varphi(n)}\overset{m}{\equiv}1$ (6)

از جمع ۵ و ۶ هم‌نهشتی مورد نظر حاصل می‌شود:

$(5)+(6):\ m^{\varphi(n)}+n^{\varphi(m)}\overset{mn}{\equiv}1$

مثال: باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد k را بر ۹۶۰ بیابید:

$$k=25^{48}+168^{20}$$

حل: با توجه به برابری‌های $168=2^3\times3\times7$ و $25=5^2$ و قضیه‌ی اویلر و مثال قبل:

$$25^{\varphi(168)} + 168^{\varphi(25)} = 25^{48} + 168^{20} \overset{20\times 48}{\equiv} 1 \; ;$$

$k \overset{960}{\equiv} 1$ (باقی‌مانده‌ی تقسیم)

مثال: نشان دهید اگر $(m,5)=(n,5)=1$ ، آن‌گاه:

$$25 | (m^{20} - n^{20})$$

حل: با توجه به برابری $5^2 = 25$ و قضیه‌ی اویلر می‌توان نوشت:

$$(m,5)=1 \; ; \; (m,25)=1 : \; m^{\varphi(25)} \overset{25}{\equiv} 1$$

$$\varphi(25) = 25(1-\frac{1}{5}) = 20$$

$$m^{20} \overset{25}{\equiv} 1 \; , \; (n,25)=1 \; ; \; n^{\varphi(25)} \overset{25}{\equiv} 1 \; ; \; n^{20} \overset{25}{\equiv} 1$$

بنابراین:

$$m^{20} - n^{20} \overset{25}{\equiv} 0 \; ; \; 25 | m^{20} - n^{20}$$

مثال: اگر k عددی صحیح باشد، باقی‌مانده‌ی تقسیم k^{54} بر ۸۱ را بیابید.

حل: با توجه به برابری $3^4 = 81$ و قضیه‌ی اویلر:

$$\varphi(81) = 81(1-\frac{1}{3}) = 54 \; ; \; (3,k)=1 \text{ یا } 3|k$$

$$(3^4,k)=1 \; ; \; k^{\varphi(81)} \overset{81}{\equiv} 1 \; ; \; k^{54} \overset{81}{\equiv} 1 \quad (3,k)=1$$

بدیهی است که در حالت $3|k$ یا $3^4|k^4$:

$$3^4 | k^{54} \; ; \; k^{54} \overset{81}{\equiv} 0$$

مثال: نشان دهید اگر $(10,m)=1$ ، آن‌گاه سه رقم سمت راست m و m^{101} با هم برابرند.

حل: برای اثبات حکم، باید نشان دهیم: $m^{101} \overset{1000}{\equiv} m$

با توجه به برابری $8 \times 125 = 1000$ و قضیه‌ی اویلر، می‌توان نوشت:

$$\varphi(8) = \varphi(2^3) = 8(1-\frac{1}{2}) = 4 \; , \; \varphi(125) = \varphi(5^3)$$

$$= 125(1-\frac{1}{5}) = 100$$

$$m^{\varphi(125)} \overset{125}{\equiv} 1 \; ; \; m^{100} \overset{125}{\equiv} 1 \quad (1) \; , \; \varphi(8)|\varphi(125) \; ; \; m^{100} \overset{8}{\equiv} 1 \quad (2)$$

از روابط ۱ و ۲ خواهیم داشت:

$$m^{100} \overset{8\times 125}{\equiv} 1 \; ; \; m^{100} \overset{1000}{\equiv} 1 \; ; \; m^{101} \overset{1000}{\equiv} m$$

مثال: دو رقم سمت راست عدد N را بیابید.

$$N = 1388 \times 7^{3001}$$

حل: با توجه به قضیه‌ی اویلر:

$$\varphi(100) = \varphi(2^2 \times 5^2) = 100(1-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{5}) = 40$$

$$(7,100)=1 \; ; \; 7^{\varphi(100)} \overset{100}{\equiv} 1 \; ; \; 7^{40} \overset{100}{\equiv} 1 \; ; \; (7^{40})^{75} \overset{100}{\equiv} 1$$

$$7^{3000} \times 7 \overset{100}{\equiv} 7 \; ; \; N = 1388 \times 7^{3001} \overset{100}{\equiv} 1388 \times 7 = 9716 \; ;$$

$$N \overset{100}{\equiv} 9716 \overset{100}{\equiv} 16$$

(دو رقم سمت راست عدد N برابر ۱۶ است)

مثال: معادله‌ی سیاله‌ی خطی عمومی $ax+by=c$ را با استفاده از قضیه‌ی اویلر حل کنید.

حل: ابتدا معادله را به یک معادله‌ی هم‌نهشتی تحویل می‌دهیم:

$$ax + by = c \; ; \; ax \overset{b}{\equiv} c \text{ یا } by \overset{a}{\equiv} c$$

می‌دانیم شرط جواب برای معادله‌ی سیاله‌ی مورد نظر $(a,b)|c$ است. پس برای حل معادله‌ی مورد نظر، همیشه باید داشته باشیم $(a,b)=1$ که با این فرض خواهیم داشت:

$$(a,b)=1 \; ; \; x \overset{b}{\equiv} ca^{\varphi(b)-1} \text{ یا } y \overset{a}{\equiv} cb^{\varphi(a)-1}$$

مثال: معادله‌ی سیاله‌ی $3x + 4y = 19$ را حل کنید.

حل: با توجه به $(3,4)=1$ و قضیه‌ی اویلر می‌توان نوشت:

$$\varphi(4) = 4(1-\frac{1}{2}) = 2 \; ; \; x \overset{4}{\equiv} 19 \times 3^{\varphi(4)-1} = 19 \times 3 = 57 \overset{4}{\equiv} 1$$

$x = 4k+1$;

k	۰	۱	۲	...
x	۱	۵	۹	...
y	۴	۱	۳	...

$$3(4k+1) + 4y = 19 \; ; \; y = 4 - 3k$$

مثال: اگر $(m,n)=1$ ، آن‌گاه یک سلسله جواب عمومی معادله‌ی زیر را با استفاده از قضیه‌ی اویلر تعیین کنید.

$$x^n + y^n = z^m \quad (1)$$

حل: برای تعیین یک سلسله از جواب‌های معادله‌ی ۱ ، ابتدا یک سلسله از جواب‌های معادله‌ی زیر را تعیین می‌کنیم:

$$k > 1 \; , \; k \in \mathbb{N} : \; x_1^{k-1} + x_2^{k-1} = x_2^k \quad (2)$$

برای تعیین یک سلسله از جواب‌های معادله‌ی ۲، کافی است آن را با اتحاد زیر مقایسه کنیم:

$$a,b\in Z:\ (a^k+ab^{k-1})^{k-1}+(ba^{k-1}+b^k)^{k-1}=(a^{k-1}+b^{k-1})^k \quad (3)$$

از مقایسه‌ی معادله‌ی ۲ و اتحاد ۳، بلافاصله یک سلسله جواب معادله‌ی ۲ به‌دست می‌آید:

$$(x_1,x_2,x_3)=(a^k+ab^{k-1},\ ba^{k-1}+b^k,\ a^{k-1}+b^{k-1})$$

در این‌جا، با فرض $k=m^{\varphi(n)}$، معادله‌ی ۲ به معادله‌ی زیر تحول می‌شود:

$$(4)\quad x_1^{m^{\varphi(n)}-1}+x_2^{m^{\varphi(n)}-1}=x_3^{m^{\varphi(n)}}$$ (φ: تابع حسابی اویلر)

طبق قضیه‌ی اویلر، اگر $(m,n)=1$، آن‌گاه $(m^{\varphi(n)}-1)$ بر n بخش‌پذیر است:

$$(m,n)=1;\ m^{\varphi(n)}-1=n\left(1+2\left\lfloor\frac{m^{\varphi(n)}-1}{2n}\right\rfloor\right) \quad (5)$$

($\lfloor\ \rfloor$: قسمت درست عدد)

با توجه به رابطه‌ی ۵ بلافاصله یک سلسله از جواب‌های معادله‌ی ۱ حاصل می‌شود:

$$(6)\quad \begin{cases} x=(a^{m^{\varphi(n)}}+ab^{m^{\varphi(n)}-1})^{1+2\left\lfloor\frac{m^{\varphi(n)}-1}{2n}\right\rfloor} \\ y=(ba^{m^{\varphi(n)}-1}+b^{m^{\varphi(n)}})^{1+2\left\lfloor\frac{m^{\varphi(n)}-1}{2n}\right\rfloor} \\ z=(a^{m^{\varphi(n)}-1}+b^{m^{\varphi(n)}-1})^{m^{\varphi(n)-1}} \end{cases}$$

$$(m=p^k.q^s.r^t\ldots,\ \varphi(m)=m(1-\frac{1}{p})\ldots)$$

مثال: معادله‌ی سیاله‌ی درجه‌ی هفتم زیر را حل کنید.

$$34x^7-14y=4282$$

حل: معادله را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$17x^7\overset{7}{\equiv}2141;\ 17x^7\overset{7}{\equiv}3x\equiv6;\ x\overset{7}{\equiv}2$$

$$x=2;\ y=\frac{17(2)^7-2141}{7}=5;$$

$$x=7k+2,\ y=17s+5$$

k	۰	۱	۲	...
x	۲	۹	۱۶	...
y	۵	۶۸۳۲۶۳	۶۵۱۹۱۴۳۷۳	...

تمرین

۱. حاصل $\varphi(10^{1387})$، $\varphi(2008)$، $\varphi(kn)$ و $\varphi(2^k)$ را بیابید.

۲. از قضیه‌ی اویلر، قضیه‌های فرما، لایبنیتز و ویلسن را نتیجه بگیرید.

۳. باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد 7^{87} بر ۲۰ را بیابید.

۴. تعداد اعداد طبیعی کوچک‌تر از ۴۰۰ را که نسبت به اعداد ۳۰ و ۱۸ اول‌اند، بیابید.

۵. دو رقم سمت راست عدد N را بیابید.

$$N=3^{1364}\times2009$$

۶. اگر m و n نسبت به هم اول باشند، نشان دهید:

$$m^{\varphi(n)}+n^{\varphi(m)}\overset{mn}{\equiv}1$$

۷. باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد k بر ۶۳ را بیابید.

$$k=13^7+78^9$$

۸. نشان دهید، اگر $(k,3)=(s,3)=1$، آن‌گاه:

$$9|(m^6-n^6)$$

۹. اگر k عددی صحیح باشد، باقی‌مانده‌ی تقسیم N^{294} بر ۳۴۳ را بیابید.

۱۰. نشان دهید اگر $(10,n)=1$، آن‌گاه چهار رقم سمت راست $10m$ و $10m^{101}$ با هم برابرند.

۱۱. دو رقم سمت راست عدد M را بیابید:

$$M=1389\times7^{2001}$$

۱۲. معادله‌ی سیاله‌ی $13x+87y=74$ را با استفاده از قضیه‌ی اویلر حل کنید.

۱۳. یک سلسله جواب عمومی $x^{1387}+y^{1387}=z^{2003}$ را با استفاده از قضیه‌ی اویلر تعیین کنید.

۱۴. اگر $(m,n)=1$، مضرب k را در برابری زیر تعیین کنید:

$$m^{\varphi(n)}=kn+1$$

برتراند راسل



(فیلسوف، ریاضی‌دان، ادیب، و برنده‌ی جایزه‌ی نوبل در ادبیات)

● برگردان: احمد قندهاری

برتراند آرتور ویلیام راسل[1] در ۱۸ می سال ۱۸۷۲ در **رونز کرُفت ویلز**[2] متولد شد. دو ساله بود که مادر و خواهرش را از دست داد و چهار ساله بود که پدرش درگذشت. پدربزرگش **لُرد جان راسل**[3] که سابقاً نخست‌وزیر بود، به همراه مادربزرگش، مراقبت از او و برادرش را برعهده گرفتند. راسل به مدرسه نرفت، برایش معلم خصوصی گرفتند و به خاطر داشتن هوش فوق‌العاده، توانست زبان‌های فرانسه و آلمانی را به سرعت یاد بگیرد.

راسل در سال ۱۸۹۰ وارد دانشکده‌ی ترینیتی[4] کمبریج[5] شد و چون در رشته‌ی فلسفه شاگرد اول بود، به او بورس تحصیلی داده شد. ولی او از آن استفاده نکرد. زیرا در تابستان سال ۱۸۹۴، در سفارت انگلستان در پاریس مشغول به کار شد و در دسامبر همان سال ازدواج کرد. پس از گذراندن چند ماه در برلین و مطالعه در زمینه‌ی دموکراسی، برای ادامه‌ی تحصیل در رشته‌ی فلسفه، به شهرل هَسل‌مر[6] فرانسه رفت.

در سال ۱۹۰۰ با ریاضی‌دان معروف **پینو**[7] آشنا شد و در گردهمایی بین‌المللی ریاضیات شرکت کرد. پس از آن، بلافاصله مطالعه‌ی ریاضیات را شروع کرد و موفق به کشف یک پارادکس در مجموعه‌ها شد. در سال ۱۹۰۳، کتاب مهم خود به نام اصول ریاضیات را نوشت و به کمک دوستش دکتر **آلفرد وایت هد**[8]، منطق ریاضی پینو را توسعه داد. در سال ۱۹۰۸، عضو انجمن سلطنتی بریتانیا شد و در همان سال به عنوان مدرس، در ترینیتی کالج استخدام شد.

بعد از شروع جنگ جهانی اول، به طور فعال از صلح طرف‌داری کرد و با قانونی که می‌گفت: اگر کسی واجد شرط باشد، ولی از پیوستن به ارتش خودداری کند، باید به مدت دو سال زندانی شود، شدیداً مخالفت کرد و رساله‌ای هم در این زمینه انتشار داد. پس از آن، شغل خود را در ترینیتی کالج از دست داد. پس از مدتی هم، از طرف دانشگاه هاروارد ایالات متحده به تدریس دعوت شد، ولی دولت انگلستان از صدور پاسپورت برای او خودداری کرد.



راسل در سال ۱۹۱۸ ، دوباره برای تدریس در دانشکده‌ای به کار دعوت شد، ولی این بار ارتش رسماً از ادامه‌ی کارش جلوگیری کرد و به بهانه‌ی نوشتن رساله‌ی ضد جنگ، او را به پنج ماه زندان محکوم کرد. در زندان کتاب «مقدمه‌ی فلسفه‌ی ریاضی» را نوشت. در سال ۱۹۲۱ هم چند تن از دوستانش کتاب «تحلیل ذهن» را که مجموعه‌ی سخنرانی‌های او در لندن بود، منتشر کردند.

در سال ۱۹۲۰ ، راسل برای مطالعه‌ی شرایط سیاسی اتحاد جماهیر شوروی سوسیالیستی، به این کشور سفر کرد. پس از چند ماه به کشور چین رفت، در دانشگاه پکن، چندین سخنرانی درباره‌ی فلسفه ایراد کرد، در دسامبر همان سال به انگلستان بازگشت.

در سال ۱۹۳۸ به ایالات متحده رفت و چند سال در دانشگاه‌های آن کشور به تدریس پرداخت. در آمریکا هم به خاطر عقاید خاصش از تدریس کنار گذاشته شد.

راسل فیلسوفی منتقد بود و به خاطر زحماتش در منطق ریاضی و فلسفه‌ی تحلیلی، دانشمندی شناخته شده بود. درواقع می‌توان گفت، او یکی از دو تن منطق‌دانان بزرگ قرن بیستم به شمار می‌رفت که نه تنها در فلسفه، منطق و ریاضی استاد بود، بلکه صاحب‌نظر و استاد مسائل گوناگون از جمله ادبیات بود؛ به خصوص نظریه‌ی سیاسی و بشردوستانه‌ی او در سراسر دنیا، طرف‌داران بی‌شماری داشت.

راسل در سال ۱۹۴۹ ، مدال شایستگی علمی دریافت کرد و در سال ۱۹۵۰ جایزه‌ی ادبیات نوبل را از آن خود کرد. او صلح‌طلبی واقعی بود که در این راه متحمل زحمات زیادی هم شد. یکی از کارهای قابل توجه او «پارادکس راسل» است که در مبحث مجموعه‌ها مطرح است، بدین صورت:

مجموعه‌ی همه‌ی مجموعه‌هایی که عضو خود نیستند، چنین مجموعه‌ای اگر وجود داشته باشد باید عضوی از خودش باشد، اگر و فقط اگر عضو خودش نباشد.

این پارادوکس به مفهوم علمی بسیار معنی‌دار است و عمق تفکر و مطالعات دقیق و زیاد او در نظریه‌ی مجموعه‌ها، منطق، فلسفه و بنیادهای ریاضی را نشان می‌دهد. او حقیقتاً فیلسوف و عالم منطق‌دان و منتقد اجتماعی و طرف‌دار صلح در جهان بود. در سال ۱۹۵۵ ، راسل با آلبرت اینشتین بیانیه‌ی مشترکی درباره‌ی صلح منتشر کردند. در سال ۱۹۵۸ ، راسل رئیس گروه خلع سلاح هسته‌ای جهان شد و در سال ۱۹۶۱ نیز به خاطر اعتراضاتی که علیه سلاح‌های هسته‌ای کرد، با آن همه شهرت و اعتبار علمی جهانی، به یک هفته زندان محکوم شد. راسل در دوم فوریه‌ی سال ۱۹۷۰ در ویلز درگذشت.

---

1. Bertrand Arthur William Russell   2. Rovens Croft Wales   3. Lord John Russell   4. Tirinity
5. Cambridge6. Hasle mere   7. Peano   8. Alfred White Head

معادله‌ی سیاله (۱)



● سیمین اکبری‌زاده
دبیر ریاضی اراک

«من به هیچ وجه تئوری اعداد را از علم معادلات سیاله تفکیک نمی‌کنم و این دو موضوع را یک و تنها یک شاخه‌ی آنالیز جبری می‌دانم. در واقع، قضیه‌ای در باب اعداد (صحیح) وجود ندارد که حل آن مربوط به حل یک یا چند معادله‌ی سیاله نشود.»

لژاندر

تعریف

معمولاً به هر معادله با یک یا چند متغیر که دامنه‌ی متغیرهای آن اعداد صحیح هستند، «معادله‌ی سیاله» گفته می‌شود. با توجه به آن‌که نخستین کتاب در این زمینه، کتاب «علم حساب» دیوفانتوس یا دیوفانت است، معادلات سیاله را معادلات دیوفانتوس یا دیوفانتی می‌خوانند.

ساده‌ترین معادله‌ی سیاله، معادله‌ی سیاله‌ی دو متغیره‌ی خطی (درجه‌ی اول) $ax+by=c$ است که در آن b، a و c اعداد صحیح هستند. منظور از حل این معادله، پیدا کردن مقادیر صحیح برای x و y به اسم y_0 و x_0 است که در معادله صدق کند؛ یعنی $ax_0 + by_0 = c$.

سؤالاتی که در این زمینه مطرح می‌شوند و در این مقاله پاسخ آن‌ها را می‌یابیم، عبارت‌اند از:

۱. تحت چه شرایطی می‌توان مطمئن بود که معادله‌ی سیاله‌ی داده شده جواب صحیح دارد؟

۲ . در صورت وجود جواب، چگونه می‌توان جواب‌های صحیح یک معادله‌ی سیاله را یافت؟

۳ . در صورت وجود جواب، چگونه می‌توان جواب‌های صحیح همراه با شرایط خاص یک معادله‌ی سیاله را یافت؟

ابتدا یک «لم» را بدون اثبات بیان می‌کنیم:

لم اقلیدس: اگر $a|bc$ و a و b نسبت به هم اول باشند، آن‌گاه: $a|c$.

سؤال ۱ . آیا معادله‌ی سیاله‌ی $9x + 5y = 17$ دارای جواب صحیح است؟ $9x + 6y = 17$ چه طور؟

پاسخ: معادله‌ی اول دارای جواب صحیح است. مثلاً با انتخاب $y = -2$ و $x = 3$ خواهیم داشت: $9(3) + 5(-2) = 17$. یعنی: $17 = 17$ و تساوی برقرار است. پس زوج مرتب $(3, -2)$ یک جواب صحیح برای این معادله است. ولی برای معادله‌ی دوم هرچه جست‌وجو کنیم، پاسخ صحیح نمی‌یابیم.

قضیه‌ی زیر، شرط لازم و کافی برای وجود جواب صحیح یک معادله‌ی سیاله را بیان می‌کند.

قضیه‌ی ۱: معادله‌ی سیاله‌ی $ax+by=c$ دارای جواب صحیح است، اگر و تنها اگر بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک a و b، عدد c را عاد کند.

مثال ۱ . به کمک این قضیه می‌توان گفت: معادله‌ی $9x + 5y = 17$ دارای جواب صحیح است؛ زیرا: $(9,5) = 1$ و: $1|17$. ولی معادله‌ی $9x + 6y = 17$ دارای جواب صحیح نیست؛ زیرا: $(9, 6) = 3$ و: $3 \nmid 17$.

نتیجه‌ی قضیه: اگر در معادله‌ی سیاله‌ی $ax+by=c$، داشته باشیم $(a, b) = 1$ ، آن‌گاه حتماً معادله جواب صحیح دارد؛ زیرا همواره: $1|c$.

مثال ۲ . در این مثال می‌خواهیم ببینیم به ازای چه مقادیری از m، معادله‌ی سیاله‌ی $2x + my = 7$ دارای جواب است $(m \in z)$.

طبق قضیه، شرط وجود جواب برای این معادله آن است که: $(2,m)|7$. و چون تنها مقسوم‌علیه‌های طبیعی ۷، اعداد ۱ و ۷ هستند، لذا باید داشته باشیم: $(2, m) = 7$ یا $(2, m) = 1$.

برای هیچ mی، تساوی $(2, m) = 7$ برقرار نیست، لذا تنها حالت مقبول $(2, m) = 1$ است. یعنی این معادله برای mهایی جواب دارد که نسبت به ۲ اول باشند؛ مانند: $\pm 1, \pm 3, \pm 5, \ldots$.

مثال ۳ . در این مثال می‌خواهیم ببینیم، کوچک‌ترین عدد مثبت b، طوری که معادله‌ی $1111x + 704y = 1500 + b$ جواب داشته باشد، چه عددی است.

چون: $(1111, 704) = 11$ ، لذا شرط وجود جواب برای این معادله آن است که: $11|1500 + b$.

با توجه به آن که باقی‌مانده‌ی ۱۵۰۰ بر ۱۱ ، ۴ است، لذا باقی‌مانده‌ی ۱۵۰۷ بر ۱۱ ، صفر است. به عبارت دیگر: $11|1500 + 7$. بنابراین کوچک‌ترین عدد مثبت b، ۷ است.

سؤال ۲ . همه‌ی جواب‌های صحیح معادله‌ی $9x + 5y = 17$ را بیابید.

پاسخ: جواب‌ها عبارت‌اند از:

$$\begin{cases} x = 3 \\ y = -2 \end{cases} \text{ و } \begin{cases} x = -2 \\ y = 7 \end{cases} \text{ و } \begin{cases} x = -7 \\ y = 16 \end{cases} \text{ و } \begin{cases} x = 8 \\ y = -11 \end{cases} \text{ و } \cdots$$

و به این ترتیب می‌توان بی‌شمار جواب صحیح برای معادله پیدا کرد. ولی شکل کلی جواب‌ها چگونه است و چگونه می‌توانیم جواب‌های عمومی معادله‌ی سیاله را به دست آوریم؟ به عبارت دیگر، با چه روشی می‌توان فرمولی برای x و y یافت که به کمک آن، کلیه‌ی جواب‌های صحیح معادله به‌دست آید؟ در ادامه‌ی مقاله پاسخ این سؤال را خواهید یافت.

سخنی برای گوش شنوا: با فرض آن که معادله‌ی سیاله‌ی $ax+by=c$ دارای جواب باشد، بهتر است پس از محاسبه‌ی بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک a و b، طرفین معادله را بر آن تقسیم کنیم و روی معادله‌ی جدید کار

کنیم. چون کار کردن با معادلاتی که ضرایب متغیر آن‌ها از لحاظ قدرمطلق کوچک‌ترند، طبعاً ساده‌تر است.

الف) روش‌های حل معادله‌ی سیاله‌ی دو متغیره‌ی خطی

۱. روش اول برای یافتن جواب عمومی

در این روش از مفهوم بخش‌پذیری و لم اقلیدس استفاده می‌شود.

مثال۴. در این مثال، تمامی جواب‌های صحیح معادله‌ی $7x + 5y = 130$ را به‌دست می‌آوریم.

حل: چون $5y$ و ۱۳۰ هر دو بر ۵ بخش‌پذیر هستند، لذا شرط برقراری تساوی آن است که $7x$ نیز مضرب ۵ باشد؛ یعنی باید داشته باشیم: $5|7x$. و با توجه به آن‌که $(7,5)=1$، لذا باید: $5|x$. یعنی شرط برقراری تساوی آن است که x مضرب صحیح ۵ باشد؛ یا: $x = 5k \ (k \in z)$.

با جای‌گذاری در معادله‌ی اولیه خواهیم داشت: $7(5k) + 5y = 130$ و با تقسیم طرفین تساوی بر ۵ معادله‌ی $7k + y = 26$ به‌دست می‌آید. لذا: $y = 26 - 7k \ (k \in z)$.

پس همه‌ی جواب‌های صحیح این معادله به‌کمک $\begin{cases} x = 5k \\ y = 26 - 7k \quad (k \in z) \end{cases}$ به‌دست خواهند آمد.

با انتخاب هر عدد صحیح دل‌خواه برای k، می‌توان یک جواب معادله را یافت. تعدادی از جواب‌ها از این قرارند:

k	...	-2	-1	0	1	2	...
x		-10	-5	0	5	10	
y		40	33	26	19	12	

توجه: این روش هنگامی مناسب است که عدد ثابت معادله و ضریب یکی از مجهولات، مقسوم‌علیه مشترک داشته باشند، مثل e. در این صورت مجهول دیگر نیز باید مضرب e باشد. لذا به‌جای مجهول دیگر ek قرار می‌دهیم. به این ترتیب، یکی از مجهولات برحسب k به‌دست می‌آید. حاصل را در معادله‌ی اولیه قرار می‌دهیم و با تقسیم طرفین تساوی بر e، مجهول دیگر نیز بر حسب k به‌دست خواهد آمد.

۲. روش دوم برای یافتن جواب عمومی

در این روش، با فرض آن‌که معادله‌ی سیاله‌ی $ax+by=c$ دارای جواب باشد و $(a,b)=d$ و x_0 و y_0 یک جواب معادله باشد (جواب خصوصی)، آن‌گاه تمام جواب‌های معادله به این صورت خواهد بود:

$$\begin{cases} x = x_0 + \frac{b}{d}k \ (\text{ضریب } y) \\ y = y_0 - \frac{a}{d}k \ (\text{ضریب } x) \end{cases}$$

فرمول(۱)

که در آن: $k \in z$ یا به طور معادل:

$$\begin{cases} x = x_0 - \frac{b}{d}k \\ y = y_0 + \frac{a}{d}k \end{cases} \quad (k \in z)$$

فرمول(۲)

مثال۵. در این مثال: به کمک روش دوم جواب‌های صحیح معادله‌ی $9x + 5y = 17$ را به‌دست می‌آوریم.

$b = $ ضریب $y = 5$; $a = $ ضریب $x = 9$; $d = (9,5) = 1$

و در ضمن، یکی از جواب‌های معادله $\begin{cases} x = 3 \\ y = -2 \end{cases}$ است. چون این جواب‌ها در معادله صدق می‌کنند، آن‌ها را جواب خصوصی می‌نامیم و قرار می‌دهیم: $\begin{cases} x_0 = 3 \\ y_0 = -2 \end{cases}$. حال با جای‌گذاری در فرمول(۱)، جواب‌های عمومی معادله به‌شکل $(k \in z)$ $\begin{cases} x = 3 + 5k \\ y = -2 - 9k \end{cases}$ به‌دست می‌آیند و با انتخاب هر عدد صحیح دل‌خواه برای k، می‌توان یک جواب معادله را یافت. مثلاً با انتخاب $k = 0, -1, -2, -3$، به ترتیب همان جواب‌های ذکر شده در سؤال ۲ به‌دست می‌آیند و این معادله بی‌شمار جواب صحیح دارد.

نکته: اگر از فرمول(۲) استفاده کنیم، جواب‌های عمومی معادله به‌شکل $(k \in z)$ $\begin{cases} x = 3 - 5k \\ y = -2 + 9x \end{cases}$ به‌دست می‌آیند و یا حتی اگر در شروع کار، جواب خصوصی دیگری را به‌دست آوریم، مثلاً: $\begin{cases} x_0 = 8 \\ y_0 = -11 \end{cases}$ در این صورت جواب‌های عمومی معادله با فرمول(۲) به شکل $(k \in z)$ $\begin{cases} x = 8 - 5k \\ y = -11 + 9k \end{cases}$ به‌دست می‌آیند. در این مثال، سه شکل به ظاهر متفاوت برای جواب عمومی این معادله‌ی سیاله پیدا کردیم. ولی مجموعه‌ی مقادیری که برای (x,y) از شکل‌های متفاوت حاصل می‌شوند، یکی است. به عبارت دیگر، هر جواب خاص که از یک فرم جواب عمومی به‌دست آید، از فرم‌های دیگر نیز حاصل می‌شود؛ البته با انتخاب عدد مناسبی برای پارامتر k. مثلاً جواب $\begin{cases} x = 3 \\ y = -2 \end{cases}$ از شکل اول جواب عمومی این مثال، با انتخاب $k = 0$ به‌دست می‌آید و همین جواب از شکل دوم با انتخاب $k = 0$ و از شکل سوم با انتخاب $k = 1$ به‌دست می‌آید. با تغییر مناسبی در پارامتر سه شکل به ظاهر متفاوت جواب، می‌توان آن‌ها را مشابه کرد. مثلاً در این مثال، اگر در شکل دوم جواب به جای k، K- قرار دهیم و در شکل سوم جواب به جای k، $1 - k$ قرار دهیم، شکل‌های به‌دست آمده مانند شکل اول خواهند شد.

در ضمن در این مثال:

شکل اول جواب عمومی $\Rightarrow x + y = 1 - 4k$

شکل دوم جواب عمومی $\Rightarrow x + y = 1 - 4k$

شکل سوم جواب عمومی $\Rightarrow x + y = 3 + 4k$

و با انتخاب هر جواب خصوصی دل‌خواه و هر یک از فرمول‌های (۱) و (۲) نیز، ضریب پارامتر k در x+y یا ۴ است یا ۴- و این موضوع کلیت دارد. لذا طی این مثال به نکته‌ی زیر پی بردیم:

نکته: ظاهراً ممکن است جواب‌های عمومی به‌دست آمده با روش‌های مختلف، متفاوت باشند، ولی:

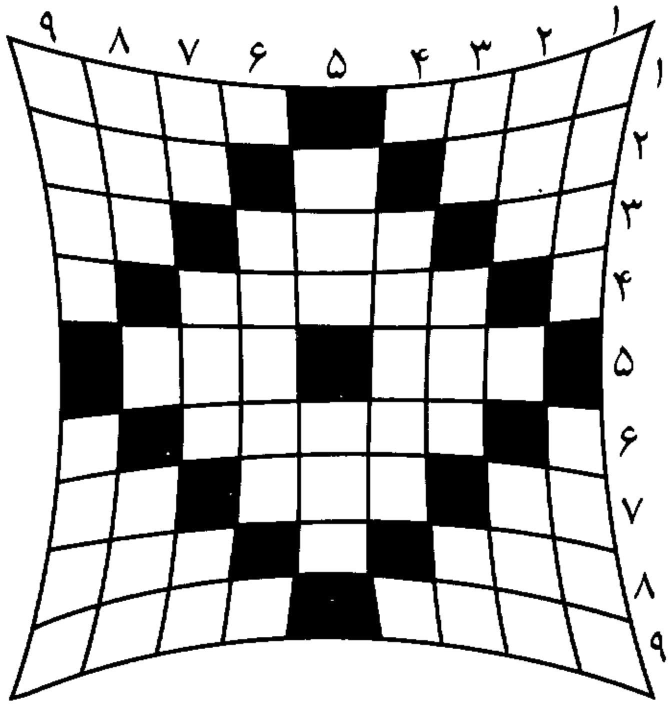
اولاً اگر در یک جواب عمومی به جای پارامتر k، پارامتر دیگری برحسب k قرار دهیم، ظاهر جواب‌های عمومی مشابه خواهد شد.

و ثانیاً ضریب پارامتر k در x+y یا مثل هم است و یا قرینه.

توجه: روش جواب خصوصی روش ساده‌ای است، ولی هنگامی مناسب است که بتوانیم جواب خصوصی x_0 و y_0 را راحت پیدا کنیم. لذا پیدا کردن حتی یک جواب برای معادله‌ی سیاله غنیمت است تا بتوانیم از آن‌ها به‌عنوان جواب خصوصی استفاده کنیم. اما چگونه؟

ادامه دارد...

جدول ریاضی



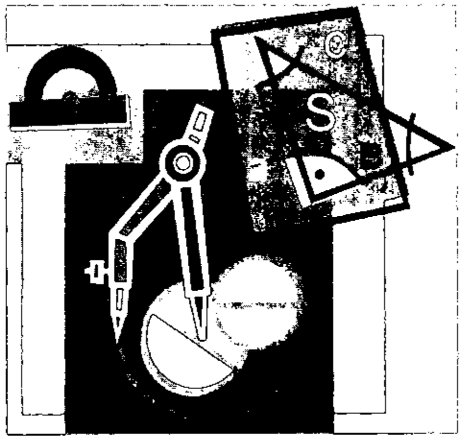
افقی:

۱ . بنا به گفته «گوس» ریاضیات سلطان علوم است و... سلطان ریاضیات ـ ساختن دایره‌ای معادل با آن از مسائل لاینحل ریاضی است . ۲ . نقطه تلاقی دو ضلع از چند ضلعی ـ ریاضیات جدید قضایا را در این حالت مطرح می‌کند . ۳ . بزرگتر از جزء ـ زاویه کوچکتر از قائمه ـ چون با خودش جمع گردد مجذور شود . ۴ . سال گذشته هم از این نوع بود . ۵ . برجی از منطقه البروج که هم‌ردیف مرداد به‌حساب می‌آید ـ تکلیفی که سه قسمت از پنج قسمت آن انجام گرفته است . ۶ . علامت ریشه گرفتن . ۷ . تنها عددی که مجموع خود و معکوسش از ۲ بزرگتر نیست ـ وارونه آن‌چه که یا بدیهی است و یا بدون اثبات قبول می‌شود ـ ضلع . ۸ . واحد زمان ـ قرار دادن مثلاً چند واسطه عددی یا هندسی بین دو عدد ۹ . اگر با نمای صفر باشد برابر با یک خواهد بود ـ اصطلاح پارسی خمسه مرقه .

عمودی:

۱ . تغییر فاصله‌ی نقطه نسبت به یک مبدأ ـ عددی که در کشور ما برای دانش‌آموزان مقدس است . ۲ . نوری آن واحد فاصله در نجوم می‌باشد ـ محدب نیست . ۳ . معمولاً مساحت و هم‌چنین سطح را با آن نمایش می‌دهند ـ قسمتی از قسمت‌های یک واحد ـ ۲۱ به حساب ابجد . ۴ . انواع آن تغییر مکان، انتقال، دوران و تجانس می‌باشد . ۵ . دانشکده‌ای که زبده‌ی فارغ‌التحصیلان رشته ریاضی را می‌پذیرد ـ سومری‌ها آن‌را مبنای عددنویسی قرار داده بودند . ۶ . سیستم بی‌انتها . ۷ . راهی که ثلث آن باقی مانده است ـ معکوس واحد فرهنگستانی ـ ۴ و ۵۰ به‌حساب ابجد . ۸ . فضای اینیشتین چهار تای آن‌را دارد ـ نام قسمت‌های دوازده‌گانه منطقه البروج ۹ . وضع دو خط که با یکدیگر زاویه‌های مجاور مساوی می‌سازند ـ واحد کمان .

منبع : مجله یکان



پاسخ تفریح اندیشه

حل ۱ :

$x^۲ + y^۲ = ۲۰۸$ (۱)

$xy = ۹۶$ (۲)

از ۲ :

$۲xy = ۱۹۲$ (۳)

افزودن ۳ به ۱ می‌دهد :

$x^۲ + y^۲ + ۲xy = ۲۰۸ + ۱۹۲$

$(x+y)^۲ = ۴۰۰ \text{ ، } x+y = \pm ۲۰$ (۴)

با تفریق ۳ از ۱ داریم :

$x^۲ + y^۲ - ۲xy = ۲۰۸ - ۱۹۲$

$(x-y)^۲ = ۱۶ \text{ ، } x-y = \pm ۴$ (۵)

از ۴ و ۵ دستگاه‌های زیر را حل می‌کنیم :

الف) $\begin{cases} x+y=۲۰ \\ x-y=۴ \end{cases}$ ب) $\begin{cases} x+y=۲۰ \\ x-y=-۴ \end{cases}$

ج) $\begin{cases} x+y=-۲۰ \\ x-y=۴ \end{cases}$ د) $\begin{cases} x+y=-۲۰ \\ x-y=-۴ \end{cases}$

جواب دستگاه الف عبارت است از : $y = ۸$ ، $x = ۱۲$

جواب دستگاه ب عبارت است از : $y = ۱۲$ ، $x = ۱۲$

جواب دستگاه ج عبارت است از : $y = -۱۲$ ، $x = -۸$

شرایط:

۱. واریز مبلغ ۳۰/۰۰۰ ریال به ازای هر عنوان مجله درخواستی، به صورت علی‌الحساب به حساب شماره‌ی ۳۹۶۶۲۰۰۰ بانک تجارت شعبه سه راه آزمایش (سرخه‌حصار) کد ۳۹۵ در وجه شرکت افست

۲. ارسال اصل رسید بانکی به همراه برگ تکمیل شده اشتراک

- **نام مجله:** ....
- **نام و نام خانوادگی:** ....
- **تاریخ تولد:** ....
- **میزان تحصیلات:** ....
- **تلفن:** ....
- **نشانی کامل پستی:**

استان: .... شهرستان: ....

خیابان: ....

....

پلاک: .... کدپستی: ....

- **مبلغ واریز شده:** ....
- **شماره و تاریخ رسید بانکی:** ....
- **آیا مایل به دریافت مجله درخواستی به صورت پست پیشتاز هستید؟** بله☐ خیر☐

امضا:

نشانی: تهران ـ صندوق پستی ۱۶۵۹۵/۱۱۱

نشانی اینترنتی: www.roshdmag.ir

پست الکترونیک: Email:info@roshdmag.ir

☎ **امور مشترکین:** ۷۷۳۳۶۶۵۶ ـ ۷۷۳۳۵۱۱۰

☎ **پیام‌گیر مجلات رشد:** ۸۸۳۰۱۴۸۲ ـ ۸۸۸۳۹۲۳۲

یادآوری:

- هزینه برگشت مجله در صورت خوانا و کامل نبودن نشانی، بر عهده مشترک است.
- مبنای شروع اشتراک مجله از زمان وصول برگ اشتراک می‌باشد.
- برای هر عنوان مجله برگ اشتراک جداگانه تکمیل و ارسال کنید (تصویر برگ اشتراک نیز مورد قبول است)

جواب دستگاه د عبارت است از:

$x = -12 \ ، \ y = -8$

❊ ❊ ❊

حل ۲: مجموع زاویه‌های درونی یک n ضلعی $(n-2)180$ درجه است. با قرار دادن $n = 8$، به‌دست می‌آوریم:

$$180°(6) = 1080°$$

در این صورت، مجموع زاویه‌های باقی‌مانده عبارت است از:

$$1080° - 845° = 235°$$

توجه داریم که سه زاویه‌ی باقی‌مانده، شامل دو زاویه‌ی مکمل و دو زاویه‌ی متمم هستند. درنتیجه، یکی از این زاویه‌ها در این جفت مشترک است. فرض می‌کنیم، اندازه‌ی این زاویه $x°$ باشد. درنتیجه، اندازه‌های دو زاویه‌ی دیگر، به‌ترتیب $(180-x)°$ و $(90-x)°$ است:

$$x + (180 - x) + (90 - x) = 235$$

$$x = 35$$

❊ ❊ ❊

حل: ابتدا z را به صورت $a + bi$ می‌نویسیم. بعد، برای حقیقی بودن z، باید b برابر صفر باشد. بنابراین جمیع مقادیر برقرارکننده‌ی این شرط را به‌دست می‌آوریم.

$$\begin{aligned} z &= [-x + 10 + (x+2)i](x - i) \\ &= -x^2 + 10x + (x^2 + 2x)i + xi - 10i + (x+2) \\ &= (-x^2 + 10x + x + 2) + (x^2 + 2x + x - 10)i \\ &= (-x^2 + 11x + 2) + (x^2 + 3x - 10)i \end{aligned}$$

برای حقیقی بودن z، باید جزء انگاری آن برابر صفر باشد:

$$x^2 + 3x - 10 = 0 \Rightarrow (x - 2)(x - 5) = 0$$

$$x_1 = 2 \ \text{و} \ x_2 = -5$$

❊ ❊ ❊

کرجی این کتاب را به نام ابوغالب محمدبن علی بن خلف واسطی، ملقب به فخر الدوله و متوفی به سال ۴۰۷ که ذکرش گذشت نوشته و ظاهراًبه همین مناسبت آن را الفخری نامیده است.[۵]

ترجمه‌ی فارسی قسمتی از مقدمه‌ی کتاب الفخری

محمدبن حسین کرجی حاسب که خدای تعالی او را بیامرزد گفته است:

چنین دریافتم که موضوع علم حساب استخراج مجهولات از روی معلومات در جمیع انواع آن است و پی بردم که واضح‌ترین راه‌ها به سوی آن، و نخستین وسیله برای رسیدن به آن، صناعت جبر و مقابله است، از جهت قدرت آن و شمول آن بر همه‌ی مسائل مختلف حساب. و دیدم که کتاب‌هایی که در این صناعت تصنیف شده به‌طور کامل همه‌ی اطلاعات مقدماتی لازم را در بر ندارند. و از جهت آن‌چه برای وقوف یافتن بر فروع آن لازم است کافی نیستند. و کسانی که این کتاب‌ها را تألیف کرده‌اند در شرح مقدمات آن، که راه رسیدن به غایت و دست یافتن به نهایت این علم است، کوتاهی کرده‌اند. سپس در این صناعت چیزهای تازه‌ی نیکویی یافتم که در آثار هیچ‌یک از آن مؤلفان ندیدم. و مشکلاتی را حل کردم که در کتاب‌های آنان بیان آن‌ها را نیافتم. و چون این فضیلت را یافتم و احتیاج به جبران این نقیصه را حس کردم چاره‌ای جز این نیافتم که کتابی تألیف کنم که همه‌ی این معلومات را در بر داشته باشد و در آن شرح ملخص اصول جبر را بدهم، به نحوی که از کدورت حشو و آلایش لغو پاک و مصفا باشد...»

۲. الکافی فی الحساب

این کتاب دارای ۷۰ بخش است. ۴۳ بخش اول آن درباره‌ی اعمال حساب و بخش‌های ۴۴ تا ۵۳ آن درباره‌ی هندسه و بخش‌های ۵۴ تا ۷۰ آن مربوط به جبر است.

بر کتاب الکافی فی الحساب دو شرح نوشته شده است:

الف- شرح کتاب الکافی للکرجی، تألیف ابوعبدالله شقاق بغدادی.

ب- الشرح الشافی للکتاب الکافی فی الحساب. این شرح تألیف محمدبن علی بن حسن بن احمد شهرزوری است که آن را در سال ۵۹۱ نوشته و یک نسخه‌ی خطی آن که با نسخه‌ی اصل مقابله شده است در استانبول (ینی جامع به شماره‌ی ۸۰۱) موجود می‌باشد.

۳. البدیع فی الحساب

این یکی از مهم‌ترین تألیفات کرجی و نشان‌دهنده‌ی نمو و پیشرفت علم جبر تا اوایل سده‌ی پنجم نزد مسلمین است و یک نسخه‌ی خطی از آن در واتیکان موجود است.

این کتاب که بنا به نوشته‌ی خود کرجی، در مقدمه‌ی آن، زبده‌ی علم حساب و ثمره‌ی آن و غایت آن است دارای سه مقاله است به این شرح: المقالة الاولی فی الاصول، القول علی المجهولات، المقاله فی ذکر الاستقراء.

۴. علل حساب الجبر و المقابله و شرح‌ها

این کتاب مشتمل بر این باب‌ها است: باب اموال تعدل جذوراً، باب تنصیف الاجذار فی المسائل الثلثه، باب تضعیف الجذور و تنصیف‌ها، باب ضرب الاجذار فی الاجذار، قسمة الاجذار علی الاجذار، جمع الاجذار بعضها الی بعض و نقصان بعضها من بعض.

زیرنویس

۱. بهاءالدوله، ابونصربن عضدالدوله پسر بویه‌ی دیلمی که از ۳۷۹ تا ۴۰۳ سلطنت کرد.

۲. سلطان‌الدوله ابوشجاع فناخسرو که در ۴۰۳ تا ۴۱۲ سلطنت کرد.

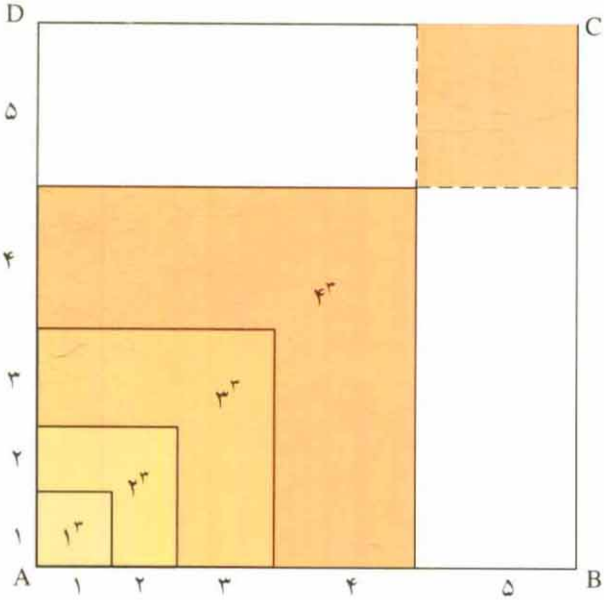
۳. شاعر و ادیب ایرانی، کاتب و وزیر منوچهربن قابوس- لغت‌نامه، مقاله‌ی: ابوغانم قصری- منوچهربن قابوس از دیالمه‌ی آل زیار بود که از سال ۴۰۳ تا ۴۲۰ در طبرستان حکومت کرد.

۴. عنوان عربی این کتاب انباط المیاه الخفیه است. در سال ۱۳۴۵ خورشیدی توسط حسین خدیو جم به فارسی ترجمه و توسط بنیاد فرهنگ ایران منتشر شد.

۵. گویا کرجی خود ملقب به «فخرالدین» بوده است (کشف‌الظنون، ج۱، ص۲۳۷)

اثبات محمد بن حسین کرجی برای دستور

$$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\frac{1}{4}n^2(n+1)^2$$



(شکل بالا، برای n=۵)

مربع ABCD را به ضلع $1+2+3+\cdots+n$ در نظر می‌گیریم (در شکل n=۵) و مساحت این مربع را به دو طریق محاسبه می‌کنیم:

۱) ضلع مربع برابر است با $\frac{1}{2}n(n+1)$، پس $S_{ABCD}=\frac{1}{4}n^2(n+1)^2$.

۲) مربع را به‌صورتی که در شکل دیده می‌شود، به نوارهای گونیایی تقسیم می‌کنیم و مثلاً نوار گونیایی **n**ام را در نظر می‌گیریم. این نوار شامل یک مربع به ضلع برابر **n** و دو مستطیل، هر یک به طول $\frac{1}{2}n(n+1)-n$ و به عرض **n**، می‌باشد، بنابراین مساحت آن چنین است:

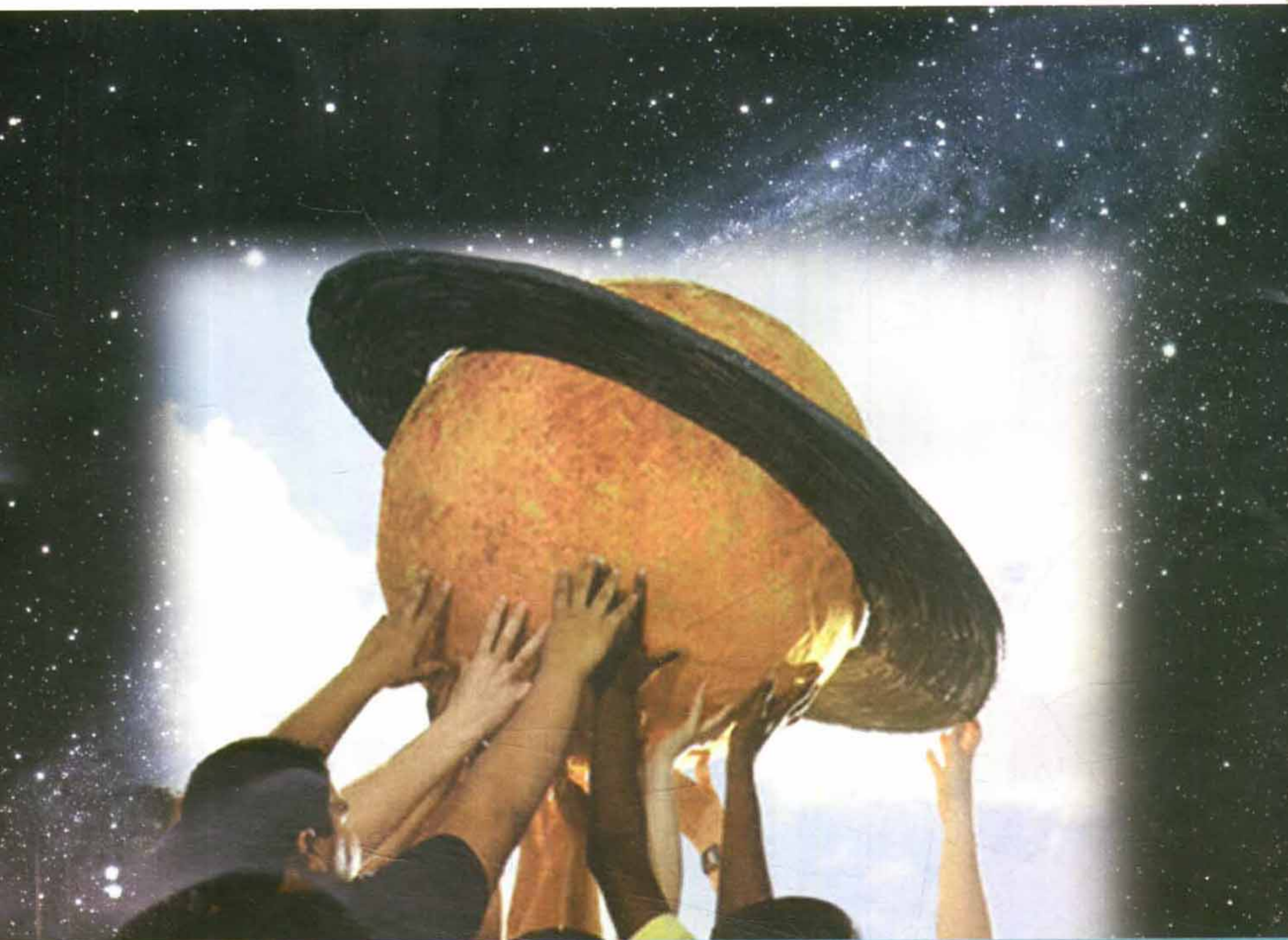
$$\text{مساحت نوار گونیایی } n\text{ام} = n^2+2[\frac{1}{2}n(n+1)-n]n=n^3$$

بنابراین

$$S_{ABCD}=1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3$$

با برابر قرار دادن دو مقداری که برای مساحت مربع به‌دست آوردیم، به دستور مورد نظر می‌رسیم.

رشد
برهان ۶۳
مجله‌ی ریاضی
دوره‌ی متوسطه
ISSN:1735-4951
وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی
دفتر انتشارات کمک آموزشی
دوره‌ی نوزدهم ـ مهر ۱۳۸۸ ـ شماره‌ی ۱ ـ بها ۴۵۰۰ ریال
فصلنامه‌ی آموزشی، تحلیلی، اطلاع رسانی
www.roshdmag.ir

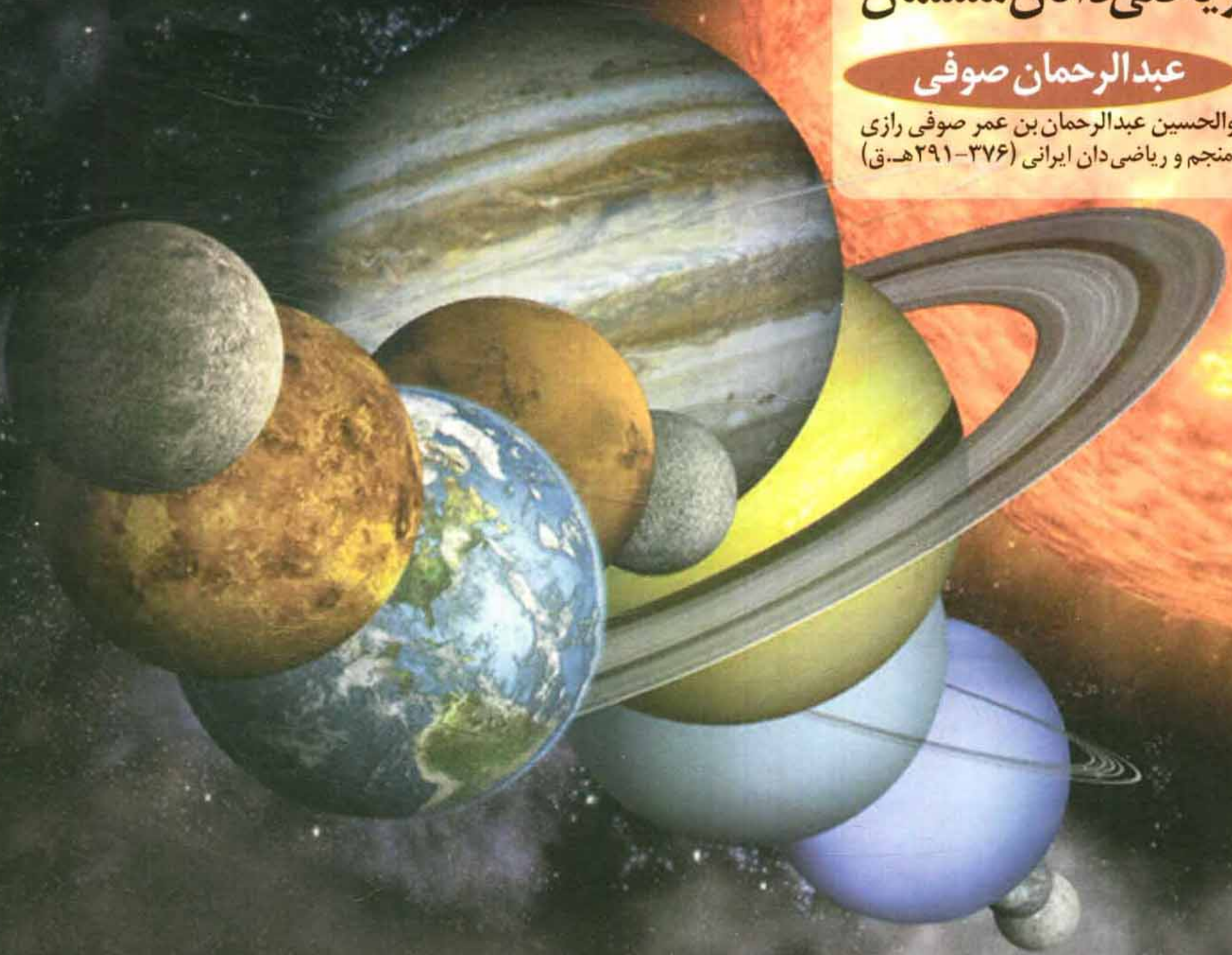




ریاضی‌دانان مسلمان

عبدالرحمان صوفی

ابوالحسین عبدالرحمان بن عمر صوفی رازی
منجم و ریاضی‌دان ایرانی (۳۷۶-۲۹۱ هـ.ق)



صوفی فاضلی جلیل و منجمی عالی‌مقام و اصلاً از فسای فارس بود. در چهاردهم محرم سال ۲۹۱ هـ.ق در شهرری چشم به جهان گشود و در سیزدهم محرم سال ۳۷۶ به رحمت ایزدی پیوست. بنا به گفته‌ی خود او در سال ۳۳۷ در اصفهان در صحبت **ابن عمید** (ابوالفضل محمدبن حسین) وزیر معروف آل بویه به‌سر می‌برد و در سال ۳۴۹ در دربار **عضدالدوله‌ی دیلمی** در اصفهان می‌زیست. و می‌دانیم که در سال ۳۵۹ در شیراز به رصد می‌پرداخت. وی منجم دربار عضدالدوله بود و اثر بسیار نفیس و معروف خود **صورالکواکب** را به نام این پادشاه نوشت و عضدالدوله به شاگردی وی در شناختن صور کواکب افتخار می کرد. **ابوریحان بیرونی** درباره‌ی کارهای نجومی عبدالرحمان صوفی نوشته است که مأخذ صوفی، اندازه گیری و تفرس بوده و او عمر خود را در فن معرفت صورکواکب صرف کرده تا آن جا که به همه‌ی زوایا و دقایق آن پی برده است.

اثر ریاضی وی:

اشکال متساوی الاضلاع: متن این رساله به عربی است و نسخه‌ی خطی آن به شماره‌ی ۵۵۳۵ در کتاب‌خانه‌ی آستان رضوی محفوظ است. این رساله را عبدالرحمان صوفی به‌دستور عضدالدوله‌ی دیلمی نوشته و موضوع آن ترسیم چندضلعی های منتظم به ضلع معین با یک فتحه‌ی پرگار است و چنین شروع می‌شود: «امرتی الامیر الاجل عضدالدوله مولانا اطال الله بقاه و ادام سلطانه، ان ابیّن له هل یمکن عمل اشکال علی خط واحد مستقیم مفروض مثل المربع و المخمس المتساوی الاضلاع و غیر ذلک بفتحه واحده».

خاطرنشان می کنم، این دومین اثر هندسی است که ریاضی‌دانان ایرانی درباره‌ی ترسیم اشکال هندسی با یک فتحه‌ی پرگار نوشته‌اند. رساله‌ی دیگر عبارت است از کتاب «فی مایحتاج الیه الصانع من اعمال الهندسه» تالیف **ابوالوفای بوزجانی**. جالب توجه است که صوفی (متوفی به سال ۳۷۶) و بوزجانی (درگذشته در سال ۳۸۸) معاصر یکدیگر بوده‌اند.

بسم الله الرحمن الرحیم

فهرست

رشد برهان متوسطه ۶۳
مجله‌ی ریاضی
ISSN: 1735 - 4951
دوره‌ی آموزش متوسطه
فصلنامه‌ی آموزشی، تحلیلی و اطلاع‌رسانی

دوره‌ی نوزدهم ـ شماره‌ی ۱ ـ پاییز ۱۳۸۸
شمارگان: ۱۳۰۰۰ نسخه

Email: Borhanm@roshdmag.ir ●
●پیام‌گیر نشریات رشد: ۰۲۱-۸۸۳۰۱۴۸۲
نشانی دفتر مجله: تهران، صندوق پستی ۱۵۸۷۵/۶۵۸۵
●تلفن دفتر مجله: ۰۲۱-۸۸۳۰۵۸۶۲
●تلفن امور مشترکین: ۷۷۳۳۶۶۵۶ـ ۰۲۱-۷۷۳۳۵۱۱۰

● چاپ و صحافی: شرکت افست (سهامی عام)

رشد برهان متوسطه، تمامی دبیران محترم و دانش‌آموزان عزیز را در زمینه‌های زیر به همکاری دعوت می‌کند:

- نگارش مقاله‌های کمک درسی (شرح و بسط و رفع مشکلات مبحث درسی کتاب‌های ریاضی دوره‌ی متوسطه و پیش‌دانشگاهی)
- طرح مسائل کلیدی به همراه حل آن‌ها (برای دانش‌آموزان)
- طرح مسائل مسابقه‌ای به همراه حل آن‌ها (برای دانش‌آموزان)
- طرح معماهای ریاضی
- نگارش یا ترجمه‌ی مقاله‌های عمومی ریاضی (مانند تاریخ ریاضیات، زندگینامه‌ی علمی و اجتماعی ریاضی‌دانان، نکته‌های تازه و لطیف ریاضیات، آموزش ریاضیات، آموزش کامپیوتر و ...)

رشد برهان متوسطه هر سه ماه، یکبار منتشر می‌شود.

مجلّه در حکّ، اصلاح، حذف و اضافه‌ی مقاله‌ها آزاد است.

مقاله‌های وارده ،باید خوانا و حتی‌الامکان کوتاه باشد.

مقاله‌های رسیده مسترد نمی‌شود.

حرف اول

برای خدمت به جامعه آماده شوید

با شروع سال تحصیلی، همه‌ی فعالیت‌های آموزشی و پرورشی شما دانش‌آموزان و آینده‌سازان ایران اسلامی از سر گرفته می‌شود، اما تا چه حد با این فعالیت‌ها و وظایف آشنا هستید و خود را برای انجام آن‌ها آماده کرده‌اید؟ دوران دبیرستان یکی از اصلی‌ترین و مهم‌ترین عوامل شکل دهنده و تأثیرگذار بر شخصیت هر فرد به شمار می‌رود. شما باید در این چند سال برای خدمت به جامعه آماده شوید و راه آینده‌ی خود را به خوبی شناسایی کنید. لذا می‌باید غیر از موضوعات آموزشی و پرورشی که از اهم مسائل هستند، به مسائل روز و موجود در جامعه‌ای که به زودی با آن‌ها مواجه خواهید شد نیز آشنا باشید.

بر لزوم توجه دانش‌آموزان به مسائل سیاسی و اجتماعی بارها مقام معظم رهبری، حضرت آیت‌الله خامنه‌ای، و اولیای مسائل آموزشی و تربیتی، تأکید کرده‌اند. این سخن به این معنی است که دانش‌آموزان ما در کنار فعالیت‌های علمی خود، فعالیت‌های اجتماعی را نیز در نظر داشته باشند و آن‌ها را جزو ضرورت‌های زندگی و شکل‌دهنده‌ی شخصیت‌های فردی قلمداد کنند.

رشد یک‌بُعدی و دانش‌اندوزی بدون تهذیب نفس، هر چند انسان را به مدارج علمی قابل توجهی می‌رساند، اما برایند آن، چیزی جز افسارگسیختگی و نارسایی‌های فردی و اجتماعی نخواهد بود. دانش‌آموزان ما از دیرباز آموخته‌اند که تنها، گنجینه‌ی متحرک علوم بشری نباشند، بلکه هم‌سوی با جامعه، به‌عنوان فردی مفید از آن جامعه، برای سایر نیازهای فطری خویش پاسخی شایسته داشته باشند. به همین دلیل، بسیاری از دانش‌آموزان کوشا و ساعی در عرصه‌ی علوم، در سایر مباحث اجتماعی و سیاسی هم فعال هستند. شرکتِ دانش‌آموزان در مجامعی چون بسیج دانش‌آموزی، انجمن‌های اسلامی، برنامه‌ها و فعالیت‌های اجتماعی و گروهی، مبیّن این نکته است که ما دانش‌آموزان اندیشمند و متفکر فراوان داریم و این امر ریشه در تاریخ کشور ما دارد.

حضور فراگیر و گسترده‌ی دانش‌آموزان در مبارزات انقلابی مردم در سال ۵۷ و حماسه‌آفرینی آن‌ها در روز ۱۳ آبان همان سال، نقش تعیین کننده‌ای در سقوط رژیم پهلوی داشت و این روند را می‌توان در سال‌های دفاع مقدس به خاطر آورد و از دانش‌آموزانی چون شهید فهمیده یاد کرد که مراتب والایی از حضور دانش‌آموزان را در دفاع مقدس به نمایش گذاشت. او تا جایی پیش رفت که رهبر کبیر انقلاب اسلامی حضرت امام خمینی از او به‌عنوان (رهبر ما) یاد کردند. امروز بسیاری از همان دانش‌آموزان، در عرصه‌ی علم و دانش از متخصصان و دانشمندان این جامعه هستند و آن‌هایی که به شهادت رسیده‌اند، با شهادت خویش امنیت و آرامش را برای علم‌آموزی و پیشرفت به طرف ارزش‌های انسانی و اسلامی سایرین هموار کردند و خود در بهشت زیبای خداوند، هم‌نشین پاکان و دوستان خدا شدند.

سردبیر

● پرویز شهریاری

محمد فرزند موسی مشهور به خوارزمی (سده‌ی سوم)

خوارزمی و کتاب جبر و مقابله

«جبر و مقابله»ی خوارزمی مهم‌ترین کتابی است که محمد فرزند موسی خوارزمی در زمینه‌ی جبر نوشته و آن را ادامه‌ی حساب نامیده است. واژه‌ی جبر که خوارزمی برای نامیدن این دانش برگزیده، معرف روشی است که او در کتاب خود، آن را به کار برده است. خوارزمی جبر را به معنای جبران کردن (که جبر خاطر مسکین بلا بگرداند: سعدی) می‌دانست که به زبان امروزی به معنای جابه‌جایی عددی منفی از یک طرف معادله به طرف دیگر و تبدیل آن به عددی مثبت است. کنار واژه‌ی «جبر»، به واژه‌ی «مقابله» برمی‌خوریم که نشان‌دهنده‌ی عمل دیگری در حل معادله است: مقابل هم قرار دادن جمله‌ی برابر در دو سوی معادله.

بهاءالدین عاملی معروف به شیخ بهایی، ریاضی‌دان آغاز سده‌ی یازدهم هجری قمری (سده‌ی شانزدهم میلادی)، دو واژه‌ی جبر و مقابله را این طور تعریف کرده است: «می‌توان بخشی از معادله را که شامل مقدار منفی است، حذف کرد و به سمت دیگر و به همان اندازه اضافه کرد. این عمل جبر نامیده می‌شود. جمله‌های متشابه برابر را می‌توان از دو سمت معادله کنار گذاشت. این عمل را هم مقابله گویند».

❖ برای آن که درک از طبیعت درست و عاقلانه باشد، شناسایی ریاضیات و دانش‌های طبیعی لازم است.

«فردریک انگلس»

به کمک آموزه‌های امروزی، این دو عمل را می‌توان به روشنی در نمونه‌ای شرح داد. این معادله را در نظر می‌گیریم:

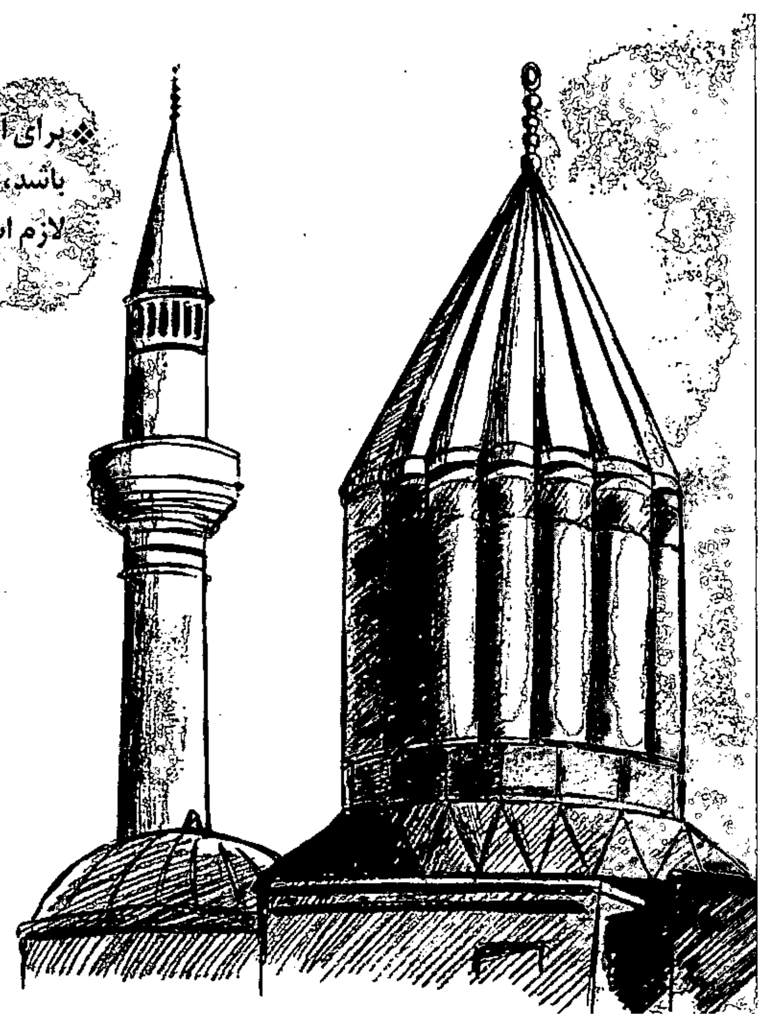
$$5x - 13 = 4x - 9$$

اگر به دو سمت، برابری ۱۳ و ۹ را بیفزاییم، عمل جبر را انجام داده‌ایم.

$$5x + 9 = 4x + 13$$

اگر از دو سمت برابری، $4x$ و ۹ را کم کنیم، عمل مقابله را انجام داده‌ایم. در نتیجه داریم: $x = 4$

به این ترتیب، عمل‌های جبر و مقابله



به زبان امروزی عبارت‌اند از: انتقال جمله‌ای از یک سمت معادله به سمت دیگر و سپس جمع جبری جمله‌های متشابه.

در برگردان واژه‌ی جبر به زبان‌های انگلیسی، فرانسه، آلمانی و روسی، حرف اضافه‌ی «ال» را هم گذاشته‌اند و «الجبر» را به کار می‌برند.

در کتاب جبر و مقابله‌ی خوارزمی، راه‌حل معادله‌های درجه اول و درجه دوم شرح داده شده است. کتاب خوارزمی در اساس به روش حل معادله‌های درجه اول و درجه دوم مربوط می‌شود. به این ترتیب، خوارزمی مسیر اصلی این دانش جدید را مشخص می‌کرد و می‌دانیم، مضمون اصلی جبر، دست کم تا سده‌ی نوزدهم میلادی عبارت است از همین حل معادله‌ها. آقای خان مهندس در کتاب «اصول علم جبر و مقابله» که در سال ۳۰۵ هجری قمری چاپ شده است، می‌نویسد:

تعمیم و تشکیل این عمل (یعنی علم حساب) با این همه شرف و تغییر، موقوف است به علم جبر و مقابله و استخراج مجهولات از روی حل معادلات به طریقی که معین و مقرر است. ارزش عملی کار خوارزمی در این است که کتاب او تنها رساله‌ای درباره‌ی حل مسئله‌ها نیست (آن‌طور که در آثار یا نوشته‌های هندی دیده می‌شود)، بلکه خوارزمی به جز حل معادله‌ها، کاربرد آن‌ها را طرح می‌کند و بسیاری از قانون‌ها را با روش هندسی هم روشن می‌سازد.

درست است که خوارزمی برای حل معادله‌ی درجه دوم، به ظاهر راه‌حل کلی نمی‌دهد، ولی ضمن آوردن مثال‌های عددی در برخی حالت‌ها، همان دستوری را دنبال می‌کند که امروز برای حل معادله‌ی درجه‌ی دوم می‌شناسیم.

> ❖ شراره یک لحظه می‌درخشد، ولی نور واقعی هرگز خاموش نمی‌شود.
> «گوته»

مسئله‌ی ۱۳۸ باب هفتم کتاب جبر و مقابله‌ی خوارزمی

یک درهم را بر چند مرد بخش کردم، به هر یک چیزی رسید. سپس یک مرد به گرد آنان افزودم و بار دیگر یک درهم را میان آنان بخش کردم. سهم هر یک در بار دوم به اندازه‌ی یک ششم درهم، از مقدار بخش اول کم‌تر شد. در این جا خوارزمی می‌خواهد تعداد مردان را در بار اول پیدا کند. راه‌حل او را می‌آوریم:

اگر تعداد مردان نوبت اول را که عبارت است از شیء (x) در نقصانی که میان آنان است ($\frac{1}{6}$) ضرب کنی و آن‌گاه حاصل ضرب را در تعداد مردان نوبت‌های اول و دوم ضرب کنی $\left[\frac{1}{6}x(x+1)\right]$، مال بخش شده [یعنی یک درهم] به دست می‌آید: $\left[\frac{1}{6}x(x+1)=1\right]$. پس از آن، تعداد مردان نوبت اول را که عبارت است از شیء (x)، در یک ششم، که میان آنان اختلاف بود، ضرب کنی، می‌شود یک ششم جذر ($\frac{1}{6}x$). سپس آن را در تعداد مردان نوبت دوم، یعنی شیء به اضافه‌ی یک، ضرب می‌کنی. این نتیجه به دست می‌آید: یک ششم مال به اضافه‌ی یک ششم جذر که تقسیم بر یک درهم برابر است با یک درهم $\left[\frac{1}{6}x^2+\frac{1}{6}x=1\right]$. مالی را که در اختیار داری کامل می‌کنی، یعنی آن را در ۶ ضرب می‌کنی، می‌شود مال به اضافه‌ی جذر $[x^2+x]$. پس یک درهم را در شش ضرب می‌کنی، می‌شود شش درهم. حاصل آن یک مال و یک جذر است که برابر است با شش درهم $[x^2+x=6]$. آن‌گاه تعداد جذر را پس از نصف کردن در مانند خودش ضرب کن و آن را بر شش بیفزا $\left[6+(\frac{1}{2})^2\right]$. جذر حاصل جمع را بگیر و نصف تعداد جذری را که در مانند خودش ضرب کرده بودی و عبارت است از نصف $\frac{1}{2}$، از آن کم کن $\left[-\frac{1}{2}+\sqrt{(\frac{1}{2})^2+6}\right]$. مانده عبارت است از تعداد مردان نوبت اول که در این مسئله دو مرد است.

خوارزمی شش نوع معادله را بررسی می‌کند و برای هر کدام راه‌حل خاصی می‌دهد. این شش نوع معادله به زبان نمادهای امروزی چنین هستند:

۱) $x^2=2x$

۲) $x^2=36$

۳) $5x=10$

۴) $x^2+7x=128$

۵) $5x^2+21=10x$

۶) $12x+288=x^2$

معادله‌ی سوم معادله‌ای درجه اول است، ولی خوارزمی در بخش‌بندی خود بر این اساس عمل می‌کند که در معادله‌ی درجه دوم، سه جمله وجود دارد: جمله‌ی درجه دوم، جمله‌ی درجه اول و مقدار ثابت. در ترکیب معادله ممکن است تنها دو جمله از این سه جمله دخالت داشته باشند (حالت‌های ۱، ۲ و ۳) و یا هر سه جمله (حالت‌های ۴، ۵ و ۶). در ضمن، وقتی هر سه جمله از معادله‌ی درجه دوم وجود دارد، ممکن است جمله‌های درجه اول و درجه دوم در یک طرف و مقدار ثابت در طرف دیگر باشد (حالت ۴). یا جمله‌ی درجه دوم و مقدار ثابت در یک طرف و جمله‌ی درجه اول در طرف دیگر باشد (حالت ۵). سرانجام جمله‌ی درجه اول و مقدار ثابت در یک طرف و جمله‌ی درجه دوم در طرف دیگر (حالت ۶).

همان‌طور که ضمن راه‌حل مسئله‌ی نمونه دیدیم، خوارزمی برای حل معادله، نه از دستور و نماد، بلکه از بیان استفاده می‌کند و در ضمن در حالت‌هایی که دو ریشه‌ی معادله مثبت باشند، هر دو ریشه را به دست می‌آورد و از این بابت بر جبر دیوفانتی برتری دارد.

خوارزمی برای حل معادله‌ها از

روش‌های هندسی هم استفاده می‌کند. برای نمونه در باب دوم (باب جذر، مال و عدد)، نیز عنوان استدلال در یک مال و ده جذر با سی‌ونه درهم را برابر می‌گیرد.»

خوارزمی درباره‌ی حساب «کتاب حساب الهند» را هم مطالعه کرده بود. این کتاب در پیشرفت بعدی ریاضیات در اروپایی غربی، نقش بی‌اندازه‌ای داشته است، زیرا اروپاییان به‌وسیله‌ی آن با روش هندی عددنویسی آشنا شدند. سپس دستگاه رقم‌های هندی، پایه‌ی کاربردی پیدا کرد. اروپاییان این شکل عددنویسی و شکل موضعی را در واقع از عددنویسی هندی گرفتند و آن را «عددنویسی عربی» نامیدند (حتی امروز هم بعضی از کتاب‌ها این اصطلاح نادرست را به‌کار می‌برند).

نام خوارزمی در آغاز با برگردان کتاب حساب الهند به اروپا رفت و به‌صورت لاتین شده‌ی آن «الگورتیموس» درآمد. به‌تدریج در تمامی اروپای غربی، نخست عنوان آلگورتیموس و بعدها الگوریتم، روش عددنویس هندی، یعنی همین عددنویسی امروزی ما، رواج یافت. ولی به مرور، این عنوان، یعنی الگوریتم، به هر دستگاه با دنباله‌ای از محاسبه داده شد؛ هم‌چون الگوریتم روش ضرب عددهای چندرقمی که ضرب عدد چند رقمی را به‌صورت ستونی توضیح می‌دهد، الگوریتم اقلیدس برای پیدا کردن بزرگ‌ترین بخش‌یاب عددها، الگوریتم حل معادله‌ی درجه‌ی دوم، و غیر آن.

به این نکته توجه داشته باشیم که واژه‌ی لگاریتم هیچ ربطی با واژه‌ی الگوریتم و در نتیجه با نام خوارزمی ندارد.

به جز این، نامی که خوارزمی بر این کتاب جبر گذاشت، امروز در همه‌ی زبان‌های جهان باقی مانده است: در زبان فرانسوی ALgeber، در زبان انگلیسی ALgebra و در زبان روسی الگبر.

❖❖❖

از کتاب‌های خوارزمی تنها کتاب جبر و مقابله‌ی او با همت زنده‌یاد حسین خدیوجم به فارسی ترجمه شده است. اگر ارشمیدس و چند تن دیگر را کنار بگذاریم، می‌توان ادعا کرد که ریاضیات یونانی در دوران شکوفایی خود نتوانست در جهت پیدایش «جبر» یا حتی کمتر از آن «حساب» گامی جدی، بردارد. بیشتر ریاضی‌دانان در زمینه‌ی هندسه تلاش می‌کردند و در این راه توانستند تا درون هندسه‌ی عالی نفوذ کنند، ولی با آن‌که صدها سال پیش از ریاضی‌دان یونانی، دانشمندان سرزمین‌های میان دو رود (بین‌النهرین) به مرحله‌های بالایی از ریاضیات محاسبه‌ای رسیده بودند، یونانی‌ها حتی توانستند از عهده‌ی نوشتن عددهای بزرگ و دشوارتر از آن، عمل روی این عددها، به سادگی برآیند.

در واقع در یونان، عددها را به یاری حرف‌های الفبا (و با بیست و هفت نشانه) می‌نوشتند و هنوز عددنویسی آن‌ها شکل موضعی نداشت، عددنویسی موضعی همراه با قبول نمادی برای صفر در میان دو رود وجود داشت و بعدها در سده‌های نخست میلادی دوباره در هند پیدا شد.

در میان دو رود (ماوراءالنهر)، به‌صورت مقدماتی‌ترین عیلامی‌ها از شکل موضعی بودن عدد استفاده می‌کردند و در بیشتر حالت‌ها از مبنای ۶۰ استفاده می‌کردند. تقسیم محیط دایره به ۳۶۰ درجه و سپس بخش‌های شصت شصتی آن و نیز تقسیم‌بندی زمان براساس ساعت، دقیقه، ثانیه و عمده‌ی کارهای قوم‌های ساکن میان دو رود براساس قبول عددنویسی شصت شصتی بود.

> ❖ **تنها کافی نیست اندیشه‌ای خوب داشته باشیم، اصل مطلب این است که آن را خوب به کار ببریم.**
>
> «رنه دکارت»

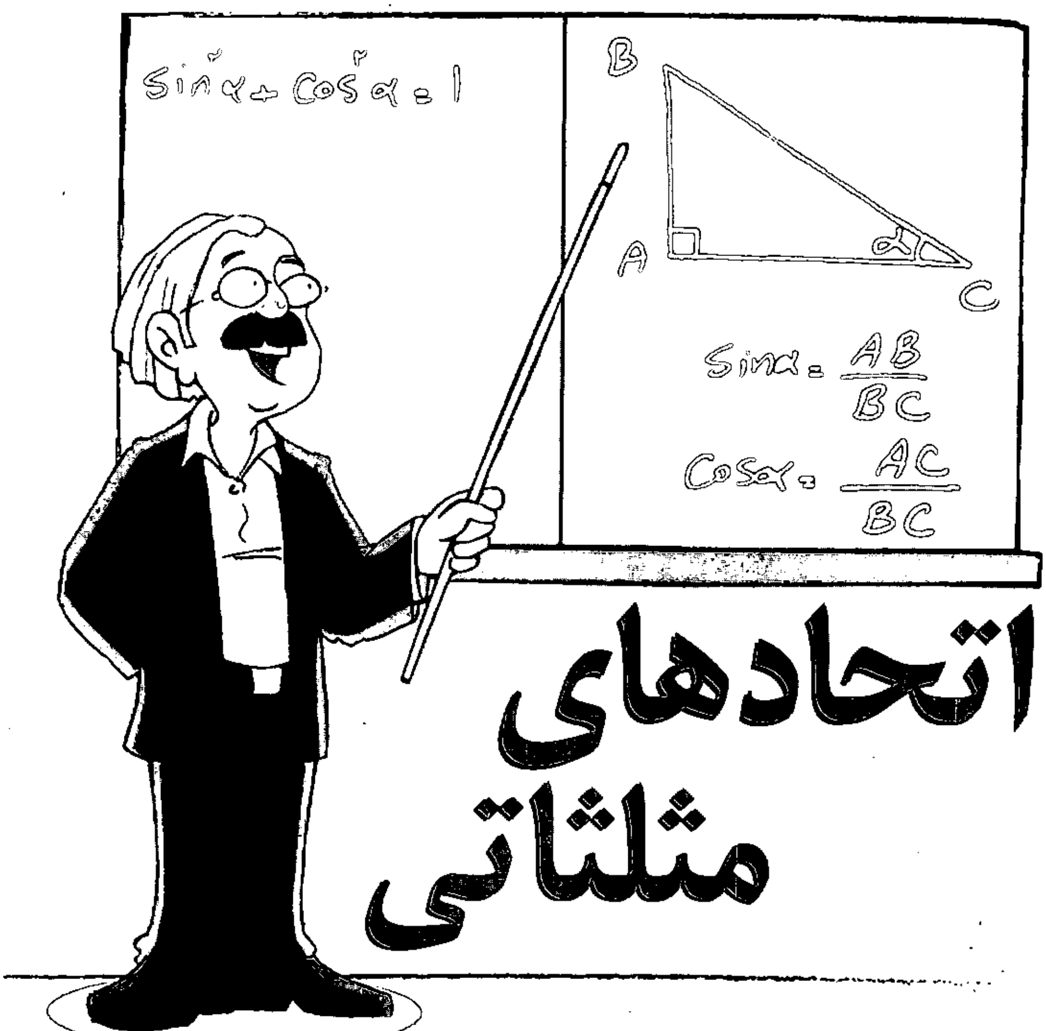
تفاوتی را که دانشمندان بابلی و یونانی در نوع برخورد با ریاضیات داشتند، باید در نیازهای اجتماعی ـ اقتصاد این دو سرزمین و در نوع تفاوت‌های سیاسی ـ اجتماعی آن‌ها جست‌وجو کرد. در هر دو سرزمین، نظام برده‌داری حاکم بود. برده‌داری دولتی در بابل و برده‌داری شخصی در یونان.

نظام دموکراسی یونان تا حدی شامل آزادها یعنی صاحبان برده می‌شد. آزادها هرگونه کار عملی را شایسته‌ی خود نمی‌دانستند و آن‌ها را به عهده‌ی برده‌ها می‌گذاشتند. همین امر در شیوه‌ی تفکر علمی آزادها اثر گذاشت. آن‌ها هر دانشی را که کاربرد عملی داشت، دانشی پست به حساب می‌آوردند و تحقیر می‌کردند و چون تصور آن‌ها بر این بود که هندسه کاربردی عملی ندارد، آن را عزیز می‌شمردند و تمام همت خود را در کشف رازهای آن مصروف می‌داشتند. چنین بود که حساب و به‌طور طبیعی جبر که در واقع از راه تکامل حساب می‌توان به آن رسید، به خاطر جنبه‌های عملی و کاربردی آن مورد عنایت آزادها نبود. آزادها کارهای مهم‌تری داشتند: کشف رازهای طبیعت و ساختمان جهان.

به همین مناسبت، هر دانشمند یونانی فیلسوف بود و برای گره‌گشایی رازهای پنهانی جهان کوشید. کارهای پست و عملی را برده‌ها انجام می‌دادند. این کارها در اعتبار آزادها نبود. اگر کسانی هم‌چون اوپانیتوس در زمینه‌های مهندسی می‌اندیشیدند، نه در همان زمان و نه پس از خودشان مورد توجه نبودند و اندیشه‌هایشان دنبال نمی‌شد. اوپانیتوس توانسته بود با مهارت نخستین، آب‌گیری را در یکی از کوه‌های ساموس سوراخ کند و در دل کوه مسیری را به طول یک کیلومتر برای عبور آب به‌وجود آورد.

البته نباید دانشمندان بزرگی هم‌چون ارشمیدس را که در همه‌ی زمینه‌های عملی از حساب تا مکانیک کار می‌کرد، یا **ارسطو** را که تلاشی موفق در جمع‌آوری همه‌ی دانش‌های منطقی و غیرمنطقی زمان خود کرد، از جمله‌ی استثناها به شمار آورد؛ به‌ویژه که کار پرارزش آن‌ها اثر چندانی بر روند کلی حرکت دانش زمان آن‌ها نداشت. ■

● احمد قندهاری



اتحادهای مثلثاتی

تعریف: هر تساوی مثلثاتی، بین یک یا چند نسبت مثلثاتی که به ازای جمیع مقادیر متغیر یا متغیرهای تعریف‌شده در آن، همواره برقرار باشد، یک اتحاد مثلثاتی نامیده می‌شود. برای مثال، تساوی (I) $\sin^4 x + \cos^4 x + \frac{1}{2}\sin^2 2x = 1$ یک اتحاد مثلثاتی است. اگر به جای x، هر زاویه‌ای را قرار دهیم، تساوی فوق برقرار است.

اثبات یک اتحاد مثلثاتی معمولاً به سه روش صورت می‌گیرد:

روش اول: یک طرف اتحاد مثلثاتی را که عبارت مفصل‌تری است، با استفاده از فرمول‌های مثلثاتی و رابطه‌های دیگر مثلثاتی، آن‌قدر ساده‌تر می‌کنیم و تغییر می‌دهیم تا به طرف دیگر برسیم.

مثال ۱. درستی اتحاد $\frac{\tan A}{\cot B} = \frac{\tan A - \tan B}{\cot B - \cot A}$ را ثابت کنید.

حل: عبارت سمت چپ این اتحاد را ساده می‌کنیم تا به عبارت سمت راست برسیم.

$$\text{عبارت سمت چپ} = \frac{\tan A - \tan B}{\cot B - \cot A} = \frac{\tan A - \tan B}{\frac{1}{\tan B} - \frac{1}{\tan A}} = \frac{\tan A - \tan B}{\frac{\tan A - \tan B}{\tan A . \tan B}}$$

$$\text{عبارت سمت چپ} = \tan A . \tan B = \tan A \times \frac{1}{\cot B}$$

$$= \frac{\tan A}{\cot B}$$ برابر عبارت سمت راست

▲▼▲

روش دوم: فرض می‌کنیم تساوی اتحاد درست باشد. دو طرف تساوی را به کمک فرمول‌ها و روابط مثلثاتی به صورت ساده‌تر می‌نویسیم تا به دو عبارت برابر برسیم.

مثال۲. درستی اتحاد $\frac{2-\sin 2a}{2}=\frac{\sin^3 a+\cos^3 a}{\sin a+\cos a}$ را ثابت کنید.

حل: فرض می‌کنیم تساوی این اتحاد درست باشد. برای حل به روش دوم، طرفین وسطین می‌کنیم:

$$\Rightarrow 2(\sin^3 a+\cos^3 a)=(\sin a+\cos a)(2-\sin 2a)$$

عبارت سمت چپ را با استفاده از اتحاد زیر بسط می‌دهیم:

$$x^3+y^3=(x+y)(x^2+y^2-xy)$$

$$\Rightarrow 2(\sin a+\cos a)(\underbrace{\sin^2 a+\cos^2 a}_{1}-\sin a\cos a)$$

$$=(\sin a+\cos a)(2-\sin 2a)$$

$$\Rightarrow 2(\sin a+\cos a)(1-\frac{1}{2}\sin 2a)=(\sin a+\cos a)(2-\sin 2a)$$

$$\Rightarrow (\sin a+\cos a)(2-\sin 2a)=(\sin a+\cos a)(2-\sin 2a)$$

▲▼▲

روش سوم: با نوشتن روابطی و با استفاده از فرمول‌ها و روابط مثلثاتی، صورت اصلی اتحاد را می‌سازیم (این روش در واقع برگشت‌پذیری روش دوم است).

مثال۳. درستی اتحاد $\frac{2\sin x}{1-\cos x}=\frac{1+\cos x}{\sin x}+\frac{\sin x}{1-\cos x}$ را ثابت کنید.

حل: به ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

$$2\sin x=2\sin x$$

دو طرف تساوی را بر $(1-\cos x)\neq 0$ تقسیم می‌کنیم:

$$\Rightarrow \frac{2\sin x}{1-\cos x}=\frac{2\sin x}{1-\cos x}$$

عبارت سمت چپ را در $\frac{\sin x}{\sin x}$ ضرب می‌کنیم:

$$\Rightarrow \frac{2\sin^2 x}{\sin x(1-\cos x)}=\frac{2\sin x}{1-\cos x}$$

تفکیک می‌کنیم:

$$\Rightarrow \frac{\sin^2 x+\sin^2 x}{\sin x(1-\cos x)}=\frac{2\sin x}{1-\cos x}$$

$$\Rightarrow \frac{\sin^2 x+(1-\cos^2 x)}{\sin x(1-\cos x)}=\frac{2\sin x}{1-\cos x}$$

$$\Rightarrow \frac{\sin^2 x}{\sin x(1-\cos x)}+\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{\sin x(1-\cos x)}=\frac{2\sin x}{1-\cos x}$$

$$\begin{cases}\sin x\neq 0\\(1-\cos x)\neq 0\end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{\sin x}{1-\cos x}+\frac{1+\cos x}{\sin x}=\frac{2\sin x}{1-\cos x}$$

▲▼▲

توجه: این روش معمول نیست، ولی در اتحادهای مثلثاتی مسائلی داریم که با این روش، راحت‌تر حل می‌شوند.

مسائل



۱. صحت اتحاد زیر را ثابت کنید.

$$(1-\cos^2\alpha)(1+\tan^2\alpha)=\tan^2\alpha$$

حل: به روش اول حل می‌کنیم:

$$\text{عبارت سمت چپ}=(1-\cos^2\alpha)(1+\tan^2\alpha)=(\sin^2\alpha)(1+\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha})$$

$$\text{عبارت سمت چپ}=(\sin^2\alpha)(\frac{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha})=\sin^2\alpha(\frac{1}{\cos^2\alpha})$$

$$=\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}=\tan^2\alpha$$

▲▼▲

۲. صحت اتحاد $\frac{2}{\sin^2\alpha}=(\cot\alpha+1)^2+(\cot\alpha-1)^2$ را ثابت کنید.

حل: به روش اول حل می‌کنیم:

$$\text{عبارت سمت چپ}=\cot^2\alpha+1-2\cot\alpha+\cot^2\alpha+1+2\cot\alpha$$

$$\text{عبارت سمت چپ}=2\cot^2\alpha+2=2(\cot^2\alpha+1)=2(\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}+1)$$

$$=2(\frac{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha})$$

$$\text{عبارت سمت چپ}=2(\frac{1}{\sin^2\alpha})=\frac{2}{\sin^2\alpha}$$

▲▼▲

۳. صحت اتحاد $\frac{1-2\cos^2\alpha}{\sin\alpha.\cos\alpha}=\tan\alpha-\cot\alpha$ را ثابت کنید.

حل: به روش اول حل می‌کنیم:

$$\text{عبارت سمت چپ}=\frac{\overbrace{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}^{1}-2\cos^2\alpha}{\sin\alpha.\cos\alpha}=\frac{\sin^2-\cos^2\alpha}{\sin\alpha.\cos\alpha}$$

کسر را تفکیک می‌کنیم:

$$\text{عبارت سمت چپ}=\frac{\sin^2\alpha}{\sin\alpha.\cos\alpha}-\frac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha.\cos\alpha}=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}-\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

$$=\tan\alpha-\cot\alpha$$

▲▼▲

۴. درستی اتحاد $\frac{1-\tan^2(45^\circ-\alpha)}{1+\tan(45^\circ-\alpha)}=\sin 2\alpha$ را ثابت کنید.

حل: $45^\circ-\alpha=x$ فرض می‌شود.

$$\text{عبارت سمت چپ}=\frac{1-\tan^2x}{1+\tan^2x}=\frac{1-\frac{\sin^2x}{\cos^2x}}{1+\frac{\sin^2x}{\cos^2x}}=\frac{\frac{\cos^2x-\sin^2x}{\cos^2x}}{\frac{\cos^2x+\sin^2x}{\cos^2x}}$$

$$=\frac{\frac{\cos 2x}{\cos^2x}}{\frac{1}{\cos^2x}}$$

$$\text{عبارت سمت چپ}=\cos 2x=\cos(90^\circ-2\alpha)=\cos(\frac{\pi}{2}-2\alpha)$$

$$=\sin 2\alpha$$

▲▼▲

۵. درستی اتحاد $\sin 15^\circ+\tan 30^\circ\cos 15^\circ=\frac{\sqrt{6}}{3}$ را ثابت کنید.

حل:

$$\text{عبارت سمت چپ}=\sin 15^\circ+\frac{\sin 30^\circ}{\cos 30^\circ}.\cos 15^\circ$$

$$\text{عبارت سمت چپ}=\frac{\sin 15^\circ\cos 30^\circ+\cos 15^\circ\sin 30^\circ}{\cos 30^\circ}$$

$$=\frac{\sin(15^\circ+30^\circ)}{\cos 30^\circ}=\frac{\sin 45^\circ}{\cos 30^\circ}$$

$$\text{عبارت سمت چپ}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\times\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$$

▲▼▲

۶. صحت اتحاد زیر را ثابت کنید.

$$\cos(\alpha+\beta).\cos(\alpha-\beta)=\cos^2\alpha-\sin^2\beta$$

حل:

$$\text{عبارت سمت چپ}=\underbrace{(\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta)(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)}_{\text{اتحاد مزدوج}}$$

$$\text{عبارت سمت چپ}=\cos^2\alpha\cos^2\beta-\sin^2\alpha.\sin^2\beta$$

$$=\cos^2\alpha(1-\sin^2\beta)-(1-\cos^2\alpha)\sin^2\beta$$

$$=\cos^2\alpha-\cos^2\alpha\sin^2\beta-\sin^2\beta+\cos^2\alpha.\sin^2\beta$$

$$=\cos^2\alpha-\sin^2\beta$$

▲▼▲

۷. صحت اتحاد زیر را ثابت کنید.

$$\sin 200^\circ.\sin 310^\circ+\cos 340^\circ.\cos 50^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

حل:

$$\sin 200^\circ=\sin(180^\circ+20^\circ)=\sin(\pi+20^\circ)=-\sin 20^\circ$$

$$\sin 310^\circ=\sin(360^\circ-50^\circ)=\sin(2\pi-50^\circ)=-\sin 50^\circ$$

$$\cos 340^\circ=\cos(360^\circ-20^\circ)=\cos(2\pi-20^\circ)=\cos 20^\circ$$

$$\text{عبارت سمت چپ}=(-\sin 20^\circ)(-\sin 50^\circ)+\cos 20^\circ\cos 50^\circ$$

$$=\cos 20^\circ\cos 50^\circ+\sin 20^\circ\sin 50^\circ$$

$$=\cos(50^\circ-20^\circ)=\cos 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

▲▼▲

۸. صحت اتحاد زیر را ثابت کنید.

$$\cos\alpha+\cos(120^\circ+\alpha)+\cos(240^\circ+\alpha)=0$$

حل:

$$\text{عبارت سمت چپ}=\cos\alpha+\cos(180^\circ-60^\circ+\alpha)+\cos(180^\circ+60^\circ+\alpha)$$

$$\text{عبارت سمت چپ}=\cos\alpha+\cos(\pi+(\alpha-60^\circ))+\cos(\pi+(\alpha+60^\circ))$$

$$\text{عبارت سمت چپ}=\cos\alpha-\cos(\alpha-60^\circ)-\cos(\alpha+60^\circ)$$

$$\text{عبارت سمت چپ}=\cos\alpha-(\cos\alpha\cos 60^\circ+\sin\alpha\sin 60^\circ)-(\cos\alpha\cos 60^\circ-\sin\alpha\sin 60^\circ)$$

$$\text{عبارت سمت چپ}=\cos\alpha-\cos\alpha\cos 60^\circ-\sin\alpha\sin 60^\circ-\cos\alpha\cos 60^\circ+\sin\alpha\sin 60^\circ$$

$$\text{عبارت سمت چپ}=\cos\alpha-2\cos\alpha.\cos 60^\circ=\cos\alpha-2\cos\alpha(\frac{1}{2})$$

$$=\cos\alpha-\cos\alpha=0$$

▲▼▲

۹. صحت اتحاد زیر را ثابت کنید.

$$\sin^4\alpha+\cos^4\alpha=1-\frac{1}{2}\sin^2 2\alpha$$

حل: داریم:

$$a^4+b^4=(a^2+b^2)^2-2a^2b^2$$

$\text{عبارت سمت چپ} = \sin^4\alpha + \cos^4\alpha = (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)^2 - 2\sin^2\alpha.\cos^2\alpha$

$\text{عبارت سمت چپ} = (1)^2 - 2\sin^2\alpha.\cos^2\alpha = 1 - 2(\sin\alpha.\cos\alpha)^2$

$= 1 - 2(\frac{1}{2}\sin 2\alpha)^2$

$\text{عبارت سمت چپ} = 1 - 2(\frac{1}{4}\sin^2 2\alpha) = 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2\alpha$

به خاطر بسپارید: $\sin^4\alpha + \cos^4\alpha = 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2\alpha$

▲▼▲

۱۰. صحت اتحاد زیر را ثابت کنید.

$$\sin^6\alpha + \cos^6\alpha = 1 - \frac{3}{4}\sin^2 2\alpha$$

حل:

توجه داریم:

$$\begin{cases} a^6 + b^6 = (a^2 + b^2)(a^4 + b^4 - a^2b^2) \\ a^4 + b^4 = (a^2 + b^2)^2 - 2a^2b^2 \end{cases}$$

و $\Rightarrow a^6 + b^6 = (a^2 + b^2)\left[(a^2 + b^2)^2 - 3a^2b^2\right]$

$\text{عبارت سمت چپ} = \sin^6\alpha + \cos^6\alpha = (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) \times \left[(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)^2 - 3\sin^2\alpha\cos^2\alpha\right]$

$= 1\left[1 - 3(\sin\alpha\cos\alpha)^2\right] = 1 - 3(\frac{1}{2}\sin 2\alpha)^2 = 1 - \frac{3}{4}\sin^2 2\alpha$

به خاطر بسپارید: $\sin^6\alpha + \cos^6\alpha = 1 - \frac{3}{4}\sin^2 2\alpha$

▲▼▲

۱۱. درستی اتحاد زیر را ثابت کنید.

$$\frac{\sin\theta}{\frac{1}{\sin\theta} - 1} + \frac{\sin\theta}{\frac{1}{\sin\theta} + 1} = 2\tan^2\theta$$

حل:

$$\text{عبارت سمت چپ} = \frac{\sin\theta}{\frac{1 - \sin\theta}{\sin\theta}} + \frac{\sin\theta}{\frac{1 + \sin\theta}{\sin\theta}} = \frac{\sin^2\theta}{1 - \sin\theta} + \frac{\sin^2\theta}{1 + \sin\theta}$$

$$= \frac{\sin^2\theta(1 + \sin\theta) + \sin^2\theta(1 - \sin\theta)}{(1 - \sin\theta)(1 + \sin\theta)}$$

$$= \frac{\sin^2\theta + \sin^3\theta + \sin^2\theta - \sin^3\theta}{1 - \sin^2\theta}$$

$$= \frac{2\sin^2\theta}{1 - \sin^2\theta} = \frac{2\sin^2\theta}{\cos^2\theta} = 2\tan^2\theta$$

▲▼▲

۱۲. درستی اتحاد زیر را ثابت کنید.

$$\frac{1}{\cos^4\alpha} - 1 - \tan^4\alpha = 2\tan^2\alpha$$

حل:

$\text{عبارت سمت چپ} = (\frac{1}{\cos^2\alpha})^2 - 1 - \tan^4\alpha = (1 + \tan^2\alpha)^2 - 1 - \tan^4\alpha$

$\text{عبارت سمت چپ} = 1 + \tan^4\alpha + 2\tan^2\alpha - 1 - \tan^4\alpha = 2\tan^2\alpha$

▲▼▲

۱۳. درستی اتحاد زیر را ثابت کنید.

$$\frac{1}{\cos^4\alpha + \cos^2\alpha\sin^2\alpha + \sin^2\alpha + \tan^2\alpha} = \cos^2\alpha$$

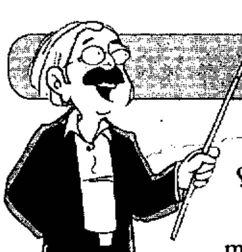
حل:

$$\text{عبارت سمت چپ} = \frac{1}{\cos^2\alpha(\underbrace{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha}_{1}) + \sin^2\alpha + \tan^2\alpha}$$

$$= \frac{1}{\underbrace{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha}_{1} + \tan^2\alpha}$$

$$= \frac{1}{1 + \tan^2\alpha} = \frac{1}{1 + \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}} = \frac{1}{\frac{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}} = \cos^2\alpha$$

سؤالات چهارگزینه‌ای



۱. اگر $\pi > x > 0$ باشد، آن‌گاه به ازای چه مقادیری از m، معادله‌ی $2\tan\frac{x}{2} = 4 - m^2$ جواب دارد؟

۱) $m > 2$ یا $m < -2$ ۲) $-2 < m < 2$ ۳) $-4 < m < 4$ ۴) $m > 4$ یا $m < -4$

۲. حاصل $\frac{1 + \tan 15^\circ}{1 - \tan 15^\circ} + \frac{1 - \tan 15^\circ}{1 + \tan 15^\circ}$ برابر است با:

۱) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ ۲) $\frac{3\sqrt{3}}{3}$ ۳) $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ ۴) $\frac{5\sqrt{3}}{3}$

۳. حاصل $\tan 21^\circ + \tan 39^\circ + \sqrt{3}\tan 20^\circ \tan 60^\circ$ برابر است با:

۱) $\sqrt{3}$ ۲) 1 ۳) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ۴) -1

۴. حاصل $\frac{\sqrt{3}}{\sin 80^\circ} - \frac{1}{\sin 10^\circ}$ برابر است با:

۱) 4 ۲) -4 ۳) $-\frac{1}{4}$ ۴) $\frac{1}{4}$

۵. حاصل $\cos^2 20^\circ - \cos^2 70^\circ$ برابر است با:

۱) $\sin 40^\circ$ ۲) $-\sin 50^\circ$ ۳) $-\sin 80^\circ$ ۴) $-\sin 70^\circ$

۶. حاصل $\sin^4 \frac{\pi}{12} + \cos^4 \frac{\pi}{12}$ برابر است با:

۱) $\frac{7}{8}$ ۲) $-\frac{7}{8}$ ۳) $\frac{3}{4}$ ۴) $\frac{5}{8}$

۷. حاصل $\sin^6 \frac{\pi}{12} + \cos^6 \frac{\pi}{12}$ برابر است با:

۱) $\frac{11}{16}$ ۲) $\frac{12}{16}$ ۳) $\frac{13}{16}$ ۴) $\frac{14}{16}$

۸. اگر $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ باشد، آن‌گاه حاصل $\sqrt{\frac{1-\cos 2x}{1+\cos 2x}}$ برابر است با:

۱) $\tan x$ ۲) $\cot x$ ۳) $-\tan x$ ۴) $-\cot x$

۹. حاصل عبارت $\sin 15^\circ + \frac{\sqrt{3}}{3}\cos 15^\circ$ برابر است با:

۱) $\sqrt{6}$ ۲) $\frac{\sqrt{6}}{2}$ ۳) $\frac{\sqrt{6}}{3}$ ۴) $\frac{\sqrt{6}}{4}$

۱۰. حاصل کسر $\frac{8\cos\frac{x}{2}.\cos\frac{x}{4}\cos x}{\sin 2x}$ برابر کدام گزینه است؟

۱) $\frac{1}{\sin\frac{x}{2}}$ ۲) $\frac{1}{\cos\frac{x}{2}}$ ۳) $\frac{1}{\sin\frac{x}{4}}$ ۴) $\frac{1}{\cos\frac{x}{4}}$

۱۱. حاصل $\cos^2(x+\frac{\pi}{4}) - \cos^2(x-\frac{\pi}{4})$ برابر است با:

۱) $\cos 2x$ ۲) $\sin 2x$ ۳) $-\sin 2x$ ۴) $-\cos 2x$

۱۲. حاصل $\cos\frac{3\pi}{5}.\cos\frac{\pi}{5}$ برابر است با:

۱) $\frac{1}{4}$ ۲) $-\frac{1}{4}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $-\frac{1}{2}$

۱۳. اگر $\cot\alpha$ و $\cot\beta$ ریشه‌های معادله‌ی $x^2 - 2x - 2 = 0$ باشند، آن‌گاه $\tan(\alpha+\beta)$ برابر است با:

۱) $-\frac{3}{2}$ ۲) $-\frac{2}{3}$ ۳) $\frac{2}{3}$ ۴) $\frac{3}{2}$

۱۴. حاصل کسر $\frac{2\sin\alpha - \sin 2\alpha}{2\sin\alpha + \sin 2\alpha}$ برابر است با: $(\alpha \neq k\pi)$

۱) $\sin^2\frac{\alpha}{2}$ ۲) $\cos^2\frac{\alpha}{2}$ ۳) $\tan^2\frac{\alpha}{2}$ ۴) $\cot^2\frac{\alpha}{2}$

۱۵. حاصل $\cos^2 20^\circ - \cos^2 70^\circ$ برابر است با:

۱) $\cos 40^\circ$ ۲) $-\cos 40^\circ$ ۳) $-\cos 70^\circ$ ۴) $-\sin 70^\circ$

حل سؤالات چهارگزینه‌ای

۱. گزینه‌ی ۲:

$$0 < x < \pi \Rightarrow 0 < \frac{x}{2} < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \tan\frac{x}{2} > 0$$

$$\tan\frac{x}{2} = \frac{4-m^2}{2} \Rightarrow \frac{4-m^2}{2} > 0 \Rightarrow 4 - m^2 > 0 \Rightarrow m^2 < 4$$

$$\Rightarrow -2 < m < 2$$

۲. گزینه‌ی ۳:

$$A = \frac{1-\tan 15^\circ}{1+\tan 15^\circ} + \frac{1+\tan 15^\circ}{1-\tan 15^\circ}$$

$$= \frac{\tan 45^\circ - \tan 15^\circ}{1+\tan 45^\circ \tan 15^\circ} + \frac{\tan 45^\circ + \tan 15^\circ}{1-\tan 45^\circ \tan 15^\circ}$$

$$= \tan(45^\circ - 15^\circ) + \tan(45^\circ + 15^\circ) = \tan 30^\circ + \tan 60^\circ$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{3} + \sqrt{3} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

۳. گزینه‌ی ۱ : $21^\circ+39^\circ=60^\circ \Rightarrow \tan 60^\circ=\tan(21^\circ+39^\circ)$

$$\Rightarrow \sqrt{3}=\frac{\tan 21^\circ+\tan 39^\circ}{1-\tan 21^\circ \tan 39^\circ}$$

$$\Rightarrow \tan 21^\circ+\tan 39^\circ=\sqrt{3}-\sqrt{3}\tan 21^\circ \tan 39^\circ$$

$$\Rightarrow \tan 21^\circ+\tan 39^\circ+\sqrt{3}\tan 21^\circ \tan 39^\circ=\sqrt{3}$$

۴. گزینه‌ی ۱ : $\sin 80^\circ=\sin(90^\circ-10)=\sin(\frac{\pi}{2}-10^\circ)=\cos 10^\circ$

$$\frac{1}{\sin 10^\circ}-\frac{\sqrt{3}}{\cos 10^\circ}=\frac{\cos 10^\circ-\sqrt{3}\sin 10^\circ}{\sin 10^\circ \cos 10^\circ}$$

$$=\frac{\cos 10^\circ-\tan 60^\circ \sin 10^\circ}{\frac{1}{2}\sin 20^\circ}$$

$$=\frac{\cos 10^\circ-\frac{\sin 60^\circ}{\cos 60^\circ}\sin 10^\circ}{\frac{1}{2}\sin 20^\circ}$$

$$=\frac{\frac{\cos 60^\circ\cos 10^\circ-\sin 10^\circ \sin 60^\circ}{\cos 60^\circ}}{\frac{1}{2}\sin 20^\circ}=\frac{\frac{\cos(60^\circ+10^\circ)}{\cos 60^\circ}}{\frac{1}{2}\sin 20^\circ}$$

$$=\frac{\cos 70^\circ}{\frac{1}{2}\sin 20^\circ \cos 60^\circ}=\frac{\cos(90^\circ-20^\circ)}{\frac{1}{2}\sin 20^\circ(\frac{1}{2})}=\frac{\cos(\frac{\pi}{2}-20^\circ)}{\frac{1}{4}\sin 20^\circ}$$

$$=\frac{\sin 20^\circ}{\frac{1}{4}\sin 20^\circ}=4$$

۵. گزینه‌ی ۲ :

$$\cos^2 70^\circ-\cos^2 20^\circ=\cos^2(\frac{\pi}{2}-20^\circ)-\cos^2 20^\circ$$

$$=\sin^2 20^\circ-\cos^2 20^\circ$$

$$=-(\cos^2 20^\circ-\sin^2 20^\circ)=-(\cos 40^\circ)$$

$$=-\cos(\frac{\pi}{2}-50^\circ)=-\sin 50^\circ$$

۶. گزینه‌ی ۱ : در مسئله‌ی ۹ درس همین مقاله داشتیم:

$$\sin^4\alpha+\cos^4\alpha=1-\frac{1}{2}\sin^2 2\alpha$$

$$\Rightarrow \sin^4\frac{\pi}{12}+\cos^4\frac{\pi}{12}=1-\frac{1}{2}\sin^2\frac{\pi}{6}=1-\frac{1}{2}(\frac{1}{2})^2=1-\frac{1}{8}=\frac{7}{8}$$

۷. گزینه‌ی ۳ : در مسئله‌ی ۱۰ درس همین مقاله داشتیم:

$$\sin^6\alpha+\cos^6\alpha=1-\frac{3}{4}\sin^2 2\alpha$$

$$\Rightarrow \sin^6\frac{\pi}{12}+\cos^6\frac{\pi}{12}=1-\frac{3}{4}\sin^2\frac{\pi}{6}=1-\frac{3}{4}(\frac{1}{2})^2$$

$$=1-\frac{3}{16}=\frac{13}{16}$$

۸. گزینه‌ی ۳ : $\sqrt{\frac{1-\cos 2x}{1+\cos 2x}}=\sqrt{\frac{2\sin^2 x}{2\cos^2 x}}=\sqrt{\tan^2 x}=|\tan x|$

$$\frac{\pi}{2}<x<\pi \Rightarrow \tan x<0 \Rightarrow |\tan x|=-\tan x$$

۹. گزینه‌ی ۳ : $\sin 15^\circ+\frac{\sqrt{3}}{3}\cos 15^\circ=\sin 15^\circ+\tan 30^\circ.\cos 15^\circ$

$$=\sin 15^\circ+\frac{\sin 30^\circ}{\cos 30^\circ}.\cos 15^\circ$$

$$=\frac{\sin 15^\circ\cos 30^\circ+\cos 15^\circ\sin 30^\circ}{\cos 30^\circ}=\frac{\sin(30^\circ+15^\circ)}{\cos 30^\circ}=\frac{\sin 45^\circ}{\cos 30^\circ}$$

$$=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\times\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$$

۱۰. گزینه‌ی ۳ :

$$\frac{8\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}.\cos x}{2(\sin x)\cos x}=\frac{8\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cos x}{2(2(\sin\frac{x}{2})\cos\frac{x}{2})\cos x}$$

$$=\frac{8\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cos x}{8\sin\frac{x}{4}.\cos\frac{x}{4}\cos\frac{x}{2}.\cos x}=\frac{1}{\sin\frac{x}{4}}$$

۱۱. گزینه‌ی ۲؛ داریم: $\cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}$ ، پس:

$$\cos^2(x-\frac{\pi}{4})-\cos^2(x+\frac{\pi}{4})=\frac{1+\cos(2x-\frac{\pi}{2})}{2}-\frac{1+\cos(2x+\frac{\pi}{2})}{2}$$

$$=\frac{1+\cos(\frac{\pi}{2}-2x)}{2}-\frac{1+\cos(\frac{\pi}{2}+2x)}{2}$$

$$=\frac{1+\sin 2x}{2}-\frac{1-\sin 2x}{2}=\frac{1+\sin 2x-1+\sin 2x}{2}$$

$$=\frac{2\sin 2x}{2}=\sin 2x$$

۱۲. گزینه‌ی ۲ :

$$\cos\frac{\pi}{5}.\cos\frac{3\pi}{5}=\cos\frac{\pi}{5}\cos(\pi-\frac{2\pi}{5})=-\cos\frac{\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5}$$

$$-\cos\frac{\pi}{5}.\cos\frac{2\pi}{5}\times\frac{4\sin\frac{\pi}{5}}{4\sin\frac{\pi}{5}}=\frac{-2(2\sin\frac{\pi}{5}\cos\frac{\pi}{5}).\cos\frac{2\pi}{5}}{4\sin\frac{\pi}{5}}$$

$$=\frac{-2(\sin\frac{2\pi}{5}.\cos\frac{2\pi}{5})}{4\sin\frac{\pi}{5}}=\frac{-\sin\frac{4\pi}{5}}{4\sin\frac{\pi}{5}}=\frac{-\sin(\pi-\frac{\pi}{5})}{4\sin\frac{\pi}{5}}$$

$$=\frac{-\sin\frac{\pi}{5}}{4\sin\frac{\pi}{5}}=\frac{-1}{4}$$

۱۳. گزینه‌ی ۲ : $\cot\alpha.\cot\beta=\frac{c}{a}=-2$ و $\cot\alpha+\cot\beta=-\frac{b}{a}=2$

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan a+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\frac{\frac{1}{\cot\alpha}+\frac{1}{\cot\beta}}{1-\frac{1}{\cot\alpha.\cot\beta}}=\frac{\frac{\cot\alpha+\cot\beta}{\cot\alpha.\cot\beta}}{1-\frac{1}{\cot\alpha.\cot\beta}}$$

$$=\frac{\frac{2}{-2}}{1-\frac{1}{-2}}=\frac{-1}{1+\frac{1}{2}}=\frac{-1}{\frac{3}{2}}=-\frac{2}{3}$$

۱۴. گزینه‌ی ۳ :

$$\frac{2\sin\alpha-2\sin\alpha\cos\alpha}{2\sin\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha}=\frac{2\sin\alpha(1-\cos\alpha)}{2\sin\alpha(1+\cos\alpha)}=\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$$

$$=\frac{2\sin^2\frac{\alpha}{2}}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}}=\tan^2\frac{\alpha}{2}$$

۱۵. گزینه‌ی ۲ : $\cos^2 70^\circ-\cos^2 20^\circ=\cos^2(\frac{\pi}{2}-20^\circ)-\cos^2 20^\circ$

$$=\sin^2 20^\circ-\cos^2 20^\circ=-(\cos^2 20^\circ-\sin^2 20^\circ)=-\cos 40^\circ$$

■

● نوشته‌ی تونی کریلی[1]

● ترجمه‌ی غلامرضا یاسی‌پور

۲

اشاره:

دستگاه شمار، روشی برای سر و کار داشتن با مفهوم «چندتا»ست. در دوره‌های متفاوت، فرهنگ‌های متفاوت، در این باره روش‌های گوناگونی پذیرفته‌اند که از شمارش اولیه‌ی «یک، دو، سه، خیلی» تا نمادنویسی بس پیچیده‌ی دهدهیِ مکانی، که امروزه به کارش می‌بریم، تنوع داشته‌اند.

دستگاه‌های شمار

اقوام «سومری»[2] و «بابلی»[3]، که حدود ۴۰۰۰ سال پیش در سوریه، اردن و عراق کنونی ساکن بودند، در کارهای عملی روزانه‌ی خود، از دستگاهی مکان ـ ارزشی استفاده می‌کردند. این دستگاه را به این علت مکان ـ ارزشی می‌نامیم که در آن می‌توان «عدد» را با استفاده از موقعیت یک نماد بیان کرد. آن‌ها ۶۰ را به عنوان واحد مبنا به کار می‌بردند؛ یعنی آن‌چه که امروزه دستگاه در مبنای ۶۰ می‌نامیم. عددی که هنوز آثاری از آن در زندگی ما موجود است: ۶۰ ثانیه در دقیقه، و ۶۰ دقیقه در ساعت. حتی زمانی که به اندازه‌گیری زوایا می‌پردازیم، هنوز زاویه‌ی کامل را، علی‌رغم کوشش‌های سیستم متریک که آن را ۴۰۰ گراد می‌نامد، (و بنابراین هر زاویه‌ی قائمه برابر ۱۰۰ گراد است) ۳۶۰ درجه در نظر می‌گیریم.



در حالی که نیاکان باستانی‌مان، در مرحله‌ی اول اعداد را برای انجام دادن کارهای عملی می‌خواستند. اسنادی در دست است که فرهنگ‌های اولیه‌ی مزبور، توسط خود ریاضیات نیز وسوسه می‌شدند، و با رخصت یافتن از کارهای عملی، به کندوکاو در آن‌ها می‌پرداختند. این کندوکاوها، به پیدایش آن‌چه می‌توان «جبر»ش نامید و نیز «خواص اشکال هندسی» انجامید.

دستگاه مصری، از قرن سیزدهم قبل از میلاد، از مبنای ۱۰ با دستگاهی از علائم «هیروگلیفی»[4] استفاده می‌کرد. مصری‌ها به ویژه دستگاهی را توسعه دادند که به کسرها می‌پرداخت. اما نمادنویسی دهدهی مکان ـ ارزشی

امروزه‌ی ما از بابلی‌ها به دستمان رسیده، و بعدها توسط هندوها پالوده شده است. سودمندی دستگاه مورد بحث، در این است که می‌تواند برای بیان اعداد بسیار کوچک و بسیار بزرگ به‌کار رود. و محاسبات‌مان با استفاده از ارقام هندی‌ـ‌عربی ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹، می‌توانند با «سهولت نسبی» انجام گیرد. برای ملاحظه‌ی این مطلب، به «دستگاه رومی»[۵] نگاهی می‌افکنیم. این دستگاه گرچه نیازهای آن‌ها را برآورده می‌کرد، اما تنها متخصصان دستگاه بودند که از عهده‌ی انجام محاسبه با آن بر می‌آمدند.

دستگاه رومی



نمادهای مبنایی به‌کار رفته در دستگاه رومی‌ها، «ده‌ها» (I, X, C و M) نیمه‌های آن‌ها (V, L و D) بودند. این نمادها برای ساختن بقیه‌ی اعداد با هم ترکیب می‌شوند. این‌گونه مطرح شده که کاربرد I، II، III و IIII از ظاهر انگشتانمان استخراج شده‌اند، V را از شکل دست حاصل می‌کنیم، و با واژگون کردن آن، و به هم وصل کردن آن دو به هم برای ساختن X، دو دست یا ده انگشت را به دست می‌آوریم. C از «centum» و M از «mille»، کلمات لاتینی، به‌ترتیب، صد و هزار، آمده است. رومی‌ها S را نیز برای «نیمه» به‌کار می‌بردند، و دستگاه کسرهایی بر مبنای ۱۲ داشتند.

دستگاه رومی از روش «پیش و بعد» در تهیه‌ی نمادهای مورد نیاز استفاده می‌کرد، اما به‌نظر می‌رسد که این کار به‌طور یک‌سان پذیرفته نشده بود. رومی‌های باستان، تنها مدت‌ها بعد از آن‌که نوشتن IIII با IV مطرح شد، ترجیح دادند که چنین بنویسند. به نظر می‌رسد که ترکیب IX نیز به‌کار رفته باشد، اما یک رومی، در صورتی که «SIX» نوشته می‌شد از آن معنی $8\frac{1}{2}$ را درمی‌یافت! در این جا اعداد مبنایی دستگاه رومی را همراه با اضافاتی از دوران وسطی آورده‌ایم:

دستگاه عددی رومی‌ها و ملحقات قرون وسطی امپراطوری

نیمه S	
یک I	
پنج V	پنج هزار $\overline{V}$
ده X	ده هزار $\overline{X}$
پنجاه L	پنجاه هزار $\overline{L}$
صد C	صد هزار $\overline{C}$
پانصد D	پانصد هزار $\overline{D}$
هزار M	یک میلیون $\overline{M}$

به‌کار بردن اعداد رومی آسان نیست. به‌عنوان نمونه، مفهوم MMMCDXLIIII تنها زمانی روشن می‌شود که به‌طور ذهنی، پرانتزهای لازم را درباره‌ی آن به‌کار بریم، در این صورت (MMM)(CD)(XL)(IIII) به‌صورت ۴+۴۰+۴۰۰+۳۰۰۰ خوانده می‌شود. اکنون سعی در جمع زیر به‌عمل می‌آوریم MMMCDXLIIII + CCCXCIIII. رومی ماهر در این هنر، از راه‌های میان‌بر و کلک استفاده می‌کند، اما برای ما یافتن پاسخ صحیح، بی‌آن‌که ابتدا آن را در دستگاه دهدهی محاسبه، و سپس نتیجه را به نماد رومی تبدیل کنیم، مشکل است:

جمع

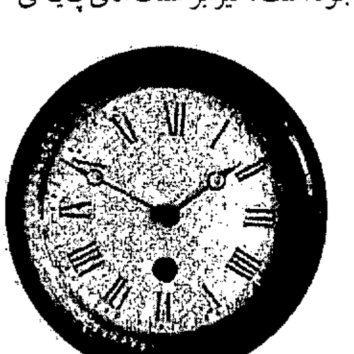
MMMCDXLIIII	→	۳۴۴۴
CCCXCIIII	→	۳۹۴ +
MMMDCCCXXXVIII	→	۳۸۳۸ =

ضرب دو عدد در دستگاه مبنایی، بسی مشکل‌تر است، و امکان دارد، حتی برای رومی‌ها نیز غیرممکن باشد! برای ضرب ۳۹۴×۳۴۴۴ به ملحقات قرون وسطی نیاز داریم.

ضرب

MMMCDXLIIII	→	۳۴۴۴
CCCXCIIII	→	۳۹۴ ×
$\overline{M}\overline{CCCL}\overline{V}$MCMXXXVI	→	۱٬۳۵۶٬۹۳۶ =

رومی‌ها، نماد خاصی برای صفر نداشتند. اگر از یک شهروند گیاه‌خوار رومی می‌پرسیدند امروز چند بطری آب مصرف کرده است، ممکن بود بنویسد III. اما در صورتی که می‌پرسیدند چند جوجه خورده است، نمی‌توانست بنویسد: ۰. آثاری از دستگاه رومی در صفحات مقدمه‌ی بعضی کتاب‌ها (گرچه نه در این یکی) موجود است، نیز بر سنگ‌های پایه‌ی ساختمان‌ها. پاره‌ای ساختارها، از قبیل MCM برای ۱۹۰۰، هرگز توسط رومی‌ها به‌کار نرفته‌اند، اما به دلیل پیروی از مد، در دوران جدید معرفی شده‌اند. رومی‌ها این عدد را به صورت



ساعت منسوب به لویی چهاردهم (XIIII)

MDCCCC می‌نوشتند. **لویی چهاردهم**، پادشاه فرانسه که امروزه به‌صورت لویی XIV شناخته می‌شود، ترجیح می‌داد که به‌صورت لویی XIIII شناخته شود. او فرمان داد ساعتش، ساعت ۴ را به‌صورت IIII نمایش دهد.

اعداد تمام دهدهی

ما به‌طور طبیعی «عددها» را با اعداد دهدهی می‌شناسیم. دستگاه دهدهی، با استفاده از شماره‌های ۰، ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸ و ۹، بر مبنای ده بنا شده است. این دستگاه عملاً مبتنی بر «ده‌ها» و «یک‌ها»ست، اما یک‌ها می‌توانند جذب «مبنای ۱۰» شوند. زیرا، زمانی که عدد ۳۹۴ را می‌نویسیم می‌توانیم مفهوم دهدهی آن را با گفتن این موضوع توضیح دهیم که این عدد، از ۳ صد، ۹ ده و ۴ واحد تشکیل شده است و می‌توانیم بنویسیم:

$$394 = 3\times100+9\times10+4\times1$$

این مطلب را می‌توان با استفاده از «توان‌ها»[6] (نیز موسوم به «نماها»[7] یا «شاخص‌ها»[8]ی ۱۰ نیز نوشت،

$$394 = 3\times10^2+9\times10^1+4\times10^0$$

که در آن $10=10^1$ و $10\times10=10^2$ و برحسب قرار داد: $1=10^0$. به این ترتیب در این توصیف مبنای «دهدهی»[9] را برای دستگاه عددی روزمره‌مان، واضح‌تر ملاحظه می‌کنیم؛ دستگاهی که جمع و ضرب را به مقدار زیادی شفاف‌تر می‌کند.

ممیز یا نقطه‌ی دهدهی

تا این جا به نمایش دادن اعدادِ تمام توجه کرده‌ایم. ولی آیا دستگاه دهدهی می‌تواند از عهده‌ی اجزای یک عدد، مثلاً $\frac{572}{1000}$ نیز برآید؟ این عبارت، بدین معنی است که:

$$\frac{572}{1000}=\frac{5}{10}+\frac{7}{100}+\frac{2}{1000}$$

در این مورد می‌توان «معکوس‌ها»[10]ی ۱۰، ۱۰۰، ۱۰۰۰ را به‌عنوان توان‌های «منفی»[11] ۱۰ در نظر گرفت. بنابراین:

$$\frac{572}{1000}=5\times10^{-1}+7\times10^{-2}+2\times10^{-3}$$

و این عبارت را می‌توان به‌صورت ۵۷۲. نوشت که در آن، نقطه‌ی دهدهی آغاز توان‌های منفی ۱۰ را مشخص می‌کند. در صورتی که این عبارت را به عبارت دهدهی ۳۹۴ بیفزاییم، بسط دهدهی عدد $394\frac{572}{1000}$ را به‌دست می‌آوریم که به‌طور ساده ۳۹۴.۵۷۲ است.

نمادنویسی دهدهی، در مورد اعداد بزرگ، می‌تواند بسیار طولانی شود، بنابراین، در این حالت به «نمادنویسی علمی»[12] برمی‌گردیم. به‌عنوان نمونه، ۱٫۳۵۶٫۹۳۶٫۸۹۲ را می‌توان به‌صورت 1.356936892×10^9 نوشت که اغلب در ماشین حساب‌های رایانه‌ای به‌صورت «1.356936892×10E9» درمی‌آید. در این جا، توان ۹ یک واحد کم‌تر از ارقام موجود در عدد است و حرف E به جای «نما»[13] قرار گرفته است. گاهی امکان دارد مایل به استفاده از اعدادی حتی بزرگ‌تر باشیم. به‌عنوان نمونه، در مورد تعداد اتم‌های هیدروژن در جهان شناخته شده صحبت می‌کنیم. این تعداد در حدود 1.7×10^{77} برآورد شده است. عدد 1.7×10^{-77} با توان منفی، عددی بسیار کوچک است، و سروکار داشتن با آن با استفاده از نمادنویسی علمی آسان است. اندیشیدن در مورد این اعداد، با نمادهای رومی ناممکن است.

صفرها و یک‌ها

درحالی که مبنای ۱۰ جریانی متعارف در زندگی هر روزه است، بعضی کاربردها به مبناهای دیگر نیاز دارند. «دستگاه دودویی»[14] که از مبنای ۲ استفاده می‌کند. اساس کار رایانه‌های مدرن است. زیبایی دستگاه دودویی در این است که در آن هر عدد را می‌توان تنها با استفاده از دو نماد ۰ و ۱ بیان کرد. گرچه تعادل در این اقتصاد از این جا به‌وجود می‌آید که عبارات عددی در این دستگاه، می‌توانند بسیار طولانی باشند.

اما چگونه می‌توان ۳۹۴ را در نمادنویسی دودویی بیان کرد؟ در این مورد با توان‌های ۲ سروکار داریم، و پس از مقداری کار، می‌توانیم عبارت کامل را به‌صورت زیر به‌دست دهیم:

$$394=1\times256+1\times128+0\times64+0\times32+0\times16+1\times8+0\times4+1\times2+0\times1$$

به این ترتیب، ۳۹۴، با در نظر گرفتن صفرها و یک‌ها، عبارت است از ۱۱۰۰۰۱۰۱۰.

از آن‌جا که عبارات دودویی می‌تواند بسیار طولانی باشند، اغلب از، سایر مبناها در محاسبه استفاده می‌شود. این مبناها عبارت‌اند از «دستگاه هشت‌گانی»[15] (مبنای ۸) و «دستگاه

شانزده‌گانی»[16] (مبنای ۱۶). در دستگاه هشت‌گانی تنها به نمادهای ۰، ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، احتیاج داریم، درحالی که شانزده‌گانی از ۱۶ نماد استفاده می‌کند. در این مبنا، مرسوم آن است که از

۰,۱,۲,۳,۴,۵,۶,۷,۸,۹, A, B, C, D, E, F

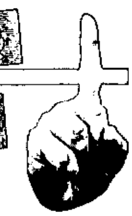
استفاده به عمل آید. در این مورد چون ۱۰ متناظر با حرف A است، عدد ۳۹۴ در دستگاه شانزده‌گانی به‌صورت ۱۸A نمایش داده می‌شود. به همین ترتیب، برای ذهن آسان‌تر است که ABC را به‌جای ۲۷۴۸ در دستگاه دهدهی به‌کار برد!

دهدهی	توان‌های ۲
۱	$۲^{۰}$
۲	$۲^{۱}$
۴	$۲^{۲}$
۸	$۲^{۳}$
۱۶	$۲^{۴}$
۳۲	$۲^{۵}$
۶۴	$۲^{۶}$
۱۲۸	$۲^{۷}$
۲۵۶	$۲^{۸}$
۵۱۲	$۲^{۹}$
۱۰۲۴	$۲^{۱۰}$

پی‌نوشت..................

1. Tony Crilly
2. Sumerians
3. Babylonians
4. hieroglyphic signs
5. Roman System
6. powers
7. exponentials
8. indices
9. decimal
10. reciprocals
11. negative
12. scientific notation
13. exponential
14. binary system
15. octal system
16. hexadecimal system

بیش‌تر بدانید



۳۰۰۰ قبل از میلاد: مردم عهد حجر در اروپا، برای ثبت اعداد روی استخوان علامت می‌زدند.

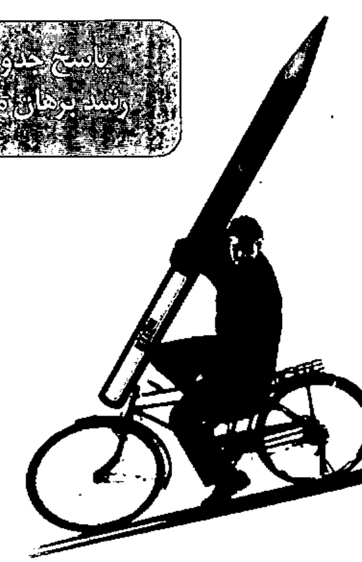
۲۰۰۰ قبل از میلاد: بابلی‌ها برای نشان دادن اعداد از نمادها استفاده می‌کردند.

۶۰۰ میلادی: صورت ابتدایی عددنویسی دهدهی مدرن، در هند به‌کار رفته است.

۱۲۰۰ میلادی: دستگاه هندی- عربی عددنویسی ۱ ، ... ، ۹ و صفر، گسترش یافت.

۱۶۰۰ میلادی: نمادهای دستگاه دهدهی، صورت‌های مدرن شناخته شده‌ای را اختیار کردند.

پاسخ جدول ریاضی رشد برهان متوسطه ۶۲



۹	۸	۷	۶	۵	۴	۳	۲	۱	
ع	ب	ر	م	■	ب	ا	س	ح	۱
م	ع	ا	■	ف	■	س	ا	ر	۲
و	د	■	د	ن	ت	■	ل	ک	۳
د	■	ه	س	ی	ب	ک	■	ت	۴
■	ل	ک	ت	■	د	س	ا	■	۵
د	■	ی	گ	ش	ی	ر	■	ب	۶
ر	ب	■	ا	ص	ل	■	ک	ی	۷
ج	ر	د	■	ت	■	ل	ا	س	۸
ه	ج	ن	ب	■	ن	ا	و	ت	۹

● هوشنگ شرقی

مسئله چنین است: دو عدد طبیعی را به ترتیب و به تصادف انتخاب می‌کنیم. احتمال آن که این دو عدد نسبت به هم اول باشند، چه قدر است؟

اگر قبل از مطالعه‌ی مقاله‌ی حاضر، کمی به این مسئله فکر کرده باشید، حتماً متوجه پیچیدگی بسیار آن شده‌اید. پاسخ به این مسئله، به طرح و پاسخ به ده‌ها مسئله‌ی دیگر منجر می‌شود. در این مقاله می‌خواهیم همه‌ی این پرسش‌ها را مطرح کنیم و به آن‌ها نیز پاسخ دهیم.



مسئله‌ای چالش‌برانگیز از احتمال!

قدم اول: آشنایی با مسئله

برای آن که با موضوع آشنا شویم، ابتدا مسئله را در حالت‌های ساده‌تر بررسی و حل می‌کنیم.

مسئله‌ی ۱. دو عدد طبیعی یک رقمی را به ترتیب و به تصادف انتخاب می‌کنیم. احتمال اول بودن این دو عدد نسبت به هم را به دست آورید.

حل: بدیهی است، چون ۹ عدد یک رقمی داریم، فضای نمونه‌ی این پیشامد شامل ۸۱ زوج مرتب از عددهای طبیعی یک رقمی است. یعنی: $n(s)=۹\times۹=۸۱$ و پیشامد مطلوب، یعنی جفت عددهایی که نسبت به هم اول‌اند نیز به سادگی قابل شمارش است. عدد ۱ نسبت به همه‌ی عددها اول است. عدد ۲ نسبت به ۱، ۳، ۵، ۷ و ۹ اول است و عدد ۳ نسبت به ۱، ۲، ۴، ۵، ۷ و ۸ اول است. به همین ترتیب، می‌توانیم تمام این گونه زوج‌ها را بشماریم و در نتیجه:

$$n(A)=۵۶ \quad \text{و} \quad P(A)=\frac{۵۶}{۸۱}$$

مسئله‌ی ۲. دو عدد طبیعی کوچک‌تر یا مساوی ۲۰ را به ترتیب و به تصادف انتخاب می‌کنیم. احتمال آن که این دو عدد نسبت به هم اول باشند، چه قدر است؟

حل: شبیه مسئله‌ی ۱، $n(S)=۲۰^۲=۴۰۰$. ولی برای محاسبه‌ی $n(A)$ چه باید کرد؟ آیا می‌توان مانند همان مسئله

عمل کرد؟ شاید آری، ولی مسلماً کار خیلی طولانی‌تری در پیش داریم. آیا با اتکا به آنالیز ترکیبی، روش کوتاه‌تری وجود ندارد؟

پاسخ مثبت است. در واقع بهتر است از متمم این مجموعه استفاده کنیم؛ یعنی زوج‌های مرتب نامطلوب را بیابیم و از تعداد کل آن‌ها (یعنی ۴۰۰) کم کنیم.

زوج‌های نامطلوب آن‌هایی هستند که نسبت به هم اول نیستند. یعنی هر دو بر یک عدد اول بخش‌پذیرند. عددهای ۲، ۳، ۵، ۷، ۱۱، ۱۳، ۱۷ و ۱۹ عددهای اول کمتر یا مساوی ۲۰ هستند. بنابراین، دو عددی نسبت به هم اول نیستند که یا هر دو بر ۲، یا هر دو بر ۳ و... و یا هر دو بر ۱۹ بخش‌پذیر باشند. اگر مجموعه زوج‌های مرتبی را که هر دو بر ۲ بخش‌پذیرند، A_1 و مجموع زوج‌های مرتبی را که هر دو بر ۳ بخش‌پذیرند، A_2 و... و مجموعه زوج‌های مرتبی را که هر دو بر ۱۹ بخش‌پذیرند، A_8 بنامیم، آن‌چه می‌خواهیم، $n(A_1 \bigcup A_2 \bigcup ... \bigcup A_8)$ است.

برای محاسبه‌ی این مقدار، به دو موضوع توجه می‌کنیم: ابتدا «اصل شمول ـ عدم شمول» که برای آگاهی از آن می‌توانید به انواع کتاب‌های ریاضیات گسسته رجوع کنید، دیگر آن‌که تعداد عددهای طبیعی کوچک‌تر یا مساوی عدد طبیعی a که بر k بخش‌پذیرند، برابر است با $\left[\frac{a}{k}\right]$ (جزء صحیح عدد $\frac{a}{k}$).

بنابراین تعداد زوج‌های مرتب از عددهای صحیح کوچک‌تر یا مساوی a که هر دو بر k بخش‌پذیر باشند، مساوی $\left[\frac{a}{k}\right]^2$ است. با توجه به این دو موضوع خواهیم داشت:

$$n(A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_k) = n(A_1) + n(A_2) + ... + n(A_8)$$
$$-n(A_1 \cap A_2) - n(A_1 \cap A_3) - ... - n(A_7 \cap A_8)$$
$$+n(A_1 \cap A_2 \cap A_3) + ... + n(A_6 \cap A_7 \cap A_8) - ...$$
$$-n(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap ... A_8) = \left[\frac{20}{2}\right]^2 + \left[\frac{20}{3}\right]^2 + ... + \left[\frac{20}{19}\right]^2$$
$$-\left[\frac{20}{2\times 3}\right]^2 - \left[\frac{20}{2\times 5}\right]^2 - \left[\frac{20}{2\times 7}\right]^2 - ... - \left[\frac{20}{17\times 19}\right]^2$$
$$+\left[\frac{20}{2\times 3\times 5}\right]^2 + ...$$

روشن است، بسیاری از این جملات مساوی صفر هستند و در نتیجه محاسبه‌ی این مجموعه بسیار آسان می‌شود:

$$n(A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_8) = 100 + 36 + 16 + 4 + 1 + 1 + 1 + 1$$
$$-9 - 4 - 1 - 1 = 145$$

و بنابراین تعداد زوج‌های مرتبی که نسبت به هم اول هستند، می‌شود:

$$400 - 145 = 255$$

و در نتیجه:

$$P(A) = \frac{255}{400} = \frac{51}{80}$$

آیا می‌توانید این کار را ادامه دهید؟ فکر می‌کنید این احتمال به چه عددی نزدیک می‌شود؟ به عنوان تمرین، این کار را با عددهای بزرگ‌تر انجام دهید و نتیجه‌ها را با هم مقایسه کنید.

قدم دوم: فرم‌بندی مسئله در حالت کلی

مسئله‌ی کلی را به این صورت فرم‌بندی و مدل‌سازی می‌کنیم:

دو عدد طبیعی a و b را به ترتیب و به تصادف، از میان اعداد طبیعی کوچک‌تر یا مساوی N انتخاب می‌کنیم. احتمال آن‌که این دو عدد نسبت به هم اول باشند، چه قدر است و آیا وقتی N به بی‌نهایت میل می‌کند ($N \to +\infty$)، این احتمال به حد معین میل می‌کند یا خیر؟

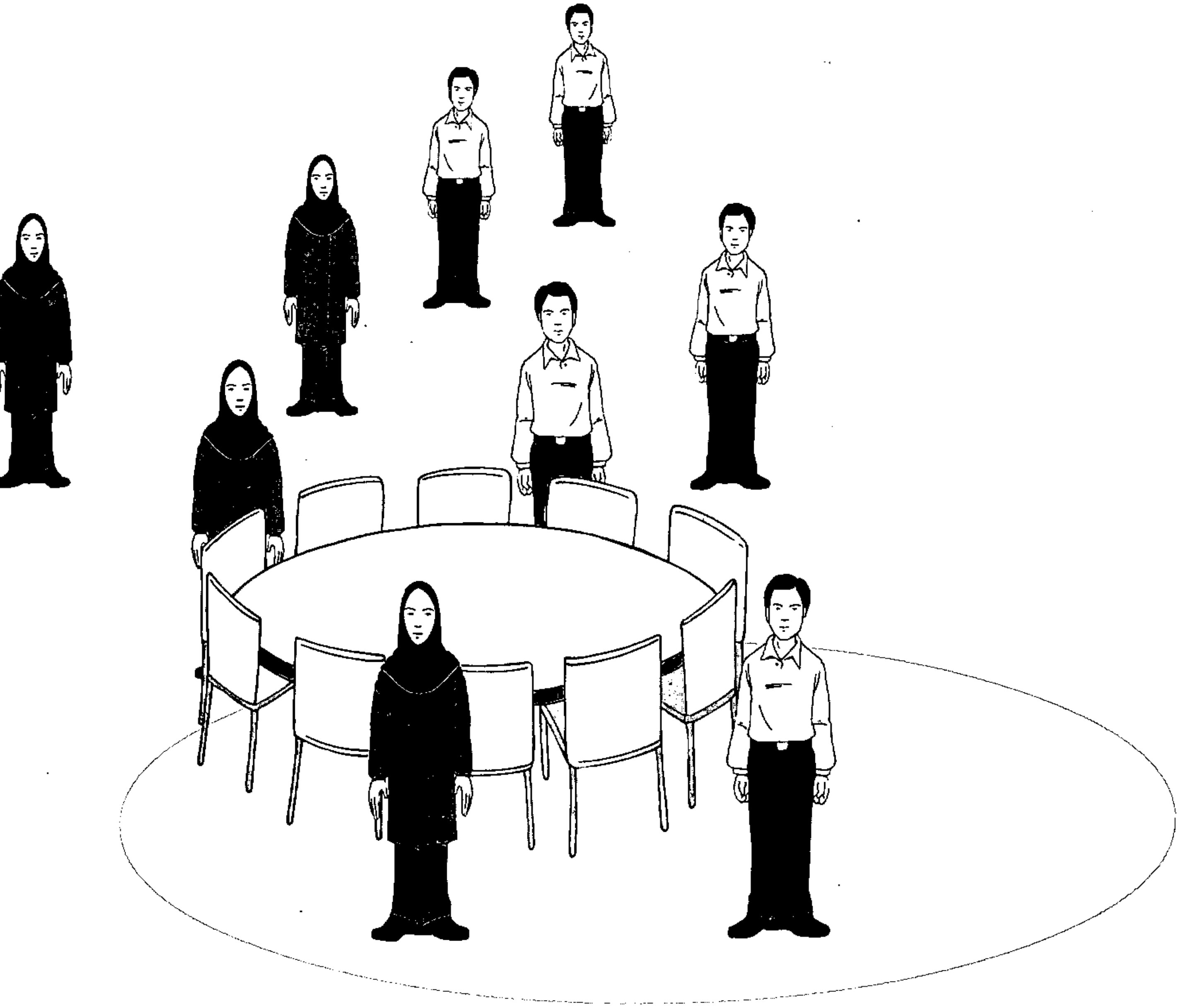
روشی که در این جا به کار می‌بریم، شبیه روشی است که در حالت‌های خاص به آن عمل کرده‌ایم. اگر فرض کنیم عددهای اول کوچک‌تر یا مساوی N، P_1 و P_2 و ... و P_n هستند، تعداد زوج‌های مرتب که هر دو بر P_1 یا P_2 یا ... یا P_n بخش‌پذیرند، به کمک اصل شمول ـ عدم شمول برابر است با:

$$n(A_1 \cup A_2 \cup ... A_n) = n(A_1) + n(A_2) + ... + n(A_n)$$
$$-n(A_1 \cap A_2) - n(A_1 \cap A_3) - ... - n(A_{n-1} \cap A_n)$$
$$+n(A_1 \cap A_2 \cap A_3) + ... + (-1)^{n-1} n(A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n)$$
$$= \left[\frac{N}{P_1}\right]^2 + \left[\frac{N}{P_2}\right]^2 + \left[\frac{N}{P_3}\right]^2 + ... + \left[\frac{N}{P_n}\right]^2 - \left[\frac{N}{P_1 P_2}\right]^2$$
$$-\left[\frac{N}{P_1 P_3}\right]^2 ... - \left[\frac{N}{P_{n-1} P_n}\right]^2 + ... + (-1)^{n-1}\left[\frac{N}{P_1 P_2 ... P_n}\right]^2$$

و از آن‌جا نتیجه می‌شود:

$$n(A) = N^2 - \left[\frac{N}{P_1}\right]^2 - \left[\frac{N}{P_2}\right]^2 - ... - \left[\frac{N}{P_n}\right]^2 + \left[\frac{N}{P_1 P_2}\right]^2$$
$$+\left[\frac{N}{P_1 P_3}\right]^2 + ... + \left[\frac{N}{P_{n-1} P_n}\right]^2 - ... + (-1)^n \left[\frac{N}{P_1 P_2 ... P_n}\right]^2$$

حال باید حد $\frac{n(A)}{n(S)} = \frac{n(A)}{N^2}$ را وقتی $N \to \infty$ بررسی کنیم. مشکل اصلی برای بررسی این حد، وجود عبارت‌های



شامل جزء صحیح است. اما این مشکل با توجه به این که $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{[x]}{x}=1$ ، قابل حل است، زیرا: $[x]=x-\{x\}$ (که $\{x\}$ جزء اعشاری x است) و در نتیجه:

$$\frac{[x]}{x}=\frac{x-\{x\}}{x}=1-\frac{\{x\}}{x}$$

بدیهی است: $0\le\{x\}<1$ و در نتیجه: $0\le\frac{\{x\}}{x}<\frac{1}{x}$ و چون: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$ ، با توجه به قضیه‌ی فشردگی داریم: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\{x\}}{x}=0$ و لذا:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{[x]}{x}=1$$

بنابراین [x] و x وقتی x به +∞ میل می‌کند، هم‌ارزند. پس:

$$\lim_{N\to\infty}P(A)=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N^2}(N^2-\frac{N^2}{P_1^2}-\frac{N^2}{P_2^2}-\dots-\frac{N^2}{P_n^2}+\frac{N^2}{P_1^2P_2^2}+\dots+(-1)^n\frac{N^2}{P_1^2P_2^2\dots P_n^2})=$$

$$\lim_{N\to\infty}(1-\frac{1}{P_1^2}-\frac{1}{P_2^2}-\dots-\frac{1}{P_n^2}+\frac{1}{P_1^2P_2^2}+\frac{1}{P_1^2P_3^2}+\dots-\frac{1}{P_1^2P_2^2P_3^2}-\dots+(-1)^n\frac{1}{P_1^2P_2^2\dots P_n^2})$$

حال با توجه به «قضیه‌ی وی‌یت» که به صورت زیر است:

$$(x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_n)=x^n-(a_1+a_2+\dots+a_n)x^{n-1}+(a_1a_2+a_1a_3+\dots+a_{n-1}a_n)x^{n-2}-\dots+(-1)^n a_1a_2\dots a_n$$

می‌توان با فرض $x=1$ و $a_i=\frac{1}{P_i^2}$ ، عبارت اخیر را به حاصل ضرب تجزیه کرد:

$$P(A)=\lim_{n\to\infty}(1-\frac{1}{P_1^2})(1-\frac{1}{P_2^2})\dots(1-\frac{1}{P_n^2})$$

$$=\lim_{n\to\infty}(1-\frac{1}{2^2})(1-\frac{1}{3^2})\dots(1-\frac{1}{P_n^2}) \qquad (1)$$

و اکنون باید این حد را به دست آوریم. بدیهی است، تمام پرانتزها کوچک‌تر از ۱ هستند و لذا حاصل ضرب آن‌ها نیز

کوچک‌تر از ۱ است و نشان می‌دهیم که حد آن، مقداری مثبت متعلق به بازه‌ی (۰،۱) است. با مراجعه به حساب دیفرانسیل و انتگرال و بحث سری‌های هندسی، یادآور می‌شویم که سری زیر:

$$\sum_{k=1}^{\infty} aq^{k-1} = a + aq + aq^{2} + \dots,\quad |q|<1$$

موسوم به سری هندسی (تصاعد هندسی با قدر نسبت بین ۱ و ۱-)، هم‌گرا به $\frac{a}{1-q}$ است. یعنی وقتی تعداد جملات به بی‌نهایت می‌گراید، این مجموع به $\frac{a}{1-q}$ به دل‌خواه نزدیک می‌شود. بنابراین، با فرض $1 > x > 0$ می‌توان نوشت:

$$1+x+x^{2}+\dots = \frac{1}{1-x}$$

و با توجه به این دستور، می‌توان هر یک از پرانتزهای عبارت (۱) را معادل‌سازی کرد:

$$1-\frac{1}{2^{2}} = \frac{1}{1+\frac{1}{2^{2}}+\frac{1}{2^{4}}+\frac{1}{2^{6}}+\dots}$$

$$1-\frac{1}{3^{2}} = \frac{1}{1+\frac{1}{3^{2}}+\frac{1}{3^{4}}+\frac{1}{3^{6}}+\dots}$$

$$1-\frac{1}{5^{2}} = \frac{1}{1+\frac{1}{5^{2}}+\frac{1}{5^{4}}+\frac{1}{5^{6}}+\dots}$$

و از آن‌جا خواهیم داشت:

$$P(A) = \frac{1}{(1+\frac{1}{2^{2}}+\frac{1}{2^{4}}+\frac{1}{2^{6}}+\dots)(1+\frac{1}{3^{2}}+\frac{1}{3^{4}}+\frac{1}{3^{6}}+\dots)(1+\frac{1}{5^{2}}+\frac{1}{5^{4}}+\dots)\dots}$$

و به کمک قانون توزیع‌پذیری ضرب نسبت به جمع، واضح است که حاصل ضرب پرانتزهای مخرج این کسر، شامل معکوس مربع‌های تمام عددهای طبیعی است. یعنی داریم:

$$P(A) = \frac{1}{1+\frac{1}{2^{2}}+\frac{1}{3^{2}}+\frac{1}{4^{2}}+\dots}$$

بنابراین مقدار احتمال فوق نسبت مستقیمی با حد سری $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{K^{2}}$ دارد. یعنی اگر این سری هم‌گرا به L باشد، احتمال فوق برابر با $\frac{1}{L}$ است. به سادگی می‌توان نشان داد که این سری هم‌گراست. از حساب دیفرانسیل می‌دانیم که سری $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{K^{P}}$ به‌ازای $P \le 1$ واگرا و به ازای $P > 1$ هم‌گرا است. علاوه بر آن، به کمک قضیه‌ی استقرای ریاضی می‌توان ثابت کرد:

$$\frac{1}{1^{2}}+\frac{1}{2^{2}}+\frac{1}{3^{2}}+\dots+\frac{1}{n^{2}} \le 2-\frac{1}{n}$$

و چون: $\lim_{n\to\infty} 2-\frac{1}{n} = 2$، پس مجموع سمت چپ همواره از ۲ کوچک‌تر است و در نتیجه سری $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{K^{2}}$ هم‌گراست. برای محاسبه‌ی احتمال فوق، باید مقدار دقیق این سری را به‌دست آوریم.

قدم سوم (قدم نهایی): محاسبه‌ی سری $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{K^{2}}$ و تعیین مقدار احتمال

برای محاسبه‌ی سری $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{K^{2}}$ یادآوری و اثبات چند لم اساسی لازم است:

لم ۱. یادآوری بسط دو جمله‌ای نیوتون. برای هر دو جمله‌ای a+b و عدد طبیعی n، می‌توان نوشت:

$$(a+b)^{n} = \binom{n}{0}a^{n}+\binom{n}{1}a^{n-1}b+\binom{n}{2}a^{n-2}b^{2}+\dots+\binom{n}{n}b^{n}$$

در این دستور، $\binom{n}{r}$ انتخاب r شیء از n شیء است که گاهی با نماد C (n,r) نمایش داده می‌شود. برای اثبات این دستور، روش‌های گوناگونی وجود دارند که به عنوان تمرین می‌توانید آن را به کمک قضیه‌ی استقرای ریاضی اثبات کنید. به این منظور و برای گذر استقرایی، باید از دستورهای $\binom{k}{0}=\binom{k+1}{0}=1$ و رابطه‌ی مهم $\binom{k+1}{r}=\binom{k}{r}+\binom{k}{r-1}$ (موسوم به اتحاد پاسکال) استفاده کنید.

لم ۲. قضیه‌ی دموآور:

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^{n} = \cos n\theta + i\sin n\theta$$

در این دستور، θ زاویه‌ی دل‌خواه و i عدد موهومی با رابطه‌ی $i^{2} = -1$ است. اگر با مجموعه عددهای موهومی و اعداد مختلط آشنایی داشته باشید، درک این موضوع برایتان آسان است. ولی اگر با این موضوع آشنایی نداشته باشید، فهمیدن این که چگونه

ممکن است $i^2=-1$ شود، قدری بحث‌برانگیز است. ولی در اثبات این قضیه به کمک قضیه‌ی استقرای ریاضی، چندان مشکلی نخواهید داشت و زیاد خود را درگیر آن نکنید!

$$n=1:\ (\cos\theta+i\sin\theta)^1=\cos\theta+i\sin\theta$$

$$n=k:\ (\cos\theta+i\sin\theta)^k=\cos k\theta+i\sin k\theta$$

$$n=k+1:\ (\cos\theta+i\sin\theta)^{k+1}=\cos(k+1)\theta+i\sin(k+1)\theta$$

برای اثبات حکم استقرا از روی فرض، به سادگی می‌نویسیم:

$$(\cos\theta+i\sin\theta)^{k+1}=(\cos\theta+i\sin\theta)^k(\cos\theta+i\sin\theta)$$
$$=(\cos k\theta+i\sin k\theta)(\cos\theta+i\sin\theta)$$
$$=\left[\cos k\theta.\cos\theta+i^2\sin k\theta.\sin\theta\right]+i[\sin k\theta\cos\theta+\sin\theta\cos k\theta]$$
$$=[\cos k\theta\cos\theta-\sin k\theta.\sin\theta]+i[\sin k\theta\cos\theta+\sin\theta.\cos k\theta]$$
$$=\cos(k+1)\theta+i\sin(k+1)\theta$$

(از دستورهای مثلثاتی $\sin(\alpha+\beta)$ و $\cos(\alpha+\beta)$ و تساوی $i^2=-1$ استفاده کردیم.)

لم ۳. نشان می‌دهیم برای هر عدد طبیعی n داریم:

$$\sin(n\theta)=\binom{n}{1}\sin\theta\cos^{n-1}\theta-\binom{n}{3}\sin^3\theta\cos^{n-3}\theta$$
$$+\binom{n}{5}\sin^5\theta\cos^{n-5}\theta-\dots$$

برای اثبات از لم‌های ۱ و ۲ کمک می‌گیریم. سمت چپ تساوی لم ۲ را به کمک بسط دو جمله‌ای نیوتون بسط می‌دهیم (به تساوی $i^2=-1$ نیز توجه می‌کنیم). نتیجه می‌شود:

$$\binom{n}{0}\cos^n\theta+\binom{n}{1}\cos^{n-1}\theta\sin\theta.i+\binom{n}{2}\cos^{n-2}\theta\sin^2\theta.i^2$$
$$+\binom{n}{3}\cos^{n-3}\theta\sin^3\theta.i^3+\binom{n}{4}\cos^{n-4}\theta\sin^4\theta.i^4+\dots$$
$$=\left[\binom{n}{0}\cos^n\theta-\binom{n}{2}\cos^{n-2}\theta\sin^2\theta+\binom{n}{4}\cos^{n-4}\theta\sin^4\theta-\dots\right]$$
$$+i\left[\binom{n}{1}\cos^{n-1}\theta\sin\theta-\binom{n}{3}\cos^{n-3}\theta.\sin^3\theta\right.$$
$$\left.+\binom{n}{5}\cos^{n-5}\theta\sin^5\theta-\dots\right]$$

و از مقایسه‌ی این عبارت با عبارت سمت راست لم ۲، نتیجه می‌شود:

$$\begin{cases}\sin n\theta=\binom{n}{1}\cos^{n-1}\theta.\sin\theta-\binom{n}{3}\cos^{n-3}\theta\sin^3\theta\\ \qquad+\binom{n}{5}\cos^{n-5}\theta\sin^5\theta-\dots\\ \cos n\theta=\binom{n}{0}\cos^n\theta-\binom{n}{2}\cos^{n-2}\theta\sin^2\theta\\ \qquad+\binom{n}{4}\cos^{n-4}\theta\sin^4\theta-\dots\end{cases}$$

تمرین: به کمک دستورهای فوق ثابت کنید:

الف) $\sin 5x=16\sin^5x-20\sin^3x+5\sin x$

ب) $\cos 5x=16\cos^5x-20\cos^3x+5\cos x$

ج) $\cos 7x=64\cos^7x-112\cos^5x+56\cos^3x-7\cos x$

لم ۴. ثابت می‌کنیم برای هر عدد طبیعی n:

$$\cot g^2\frac{\pi}{2n+1}+\cot g^2\frac{2\pi}{2n+1}+\cot g^2\frac{3\pi}{2n+1}+\dots$$
$$+\cot g^2\frac{n\pi}{2n+1}=\frac{n(2n-1)}{3}$$

اثبات: ابتدا معادله‌ای می‌نویسیم که ریشه‌های آن $\cot g^2\frac{\pi}{2n+1}$، $\cot g^2\frac{2\pi}{2n+1}$ و ... و $\cot g^2\frac{n\pi}{2n+1}$ باشند.

به این منظور از دستور لم ۳ کمک می‌گیریم:

$$\sin n\theta=\binom{n}{1}\sin\theta\cos^{n-1}\theta-\binom{n}{3}\sin^3\theta\cos^{n-3}\theta+\dots$$
$$=\sin^n\theta\left[\binom{n}{1}\cot g^{n-1}\theta-\binom{n}{3}\cot g^{n-3}\theta+\binom{n}{5}\cot g^{n-5}\theta-\dots\right]$$

حال با جای‌گزینی $2n+1$ به جای n، و دادن $\theta=\frac{\pi}{2n+1}$ بدیهی است که $\sin(2n+1)\theta=0$. و به همین ترتیب، اگر $\theta=\frac{2\pi}{2n+1}$ و یا ... و یا $\theta=\frac{n\pi}{2n+1}$ باشد، باز هم عبارت سمت چپ تساوی بالا مساوی صفر می‌شود و $\sin\theta\neq0$. در نتیجه باید عبارت درون کروشه‌ی بالا صفر باشد. پس معادله‌ی

$$\binom{2n+1}{1}\cot g^{2n}\theta-\binom{2n+1}{3}\cot g^{2n-2}\theta$$
$$+\binom{2n+1}{5}\cot g^{2n-4}\theta-\dots=0$$

دارای ریشه‌های $\theta_1=\frac{\pi}{2n+1}$، $\theta_2=\frac{2\pi}{2n+1}$ و ... و $\theta_n=\frac{n\pi}{2n+1}$ و در نتیجه معادله‌ی:

$$\binom{2n+1}{1}x^{n}-\binom{2n+1}{3}x^{n-1}+\binom{2n+1}{5}x^{n-2}-\dots=0$$

دارای ریشه‌های $\cot g^2\frac{\pi}{2n+1}$ ، $\cot g^2\frac{2\pi}{2n+1}$ ، ... و $\cot g^2\frac{n\pi}{2n+1}$ است.

حال به کمک قضیه‌ی وی‌یت، مجموع ریشه‌های این معادله برابر است با:

$$\cot g^2\frac{\pi}{2n+1}+\cot g^2\frac{2\pi}{2n+1}+\dots+\cot g^2\frac{n\pi}{2n+1}$$

$$=-\frac{b}{a}=\frac{\binom{2n+1}{3}}{\binom{2n+1}{1}}=\frac{n(2n-1)}{3}$$

نتیجه: با توجه به این که داریم: $1+\cot g^2\theta=\frac{1}{\sin^2\theta}$ ، نتیجه می‌شود:

$$\frac{1}{\sin^2\frac{\pi}{2n+1}}+\frac{1}{\sin^2\frac{2\pi}{2n+1}}+\dots+\frac{1}{\sin^2\frac{n\pi}{2n+1}}$$
$$=\frac{n(2n-1)}{3}+n=\frac{2}{3}n(n+1)$$

لم ۵. به ازای هر زاویه‌ی حاده‌ی α ، داریم:

$$\sin\alpha<\alpha<tg\alpha$$

اثبات این لم را می‌توانید در بخش حد از کتاب حسابان سال سوم رشته‌ی ریاضی ـ فیزیک و یا هر کتاب جامع حساب دیفرانسیل و انتگرال ملاحظه کنید.

نتیجه: به ازای هر زاویه‌ی حاده‌ی α داریم:

$$\cot g^2\alpha<\frac{1}{\alpha^2}<\frac{1}{\sin^2\alpha}$$

اکنون با توجه به این نتیجه و با جای گزینی مقادیر $\frac{\pi}{2n+1}$ ، $\frac{2\pi}{2n+1}$ و... و $\frac{n\pi}{2n+1}$ در این نابرابری‌ها و جمع کردن طرفین نابرابری‌ها خواهیم داشت:

$$\left.\begin{array}{l}
\cot g^2\frac{\pi}{2n+1}<\frac{(2n+1)^2}{\pi^2}<\frac{1}{\sin^2(\frac{\pi}{2n+1})}\\
\cot g^2\frac{2\pi}{2n+1}<\frac{(2n+1)^2}{4\pi^2}<\frac{1}{\sin^2(\frac{2\pi}{2n+1})}\\
\vdots\\
\cot g^2\frac{n\pi}{2n+1}<\frac{(2n+1)^2}{n^2\pi^2}<\frac{1}{\sin^2(\frac{n\pi}{2n+1})}
\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\cot g^2\frac{\pi}{2n+1}+\cot g^2\frac{2\pi}{2n+1}+\dots+\cot g^2\frac{n\pi}{2n+1}$$
$$<\frac{(2n+1)^2}{\pi^2}+\frac{(2n+1)^2}{4\pi^2}+\dots+\frac{(2n+1)^2}{n^2\pi^2}$$
$$<\frac{1}{\sin^2(\frac{\pi}{2n+1})}+\frac{1}{\sin^2(\frac{2\pi}{2n+1})}+\dots+\frac{1}{\sin^2(\frac{n\pi}{2n+1})}$$

حال با استفاده از لم ۴ و نتیجه‌ی آن می‌توان عبارت‌های دو طرف نابرابری‌های فوق را با معادل‌های آن‌ها جای گزین کرد:

$$\frac{n(2n-1)}{3}<\frac{(2n+1)^2}{\pi^2}+\frac{(2n+1)^2}{4\pi^2}+\dots+\frac{(2n+1)^2}{n^2\pi^2}$$
$$<\frac{2}{3}n(n+1)\Rightarrow\frac{\pi^2.n(2n-1)}{3(2n+1)^2}<\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\dots+\frac{1}{n^2}$$
$$<\frac{2n(n+1)\pi^2}{3(2n+1)^2}$$

حال به سادگی می‌توان حد عبارت‌های دو طرف نابرابری را محاسبه کرد و نتیجه می‌شود:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\pi^2n(2n-1)}{3(2n+1)^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2\pi^2}{3(4n^2)}=\frac{\pi^2}{6}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n(n+1)\pi^2}{3(2n+1)^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2\pi^2}{3(4n^2)}=\frac{\pi^2}{6}$$

و با توجه به قضیه‌ی فشردگی (در مبحث حدّ کتاب‌های حسابان و حساب دیفرانسیل و انتگرال به تفصیل در مورد آن بحث شده است) نتیجه می‌شود:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\dots+\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$$

یعنی سری $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$ هم‌گرا به $\frac{\pi^2}{6}$ است و به این ترتیب کار به پایان می‌رسد.

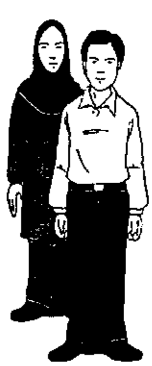
اکنون دیگر می‌توانیم احتمال فوق را به سادگی به دست آوریم. دیدیم، احتمال آن که دو عدد طبیعی که به ترتیب و به تصادف انتخاب شده‌اند، نسبت به هم اول باشند، عکس مقدار سری $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$ است. بنابراین:

$$P(A)=\frac{6}{\pi^2}$$

■

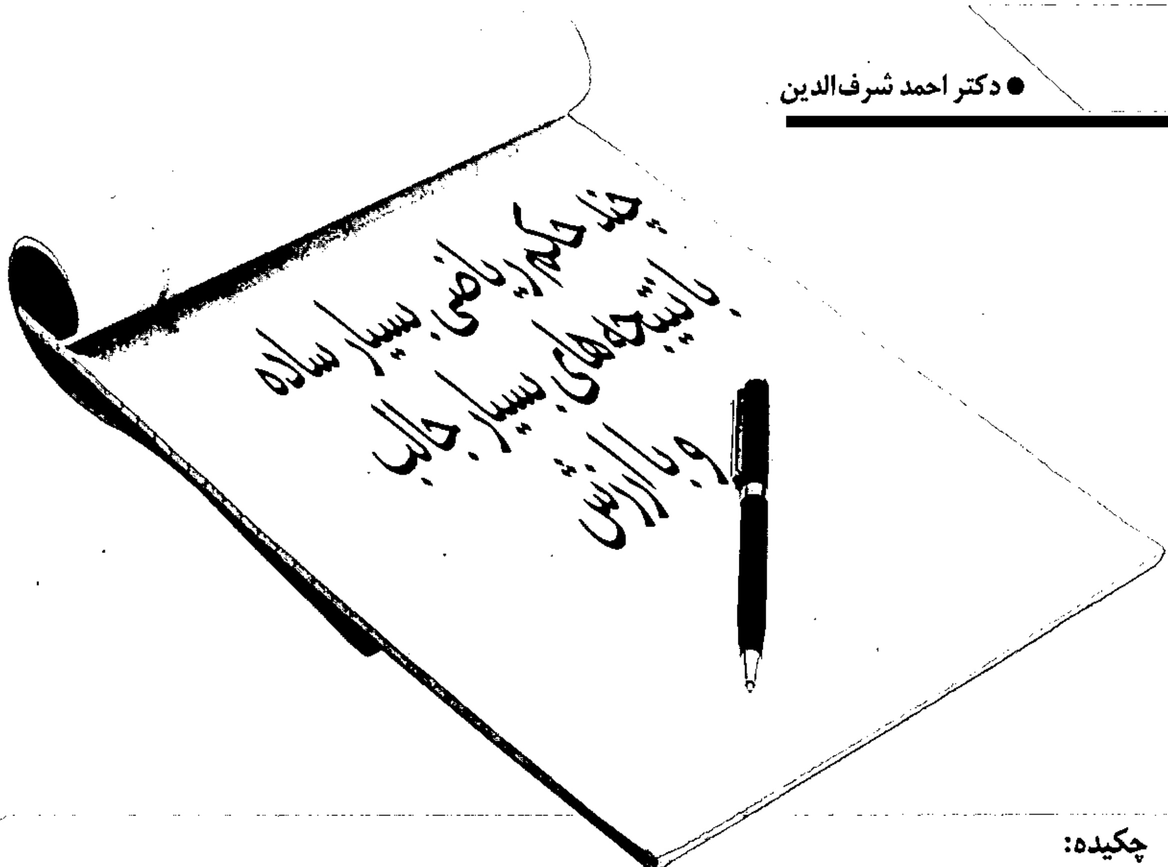
منبع

مسائل پیکارجوی ریاضی با راه‌حل‌های مقدماتی (جلد اول و دوم)، نوشته یاگلوم، ترجمه‌ی غلامرضا یاسی‌پور.



● دکتر احمد شرف‌الدین

چند حکم ریاضی بسیار ساده با نتیجه‌های بسیار جالب و با ارزش



چکیده:

در مقاله‌ی حاضر به کمک مثال‌هایی، چند حکم ریاضی را شرح می‌دهیم که بسیار آسان‌اند، ولی نتیجه‌های مهمی از آن‌ها حاصل شده است:

۱. در چند دهه‌ی اخیر، در بعضی رسانه‌های ایران چنین اظهار شده است: تنها ساختمانی از کره‌ی زمین که از کره‌ی ماه قابل مشاهده است، دیوار چین است. این نظر نادرست است. در این باره توضیح می‌دهیم.

۲. آیا شکلی هامنی (مسطح) وجود دارد که محیط آن بی‌نهایت بزرگ باشد و مساحت آن بی‌نهایت کوچک؟ به این سؤال جواب مثبت می‌دهیم.

۳. آیا شکلی هندسی وجود دارد که حجم آن متناهی، ولی سطح آن نامتناهی باشد؟ به این سؤال نیز جواب مثبت می‌دهیم.

۴. در مثلث متساوی‌الساقین، اگر زاویه‌ی رأس، به ۱۸۰ درجه بسیار نزدیک باشد، نسبت طول هر ساق به طول میانه‌ی مربوط به قاعده، بسیار بزرگ است.

۵. از یک تابع از جبر «بول» یاد می‌کنیم که بسیار ساده است، ولی در دستگاه‌های رایانه‌ای، کاربرد بسیار مهمی دارد.

۶. یک حکم بسیار ساده از هندسه یاد می‌کنیم که با به‌کارگیری آن ثابت شده است، هم‌زمان نسبی است و این نتیجه فوق‌العاده ارزشمند است.

۱. دیوار بزرگ چین

در «دایرة‌المعارف فارسی» درباره‌ی دیوار چین چنین آمده است: «دیوار بزرگ چین، دیوار دفاعی مستحکم معروفی به ارتفاع ۶ متر تا ۱۵ متر است و به ضخامت ۴٫۵ تا ۷٫۵ متر که به طول در حدود ۲۰۰۰ کیلومتر، بین مغولستان و چین به معنی اخص ممتد است و در فواصل معین برج‌ها دارد. در [نیمه‌ی دوم] قرن سوم پیش از میلاد، در عهد امپراطوری شی‌هوانگ‌تی از سلسله‌ی چین، توسط ۳۰۰٫۰۰۰ تن (اغلب از مجرمان) ساخته شد و در سال ۲۰۴ پیش از میلاد به اتمام رسید. طول آن با تمام انشعابات و پیچ‌وخم‌ها، ۳٫۲۰۰ کیلومتر است...»

در دایرة‌المعارف بین‌المللی وبستر (WEBSTER)، چاپ پنجم سال ۱۹۹۹، میانگین ارتفاع دیوار ۷٫۶ متر و پهنای آن حدود ۳٫۶ متر یاد شده است.

❁ ❁ ❁

هرم بزرگ مصر

هرم بزرگ مصر قاعده‌ای مربع‌شکل دارد که طول ضلع آن ۲۲۷ متر است. ارتفاع هرم ۱۳۸ متر و طول

هر یالش ۲۱۷ متر است.

***

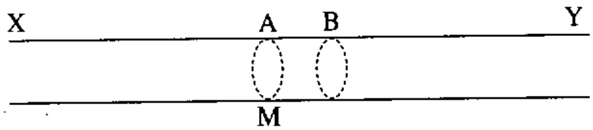
ساختمانی مرتفع در نیویورک

در سال‌های ۳۱-۱۹۳۰ در نیویورک، ساختمانی بزرگ به نام امپایر استیت (EMPIRE STATE) و به ارتفاع ۳۸۱ متر ساخته شد که هنوز پابرجاست.

***

مشاهده‌ی طناب از فاصله‌ی دور

طناب XY را که کاملاً کشیده شده است، از فاصله‌ی دور نگاه می‌کنیم (شکل ۱). قطعه‌ی AB از این طناب را که طول آن برابر قطر مقطع است، درنظر می‌گیریم.



شکل ۱

$\overline{AM} = \overline{AB}$. این طناب را به تدریج به فاصله‌ی دور می‌بریم. تا موقعی که قطعه‌ی AB از طناب دیده می‌شود، کل طناب هم دیده می‌شود. در فاصله‌ای که قطعه‌ی AB دیگر دیده نشود، طناب هم دیده نمی‌شود. یعنی امکان دیده شدن طناب، به طول آن بستگی ندارد، بلکه به قطعه‌ای از طناب بستگی دارد که طول آن برابر ارتفاع مقطع باشد.

اکنون با بهره‌گیری از آن‌چه گفتیم، توضیح می‌دهیم نظر کسانی که می‌گویند «تنها ساختمانی از زمین که از کره‌ی ماه قابل رؤیت است، دیوار چین است»، کاملاً نادرست است.

قطعه‌ای از دیوار چین را درنظر می‌گیریم که بزرگ‌ترین ارتفاع آن ۱۵ متر و طول آن نیز همین اندازه باشد. (در دایرة‌المعارف فارسی بزرگ‌ترین ارتفاع دیوار چین ۱۵ متر نوشته شده است). ابعاد چنین قطعه‌ای از دیوار چین، از ابعاد هرم بزرگ مصر کوچک‌تر است بنابراین اگر این قطعه از دیوار چین از ماه دیده شود، به طریق اولی، هرم بزرگ مصر هم از کره ماه دیده خواهد شد. یعنی این نظر نادرست است که دیوار چین تنها ساختمانی از زمین است که از کره ماه دیده می‌شود.

تبصره: می‌توان استدلال‌های دقیق دیگری برای رد نظر دیده شدن دیوار چین از کره‌ی ماه ارائه کرد. یا حتی می‌توان به عکس‌هایی که در کره‌ی ماه از زمین گرفته شده‌اند، استناد کرد. ولی به‌نظر نگارنده‌ی این مقاله، استدلال فوق مبتنی بر ساده‌ترین اطلاعات هندسی است.

***

۲. آیا یک شکل هامنی (مسطح) وجود دارد که محیطش بی‌نهایت بزرگ باشد و مساحتش مقداری محدود؟

آری. به دو مثال زیر توجه فرمایید:

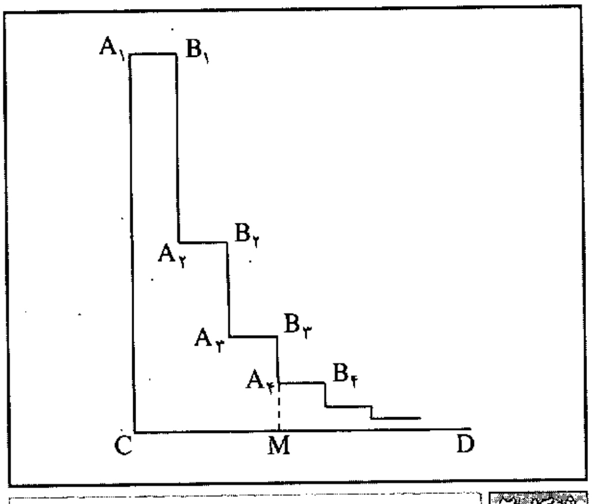
الف) مستطیلی را در نظر می‌گیریم با طول و عرض a و b. اندازه‌ی محیط این مستطیل برابر $۲(a+b)$ است و اندازه‌ی سطح آن ab. اگر b را مساوی $\frac{1}{a}$ اختیار کنیم، مساحت مستطیل مورد نظر برابر ۱ می‌شود (عدد ۱، واحد طول است و نیز واحد اندازه‌ی سطح). اگر a را به سوی صفر میل دهیم، مقدار $\frac{1}{a}$ به سوی بی‌نهایت میل می‌کند. در این صورت محیط مستطیل مورد نظر به‌سوی بی‌نهایت میل می‌کند و مساحت آن همواره مساوی با ۱ خواهد بود.

می‌توان طول و عرض مستطیل را طوری درنظر گرفت که محیط مستطیل به سوی بی‌نهایت میل کند و مساحت آن به‌سوی صفر. در مستطیلی به طول و عرض a و b، چنین اختیار می‌کنیم: $b = \frac{1}{\sqrt{a}}$.

اگر مقدار a به‌سوی صفر میل کند، محیط آن به‌سوی بی‌نهایت و مساحت آن به‌سوی صفر میل می‌کند.

***

ب) شکل هامنی $A_1B_1A_2B_2A_3B_3MCA_1$ را در نظر می‌گیریم. در این شکلِ پلکانی، خط B_3M موازی A_1C است.



شکل ۲

فرض می‌کنیم:

$$(1)\quad \overline{A_1B_1} = \overline{A_2B_2} = \overline{A_3B_3} = \cdots = \overline{A_mB_m} = \cdots$$

$$(2)\quad \begin{cases} \overline{A_1C} = a,\ \overline{B_1A_2} = \frac{1}{2}a,\ \overline{A_2B_3} = \frac{1}{4}a, \\ \overline{B_3A_4} = \frac{1}{8}a,\ \cdots \end{cases}$$

یعنی ارتفاع هر پله نصف ارتفاع پله‌ی پیشین است. به‌عبارت دیگر، ارتفاع‌های پله‌ها یک تصاعد هندسی تشکیل می‌دهند که جمله‌ی اول آن طول $\overline{A_1C}$ و قدرمطلق آن $\frac{1}{2}$ است.

مساحت شکل $A_1B_1A_2B_2A_3B_3MCA_1$ چنین است:

$$S = a(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4})$$

مساحت این شکل پلکانی وقتی تعداد پله‌ها به سوی بی‌نهایت میل کند، چنین است:

$$a \times \lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n})$$

حد عبارت داخل کمانک‌ها، وقتی n به سوی بی‌نهایت میل کند برابر $2a$ است. پس مساحت شکل پلکانی مورد نظر، وقتی تعداد پله‌ها به سوی بی‌نهایت میل کند، برابر $2a$ می‌شود. پس اندازه‌ی محیط شکل پلکانی مورد نظر وقتی تعداد پله‌ها به سوی بی‌نهایت میل کند، به بی‌نهایت میل می‌کند و مساحت آن به سوی عدد ۲، یعنی محیط شکل، بی‌نهایت بزرگ است و مساحت آن محدود.

***

۳. آیا شکل هندسی وجود دارد که حجم آن متناهی ولی سطح کل آن نامتناهی باشد؟

آری. به دو مثال زیر توجه کنید:

الف) مکعب مستطیلی با ابعاد a، $\frac{1}{a}$ و ۱ در نظر می‌گیریم. حجم این مکعب مستطیل برابر ۱ است. وجهی از این مکعب مستطیل با ابعاد ۱ و $\frac{1}{a}$ را در نظر می‌گیریم. مساحت این وجه، برابر $\frac{1}{a}$ است. اگر a به سوی صفر میل کند، آن‌گاه مساحت وجه یاد شده به سوی بی‌نهایت میل می‌کند. پس اگر مقدار a به سوی صفر میل کند، حجم مکعب‌مستطیل مقدار متناهی باقی می‌ماند، ولی سطح کل آن به سوی بی‌نهایت میل می‌کند.

***

ب) منشوری قائم در نظر می‌گیریم که قاعده‌ی آن شکل پلکانی یاد شده در مسئله‌ی پیشین باشد و طول ارتفاع آن برابر یک. حد حجم این منشور هنگامی که تعداد پله‌ها به سوی بی‌نهایت میل کند، برابر ۲ است، ولی سطح کل این منشور به سوی بی‌نهایت میل می‌کند..

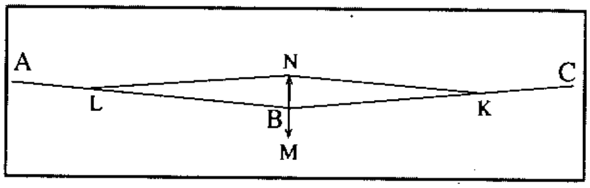
***

۴. در مثلث متساوی‌الساقین، اگر زاویه‌ی رأس به ۱۸۰ درجه بسیار نزدیک باشد، نسبت طول هر ساق به طول میانه‌ی مربوط به قاعده‌ها بسیار بزرگ است.

این حکم هندسی فوق‌العاده ساده است، به‌طوری که در کتاب‌های هندسه آن را یاد نمی‌کنند. این حکم هندسی با وجود سادگی، کاربردهای بسیار مهم دارد. به مثال زیر توجه کنید:

در سیستم حمل و نقل به‌وسیله‌ی تله‌کابین، کابل تله‌کابین نباید خیلی کشیده باشد. اگر کابل خیلی کشیده باشد، هنگامی که تله‌کابین به وسط دو پایه می‌رسد، کابل گسیخته می‌شود.

کابلی را در نظر می‌گیریم که دو انتهای آن در دو نقطه‌ی A و C ثابت شده‌اند (شکل ۳).



شکل ۳

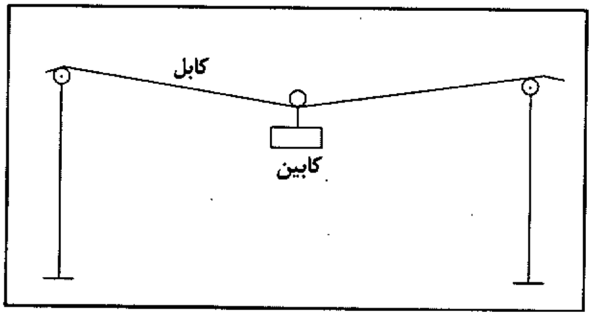
وزنه‌ای در نقطه‌ی B که وسط کابل است، به آن آویزان می‌کنیم. این وزنه، کابل را به‌صورت خط شکسته ABC درمی‌آورد. اگر کابل از ابتدا خیلی کشیده باشد، زاویه‌ی ABC خیلی به ۱۸۰ درجه نزدیک می‌شود.

نیرویی را که وزنه، در نقطه‌ی B به کابل وارد می‌کند، با بردار $\overrightarrow{BM}$ نشان می‌دهیم. بردار $\overrightarrow{BN}$ را مساوی $-\overrightarrow{BM}$ در نظر می‌گیریم و متوازی‌الاضلاع BLNK را می‌سازیم. نیروی BN به دو نیروی BA و BC تجزیه می‌شود:

$$\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}$$

چون زاویه‌ی $\angle ABC$ خیلی به ۱۸۰ درجه نزدیک است، اندازه‌ی هریک از دو نیروی BA و BC خیلی بیشتر از اندازه‌ی نیروی BN است. همین موضوع سبب گسیخته شدن کابل می‌شود.

در شکل ۴ شمای یک تله‌کابین رسم شده است. اگر امتداد



شکل ۴ شمای یک تله‌کابین

کابل در دو طرف غلتک نزدیک به ۱۸۰ درجه باشد، کشش کابل در دو طرف غلتک کابین مقدار بزرگی خواهد شد و به بریده شدن کابل می‌انجامد.

* * *

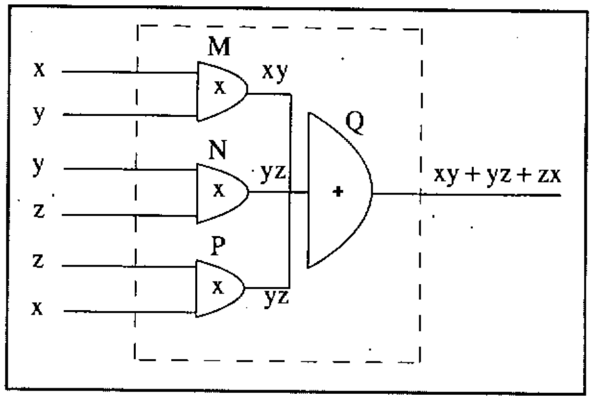
۵. تابع اکثریت و مدار آن

در جبر بول، تابع سه متغیری $f(x,y,z)=xy+yz+zx$ را تابع اکثریت می‌نامند. دلیل این نام‌گذاری آن است که اگر اکثریت متغیرها، یعنی دو متغیر یا سه متغیر از این تابع، مقداری بگیرند، تابع همان مقدار را می‌گیرد. بیان ریاضی این خاصیت چنین است:

$$f(x,a,a)=f(a,y,a)=f(a,a,z)=f(a,a,a)=a$$

تابع اکثریت با وجود آن که بسیار ساده و آسان است، در دستگاه‌های رایانه‌ای نقش مهمی ایفا می‌کند.

مدار الکتریکی مربوط به تابع اکثریت، «مدار اکثریت» نامیده می‌شود. شکل ۵ مدار اکثریت را نشان می‌دهد. در این شکل، دریچه‌های M، N و P، دریچه‌های «و» هستند که به طور موازی قرار گرفته‌اند. خروجی‌های این سه دریچه، به دریچه‌ی Q که دریچه‌ی «یا» محسوب می‌شود، متصل‌اند. مدار حاصل از دریچه‌های «و» و دریچه‌ی «یا» را مدار اکثریت می‌نامند.



شکل ۵ مدار اکثریت

فرض کنیم بخواهیم مسئله‌ای را با رایانه حل کنیم و از درستی جواب کاملاً مطمئن باشیم. به این منظور سه رایانه و یک مدار اکثریت را به کار می‌گیریم. برنامه را به طور هم‌زمان به سه رایانه‌ی A، B و C می‌دهیم. (این سه رایانه ممکن است حتی در سه شهر بسیار دور از یکدیگر باشند. در این محور با استفاده از آنتن‌ها، ولتاژهای لازم را انتقال می‌دهیم.

ولتاژهای خروجی سه رایانه‌ی یاد شده را به ترتیب x، y و z می‌نامیم (این ولتاژها جواب مسئله‌ی موردنظر اند). اگر هر سه رایانه مسئله را درست حل کنند، آن‌گاه چنین داریم: $x=y=z$.

خروجی دو رایانه‌ی A و B که x و y اند، به دریچه‌ی M وارد می‌شوند و خروجی دریچه‌ی M حاصل ضرب xy را به دست می‌دهد.

خروجی دو رایانه‌ی B و C که y و z اند، به دریچه‌ی N وارد می‌شوند و خروجی دریچه‌ی N، حاصل ضرب yz را به دست می‌دهد.

خروجی دو رایانه‌ی C و A که z و x اند، به دریچه‌ی P وارد می‌شوند و خروجی دریچه‌ی P، حاصل ضرب zx را به دست می‌دهد.

ولتاژهای xy، yz و zx به دریچه‌ی Q وارد می‌شوند و خروجی Q، ولتاژ $xy+yz+zx$ را به دست می‌دهد. ولتاژ اخیر، جواب اکثریت سه رایانه است. پس اگر فقط یک رایانه از این سه رایانه، جواب درست به دست ندهد، جوابی که در خروجی مدار اکثریت به دست می‌آید، جواب درست است. با به کارگیری دستگاه اکثریت، اطمینان بیشتری از درستی جواب داریم.

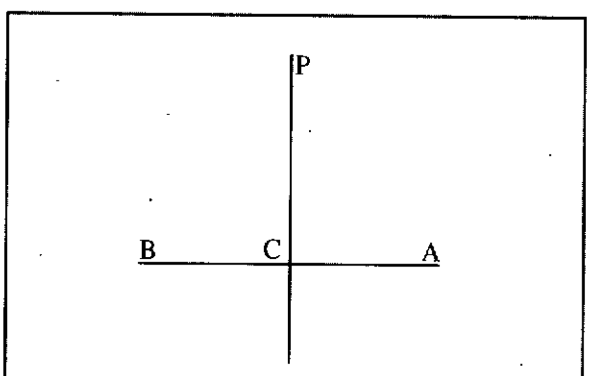
* * *

۶. نسبی بودن هم‌زمانی

دو نقطه‌ی A و B و صفحه‌ی عمود منصف پاره خط AB را در نظر می‌گیریم. این صفحه را با P نشان می‌دهیم.

قضیه: هر نقطه‌ی واقع بر صفحه‌ی عمود منصف پاره خط AB، از دو سر آن پاره خط به یک فاصله است و برعکس، هر نقطه که از دو سر پاره خط AB به یک فاصله باشد، روی عمود منصف پاره خط AB قرار دارد.

بخشی از فضا را که در یک طرف صفحه‌ی P واقع است و شامل نقطه‌ی A می‌شود، بخش ۱ و بخشی از فضا را که در یک طرف صفحه‌ی P واقع است و شامل نقطه B می‌شود، بخش ۲ می‌نامیم.



شکل ۶

برای هر نقطه‌ی M، از بخش ۱ داریم: $\overline{MA} < \overline{MB}$ و برای هر نقطه‌ی N از بخش ۲ داریم: $\overline{NA} < \overline{NB}$.

برای آن‌که واقعه‌ای دیده شود، لازم است که از آن نقطه، نور به چشم برسد. چنین به‌نظر می‌آید که اگر برای ناظری، دو امر هم‌زمان باشند، این دو امر برای همه‌ی ناظرانی که آن‌ها را ملاحظه می‌کنند، هم‌زمان هستند. در سطرهای آینده نشان می‌دهیم که این تصور صحیح نیست و نتیجه می‌گیریم که هم‌زمانی نسبی است.

هم‌چنین به‌نظر می‌آید که اگر ناظری امر A را مقدم بر امر B مشاهده کند، همه‌ی ناظرانی که این دو امر ملاحظه می‌کنند، امر A را مقدم بر امر B مشاهده می‌کنند. در ادامه نشان می‌دهیم که این تصور هم صحیح نیست و نتیجه می‌گیریم که تقدم و تأخر نسبی است.

در دو نقطه‌ی A و B، دو منبع نور الکتریکی در نظر می‌گیریم. کلید مدار الکتریکی را در نقطه‌ی C قرار می‌دهیم. با این کلید می‌توان دو لامپ الکتریکی A و B را روشن و خاموش کرد. اگر کلید را وصل کنیم، برای ناظری که روی صفحه‌ی P است، دو چراغ در یک لحظه روشن می‌شوند؛ زیرا مدت رسیدن الکتریسیته از A و B به C برابر است. اگر D نقطه‌ای از صفحه‌ی P باشد، مدتی که نور دو مسافت AD و BD را می‌پیماید، برابر است. اگر کلید را قطع کنیم، برای ناظری که روی عمود منصف است، دو چراغ A و B در یک لحظه خاموش می‌شوند.

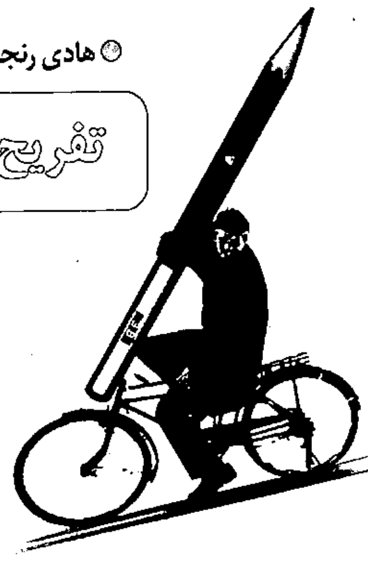
در همین آزمایش، اگر ناظری در نقطه‌ی M از بخش (۱) قرار داشته باشد، روشن شدن چراغ A را مقدم بر روشن شدن چراغ B می‌بیند. زیرا نور، مسافت AM را در مدتی کوتاه‌تر از مسافت BM می‌پیماید. اگر ناظری در نقطه‌ی N از بخش (۲) قرار داشته باشد، روشن شدن چراغ B را مقدم بر روشن شدن چراغ A می‌بیند؛ زیرا: $\overline{NB} < \overline{NA}$.

نتیجه‌گیری نسبیت هم‌زمانی و نسبیت تقدم و تأخر، از خاصیت‌های بسیار ساده‌ی عمود منصف و از شاهکارهای بسیار مهم تفکر علمی است.

سرعت نور ۳۰۰/۰۰۰ کیلومتر بر ثانیه است. لذا آن‌چه یاد شد در ابعاد کیهانی به‌کار می‌آید، نه در ابعاد کوچک. برای توضیح، دو نقطه‌ی A و B را به فاصله‌ی ۱۰۰ کیلومتر از هم در نظر می‌گیریم. نقطه‌ی وسط پاره‌خط AB را M می‌نامیم. فرض کنیم دو پدیده‌ی A و B طوری باشند که برای ناظری که در نقطه‌ی M است، به‌طور هم‌زمان دیده شوند. اگر نقطه‌ی P از نقطه‌ی A و B به ترتیب به فاصله‌ی ۱۳۰ و ۱۴۰ کیلومتر باشد، آن‌گاه ناظری که در نقطه‌ی P قرار دارد، دو پدیده‌ی A و B را هم‌زمان می‌بیند؛ به‌دلیل اختلاف زمانی فوق‌العاده اندک دو پدیده‌ی A و B برای ناظر.

تفریح اندیشه

هادی رنجبران



با قرار دادن علایم و عملیات مناسب ریاضی بین عددها، کاری کنید که تساوی‌های زیر برقرار باشند.

۱ ۱ ۱=۶
۲ ۲ ۲=۶
۳ ۳ ۳=۶
۴ ۴ ۴=۶
۵ ۵ ۵=۶
۶ ۶ ۶=۶
۷ ۷ ۷=۶
۸ ۸ ۸=۶
۹ ۹ ۹=۶

برای نمونه: $\sqrt{۴} + \sqrt{۴} + \sqrt{۴} = ۶$

عنایت‌الله راستی‌زاده

مدل‌سازی و خطای اندازه‌گیری

اشاره:

در این یادداشت قصد نداریم آن‌چه را که به عنوان مقدمه در کتاب درسی آمار و مدل‌سازی آمده است، تکرار کنیم و از توضیحات اولیه و تعریف مقدماتی می‌گذریم. تنها و به‌عنوان تأکید، به تعریف زیر توجه کنید:

تعریف: بیان مسئله به زبان ریاضی را «مدل‌سازی ریاضی» می‌گوییم. هرچه مفاهیم ریاضی به‌کار برده شده ساده‌تر و نتیجه‌ی کار به پدیده‌ی مورد نظر نزدیک‌تر باشد، مدل‌سازی با ارزش‌تر است.

تناسب مدل با مسئله اهمیت بسزایی دارد. گاهی قرار است درباره‌ی وزن هم‌کلاسی‌هایتان مدل‌سازی کنید. در آن‌صورت، چشم‌پوشی از چند گرم کمتر و بیشتر شایسته است. اما اگر بخواهید در آزمایشگاه شیمی چند ماده را با هم ترکیب کنید چه‌طور؟ این‌جاست که واحدهای اندازه‌گیری و میزان خطا اهمیت خواهند یافت. در تعریف کتاب درسی، برای خطای اندازه‌گیری می‌خوانیم:

این «خطا لزوماً از واحد اندازه‌گیری کمتر است».

در این مقاله می‌کوشیم، با ذکر چند مثال به اهمیت انتخاب واحد مناسب برای خطای اندازه‌گیری بپردازیم.

قابل استفاده‌ی دانش‌آموزان سال‌های دوم و سوم متوسطه

مثال ۱. فرض کنید مدت زمانی که یک دونده، فاصله‌ی ۱۰۰ متر را دویده است، برابر ۹ ثانیه اندازه‌گیری شده باشد. می‌دانیم، مدت‌زمان مذکور ممکن است دقیقاً ۹ ثانیه نباشد، به‌خصوص اگر وسیله‌ی اندازه‌گیری دقت کافی نداشته باشد. پس مرتکب خطایی شده‌ایم که



اندازه‌ی آن از یک ثانیه کمتر است؛ ولی واقعاً چه‌قدر کمتر؟ نمی‌دانیم!

مدل روبه‌رو پیشنهاد می‌شود: $T = ۹ + E$

توجه کنید، مدت‌زمانی را که دونده بر حسب ثانیه دویده است با T نمایش داده‌ایم. قدر مطلق E خطای اندازه‌گیری از یک ثانیه کمتر است. E ممکن است مثبت یا منفی باشد.

مثال۲. قد فردی حدود ۱۷۲ سانتی‌متر گزارش شده است. چه مدلی می‌توان برای اندازه‌گیری آن به‌کار گرفت؟

فرض کنیم P قد این فرد باشد، در این صورت:

$P = ۱۷۲ + E$

پس در این‌جا واحد اندازه‌گیری را سانتی‌متر در نظر گرفته‌ایم و قدر مطلق E از یک سانتی‌متر کمتر است.

تغییر واحد اندازه‌گیری و تغییر مدل

گاهی ممکن است در اثنای تهیه‌ی گزارش بخواهیم واحد اندازه‌گیری را دقیق‌تر کنیم. می‌خواهیم ببینیم در این فرایند، مدل دستخوش چه تغییری می‌شود. اگر در مدل اولیه خطا را با E نشان داده باشیم، آیا در مدل جدید که با تغییر واحد اندازه‌گیری همراه است، E تغییر می‌کند؟

مثال۳. طولی را برحسب سانتی‌متر اندازه‌گیری کرده‌ایم و مدل آن را به‌صورت $L = ۳ + E$ نوشته‌ایم که در آن، قدر مطلق E از یک سانتی‌متر کمتر است. اگر طول را بر حسب میلی‌متر بخواهیم گزارش کنیم، آیا مدل $L = ۳۰ + E$ برای آن مناسب است؟

مسلماً خیر، چرا که در این‌جا E خطای اندازه‌گیری، از واحد اندازه‌گیری (میلی‌متر) کمتر نیست! یک مدل مناسب آن است که بنویسیم: $L = ۳۰ + \frac{E}{۱۰۰}$ که چون قدر مطلق E از یک سانتی‌متر کمتر فرض شده است، قدر مطلق $\frac{E}{۱۰۰}$ به طور قطع از یک میلی‌متر کمتر است! می‌توان $\frac{E}{۱۰۰}$ را برابر E_1 فرض کرد و نوشت $L = ۳۰ + E_1$

محاسبه‌ی روی مدل و چگونگی خطا در پدیده‌ی نهایی

با مثالی، این عنوان را توضیح می‌دهیم. فرض کنیم بخواهیم مدلی مناسب برای سطح یک دایره بنویسیم. در محاسبه‌ی سطح دایره، از شعاع دایره استفاده می‌شود. خطای مربوط به سطح، از خطای مربوط به محاسبه‌ی شعاع ناشی می‌شود. مدل اولیه برای شعاع دایره تنظیم می‌شود، اما در نهایت به مدلی برای سطح دایره می‌رسیم. مسلماً در این میان، محاسبات روی اندازه‌های گرفته شده از قبیل جمع، ضرب و توان، روی خطای اندازه‌گیری نیز صورت می‌گیرد. به مثال زیر توجه کنید:

مثال۴. فرض کنید شعاع دایره‌ای به‌صورت $R = ۳ + E$ مدل‌سازی شده است. می‌خواهیم مدلی برای مساحت این دایره بنویسیم. اگر S مساحت دایره باشد، داریم:

$$S = \pi R^۲ \Rightarrow S = \pi(۳ + E)^۲ \Rightarrow S = \pi(۹ + E^۲ + ۶E)$$

چون قدر مطلق E از واحد اندازه‌گیری کمتر است، هرچه به توان بزرگ‌تری برسد، میزان آن کمتر خواهد شد؛ به‌طوری که می‌توان از آن صرف نظر کرد. پس داریم: $S \approx ۹\pi + ۶\pi E$

اگر $۶\pi E$ را برابر E_1 فرض کنیم، مدل مساحت دایره عبارت خواهد بود از: $S = ۹\pi + E_1$.

صبر کنید! کار تمام نشده است! مطمئنید در انتخاب E و E_1 خطایی مرتکب نشده‌اید؟ سعی می‌کنیم این قسمت را کمی بیشتر تجزیه و تحلیل کنیم. حوصله‌اش را دارید؟!

انتشار خطا در محاسبات مربوط به سطح، حجم و... پدید می‌آید و توصیه می‌شود، از همان ابتدا با بالا بردن دقت، انتشار خطا را تا حد امکان کاهش دهیم

فرض کردیم $R = ۳ + E\text{cm}$ که در آن قدرمطلق E از سانتی‌متر کمتر است. برای سادگی فرض کنید $\pi = ۳$ و $E = \frac{۱}{۳}\text{cm}$ باشد. آن‌گاه: $E_1 = ۶\pi E = ۶ \times ۳ \times \frac{۱}{۳}$، یعنی: $E_1 = ۶$ و $s \approx ۲۷ + E_1$.

متوجه اشتباه شدید؟ E_1 از واحد اندازه‌گیری بزرگ‌تر شده است! چه باید کرد؟

پیشنهاد می‌کنم برای جلوگیری از این اتفاق، دقت اندازه‌گیری طول شعاع را بیشتر کنیم و با اندازه‌گیری دقیق‌تر، E را چنان کوچک کنیم که با انجام عملیات و محاسبات ریاضی بعدی، خطای E_1 هم‌چنان از واحد اندازه‌گیری سطح کوچک‌تر بماند!

آیا انتخاب مدل $R = ۳ + \frac{E}{۱۰}$ برای شعاع مناسب‌تر نیست؟

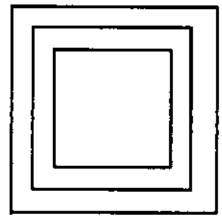
متأسفانه در مثال‌های کتاب درسی، به این موضوع توجه کافی صورت نگرفته است و مؤلفان محترم کتاب درسی، تنها به اشاره‌ای کلی و مختصر بسنده کرده‌اند. برای نمونه، به مثالی

در صفحه‌ی ۱۲ کتابی درسی آمار و مدل‌سازی (چاپ هفتم، ۱۳۸۵)، اشاره می‌کنیم.

مثال۵. ضلع مربعی به‌صورت $E + ۷$ مدل‌سازی شده است. Sمساحت مربع است:

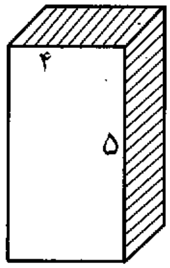
$$S = (۷+E)^{۲} = ۴۹ + ۱۴E + E^{۲}$$
$$S \approx ۴۹ + ۱۴E = ۴۹ + E_{۱}$$

با صرف‌نظر از جمله‌ی $E^{۲}$ داریم:



کتاب درسی اشاره نکرده است که امکان دارد $E_{۱}$ از واحد سطح بزرگ‌تر شود. چون خطای سطح، ۱۴ برابر $(E_{۱} = ۱۴E)$ از خطای ضلع بزرگ‌تر است!

این پدیده را «**انتشار خطا**» می‌گوییم. انتشار خطا در محاسبات مربوط به سطح، حجم و... پدید می‌آید و توصیه می‌شود، از همان ابتدا با بالا بردن دقت، انتشار خطا را تا حد امکان کاهش دهیم. به مثال دیگری از انتشار خطا در محاسبه‌ی حجم توجه کنید:



ارتفاع $= ۵ + E_{۱} + L_{۱}$

طول $= ۴ + E_{۲} = L_{۲}$

عرض $= ۲ + E_{۳} = L_{۳}$

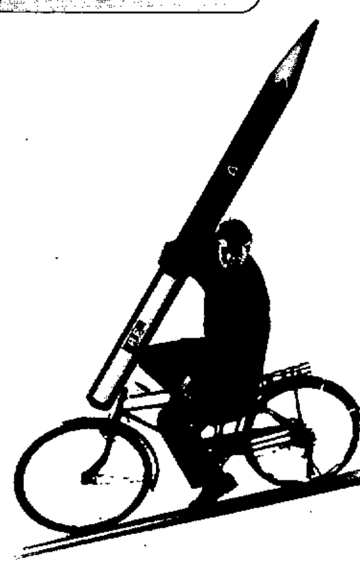
اگر حجم مکعب برابر V باشد، در این صورت مدل حجم به‌صورت زیر است:

$$V = L_{۱}L_{۲}L_{۳} = (۵+E_{۱})(۴+E_{۲})(۲+E_{۳})$$
$$V = ۴۰ + ۸E_{۱} + ۱۰E_{۲} + ۲۰E_{۳}$$

در این مدل، $E_{۱}$ ها از واحد کوچک‌ترند. پس حاصل ضرب آن‌ها خیلی کوچک خواهد بود و قابل چشم‌پوشی است. این‌جا نیز پدیده‌ی انتشار خطا اجتناب‌ناپذیر است!

حتی اگر $E_{۱}$ و $E_{۲}$ و $E_{۳}$ برابر $\frac{۱}{۱۰}$ سانتی‌متر باشند (طول‌ها بر حسب سانتی‌متر باشند)، $۸E_{۱} + ۱۰E_{۲} + ۲۰E_{۳}$ برابر $\frac{۱}{۱۰} \times ۳۸$، یعنی ۳/۸ سانتی‌متر خواهد شد.

عمل غلط، اما جواب صحیح



۱. به این دو کسر نگاه کنید:

$$\frac{۲۶}{۶۵} \text{ و } \frac{۱۶}{۶۴}$$

اگر ۶ها را از صورت و مخرج کسرها حذف کنیم (که عملی است غیرمجاز)، دو کسر به این ترتیب به دست می‌آیند:

$$\frac{۲}{۵} \text{ و } \frac{۱}{۴}$$

به ظاهر، این دو کسر نباید با دو کسر بالا مساوی باشند، ولی اگر آن دو کسر را ساده کنید، خواهید دید:

$$\frac{۲۶}{۶۵} = \frac{۲}{۵} \text{ و } \frac{۱۶}{۶۴} = \frac{۱}{۴} \ (!!)$$

❁ ❁ ❁

۲. به این کسر نگاه کنید:

$$\frac{(۱+x)^{۲}}{۱-x^{۲}}$$

اگر قوای ۲ را از صورت و مخرج حذف کنیم (عمل غیرمجاز)، کسر به $\frac{۱+x}{۱-x}$ تبدیل می‌شود که برابر کسر اول است.

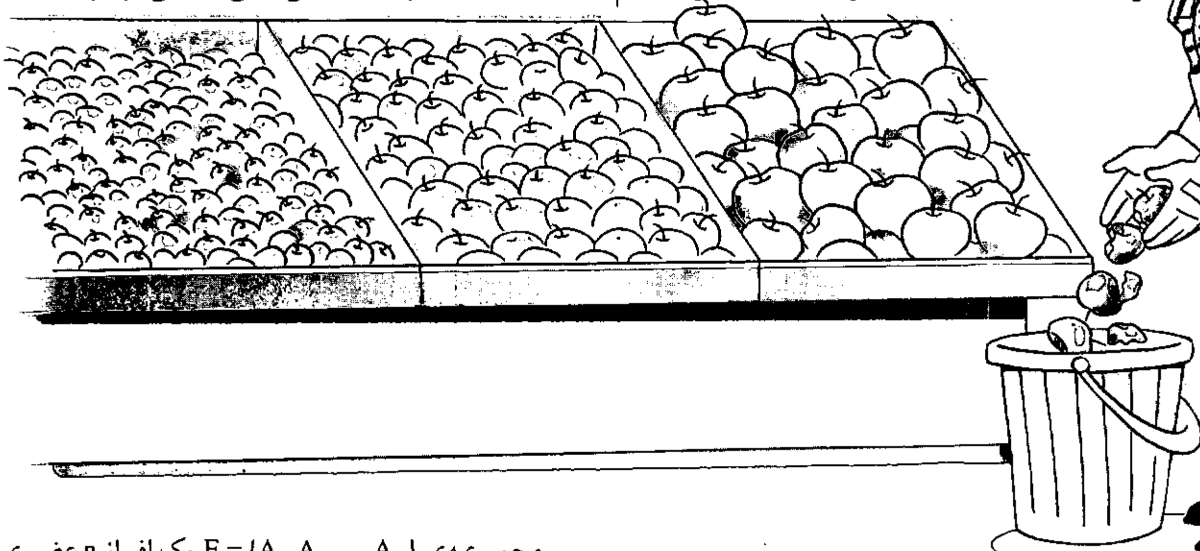
آیا شما هم می‌توانید چنین کسرهایی بنویسید؟

عماد سهائی
دانشجوی رشته‌ی دبیری ریاضی
دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکز

تعداد افرازهای یک مجموعه n عضوی

اشاره:

مقاله‌ی پیش‌رو، درباره‌ی راه‌های به‌دست آوردن تعداد کل افرازهای یک مجموعه‌ی n عضوی است. در پایان مقاله، راه نسبتاً ساده‌ای را به شما پیشنهاد می‌کنیم که سرعت محاسباتی آن از بقیه‌ی راه‌هایی که در این مقاله می‌آوریم، بیشتر است. هدف از این پیشنهاد، ارائه‌ی راهی ساده و سریع در محاسبات علم مجموعه‌ها و در باب افرازهاست. این مطلب قابل ذکر است که در این مقاله، از کلاس‌های هم‌ارزی و ارتباط آن با افرازها، مطلبی اثباتی و گفتنی موجود نیست.



افراز یک مجموعه

هرگاه A مجموعه‌ای ناتهی باشد و بتوانیم تعدادی متناهی از زیر مجموعه‌های متمایز A مانند A_1، A_2 و... و A_n بیابیم، به قسمی که اولاً: هر یک از زیر مجموعه‌ها ناتهی باشند، ثانیاً: هیچ دوتایی از آن‌ها با هم اشتراکی نداشته باشند (دوبه‌دو از هم جدا باشند) و ثالثاً: اجتماع این زیر مجموعه‌ها با خود مجموعه‌ی A برابر شود، در این صورت گوییم: مجموعه‌های A_1، A_2 و... و A_n مجموعه‌های افرازکننده‌ی مجموعه‌ی A هستند و مجموعه‌ی $E=\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ یک افراز n عضوی از مجموعه‌ی A است.

باید توجه داشته باشیم، در حالتی که $n=1$، یعنی E یک افراز تک‌عضوی از مجموعه‌ی A باشد، داریم: $E=\{A\}$. حال اگر بخواهیم تعریف افراز مجموعه را توسط نمادهای ریاضی یا به‌زبان ریاضی بیان کنیم، گوییم:

مجموعه‌ی $E=\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ یک افراز n عضوی برای مجموعه‌ی ناتهی A است، هرگاه:

۱) $\forall_i : 1 \le i \le n \ , \ A_i \neq \varnothing$

۲) $\forall_{i,j} : 1 \le i,j \le n \ , \ i \neq j \ , \ A_i \cap A_j = \varnothing$

۳) $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots A_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i = A$

برای درک بهتر مفهوم افراز یک مجموعه، چند مثال می‌آوریم:

مثال ۱. تمام افرازهای مجموعه‌ی $A=\{a\}$ را می‌نویسیم:

A: $\boxed{a}$ $\quad E=\{\{a\}\}$: تنها یک افراز تک‌عضوی داریم

مثال ۲. همه‌ی افرازهای مجموعه‌ی $A=\{a,b\}$ را می‌نویسیم:

A: $\boxed{a \mid b}$; $E=\{\{a\},\{b\}\}$: افراز دوعضوی

A: $\boxed{a \quad b}$; $E=\{\{a,b\}\}$: افراز تک‌عضوی

مثال۳. تمام افرازهای مجموعه‌ی $A=\{a,b,c\}$ را می‌نویسیم:

افراز سه‌عضوی: $E=\{\{a\},\{b\},\{c\}\}$; A | a | b | c |

افراز دوعضوی:
- $E=\{\{a\},\{b,c\}\}$; A | a | b c |
- $E=\{\{b\},\{a,c\}\}$; A | b | a c |
- $E=\{\{c\},\{a,b\}\}$; A | c | a b |

افراز تک‌عضوی: $E=\{\{a,b,c\}\}$; A | a b c |

مثال۴. همه‌ی افرازهای مجموعه‌ی $A=\{a,b,c,d\}$ را می‌نویسیم:

افراز چهارعضوی: $E=\{\{a\},\{b\},\{c\},\{d\}\}$: A | a | b | c | d |

افراز سه‌عضوی که تعداد آن شش تا است و به سه‌تای آن‌ها اشاره می‌کنیم.

- $E=\{\{a\},\{b\},\{c,d\}\}$; A | a | b | c d |
- $E=\{\{c\},\{d\},\{a,b\}\}$; A | a b | c | d |
- $E=\{\{a\},\{c\},\{b,d\}\}$; A | a | c | b d |

افراز دوعضوی که تعداد آن هفت عدد است، به چهار مورد آن‌ها اشاره می‌کنیم.

- $E=\{\{a\},\{b,c,d\}\}$; A | a | b c d |
- $E=\{\{b\},\{a,c,d\}\}$; A | b | a c d |
- $E=\{\{a,b\},\{c,d\}\}$; A | a b | c d |
- $E=\{\{a,c\},\{b,d\}\}$; A | a c | b d |

افراز تک‌عضوی: $E=\{\{a,b,c,d\}\}$: A | a b c d |

در مثال‌های بالا، به مفهوم افراز یک مجموعه دست یافتیم و با چگونگی افراز شدن یک مجموعه به کلاس‌های هم‌ارزی آشنا شدیم. حال اگر مثال‌ها را ادامه دهیم و بتوانیم مجموعه‌های پنج عضوی و شش‌عضوی را نیز افراز کنیم، به جدولی مانند جدول ۱ دست خواهیم یافت.

جدول۱. تعداد افرازهای یک مجموعه‌ی n عضوی ($n \le ۶$)

افراز m عضوی \ تعداد اعضای مجموعه‌ی n عضوی	۱	۲	۳	۴	۵	۶
۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱
۲	۰	۱	۳	۷	۱۵	۳۱
۳	۰	۰	۱	۶	۲۵	۹۰
۴	۰	۰	۰	۱	۱۰	۶۵
۵	۰	۰	۰	۰	۱	۱۵
۶	۰	۰	۰	۰	۰	۱
مجموع کل افرازهای مجموعه‌ی n عضوی	۱	۲	۵	۱۵	۵۲	۲۰۳

در این جا مشکل این است که هرچه تعداد اعضای مجموعه‌ی افراز شده بیشتر شود، به‌دست آوردن تعداد کل افرازهای آن سخت‌تر می‌شود. از این‌رو در اکثر منابع، از رابطه‌ی زیر تعداد افرازهای m عضوی از یک مجموعه‌ی nعضوی را به‌دست می‌آورند:

$$\frac{1}{m!}\sum_{k=1}^{m}(-1)^k\binom{m}{m-k}(m-k)^n \quad m,n\in \mathbb{N}, m\le n$$

اثبات این رابطه از راه استقرا روی nاست که از حوصله‌ی این بحث خارج است. حال با استفاده از رابطه‌ی بالا، جدول افرازی را بزرگ‌تر می‌کنیم:

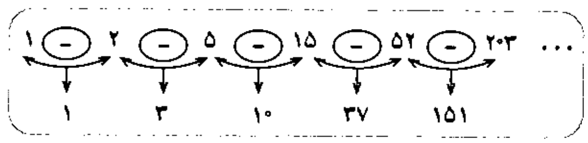
جدول۲. تعداد افرازهای یک مجموعه‌ی n عضوی ($n \le ۹$)

افراز m عضوی \ تعداد اعضای مجموعه‌ی n عضوی	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹
۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱
۲	۰	۱	۳	۷	۱۵	۳۱	۶۳	۱۲۷	۲۵۵
۳	۰	۰	۱	۶	۲۵	۹۰	۱۰۳	۹۶۶	۳۰۲۵
۴	۰	۰	۰	۱	۱۰	۶۵	۳۵۰	۱۷۰۱	۷۷۷۰
۵	۰	۰	۰	۰	۱	۱۵	۱۴۰	۱۰۵۰	۶۹۵۱
۶	۰	۰	۰	۰	۰	۱	۲۱	۲۶۶	۲۶۴۶
۷	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۱	۲۸	۴۶۲
۶	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۱	۳۶
۶	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۱
مجموع کل افرازهای مجموعه‌ی n عضوی	۱	۲	۵	۱۵	۵۲	۲۰۳	۸۷۷	۴۱۴۰	۲۱۱۴۷

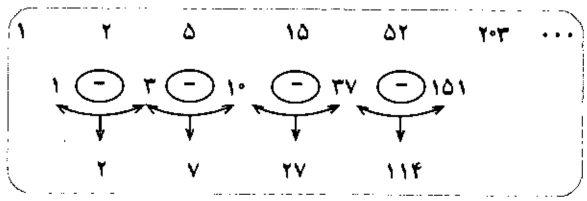
هنگامی که جدول ۲ را رسم می‌کنیم، به دنباله‌ای از مجموع کل افرازهای مجموعه‌ی nعضوی برمی‌خوریم که برای به‌دست آوردن جملات آتی آن، به محاسبات طولانی نیاز داریم. این دنباله به شکل زیر است:

۱-۲-۵-۱۵-۵۲-۲۰۳-۸۷۷-۴۱۴۰-...

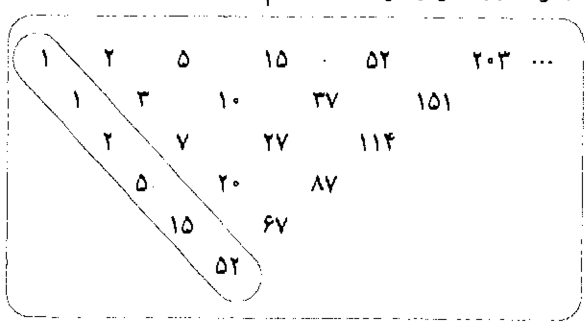
حال به راه‌حلی برای کم کردن این محاسبات توجه کنید:
اگر دنباله‌ی مجموع کل افرازهای مجموعه‌ی nعضوی را که از حالا آن را دنباله‌ی افراز nعضوی می‌نامیم، بنویسیم و از هر دو جمله‌ی متوالی آن تفاضل بگیریم و زیر آن‌ها بنویسیم، دنباله‌ی جدیدی به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:



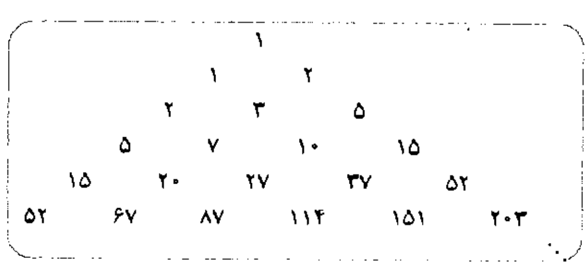
اگر این عملیات را روی دنباله‌ی جدید انجام بدهیم، بار دیگر دنباله‌ی جدیدتری ایجاد کرده‌ایم:



و چندبار این عمل را انجام می‌دهیم تا به یک عدد برسیم که دیگر قادر به تفریق کردن آن نباشیم:

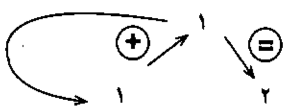


در این‌جا متوجه می‌شویم، ضلع مشخص شده از مثلث بالا، عیناً همان مجموع افرازهاست که دوباره تکرار شده است. اگر مثلث را کمی بچرخانیم، به راز آن پی خواهیم برد:

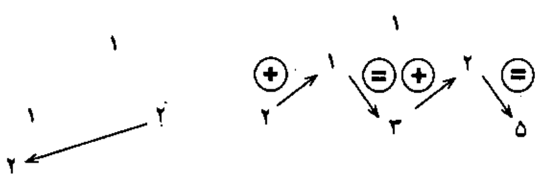




حال می‌توان به شیوه‌ی عملکرد این مثلث دست یافت:
«یک» به سطر دوم مثلث و ابتدای سطر آمده است. سپس با «یک» در بالای سر خود جمع شده و حاصل در آخر همان سطر نوشته شده است:



سپس «دو» به سطر پایین و سمت چپ سطر منتقل شده است، با عدد بالای سرش که «یک» باشد جمع شده و حاصل، یعنی «سه»، در وسط سطر نوشته شده است. سپس «سه» با «دو» در بالای سر خود جمع شده است و حاصل که «پنج» باشد، در انتهای سطر قرار گرفته است:



اگر همین روند را دنبال کنیم، به غیر از این که مثلث بالا را شکل داده‌ایم، به سادگی به جملات آتی دنباله‌ی افراز nعضوی دست می‌یابیم. رابطه‌ای که بر این مثلث حکم‌فرماست،

این گونه است :

آخرین عدد به دست آمده در سطر nام از مثلث برابر با تعداد کل افرازهای یک مجموعه‌ی nعضوی است . برای مثال ، تعداد کل افرازهای یک مجموعه‌ی ۱۰ عضوی را به وسیله‌ی مثلث گفته شده ، چنین محاسبه می‌کنیم :

۱
۱ ۲
۲ ۳ ۵
۵ ۷ ۱۰ ۱۵
۱۵ ۲۰ ۲۷ ۳۷ ۵۲
۵۲ ۶۷ ۸۷ ۱۱۴ ۱۵۱ ۲۰۳
۲۰۳ ۲۵۵ ۳۲۲ ۴۰۹ ۵۲۳ ۶۷۴ ۸۷۷
۸۷۷ ۱۰۸۰ ۱۳۳۵ ۱۶۵۷ ۲۰۶۶ ۲۵۸۹ ۳۲۶۳ ۴۱۴۰
۴۱۴۰ ۵۰۱۷ ۶۰۹۷ ۷۴۳۲ ۹۰۸۹ ۱۱۱۵۵ ۱۳۷۴۴ ۱۷۰۰۷ ۲۱۱۴۷
۲۱۱۴۷ ۲۵۲۸۷ ۳۰۳۰۴ ۳۶۴۰۱ ۴۳۸۳۳ ۵۲۹۲۲ ۶۴۰۷۷ ۷۷۸۲۱ ۹۴۸۲۸ ۱۱۵۹۷۵

مشاهده شد که در این مثلث ، با محاسباتی خیلی کمتر از راه‌های قبلی ، توانستیم تعداد کل افرازهای مجموعه‌ای ۱۰ عضوی را به دست آوریم .

در انتهای مقاله خود را موظف می‌دانم ، از تمام کسانی که مرا در راه تدوین این طرح یاری کردند (که مادر و پدرم در ابتدای این فهرست بلند قرار دارند) ، تشکر و سپاس به‌عمل آورم . ضمناً از تمامی صاحب‌نظران و خوانندگان تقاضا دارم ، پیشنهادهای تکمیلی و اصلاحی و انتقادهای خود را به دفتر مجله ارسال کنند .

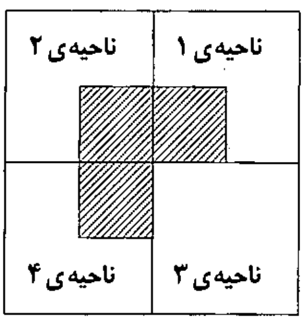
منابع ....

۱ . امیری ، حمیدرضا و ایلخانی‌پور ، یدالله . مبانی ریاضیات . انتشارات مدرسه . ۱۳۷۴ .
۲ . گریمالدی ، رالف . ریاضیات گسسته و ترکیباتی (ج۴) . ترجمه‌ی محمدعلی رضوانی و بیژن شمس . انتشارات فاطمی . تهران . ۱۳۷۶ .

تفریح اندیشه

● هادی رنجبران





چهار ناحیه‌ی بالا را در نظر بگیرید ، سعی کنید با رسم پاره‌خط هایی :

ناحیه‌ی ۱ را به دو قسمت برابر ؛

ناحیه‌ی ۲ را به سه قسمت برابر ؛

ناحیه‌ی ۳ را به چهار قسمت برابر ؛

ناحیه‌ی ۴ را به هفت قسمت برابر تقسیم کنید .

● محمدهاشم رستمی

۲



رویکرد هندسی،
رویکرد جبری- مختصاتی در آموزش هندسه

اشاره: یکی از مهم‌ترین پیوندها و اتصال‌ها در همه‌ی ریاضیات، اتصال و پیوند بین هندسه و جبر است. (از استانداردهای موضوعی NCTM)

در این شماره نیز این اتصال و پیوند را در فضای سه‌بعدی بررسی می‌کنیم.

نکته‌ی مهم: ضمن بررسی رویکرد هندسی، رویکرد جبری- مختصاتی در آموزش هندسه برخی از راهبردهای مهم برای حل مسأله‌های هندسه را مطرح می‌کنیم، درضمن لازم است گفته شود مسأله‌هایی را که با این دو رویکرد حل می‌کنیم، مسأله‌هایی از کتاب درسی هندسه‌ی ۱ و هندسه‌ی ۲ هستند، تا دانش‌آموزان بتوانند، مسائل دیگر این کتاب‌ها را با این دو رویکرد حل کنند.

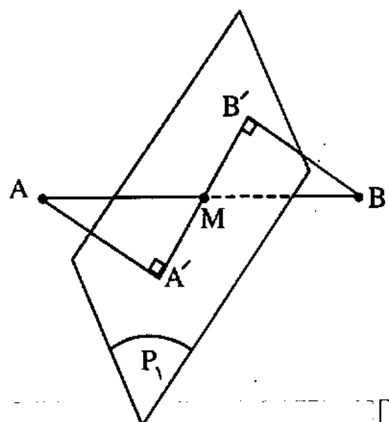
مثال ۱۰. آیا برای دو نقطه‌ی متمایز A و B و خط L، صفحه‌ای وجود دارد که بر L بگذرد و A و B از آن به یک فاصله باشند؟ در حالت‌های گوناگون چند جواب وجود دارد؟

مسئله را با روش هندسی و جبری- مختصاتی حل می‌کنیم.

روش هندسی

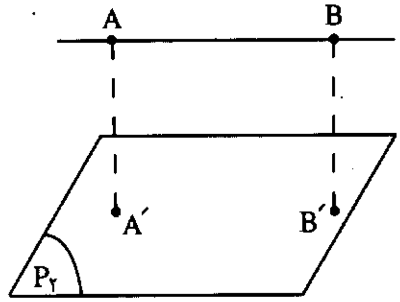
در مثال ۵ دیدیم، دو مجموعه صفحه وجود دارند که دو نقطه‌ی A و B از آن‌ها به یک فاصله‌اند:

دسته‌ی اول، مجموعه‌ی تمام صفحه‌هایی است که از نقطه‌ی M وسط پاره‌خط AB می‌گذرند. صفحه‌ی P_1 در شکل «الف» یکی از این صفحه‌ها را نشان می‌دهد.



شکل الف

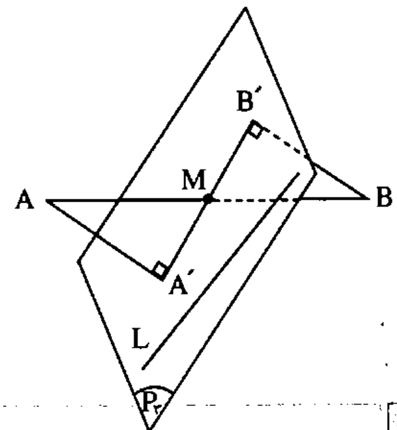
دسته‌ی دوم، مجموعه‌ی تمام صفحه‌هایی است که با خط AB (راستای AB) موازی است. صفحه‌ی P_2 در شکل «ب» یکی از این صفحه‌ها را نشان می‌دهد.



شکل پ

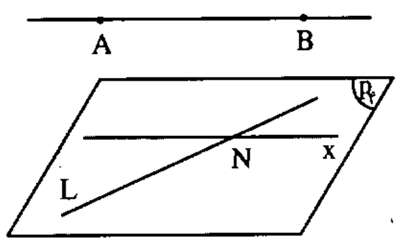
با توجه به این مطلب، در حالت کلی دو صفحه جواب مسئله هستند:

یکی صفحه‌ای که بر خط L و نقطه‌ی M وسط پاره‌خط AB می‌گذرد. این صفحه را P_2 می‌نامیم. شکل پ آن را نشان می‌دهد.



شکل پ

صفحه‌ی دیگر بر خط L می‌گذرد و با خط AB موازی است. برای رسم این صفحه از یک نقطه‌ی دل‌خواه مانند N واقع بر خط L، خط Nx را موازی AB رسم می‌کنیم. صفحه‌ی P_4 که بر دو خط متقاطع L و Nx می‌گذرد، جواب دیگر مسئله است (شکل ت).

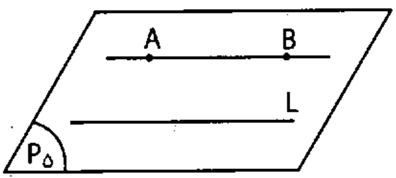


شکل ت

بحث: با توجه به وضع خط AB و خط L و نقطه‌ی M وسط پاره‌خط AB این حالت‌ها را خواهیم داشت:

۱. اگر خط AB موازی خط L نباشد و نقطه‌ی M نیز روی خط L قرار نداشته باشد، مسئله دو جواب دارد که همان جواب‌های مشخص شده در شکل‌هایی (پ) و (ت) هستند.

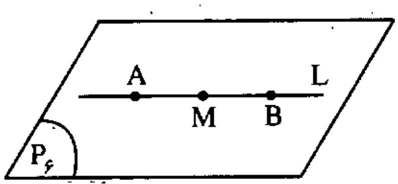
۲. اگر خط AB موازی با خط L و متمایز از آن باشد (یعنی منطبق بر L نباشد)، مسئله بی‌شمار جواب دارد که صفحه‌های گذرنده بر L (دسته صفحه‌ی گذرنده بر خط L) هستند. یکی از این صفحه‌ها، صفحه‌ای است که بر خط L و خط AB می‌گذرد. زیرا صفحه‌ای که بر خط L و نقطه‌ی M وسط پاره‌خط AB می‌گذرد، شامل خط AB نیز می‌شود. در شکل، خط AB بر صفحه‌ی P_5 واقع است، چون بنا به قضیه‌ای داریم: «اگر خطی موازی یک صفحه و از جمله روی آن صفحه باشد و از یک نقطه روی صفحه، خطی موازی آن رسم کنیم، آن خط به تمامی در آن صفحه قرار می‌گیرد.»



شکل ث

در این حالت، فاصله‌ی دو نقطه‌ی A و B از صفحه‌ی گذرنده بر L و AB، مساوی صفر است. در مورد بقیه‌ی صفحه‌ها این فاصله‌های مساوی صفر نیستند. بنابراین، در این حالت مسئله بی‌شمار جواب دارد.

۳. اگر خط AB روی خط L باشد، مسئله بی‌شمار جواب دارد. در واقع در این حالت تمام صفحه‌های گذرنده بر L (یا AB) جواب مسئله هستند. صفحه‌ی P_6 در شکل «ج» یکی از این بی‌شمار صفحه را نشان می‌دهد. در این حالت، فاصله‌ی دو نقطه‌ی A و B از هر یک از صفحه‌های گذرنده بر L، مساوی صفر است.

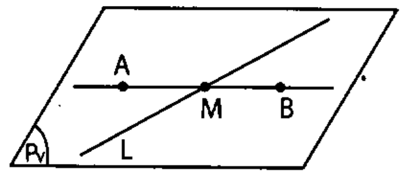


شکل ج

۴. اگر AB موازی L نباشد، اما نقطه‌ی M وسط پاره‌خط AB روی خط L باشد، یعنی در واقع خط AB و خط L، در نقطه‌ی M وسط پاره‌خط AB متقاطع باشند، هر صفحه‌ای که بر خط L بگذرد، جواب مسئله است. یکی از این صفحه‌ها،

صفحه‌ای است که بر دو خط متقاطع L و AB می‌گذرد.

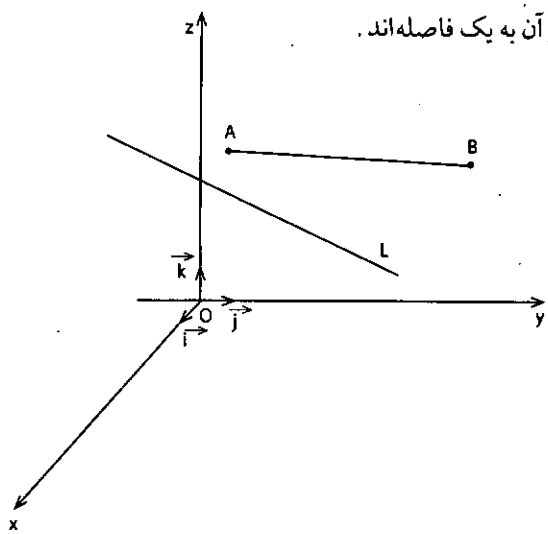
پس در این حالت، مسئله بی‌شمار جواب دارد. صفحه‌ی P_7 در شکل «ج» یکی از صفحه‌های جواب مسئله است.



شکل ج

روش جبری ـ مختصاتی

دستگاه محورهای مختصات قائم o-xyz را در نظر می‌گیریم. در این دستگاه مختصات فرض می‌کنیم ($A=(x_1,y_1,z_1)$ و $B=(x_2,y_2,z_2)$) و خط به معادله‌ی $L:\frac{x-x_0}{p}=\frac{y-y_0}{q}=\frac{z-z_0}{r}$ باشد. می‌خواهیم معادله‌ی صفحه‌ای را بنویسیم که بر خط L می‌گذرد و دو نقطه‌ی A و B از آن به یک فاصله‌اند.



می‌دانیم که در حالت کلی، دو صفحه جواب مسئله هستند:

الف) صفحه‌ای که بر خط L و نقطه‌ی M وسط پاره‌خط AB می‌گذرد؛ با توجه به این‌که:

$$M=\left(\frac{x_1-x_2}{2},\frac{y_1-y_2}{2},\frac{z_1-z_2}{2}\right)$$

برای نوشتن معادله‌ی این صفحه می‌توان از روش‌های متفاوتی استفاده کرد. یکی از آن‌ها، تعیین دو نقطه‌ی دل‌خواه C و D از خط L و سپس نوشتن معادله‌ی صفحه‌ی گذرنده بر سه نقطه‌ی M، C و D است. روش دیگر هم این است که معادله‌ی دسته صفحه‌ی گذرنده بر خط L را بنویسیم و از بین صفحه‌های این دسته صفحه، صفحه‌ای را مشخص کنیم که بر نقطه‌ی M وسط پاره‌خط AB می‌گذرد.

ب) صفحه‌ای که بر خط L می‌گذرد با خط AB موازی است.

برای نوشتن معادله‌ی این صفحه نیز روش‌های متفاوتی وجود دارند؛ از جمله: بردار قائم صفحه را که با بردار $\vec{L_D}\wedge\vec{AB}$ هم‌راستا است، تعیین و نقطه‌ای دل‌خواه روی خط L اختیار می‌کنیم. حال با داشتن یک نقطه از صفحه و بردار قائم آن معادله‌ی صفحه را می‌نویسیم.

در ادامه، برای روشن‌تر شدن این روش حل (روش جبری ـ مختصاتی) چند مثال می‌آوریم.

مثال ۱. دو نقطه‌ی $A=(2,-1,3)$ و $B=(-2,3,1)$ و خط $L:\frac{x+1}{3}=\frac{y-2}{2}=\frac{z}{-1}$ داده شده‌اند. معادله‌ی صفحه‌ی را بنویسید که بر خط L می‌گذرد و دو نقطه‌ی A و B از آن به یک فاصله‌اند.

حل: الف) نوشتن معادله‌ی صفحه‌ای که بر خط L و نقطه‌ی M وسط پاره‌خط AB می‌گذرد.

روش اول: دو نقطه دل‌خواه C و Dاز خط L را مشخص می‌کنیم. داریم:

$C=(-1,2,0)$ و $D=(2,4,-1)$

اکنون مختصات نقطه‌ی M وسط پاره‌خط ABرا به‌دست می‌آوریم. داریم:

$$M\left|\begin{array}{l} x=\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{2+(-2)}{2}=0 \\ y=\frac{y_1+y_2}{2}=\frac{-1+3}{2}=1\Rightarrow M=(0,1,2) \\ z=\frac{z_1+z_2}{2}=\frac{3+1}{2}=2 \end{array}\right.$$

حال معادله‌ی صفحه‌ی P گذرنده بر سه نقطه‌ی C، D و M را می‌نویسیم. برای نوشتن معادله‌ی این صفحه نیز به روش‌های متفاوتی عمل کنیم؛ از جمله:

$$\vec{CD}=(2+1,4-2,-1-0)=(3,2,-1)$$

$$\vec{CM}=(0+1,1-2,2-0)=(1,-1,2)$$

$$\vec{CD}\wedge\vec{CM}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 3 & 2 & -1\\ 1 & -1 & 2\end{vmatrix}=3\vec{i}-7\vec{j}-5\vec{k}$$

$$\Rightarrow \vec{N_p} = (2,-7,-5)$$

$$a(x-x_1)+b(y-y_1)+c(z-z_1)=0$$
$$\Rightarrow 3(x+1)-7(y-2)-5(z-0)=0$$
$$\Rightarrow 3x-7y-5z+17=0$$

معادله‌ی صفحه‌ی خواسته شده

> **نکته:** در این حالت به سادگی می‌توان نشان داد که AB موازی L نیست، زیرا پارامترهای هادی $\vec{AB}$ و خط L متناسب نیستند. هم‌چنین نقطه‌ی M وسط پاره‌خط AB روی خط L نیست، زیرا مختصات M در معادله‌ی L صدق نمی‌کند.

روش دوم

۱. مختصات نقطه‌ی M وسط پاره‌خط AB را تعیین می‌کنیم. داریم:

$$M=(\frac{x_1+x_2}{2}=0, y=\frac{y_1+y_2}{2}=1, z=\frac{z_1+z_2}{2}=2)$$
$$\Rightarrow M=(0,1,2)$$

۲. معادله‌ی دسته صفحه‌ی گذرنده بر خط $\frac{x+1}{3}=\frac{y-1}{2}=\frac{z}{-1}$ را می‌نویسیم.

داریم:

$$P_1:\frac{x+1}{3}=\frac{y-2}{2}\Rightarrow 2x+2=3y-6$$
$$\Rightarrow P_1: 2x-3y+8=0$$

$$P_2:\frac{x+1}{3}=\frac{z}{-1}\Rightarrow 3z=-x-1$$
$$\Rightarrow P_2: x+3z+1=0$$
$$P_1+\lambda P_2=0\Rightarrow 2x-3y+8+\lambda(x+3z+1)=0$$
$$\Rightarrow 2x-3y+8+\lambda x+3\lambda z+\lambda=0$$
$$\Rightarrow (2+\lambda)x-3y+3\lambda z+\lambda+8=0$$

معادله‌ی دسته‌ی صفحه‌ی گذرنده بر L

۳. صفحه‌ای از این دسته صفحه را مشخص می‌کنیم که از نقطه‌ی M وسط پاره‌خط AB می‌گذرد. به این منظور، مختصات نقطه‌ی M باید در معادله‌ی دسته صفحه صدق کند.

داریم:

$$M=(0,1,2)\xrightarrow{\text{در معادله‌ی دسته صفحه}}(2+\lambda)(0)-3(1)$$
$$+3\lambda(2)+\lambda+8=0$$

$$\Rightarrow -3+6\lambda+\lambda+8=0\Rightarrow 7\lambda+5=0\Rightarrow \lambda=\frac{-5}{7}$$

$$\Rightarrow (2-\frac{5}{7})x-3y+3(-\frac{5}{7})z+(-\frac{5}{7})+8=0$$

$$\frac{9}{7}x-3y-\frac{15}{7}z+\frac{51}{7}=0\Rightarrow 9x-21y-15z+51=0$$

$$\Rightarrow 3x-7y-5z+17=0$$

معادله‌ی صفحه‌ی جواب مسئله که همان معادله‌ی صفحه‌ی به‌دست آمده در روش اول است.

روش سوم

می‌دانیم معادله‌ی صفحه‌ای که بر سه نقطه‌ی (x_1,y_1,z_1) و (x_2,y_2,z_2) و (x_3,y_3,z_3) می‌گذرد، به‌صورت زیر است:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_2 & y_3-y_1 & z_3-z_2 \end{vmatrix}=0$$

با توجه به این مطلب و این‌که نقطه‌ی $M=(0,1,2)$ وسط پاره‌خط AB یک نقطه از این صفحه و $C=(-1,2,0)$ و $D=(2,4,-1)$ دو نقطه‌ی دیگر از خط L و متعلق به این صفحه هستند، خواهیم داشت:

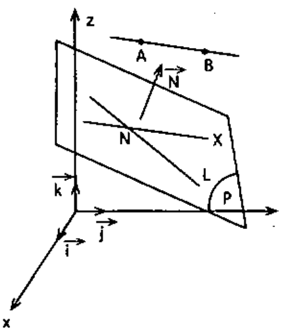
$$\begin{vmatrix} x-0 & y-1 & z-2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & -3 \end{vmatrix}=0$$

$$\Rightarrow 3(x-0)+(-7)(y-1)+(-5)(z-2)=0$$
$$\Rightarrow 3x-7y-5z+17=0$$

معادله‌ی صفحه‌ی خواسته شده

ب) نوشتن معادله‌ی صفحه‌ای که بر خط L می‌گذرد و با خط AB موازی است.

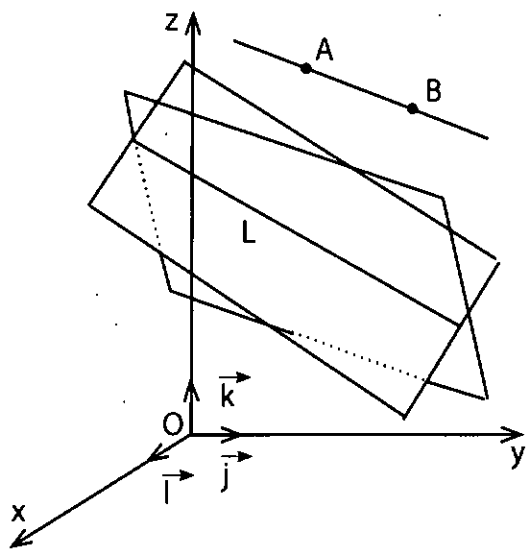
این صفحه را P می‌نامیم. معادله‌ی آن را به روش‌های متفاوتی می‌توان به‌دست آورد:



روش اول:

بردار قائم صفحه‌ای که بر خط L می‌گذرد و با خط AB موازی است، حاصل ضرب برونی این

دو بردار یعنی $\vec{V}_P = \vec{V}_L \times \vec{V}_{AB}$ است. این بردار را مشخص می‌کنیم. داریم:



$$A = (۳, -۱, ۳), B = (-۲, ۳, ۱)$$
$$\Rightarrow \vec{AB} = (-۲-۲, ۳+۱, ۱-۳)$$
$$\Rightarrow \vec{AB} = (-۴, ۴, -۲), L: \frac{x+۱}{۳} = \frac{y-۲}{۲} = \frac{z}{-۱}$$
$$\Rightarrow \vec{V}_L = (۳, ۲, -۱)$$
$$\Rightarrow \vec{V}_L \times \vec{AB} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -۴ & ۴ & -۲ \\ ۳ & ۲ & -۱ \end{vmatrix}$$
$$= (۰)\vec{i} + (-۱۰)\vec{j} + (-۲۰)\vec{k}$$
$$\Rightarrow \vec{N}_P = (۰, -۱۰, -۲۰) \text{ یا } \vec{N}_P = (۰, ۱, ۲)$$

اکنون یک نقطه از خط L را نیز مشخص می‌کنیم. داریم:

$$E = (-۱, ۲, ۰) \in L$$

حال معادله‌ی خط گذرنده از نقطه‌ی E و عمود بر بردار $\vec{N}$ را می‌نویسیم. داریم:

$$a(x - x_۱) + b(y - y_۱) + c(z - z_۱) = ۰$$
$$\Rightarrow ۰(x+۱) + ۱(y-۲) + ۲(z-۰) = ۰$$
$$\Rightarrow P: y + ۲z - ۲ = ۰ \quad \text{معادله‌ی صفحه‌ی جواب مسئله}$$

روش دوم:

معادله‌ی دسته صفحه‌ی گذرنده L را می‌نویسیم و از بین صفحه‌های این دسته صفحه، صفحه‌ای را مشخص می‌کنیم که با خط AB موازی است. معادله‌ی دسته صفحه‌ی گذرنده بر L را قبلاً نوشتیم. داریم:

$$(۲+\lambda)x - ۳y + ۳\lambda z + \lambda + ۸ = ۰$$

از طرف دیگر داشتیم:

$$\vec{AB} = (-۴, ۴, -۲) \text{ یا } \vec{AB} = (-۲, ۲, -۱)$$

از آن‌جا:

$$\vec{V}_{\text{دسته صفحه}} = (۲+\lambda, -۳, ۳\lambda), V_{\vec{AB}} = (-۴, ۴, -۲)$$
$$\vec{V}_{\text{دسته صفحه}} \perp V_{\vec{AB}} \Rightarrow V_{\text{دسته صفحه}} \times V_{\vec{AB}} = ۰$$

$$(۲+\lambda)(-۲) + (-۳)(۲) + (۳\lambda)(-۱) = ۰$$
$$\Rightarrow -۴ - ۲\lambda - ۶ - ۳\lambda = ۰$$
$$\Rightarrow -۵\lambda - ۱۰ = ۰ \Rightarrow \lambda = -۲$$
$$\lambda = -۲ \xrightarrow{\text{در معادله دسته صفحه}} (-۳+۲)x - ۳y + ۳(-۲)z - ۲ + ۸ = ۰$$
$$\Rightarrow -۳y - ۶z + ۶ = ۰ \Rightarrow y + ۲z - ۲ = ۰$$

معادله‌ی صفحه‌ی گذرنده بر L و موازی AB؛ یعنی جواب دیگر مسئله، که در روش اول نیز همین جواب به‌دست آمد.

مثال ۲. دو نقطه‌ی $A = (۱, ۰, ۲)$ و $B = (-۳, -۴, ۰)$ و خط $L: \frac{x}{۲} = \frac{y-۱}{۲} = \frac{z}{۱}$ داده شده‌اند. معادله‌ی صفحه‌ای را بنویسید که بر خط L می‌گذرد و دو نقطه‌ی A و B از آن به یک فاصله‌اند.

حل: بردار هادی راستای AB و بردار هادی خط L را به‌دست می‌آوریم تا وضع آن‌ها را نسبت به هم مشخص کنیم. داریم:

$$A(۱, ۰, ۲), B = (-۳, -۴, ۰) \Rightarrow \vec{AB} = (-۳-۱, -۴-۰, ۰-۲)$$
$$\Rightarrow \vec{AB} = (-۴, -۴, -۲), L: \frac{x}{۲} = \frac{y-۱}{۲} = \frac{z}{۱}$$
$$\Rightarrow \vec{V}_L = (۲, ۲, ۱), \frac{p}{p'}: \frac{-۴}{۲} = -۲,$$
$$\frac{q}{q'} = \frac{-۴}{۲} = -۲, \frac{r}{r'} = \frac{-۲}{۲} = -۲$$

$$\Rightarrow \frac{p}{p'}=\frac{q}{q'}=\frac{r}{r'}=-2 \Rightarrow \overrightarrow{AB} \parallel L$$

$$A=(1,0,2) \longrightarrow \frac{1}{2} \neq \frac{0-1}{2} \neq A \notin L$$

پس خط AB موازی با L و متمایز از آن است. بنابر آن چه در رویکرد هندسی بحث شد، در این حالت مسئله بی‌شمار جواب دارد. مجموعه این جواب‌ها، دسته صفحه‌ای است که بر خط L می‌گذرد. معادله‌ی این دسته صفحه را می‌نویسیم. داریم:

$$L: \frac{x}{2}=\frac{y-1}{2}=\frac{z}{1} \Rightarrow P_1: \frac{x}{2}=\frac{y-1}{2}$$

$$\Rightarrow x=y-1 \Rightarrow P_1: x-y+1=0$$

$$P_2: \frac{x}{2}=\frac{z}{1} \Rightarrow x=2z \Rightarrow P_2: x-2z=0$$

$$P_1+\lambda P_2=0 \Rightarrow x-y+1+\lambda(x-2z)=0$$

معادله‌ی دسته صفحه‌ی گذرنده بر L و جواب مسئله

$$\Rightarrow (1+\lambda)x-y-2\lambda z+1=0$$

نکته: یکی از این صفحه‌ها بر L و AB می‌گذرد. فاصله‌های دو نقطه‌ی A و B از این صفحه مساوی صفر است، چون این دو نقطه روی صفحه قرار دارند. در مورد بقیه‌ی صفحه‌های جواب مسئله، فاصله‌های مساوی A و B از هر یک از صفحه‌ها مخالف صفر است. به ازای مقادیر گوناگون λ می‌توان معادله‌ی این صفحه‌ها را مشخص کرد. لازم به ذکر است، دو صفحه از صفحه‌های جواب مسئله، همان صفحه‌های $P_1: x-y+1=0$ و $P_2: x-2z=0$ هستند که به ازای $\lambda=0$ و $\lambda \to \infty$ به‌دست می‌آیند.

نکته: معادله‌ی دسته صفحه‌ی گذرنده بر L را به‌صورت $\alpha P_1+\beta P_2=0$ که α و β عددهای حقیقی‌اند نیز می‌توان نشان داد؛ یعنی به‌صورت:

$\alpha(x-y+1)+\beta(x-2z)=0$

در این حالت به ازای $\alpha=0$، $P_2: x-2z=0$، و به ازای $\beta=0$، صفحه‌ی $P_1: x-y+1=0$ به‌دست می‌آید و به ازای بقیه‌ی مقدارهایی که به α و β نسبت می‌دهیم، صفحه‌های دیگر جواب مسئله حاصل می‌شود. صفحه‌ی گذرنده بر L و AB را نیز می‌توان مشخص کرد که یکی از جواب‌های مسئله است.

مثال ۳. خط $L: \frac{x-1}{4}=\frac{y}{2}=\frac{z-1}{3}$ و دو نقطه‌ی $A=(2,-1,4)$ و $B=(0,1,-2)$ داده شده‌اند. معادله‌ی صفحه‌ای را مشخص کنید که بر خط L می‌گذرد و دو نقطه‌ی A و B از آن به یک فاصله‌اند.

حل: وضع خط AB و خط L و هم‌چنین وضع نقطه‌ی M وسط پاره‌خط AB را نسبت به خط L مشخص می‌کنیم. داریم:

$$A=(2,-1,4), B=(0,1,-2) \Rightarrow \overrightarrow{AB}=(-2,2,-6)$$

$$\overrightarrow{V}_L=(4,2,3), \frac{-2}{4} \neq \frac{2}{2} \neq \frac{-6}{3} \Rightarrow$$ AB موازی L نیست

$$M=(1,0,1) \xrightarrow{\text{در معادله‌ی } L} \frac{1-1}{3}=\frac{0}{2}=\frac{1-1}{3} \Rightarrow 0=0=0$$

پس نقطه‌ی M وسط پاره‌خط AB روی خط L قرار دارد. بنابراین مسئله بی‌شمار جواب دارد و این بی‌شمار جواب دسته صفحه‌ای است که بر خط L می‌گذرد (یکی از صفحه‌های این دسته صفحه، صفحه‌ی گذرنده بر دو خط متقاطع L و AB است). معادله‌ی این دسته صفحه را می‌نویسیم.

$$L: \frac{x-1}{4}=\frac{y}{2}=\frac{z-1}{3}$$

$$\Rightarrow P_1: \frac{x-1}{4}=\frac{y}{2} \text{ یا } \frac{x-1}{2}=\frac{y}{1}$$

$$\Rightarrow x-1=2y \Rightarrow P_1: x-2y-1=0$$

$$P_2: \frac{y}{2}=\frac{z-1}{2} \Rightarrow P_2: 3y-2z+2=0$$

$$\Rightarrow \alpha(x-2y-1)+\beta(3y-2z+2)=0$$

معادله‌ی دسته صفحه‌ی جواب مسئله (دسته صفحه‌ی گذرنده بر L).

نکته: دو صفحه‌ی P_1 و P_2، دو صفحه‌ی جواب مسئله‌اند که به ازای $\beta=0$ و $\alpha=0$ به‌دست می‌آیند. برای تعیین معادله‌ی صفحه‌ی گذرنده بر L و AB در این حالت، کافی است مختصات یک نقطه‌ی دل‌خواه AB (غیر از نقطه‌ی M) را در معادله‌ی دسته صفحه قرار دهیم.

به ازای مقادیر دیگری که به‌جای عددهای حقیقی α و β قرار می‌دهیم، معادله‌ی صفحه‌های دیگر جواب مسئله به‌دست می‌آید. ■

● شهین بهنیا

دبیر ریاضی دبیرستان‌های چهاردانگه

انتگرال‌گیری جدولی

اشاره

در این مقاله به انتگرال‌گیری به روش جدولی پرداخته و سعی بر این است که در جدول‌ها، با استفاده از مشتق‌هایی که قبلاً آموخته‌ایم و نیز انتگرال‌های ساده به جواب برسیم. این روش برای به‌جواب رسیدن در انتگرال‌هایی مناسب است که به‌صورت حاصل‌ضربی از دو عامل نوشته می‌شوند. بدین‌ترتیب، هنر خوب یاد گرفتن و خوب یاد دادن را می‌آموزیم و نشان می‌دهیم که ریاضی نیز علمی زیبا و فهمیدنی است؛ البته اگر با بردباری، پشتکار و امید به یادگیری آن بپردازیم و همواره در پی آموختن مطالب جدید باشیم.

انتگرال جدولی راهی برای پیدا کردن سریع جواب انتگرال‌هاست. هم‌چنین سرچشمه‌ای برای استخراج قاعده‌های مهم آنالیز و تابع اولیه است. این انتگرال‌گیری بر «جمع انتگرال‌های متوالی» استوار است و با استفاده از آن می‌توان حاصل $\int F(t)G(t)dt$ را به‌دست آورد. این روش ما را از انجام اعمال جبری خسته‌کننده برای به‌دست آوردن حاصل این انتگرال‌ها بی‌نیاز می‌سازد.

ستون اول	ستون دوم
$+F$	G
$-F^{(1)}$	$G^{(-1)}$
$+F^{(2)}$	$G^{(-2)}$
$-F^{(3)}$	$G^{(-3)}$
$\vdots$	$\vdots$
$(-1)^n F^{(n)}$	$G^{(-n)}$
$(-1)^{n+1}F^{(n+1)}\dots$	$G^{(-n-1)}$

همان‌گونه که این طرح در جدول دیده می‌شود، در ستون اول، $F(t)$ و مشتق‌های متوالی آن با افزودن جمع و منهای متناوب در کنار آن نوشته می‌شود. پس $F^{(1)}$ مشتق اول تابع و $F^{(2)}$ مشتق دوم تابع و $F^{(3)}$ مشتق سوم تابع و... و $F^{(n)}$ مشتق nام تابع را در ستون اول نشان می‌دهد.

در ستون دوم جدول، $G(t)$ و انتگرال‌های متوالی آن دیده می‌شود. $G^{(-1)}$ انتگرال اول تابع و $G^{(-2)}$ انتگرال دوم و به همین صورت تا $G^{(-n)}$ که انتگرال nام $G(t)$ است. در این انتگرال‌گیری متوالی، عددهای ثابت را به حساب نمی‌آوریم و آن‌ها را در حاصل نهایی به صورت عدد C ثبت می‌کنیم. در نهایت جواب انتگرال با جمع حاصل‌ضرب‌هایی که در جدول به صورت خطوط مایل نشان داده شده‌اند، به‌دست می‌آید.

پس به صورت نمادین می‌توان نوشت:

$$\int F(t)G(t)dt = FG^{(-1)} - F^{(1)}G^{(-2)} + F^{(2)}G^{(-3)} + \dots$$
$$+(-1)^n F^{(n)}G^{(-n-1)} + (-1)^{n+1}\int F^{(n+1)}(t)G^{(-n-1)}(t)dt$$
$$= \sum_{k=0}^{n}(-1)^k F^k G^{(-k-1)} + (-1)^{n+1}\int F^{(n+1)}(t)G^{(-n-1)}(t)dt$$

مثال ۱. حاصل $\int x^2 \sin x dx$ را به‌دست آورید.

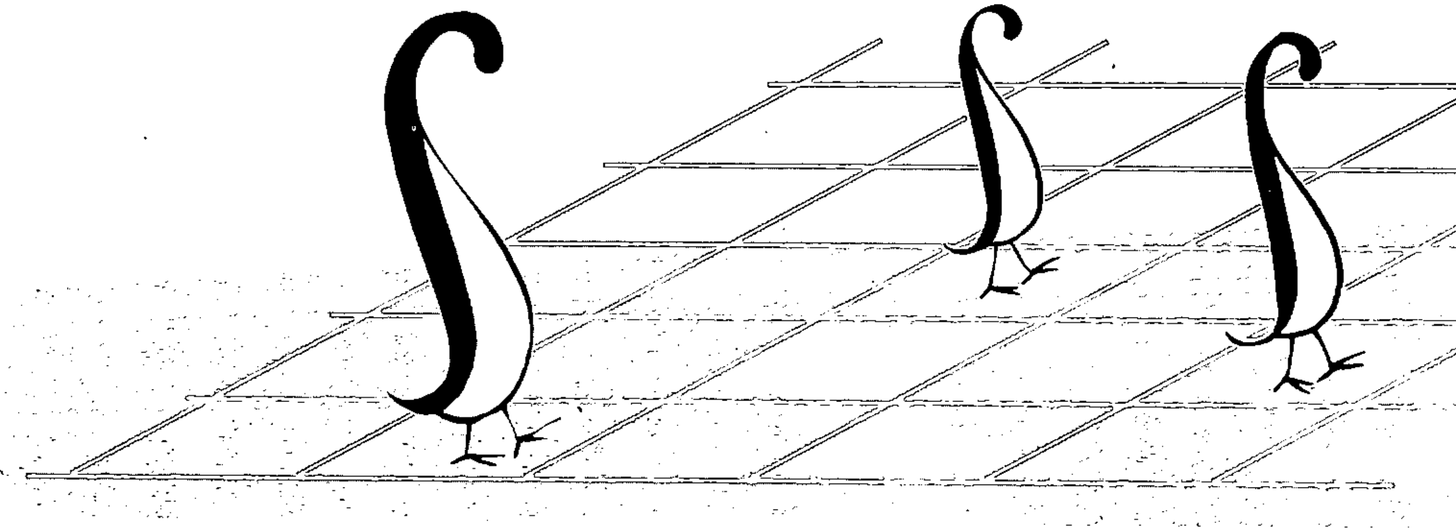
حل: در نظر می‌گیریم:

$F(x) = x^2$

$G(x) = \sin x$

و می‌دانیم که:

$\int \sin x dx = -\cos x + c$ و $\int \cos x dx = \sin x + c$



مشتق‌های متوالی x^2 تا صفر — ستون اول	ستون دوم — انتگرال‌های متوالی $\sin x$
$+F(x) = x^2$	$G(x)=\sin x$
$-F^{(1)} = 2x$	$G^{(-1)} = -\cos x$
$+F^{(2)} = 2$	$G^{(-2)} = -\sin sx$
$-F^{(3)} = 0$	$G^{(-3)} = \cos x$

وقتی در ستون اول به صفر می‌رسیم، کار انتگرال گیری به پایان رسیده است، پس داریم:

$$\int x^2 \sin x dx = F(x)G^{(-1)} - F^{(1)}G^{(-2)} + F^{(2)}G^{(-3)}$$

$$= -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2\cos x + c$$

با توجه به این‌که:

$$G^{(-1)} = \int G(x)dx = \int \sin x dx = -\cos x + c$$

ولی همان‌طور که گفتیم، ثابت انتگرال (C) را در هریک از مراحل انتگرال گیری نادیده می‌گیریم. پس $G^{(-1)} = \cos x$ را در جدول می‌نویسیم و به همین ترتیب برای $G^{(-2)}$ و $G^{(-3)}$ عمل می‌کنیم که در جدول نوشته‌ایم. البته این مقدار ثابت در حاصل نهایی انتگرال نوشته شده است.

مثال۲. حاصل $\int \frac{3x-2}{\sqrt{x}}dx$ را به‌دست آورید.

حل: در نظر می‌گیریم:

$F(x) = 3x - 2$

$G(x) = (\sqrt{x})^{-1}$

و می‌دانیم که:

$$\int x^n = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

مشتق‌های متوالی $3x-2$ تا صفر — ستون اول	ستون دوم — انتگرال‌های متوالی $\sqrt{x}$
$+F(x) = (3x-2)$	$G(x) = (\sqrt{x})^{-1} = x^{\frac{-1}{2}}$
$-F^{(1)} = 3$	$G^{(-1)} = \frac{x^{\frac{-1}{2}+1}}{\frac{1}{2}} = 2x^{\frac{1}{2}}$
$+F^{(2)} = 0$	$G^{(-2)} = 2\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{3}{2}} = \frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}$

پس داریم:

$$\int \frac{3x-2}{\sqrt{x}}dx = (3x-2)(2x^{\frac{1}{2}}) - 3(\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}})$$

$$= (3x-2)(2\sqrt{x}) - 4x\sqrt{x}$$

$$= \sqrt{x}(2x-4) + C$$

مثال۲. حاصل $\int x^2 e^x dx$ را به دست آورید.

حل: می‌دانیم که: $\int e^x dx = e^x + C$

در نظر می‌گیریم:

$F(x) = x^2$

$G(x) = e^x$

مشتق‌های متوالی x^2 تا صفر — ستون اول	ستون دوم — انتگرال‌های متوالی e^x
$+\ x^2$	e^x
$-\ 2x$	e^x
$+\ 2$	e^x
$-\ 0$	e^x

پس داریم :

$$\int x^2e^xdx = x^2e^x - 2xe^x + 2e^x + C$$
$$= e^x(x^2 - 2x + 2) + C$$

مثال۴. حاصل $\int e^x \sin x dx$ را محاسبه کنید.

حل: در نظر می گیریم :

$F(x) = \sin x$

$G(x) = e^x$

ستون اول	ستون دوم
$+ \ \sin x$	e^x
$- \ \cos x$	e^x
$+ \ (-\sin x)$ *	e^x
	e^x

* $e^x \sin x$ خود عبارت انتگرال است.

توجه کنید، در این مثال با رسیدن به عبارت انتگرال اصلی، دیگر عمل انتگرال گیری را ادامه نمی‌دهیم و برای نوشتن حاصل داریم :

$$\int e^x \sin xdx = e^x \sin x - e^x \cos x - \int e^x \sin xdx$$
$$(\int e^x \sin xdx + \int e^x \sin xdx) = e^x \sin x - e^x \cos x$$
$$\int e^x \sin xdx = \frac{1}{2}e^x(\sin x - \cos x) + C$$

مثال۵. حاصل $\int \frac{12t^2+36}{\sqrt[5]{3t+2}}dt$ را محاسبه کنید.

حل: داریم :

$F(t) = 12t^2 + 36$

$G(x) = (3t+2)^{\frac{-1}{5}}$

مشتق های متوالی $12t^2+36$ تا صفر — ستون اول	ستون دوم — انتگرال های متوالی $(3t+2)^{\frac{-1}{5}}$
$+12t^2 + 36$	$(3t+2)^{\frac{-1}{5}}$
$-24t$	$\frac{5}{12}(3t+2)^{\frac{4}{5}}$
$+24$	$\frac{25}{324}(3t+2)^{\frac{9}{5}}$
0	$\frac{125}{13608}(3t+2)^{\frac{14}{5}}$

پس داریم :

$$\int \frac{12t^2+36}{\sqrt[5]{3t+2}}dt = (5t^2+15)(3t+2)^{\frac{4}{5}}$$
$$-\frac{50t}{27}(3t+2)^{\frac{9}{5}} + \frac{125}{567}(3t+2)^{\frac{14}{5}} + C$$

تمرین انتگرال‌های زیر را با همین روش محاسبه کنید.

۱) $\int (5x^2+2)\cos xdx$

۲) $\int e^x(-x^2+2x-1)dx$

۳) $\int \frac{5x^2+6x}{2\sqrt{x}}dx$

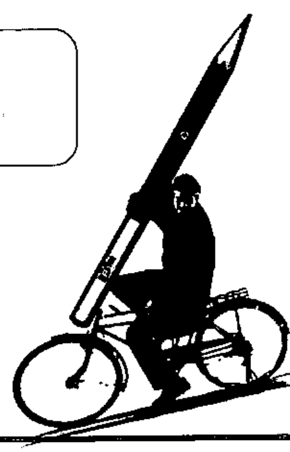
۴) $\int \sin x(\frac{x^2-1}{2})dx$

منابع ....

1. www.matharticles.com

۲. توماس، جورج ب. حساب دیفرانسیل و انتگرال (ج۱).

لطیفه



روزی عده‌ای از مهندسان می‌خواستند ارتفاع میله‌ی پرچم را اندازه‌گیری کنند و چون فقط متر داشتند و نمی‌توانستند آن را جایی بند کنند، مانده بودند که چه کنند. در همین حال ریاضی‌دانی از آن‌جا عبور می‌کرد از او کمک خواستند و گفت این که خیلی آسان است و میله‌ی پرچم را از جای درآورد و روی زمین گذاشت و طول آن را با متر اندازه گرفت، بعد از رفتن او یکی از مهندسان گفت، این ریاضی‌دان‌ها چه‌قدر بامزه هستند، ما می‌خواستیم ارتفاع میله را حساب کنیم، او طول آن را به ما گفت.

۵

دکتر محمدعلی فریبرزی عراقی
عضو هیئت علمی دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران

نظریه‌ی مجموعه‌های فازی

۱ ۰

مقدمه

مسائلی که انسان در واقعیت با آن‌ها سروکار دارد، معمولاً دارای ابهام و نوعی عدم قطعیت هستند که به پیچیدگی در آن‌ها می‌انجامد. برای آن که بتوان موضوعی را به‌طور کامل تحلیل کرد، باید اطلاعات کافی و دقیق از آن داشت. ولی انسان در مواجهه با مسائل پیچیده در دنیای واقعی، چون اطلاعات دقیقی از آن‌ها ندارد، به شکل تقریبی ماهیت آن‌ها را تحلیل می‌کند. در این خصوص، پروفسور لطفی‌زاده، بنیان‌گذار منطق و مجموعه‌های فازی بیان کرده است: «هر چه میزان آگاهی از یک سیستم افزایش یابد، پیچیدگی آن سیستم کاهش پیدا می‌کند و درک و تحلیل از آن افزایش می‌یابد. وقتی پیچیدگی سیستم کاهش یابد، دقت روش مدل‌سازی افزایش می‌یابد و ابزار مفیدی برای تحلیل سیستم فراهم می‌شود.»

برای سیستم‌هایی که پیچیدگی کمی دارند، چون میزان عدم قطعیت در آن‌ها کم است، می‌توان با استفاده از روابط ریاضی، رفتار آن‌ها را به شکل دقیق مدل‌سازی و تحلیل کرد. ولی اگر سیستم قدری پیچیده شود، عدم قطعیت افزایش می‌یابد. در این حالت نمی‌توان تحلیل دقیقی از آن به عمل آورد. به منظور تحلیل مناسبی از این نوع سیستم‌ها، از رویکرد استدلال تقریبی فازی استفاده می‌شود. به همین لحاظ، به آن‌ها سیستم‌های «فازی» می‌گویند.

ورودی سیستم‌های فازی، اطلاعاتی فازی یا غیردقیق هستند، یا آن که بررسی سیستم براساس استدلال تقریبی و به شکل فازی و غیردقیق صورت می‌گیرد. نظریه‌ی فازی که به بررسی مفاهیم غیردقیق می‌پردازد، دارای چهار بخش متفاوت است که عبارت‌اند از: ریاضی فازی، منطق و سیستم‌های فازی، تصمیم‌گیری فازی و هوش مصنوعی. ریاضی فازی به بررسی مجموعه‌های فازی و اعمال روی آن‌ها می‌پردازد و همان‌گونه که در قسمت‌های قبل اشاره شد، عضویت یک عنصر در یک مجموعه‌ی فازی، با عددی موسوم به درجه‌ی عضویت بیان می‌شود که مقداری بین صفر و یک است. منطق فازی توسعه یافته‌ی منطق کلاسیک است که در آن به جای منطق دو ارزشی، از منطق چند ارزشی استفاده می‌شود. در تصمیم‌گیری فازی پارامترها، تابع هدف و قیود مسئله به شکل فازی هستند.

از جمله کاربردهای مهم نظریه‌ی فازی، در هوش مصنوعی و طراحی و ساخت ربات‌های هوشمند است که می‌توان با پردازش فازی، امکان انجام رفتارهایی شبیه انسان را در آن‌ها طراحی کرد.

در قسمت‌های قبل، مفاهیمی چون مجموعه‌ی فازی محدب، عدد فازی و اعمال روی مجموعه‌های فازی معرفی شدند. در این قسمت، ابتدا چند مفهوم در مجموعه‌های فازی را مطرح می‌کنیم:

تعریف: منظور از «ارتفاع یک مجموعه‌ی فازی»، بزرگ‌ترین مقدار درجه‌ی عضویت در آن مجموعه است. ارتفاع مجموعه‌ی فازی $\tilde{A}$ را با $h(\tilde{A})$ نمایش می‌دهیم. به این ترتیب:

$$h(\tilde{A}) = \max_{x\in X} \mu_{\tilde{A}}(x)$$

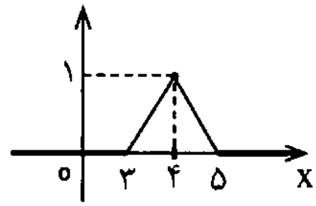
در صورتی که ارتفاع یک مجموعه‌ی فازی ۱ باشد، آن مجموعه‌ی فازی را نرمال و در غیر این صورت غیرنرمال می‌گویند. بنابراین اگر $\tilde{A}$ یک مجموعه‌ی فازی نرمال باشد، آن‌گاه:

$$\exists x \in X,\ \mu_{\tilde{A}}(x) = 1$$

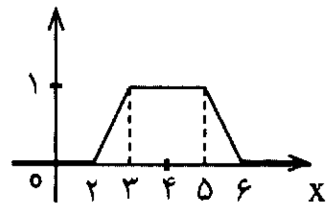
زیر مجموعه‌ای از مجموعه‌ی مرجع X که مقدار درجه‌ی عضویت اعضای این مجموعه ۱ باشد، «هسته‌ی مجموعه‌ی فازی» $\tilde{A}$ نام دارد. هسته‌ی $\tilde{A}$ را با $Core(\tilde{A})$ نمایش می‌دهند. لذا:

$$Core(\tilde{A}) = \left\{x \in X \mid \mu_{\tilde{A}}(x) = ۱\right\}$$

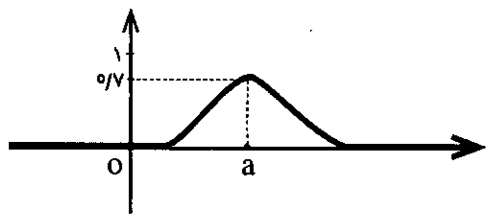
شکل‌های زیر، توابع عضویت نمونه‌ای از یک مجموعه‌ی فازی نرمال و غیرنرمال را نمایش می‌دهند. در هر یک از آن‌ها هسته و ارتفاع مشخص شده‌اند.



مجموعه‌ی فازی نرمال با $h(\tilde{A}) = ۱$ و $Core(\tilde{A}) = \{۴\}$



مجموعه‌ی فازی نرمال با $h(\tilde{A}) = ۱$ و $Core(\tilde{A}) = [۳,۵]$



مجموعه‌ی فازی غیرنرمال با $h(\tilde{A}) = ۰/۷$ و $Core(\tilde{A}) = \phi$

هم‌چنین، اگر:

$\tilde{A} = \{(۲,۰/۳),(۳,۰/۶),(۴,۱),(۵,۱),(۷,۰/۸),(۹,۰/۴)\}$،

آن‌گاه: $h(\tilde{A}) = ۱$ و $Core(\tilde{A}) = \{۴,۵\}$. بنابراین، $\tilde{A}$ مجموعه‌ی فازی نرمالی را نمایش می‌دهد.

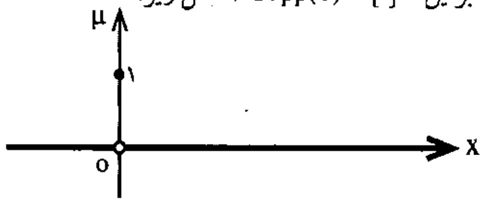
مفهوم دیگری که در مجموعه‌های فازی مطرح می‌شود، «مجموعه‌ی فازی سینگلتون» است که به مجموعه‌ی فازی با تکیه‌گاه یک عضوی اطلاق می‌شود. بنابراین، $\tilde{A}$ یک مجموعه‌ی فازی سینگلتون نام دارد، هرگاه:

$$Supp(\tilde{A}) = \{a\}$$

برای مثال، منظور از صفر سینگلتون، مجموعه‌ای فازی با این تابع عضویت است:

$$\mu_{\tilde{0}}(x) = \begin{cases} ۱ & x = ۰ \\ ۰ & x \neq ۰ \end{cases}$$

بنابراین: $Supp(\tilde{0}) = \{۰\}$ (شکل زیر).



در قسمت قبل، تعریفی از اعداد فازی مطرح شد که زیمرمن[1] ارائه داده است. پس از آن، تعریف عدد فازی، به صورت زیر کامل شد:

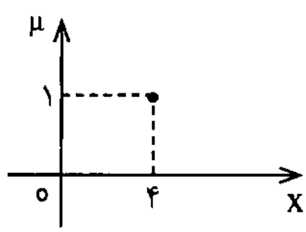
تعریف: مجموعه‌ی فازی $\tilde{A}$ را عدد فازی گوییم هرگاه:

الف) $\tilde{A}$ مجموعه‌ی فازی نرمال باشد؛

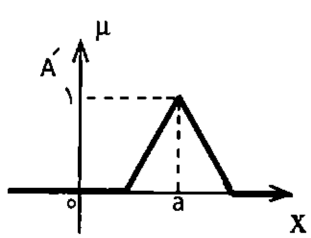
ب) مجموعه‌ی α- برش $\tilde{A}$، یعنی A_α برای هر $۰ < \alpha \le ۱$، بازه‌ای بسته باشد؛

ج) تکیه‌گاه $\tilde{A}$ مجموعه‌ای کران‌دار باشد.

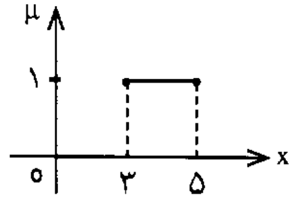
بنابر تعریف بالا، چون α- برش یک عدد فازی برای هر $۰ < \alpha \le ۱$، مجموعه‌ای بسته، و هر مجموعه‌ی بسته، مجموعه‌ای محدب است، بنابراین هر عدد فازی یک مجموعه‌ی فازی محدب است. ولی عکس این حالت برقرار نیست. یعنی می‌توان مجموعه‌ی فازی محدبی را مثال زد که یک α- برش آن باز یا نیم‌باز باشد. شکل‌های زیر، نمونه‌هایی از تابع عضویت یک عدد فازی را بیان می‌کنند. توجه می‌کنیم که اعداد حقیقی و بازه‌های حقیقی، حالات خاصی از اعداد فازی هستند.



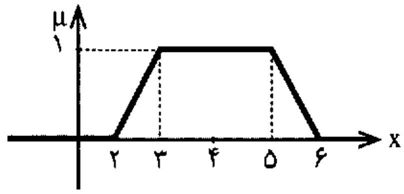
۱ یک عدد حقیقی قطعی (عدد ۴)



۲ یک عدد حقیقی فازی (تقریباً ۴)

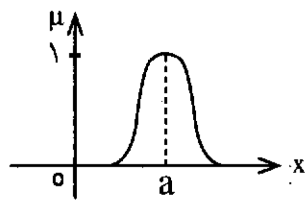


۳ یک بازه‌ی بسته‌ی حقیقی قطعی (بازه‌ی [۳,۵])

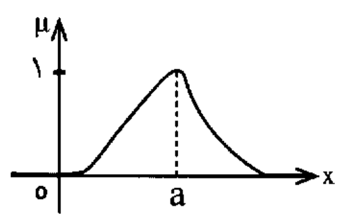


۴ یک بازه‌ی حقیقی فازی (تقریباً بین ۳ و ۵)

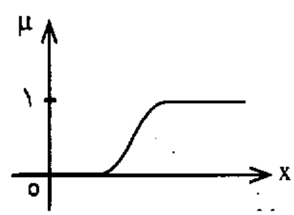
تابع عضویت هر عدد فازی، لزوماً همانند شکل‌های بالا متقارن نیست. به نمونه‌های زیر از اعداد فازی توجه کنید:



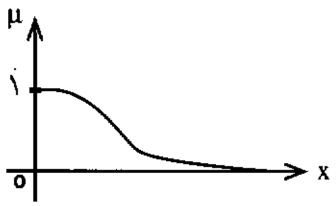
۱ یک عدد فازی زنگی شکل متقارن



۲ یک عدد فازی زنگی شکل غیرمتقارن



۳ اعداد بزرگ



۴ اعداد کوچک

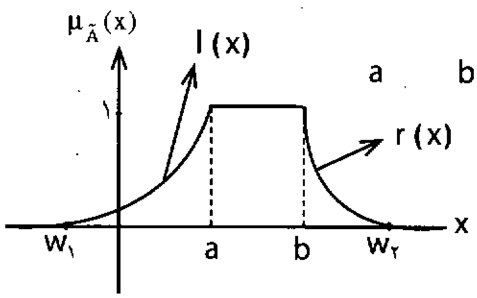
مشاهده می‌کنیم، تابع عضویت هر عدد فازی می‌تواند صعودی یا نزولی باشد. با توجه به تعریف عدد فازی، می‌توان قضیه‌ی زیر را بیان کرد:

قضیه: اگر $\tilde{A}$ یک مجموعه‌ی فازی روی $\mathbb{R}$ باشد، آن‌گاه $\tilde{A}$ یک عدد فازی است اگر و تنها اگر بازه‌ی بسته‌ی غیرتهی نظیر $[a,b]$ وجود داشته باشد که:

$$\mu_{\tilde{A}}(x)=\begin{cases}1 & a\le x\le b\\ l(x) & x<a\\ r(x) & x>b\end{cases}$$

که در آن l تابعی از $(-\infty,a)$ به $[0,1]$، صعودی و از راست پیوسته است و به ازای $x\in(-\infty,w_1]$ ، $w_1\le a$ ، $l(x)=0$ ، r تابعی از $(b,+\infty)$ به $[0,1]$، نزولی و از چپ پیوسته است و به ازای $x\in[w_2,+\infty)$ ، $b\le w_2$ داریم: $r(x)=0$.

در شکل زیر، توابع l و r در قضیه به نمایش گذاشته شده‌اند:



نمونه‌ای از یک عدد فازی با هسته‌ی [a,b]

چون مجموعه‌های فازی با α- برش‌های خود مشخص می‌شوند، می‌توان با انجام محاسبات روی α- برش‌ها، اعمال ریاضی روی اعداد فازی را برحسب اعمال ریاضی روی α- برش‌های آن‌ها معرفی کرد. در این‌جا اعمال اصلی در بازه‌ها را معرفی می‌کنیم. خواص و جزئیات اعمال بازه‌ای در

مبحثی با عنوان «حساب بازه‌ای» بررسی می‌شود. در ادامه، اعمال جمع، تفریق، ضرب و تقسیم دو بازه‌ی حقیقی، هم‌چنین قرینه و وارون بازه‌ی فازی معرفی می‌شوند:

$$[a,b]+[c,d]=[a+c,b+d]$$
$$-[a,b]=[-b,-a]$$
$$[a,b]-[c,d]=[a,b]+(-[c,d])=[a-d,b-c]$$

با فرض آن‌که: $۰\notin[a,b]$

$$[a,b]^{-۱}=\left[\frac{۱}{b},\frac{۱}{a}\right]$$

$$[a,b]\times[c,d]=[\min\{ac,ad,bc,bd\},\max\{ac,ad,bc,bd\}]$$

با فرض $۰\notin[c,d]$

$$[a,b]/[c,d]=[a,b]\times[c,d]^{-۱}=[a,b]\times\left[\frac{۱}{d},\frac{۱}{c}\right]$$
$$=\left[\min\left\{\frac{a}{d},\frac{a}{c},\frac{b}{d},\frac{b}{c}\right\},\max\left\{\frac{a}{d},\frac{a}{c},\frac{b}{d},\frac{b}{c}\right\}\right]$$

مثال:

$$[۲,۶]+[۱,۴]=[۳,۱۰] \qquad -[-۷,۲]=[-۲,۷]$$
$$[۲,۶]-[۱,۴]=[-۲,۵] \qquad [۲,۶]^{-۱}=\left[\frac{۱}{۶},\frac{۱}{۲}\right]$$
$$[-۲,۲]\times[-۳,-۰/۵]=[-۶,۶]$$
$$[-۱,۳]/[۲,۵]=\left[\frac{-۱}{۲},\frac{۳}{۲}\right]$$

حال فرض کنید، می‌خواهیم تابع عضویت مجموع و تفاضل دو عدد فازی مثلثی شکل $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ را با توابع عضویت زیر را به دست آوریم:

$$\mu_{\tilde{A}}(x)=\begin{cases}۰ & x\le -۱\ ,\ x>۳\\ \frac{x+۱}{۲} & -۱\le x\le ۱\\ \frac{۳-x}{۲} & ۱<x\le ۳\end{cases}$$

$$\mu_{\tilde{B}}(x)=\begin{cases}۰ & x\le ۱\ ,\ x>۵\\ \frac{x-۱}{۲} & ۱\le x\le ۳\\ \frac{۵-x}{۲} & ۳<x\le ۵\end{cases}$$

در این حالت، مجموعه‌های α- برش عبارت‌اند از:

$$A_\alpha=[۲\alpha-۱,۳-۲\alpha]\ ,\ ۰\le\alpha\le۱$$
$$B_\alpha=[۲\alpha+۱,۵-۲\alpha]\ ,\ ۰<\alpha\le۱$$

با توجه به جمع و تفریق بازه‌های فازی خواهیم داشت:

$$(A+B)_\alpha=[۲\alpha-۱,۳-۲\alpha]+[۲\alpha+۱,۵-۲\alpha]$$
$$=[۴\alpha,۸-۴\alpha]\ ,\ ۰<\alpha\le۱$$

$$(A-B)_\alpha=[۲\alpha-۱,۳-۲\alpha]-[۲\alpha+۱,۵-۲\alpha]$$
$$=[۴\alpha-۶,۲-۴\alpha]\ ,\ ۰<\alpha\le۱$$

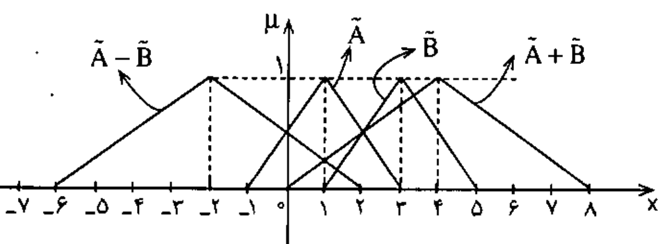
حال از روی مجموعه‌های α- برش فوق توابع عضویت $\tilde{A}+\tilde{B}$ و $\tilde{A}-\tilde{B}$ را به دست می‌آوریم. فرض کنیم:
$x\in(A+B)_\alpha$ لذا $۴\alpha\le x\le ۸-۴\alpha$ و از آن‌جا $\alpha\le\frac{x}{۴}$ به ازای $۰<x\le۴$ و $\alpha\le\frac{۸-x}{۴}$ به ازای $۴<x\le۸$. بنابراین:

$$\mu_{\tilde{A}+\tilde{B}}(x)=\begin{cases}۰ & x\le ۰\ ,\ x>۸\\ \frac{x}{۴} & ۰<x\le ۴\\ \frac{۸-x}{۴} & ۴<x\le ۸\end{cases}$$

به طور مشابه:

$$\mu_{\tilde{A}-\tilde{B}}(x)=\begin{cases}۰ & x\le -۶\ ,\ x>۲\\ \frac{x+۶}{۴} & -۶<x\le -۲\\ \frac{۲-x}{۴} & -۲<x\le ۲\end{cases}$$

شکل زیر، توابع عضویت $\tilde{A}$، $\tilde{B}$، $\tilde{A}+\tilde{B}$ و $\tilde{A}-\tilde{B}$ را نمایش می‌دهد.



حال سؤالات زیر را مطرح می‌کنیم:

- آیا حاصل تقریباً ۳+ تقریباً ۱ برابر با تقریباً ۴ می‌شود؟
- آیا رابطه‌ی تقریباً ۳= تقریباً ۱+ (تقریباً ۱ـ تقریباً ۳) صحیح است؟

دو تابع عضویت مثال بالا، توصیفی از اعداد فازی تقریباً ۱ و تقریباً ۳ را نمایش می‌دهند. با توجه به تابع عضویت $\tilde{A}+\tilde{B}$، پاسخ سؤال اول مثبت است. مجموعه‌ی α- برش $(A+B)_\alpha$ به ازای چند α خاص در زیر آمده است:

$$(A+B)_\alpha=\begin{cases}[۱/۲,۶/۸] & \alpha=۰/۳\\ [۲/۸,۵/۲] & \alpha=۰/۷\\ ۴ & \alpha=۱\end{cases}$$

ولی پاسخ سؤال دوم منفی است. رابطه‌ی فوق صحیح نیست. علت اصلی برقرار نبودن این رابطه از تعریف تفریق دو بازه‌ی حقیقی ناشی می‌شود. در مثال فوق، مجموعه‌ی α - برش عدد فازی «تقریباً ۱ـ تقریباً ۳» عبارت است از قرینه‌ی مجموعه‌ی α - برش عدد فازی «تقریباً ۳ـ تقریباً ۱»؛ یعنی قرینه‌ی بازه‌ی $[4\alpha-6, 2-4\alpha]$.

بنابراین: $0<\alpha\leq 1$ و (تقریباً ۱ـتقریباً ۳)$_\alpha = [4\alpha-2, 6-4\alpha]$

حال این بازه با بازه‌ی (تقریباً ۱)$_\alpha = [2\alpha-1, 3-2\alpha]$ جمع می‌شود. بنابراین:

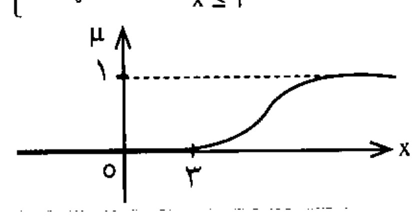
$0<\alpha\leq 1$ و (تقریباً ۱ـتقریباً ۳)$_\alpha$ + (تقریباً ۱)$_\alpha = [6\alpha-3, 9-6\alpha]$

مجموعه‌ی α - برش حاصل با مجموعه‌ی α - برش عدد فازی تقریباً ۳، یعنی B_α متفاوت است.

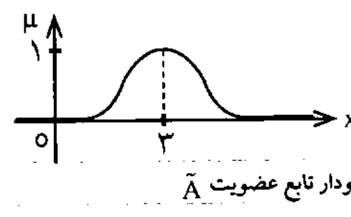
در انتها چگونگی حل تمرین‌هایی را که در مقاله‌ی قبل مطرح شدند، شرح می‌دهیم.

در سؤال اول، تابع عضویت قسمت الف می‌تواند به صورت $\mu_{\tilde{A}}(x) = e^{-(x-3)^2}$ معرفی شود. قسمت ب معرف یک عدد فازی ذوزنقه‌ای یا یک بازه‌ی فازی با هسته‌ی $[1,3]$ است که می‌توانید آن را در رابطه‌ی کلی ارائه شده برای تابع عضویت این نوع از اعداد فازی جای‌گذاری کنید. تابع عضویت برای قسمت ج سؤال را می‌توان به شکل زیر در نظر گرفت:

$$\mu_{\tilde{C}}(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1+(\dfrac{1}{x-3})^2} & x>3 \\ 0 & x\leq 3 \end{cases}$$



۱ نمودار تابع عضویت $\tilde{C}$



۲ نمودار تابع عضویت $\tilde{A}$

به منظور بررسی محدب بودن $\tilde{A}$ در سؤال ۲، به این صورت عمل می‌کنم (در صورت سؤال، توان ۲ در مخرج کسر تایپ نشده است که در این حل اصلاح گردیده است):

$$\mu_{\tilde{A}}(x)\geq\alpha \Rightarrow \frac{1}{1+(\frac{1}{x-10})^2}\geq\alpha \Rightarrow 1+(\frac{1}{x+10})^2\leq\frac{1}{\alpha}$$

$$\Rightarrow (\frac{1}{x-10})^2\leq\frac{1-\alpha}{\alpha} \Rightarrow (x-10)^2\geq\frac{\alpha}{1-\alpha} \Rightarrow |x-10|\geq\sqrt{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

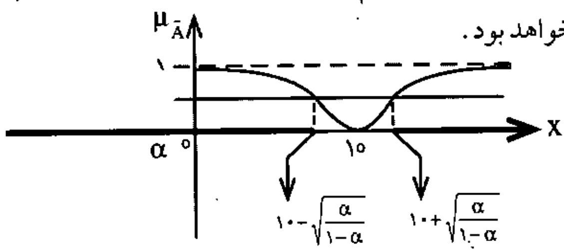
$$\text{یا}\ x-10\leq-\sqrt{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \Rightarrow x\geq 10+\sqrt{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \Rightarrow x-10\geq\sqrt{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

$$\Rightarrow x-10\geq\sqrt{\frac{\alpha}{1-\alpha}}\ \text{یا}\ x\leq 10-\sqrt{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \Rightarrow x\leq 10-\sqrt{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

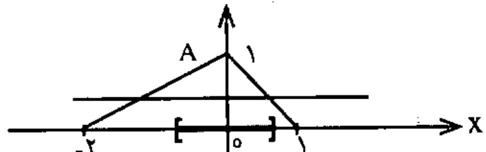
$$\text{یا}\ x\geq 10+\sqrt{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

$$\Rightarrow A_\alpha = (-\infty, 10-\sqrt{\frac{\alpha}{1-\alpha}}] \cup [10+\sqrt{\frac{\alpha}{1-\alpha}}, +\infty)$$

نمودار زیر توصیفی از تابع عضویت $\tilde{A}$ و α - برش آن است. ملاحظه می‌کنیم، A_α محدب نیست، لذا $\tilde{A}$ محدب نخواهد بود.



این عدد فازی می‌تواند بیانگر مفهوم فازی خیلی دور از ۱۰ باشد. مجموعه‌ی α - برش قسمت دوم $B_\alpha = \left[10-\sqrt{\frac{1-\alpha}{\alpha}}\ ,\ 10+\sqrt{\frac{1-\alpha}{\alpha}}\right]$ است که مجموعه‌ای محدب است. بنابراین $\tilde{B}$ محدب است. سؤال سوم مشابه سؤال حل شده در مقاله‌ی قبل حل می‌شود. در مورد سؤال چهارم، به شکل زیر توجه کنید که $\mu_{\tilde{A}}$ را نمایش می‌دهد. ملاحظه می‌کنیم که $\tilde{A}$ یک عدد فازی نه مثبت و نه منفی است. این عدد فازی توصیفی از تقریباً ۱ را ارائه می‌دهد.



$A_\alpha = [2\alpha-2, 1-\alpha]$

پاورقی

1. Zimmermann

منابع

۱. شوندی، حسن. نظریه‌ی مجموعه‌های فازی و کاربرد آن در مهندسی صنایع و مدیریت. انتشارات گسترش علوم پایه. چاپ اول. ۱۳۸۵.

۲. منهاج، محمدباقر. محاسبات فازی. انتشارات دانش نگار. چاپ اول. ۱۳۸۶.

3. Fuzzy Sets and Fuzzy Logic, theory and applications, G. J. Klir and B. Yuan, Prentice Hall of India, 1995.

قضیه‌ی تقسیم

حمیدرضا امیری



اشاره:
در این قسمت و با بیان خواص رابطه‌ی بخش‌پذیری (عادکردن) روی Z در دو قسمت قبل، به بررسی قضیه‌ی تقسیم و نتایجِ حاصل از آن می‌پردازیم:

قضیه‌ی تقسیم: به ازای هر عدد صحیح مانند a و هر عدد طبیعی مانند b، همواره دو عدد صحیح و منحصر به فرد مانند r و q یافت می‌شوند، به قسمی که $a = bq + r$ و $0 \le r < b$.

اثبات قضیه‌ی تقسیم را با روشی بیان می‌کنیم که تا حدی با روش اثبات در کتاب درسی متفاوت است:

برهان: دنباله‌ی اعداد صحیح زیر را در نظر بگیرید:

$$\dots, -3b, -2b, -b, 0, b, 2b, 3b, \dots$$

واضح است که هر عدد صحیح مانند a، همواره بین دو عضو متوالی از این دنباله قرار خواهد گرفت! یعنی عددی صحیح مانند q یافت می‌شود، به قسمی که $qb \le a < (q+1)b$. با اضافه کردن $-qb$ به طرفین نابرابری خواهیم داشت: $0 \le a - qb < b$ که اگر فرض کنیم $\underbrace{r = a - bq}_{a=bq+r}$، در این صورت داریم: $a = bq + r$. بنابراین قسمت اولِ قضیه یعنی وجود r و q در Z که در رابطه‌های $a = bq + r$ و $0 \le r < b$ صدق کنند، به اثبات رسید. اثبات یکتایی r و q همان اثبات کتاب درسی است!

توجه: از این به بعد در مسائل، a را مقسوم، b را مقسوم‌علیه، q را خارج قسمت و r را باقی‌مانده می‌نامیم.

بیان و اثبات چند قضیه‌ی مقدماتی (لِم)

لِم ۱: اگر در یک تقسیم، مقسوم و مقسوم علیه را در عددی ضرب کنیم، باقی‌مانده‌ی تقسیم در آن عدد ضرب می‌شود و خارج قسمت تغییر نمی‌کند.

برهان: فرض کنیم $a = bq + r$ تقسیم عدد صحیح و دل‌خواه a بر عدد طبیعی b باشد و q خارج قسمت و r باقی‌مانده. در این صورت داریم:

$$a = bq + r$$
$$\Rightarrow ka = k(bq) + kr$$
$$\Rightarrow ka = (kb)q + kr$$

واضح است که q خارج قسمت تقسیم ka بر kb است و kr باقی‌مانده.

$$(0 \le r < b \Rightarrow 0 \le kr < kb)$$

تذکر: لِم ۱ در حالتی که مقسوم و مقسوم‌علیه بر k بخش‌پذیر باشند و نیز برای تقسیم آن‌ها بر k، برقرار است (به عنوان تمرین ثابت کنید.)

لِم ۲: اگر در یک تقسیم k برابر مقسوم علیه را به مقسوم اضافه کنیم و مقسوم‌علیه را تغییر ندهیم، در این صورت خارج قسمت با عدد k جمع می‌شود و باقی‌مانده تغییر نمی‌کند.

برهان: فرض کنیم $a = bq + r$. در این صورت:

$$a = bq + r \Rightarrow a + kb = bq + kb + r$$

$$\Rightarrow (a + kb) = b\underbrace{(q + k)}_{q'} + r$$

لم ۳: برای به دست آوردن خارج قسمت تقسیم یک عدد بر حاصل ضرب چند عدد، کافی است آن عدد را بر یکی از عامل های ضرب، تقسیم کنیم. خارج قسمت حاصل را هم بر یکی دیگر از عوامل تقسیم کنیم و این عمل را ادامه دهیم تا آخرین عامل ضرب که آخرین خارج قسمت همان خارج قسمت مطلوب است.

فرض کنیم می‌خواهیم خارج‌قسمت ۴۵۰ را بر $5\times3\times7$ بیابیم.

$$450=5\times90,\quad 90=3\times30,\quad 30=7\times4+2\Rightarrow q=4$$

$$450=(7\times3\times5)\times4+30\Rightarrow q'=4$$

(مشاهده می‌کنید که $q=q'=4$)

برهان: لم ۳ را در حالت تقسیم عدد a بر bc بررسی می‌کنیم. برای حالتی که a بر حاصل ضرب n عدد تقسیم شود نیز به طریق مشابه می‌توان عمل کرد:

(۱) ابتدا a را بر b تقسیم می‌کنیم: $a=bq+r,\ 0\le r<b$

(۲) سپس q را بر c تقسیم می‌کنیم: $q=cq_1+r_1,\ 0\le r_1<c$

اگر q را از رابطه‌ی ۲ در رابطه‌ی ۱ قرار دهیم، خواهیم داشت:

$$a=b(cq_1+r_1)+r\Rightarrow a=bcq_1+(br_1+r)$$

حال کافی است ثابت کنیم: $br_1+r_2<bc$. در این صورت حکم به دست می‌آید و q_1 یعنی آخرین خارج قسمت، همان خارج قسمت مطلوب است.

$$r<b\Rightarrow r\le b-1$$

$$r_1<c\Rightarrow r_1\le c-1\Rightarrow br_1\le bc-b$$

$$\xrightarrow{\text{جمع طرفین نامساوی}} r+br_1\le(b-1)+(bc-b)\Rightarrow br_1+r\le bc-1$$

$$\Rightarrow br_1+r<bc$$

یک مطلب جالب!

در هر تقسیم، تعداد ارقام خارج قسمت برابر است با حداقل تعداد صفرهایی که باید در جلوی مقسوم‌علیه قرار دهیم تا عدد حاصل از مقسوم بزرگ‌تر شود.

مثال: در تقسیم ۷۶ بر ۶، خارج قسمت دو رقمی است، زیرا اگر حداقل دو صفر جلوی ۶ قرار دهیم، در این صورت حاصل یعنی ۶۰۰ از ۷۶ بزرگ‌تر می‌شود. در صورتی که خارج قسمت تقسیم ۷۶ بر ۸، یک رقمی است. زیرا با قراردادن تنها یک صفر جلوی ۸، عدد حاصل از ۷۶ بزرگ‌تر می‌شود.

لم ۴: بزرگ‌ترین عددی که می‌توان به مقسوم اضافه کرد تا خارج‌قسمت تغییر نکند (با ثابت ماندن مقسوم علیه) برابر است با $(b-r-1)$.

برهان: اگر به طرفین رابطه‌ی $a=bq+r$ عدد n را اضافه کنیم، خواهیم داشت $a+n=bq+n+r$. حال اگر $(a+n)$ را مقسوم و b را همان مقسوم‌علیه و q را خارج قسمت فرض کنیم و $r'=(n+r)$ باقی مانده باشد، باید $n+1<b$ یا $n<b-1$ باشد که حداقل مقدار برای آن $n=b-r-1$ است.

لم ۵: در تقسیم $a=bq+r$ حداکثر $\left[\frac{r}{q}\right]$ واحد می‌توان به مقسوم‌علیه اضافه کرد تا مقسوم و خارج قسمت تغییر نکنند.

برهان:

$$a=bq+r\Rightarrow a=(b+x)q+r'$$

$$\Rightarrow bq+r=(b+x)q+r'\Rightarrow r'=r-xq,\quad r'\ge0$$

$$\Rightarrow r-xq\ge0\Rightarrow xq\le r\Rightarrow x\le\frac{r}{q}\Rightarrow x_{max}=\left[\frac{r}{q}\right]$$



مسائل حل شده

مسئله‌ی ۱: در یک تقسیم، اگر ۴۱ واحد به مقسوم اضافه کنیم و مقسوم‌علیه را تغییر ندهیم، ۵ واحد به خارج قسمت اضافه و از باقی‌مانده ۴ واحد کم می‌شود. مقسوم‌علیه را بیابید.

حل: فرض $a=bq+r$

$$a+41=b(q+5)+r-4\Rightarrow a+41=\underbrace{bq+r}_{a}+5b-4$$

$$\Rightarrow 5b=45\Rightarrow \underline{b=9}$$

مسئله‌ی ۲: چه تعداد عدد طبیعی مانند a یافت می‌شود که باقی‌مانده‌ی تقسیم آن بر ۱۹۸، از سه برابر مربع خارج قسمت ۴ واحد کمتر باشد (بزرگ‌ترین آن‌ها کدام است)؟

حل: طبق قضیه‌ی تقسیم، اگر q را خارج قسمت و r را باقی‌مانده فرض کنیم، خواهیم داشت:

$$a=198q+r\ ,\ r<198\ ,\ r=3q^2-4$$

$$\Rightarrow 3q^2-4<198 \Rightarrow 3q^2<202 \Rightarrow q^2<\frac{202}{3}$$

$$\Rightarrow q^2 \le \left[\frac{202}{3}\right]=67 \Rightarrow q \le \left[\sqrt{67}\right] \Rightarrow q \le 8$$

اگر $\begin{cases} q=0 \Rightarrow r=-4 \\ q=1 \Rightarrow r=-1 \end{cases} \Rightarrow q \neq 0,1,\ 2 \le q \le 8$

بنابراین برای q، هفت مقدار وجود دارد که به ازای $q=8$ بزرگ‌ترین مقدار برای a به دست می‌آید.

$$q=8 \Rightarrow r=3\times 8^2-4=188\ ,\ a=198\times 8+188=1772$$

مسئله‌ی ۳: در یک تقسیم، مقسوم علیه ۸ و باقی‌مانده ۵ است. اگر ۳۲ واحد به مقسوم اضافه کنیم و مقسوم علیه را تغییر ندهیم، خارج قسمت چه تغییری می‌کند و باقی‌مانده چه عددی است؟

حل: طبق لم ۲، چون چهار برابر مقسوم‌علیه با مقسوم جمع شده است، خارج قسمت با عدد ۴ جمع می‌شود و خارج قسمت جدید به دست می‌آید. باقی‌مانده تغییر نمی‌کند و همان عدد ۵ است.

مسئله‌ی ۴: در یک تقسیم، مقسوم ۱۲ برابر باقی‌مانده است و باقی‌مانده ۲ واحد از حداکثر مقدار خود کمتر است. اجزای این تقسیم را به دست آورید.

حل: طبق فرض مسئله، اگر $a=bq+r$، در این صورت $a=12r$ و $r=b-1-2$.

$$a=bq+r \Rightarrow 12r=bq+r \Rightarrow 12(b-3)=bq+b-3$$

$$\Rightarrow 12b-36=bq+b-3 \Rightarrow 11b-bq=33$$

$$\Rightarrow b(11-q)=3\times 11 \Rightarrow \begin{cases} b=11 \Rightarrow r=b-3=11-3=8 \\ 11-q=3 \Rightarrow q=8 \end{cases}$$

$$a=12r \Rightarrow a=12\times 8=96$$

(توجه دارید که اگر $11-q=11$، در این صورت $q=0$ که نتیجه می‌دهد $a=0$. در این صورت عددی طبیعی به دست نمی‌آید.)

مسئله‌ی ۵: اگر باقی‌مانده‌های تقسیم a و b بر ۲۵ به‌ترتیب ۱۹ و ۱۷ باشند، باقی‌مانده‌ی تقسیم $(3a-5b)$ را بر ۲۵ بیابید.

حل: طبق فرض مسئله داریم:

$$\begin{cases} a=25q_1+19 \\ b=25q_2+17 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3a=3\times 25q_1+57 \\ 5b=5\times 25q_2+85 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 3a-5b=25(\underbrace{3q_1-5q_2}_{q\in Z})+57-85=25q-28$$

$$\Rightarrow (3a-5b)=25q-28=25q-50+22=25(\overbrace{q-2}^{q'\in Z})+22$$

$$\Rightarrow (3a-5b)=25q'+22 \Rightarrow \text{باقیمانده}=r=22$$

(توجه دارید که باقی‌مانده‌ی هر تقسیمی، همواره عددی نامنفی است.)

مسئله‌ی ۶: اگر در یک تقسیم، مقسوم و مقسوم‌علیه هر دو بر عدد صحیح k بخش‌پذیر باشند، ثابت کنید همواره باقی‌مانده‌ی تقسیم نیز بر k بخش‌پذیر خواهد بود.

حل: روش اول:

$$a=bq+r\ ,\ k|a,\ k|b \Rightarrow a=kq_1\ ,\ b=kq_2$$

$$\Rightarrow kq_1=(kq_2)q+r \Rightarrow r=k(\underbrace{q_1-q_2q}_{q'}) \Rightarrow k|r$$

روش دوم:

$$\left.\begin{array}{l} k|a \\ k|b \rightarrow k|bq \end{array}\right\} \Rightarrow k|a-bq \Rightarrow a|r$$

مسئله‌ی ۷: باقی‌مانده‌های تقسیم عدد a بر دو عدد ۷ و ۸ به ترتیب ۵ و ۶ هستند، باقی‌مانده‌ی تقسیم a بر ۵۶ را بیابید.

حل: طبق فرض داریم:

$$\begin{cases} a=7q_1+5 \\ b=8q_2+6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8a=56q_1+40 \\ 7b=56q_2+42 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (8a-7b)=56(\underbrace{q_1-q_2}_{q\in Z})+(40-42)$$

$$\Rightarrow a=56q-2 \Rightarrow r=54$$

(برای یافتن $r=54$ مانند مسئله‌ی ۵ عمل کنید.)

مسئله‌ی ۸: باقی‌مانده‌های تقسیم عدد a بر دو عدد ۵ و ۷، به ترتیب ۳ و ۵ هستند، باقی‌مانده‌ی تقسیم a را بر ۳۵ بیابید.

حل: طبق فرض داریم:

$$\begin{matrix}14\\15\end{matrix}\begin{cases} a=5q_1+3 \\ q=7q_2+5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 14a=14\times 5q_1+42 \\ 15a=15\times 7q_2+75 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (15a-14a)=35(3q_2-2q_1)+33 \Rightarrow r=33$$

(توجه دارید که برای ضرب در هر تساوی اعدادی متوالی لازم داریم که یکی عامل ۷ و دیگری عامل ۵ داشته باشد که ۱۴ و ۱۵ واجد این شرایط هستند.)

مسئله‌ی ۹: باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد طبیعی a بر ۲۹ برابر با ۱۲

و $21 \mid a+17$ است. در این صورت کمترین مقدار را برای a بیابید.

حل: طبق فرض داریم:

$$\begin{cases} a = 29q + 12 \\ a + 17 = 21q' \end{cases} \Rightarrow 29q + 12 = 21q' - 17$$

$$\Rightarrow 21q' = 29q + 12 + 17 = 29q + 29 = 29(\overbrace{q+1}^{q_1 \in Z})$$

$$\Rightarrow 21q' = 29q_1 \Rightarrow \frac{21}{29} = \frac{q_1}{q'} \overset{a_{min}}{\Rightarrow} q_1 = 21,\ \ q' = 29$$

از طرف دیگر:

$$a + 17 = 21q' \Rightarrow a = 21q' - 17 = 21 \times 29 - 17 = 592$$

مسئله‌ی ۱۰: اگر a عددی صحیح و فرد باشد، به طوری که باقی‌مانده‌ی تقسیم آن بر ۲۵، عدد ۱۷ باشد، باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد $\frac{a+3}{2}$ بر ۲۵ را بیابید.

حل: طبق فرض داریم: $a = 25q + 17$. و چون a فرد است. پس باید q عددی زوج باشد (چرا؟) بنابراین داریم:

$$q = 2k \Rightarrow a = 25 \times 2k + 17 \Rightarrow a + 3 = 25 \times 2k + 17 + 3$$

$$\Rightarrow \frac{a+3}{2} = 25k + \frac{20}{2} \Rightarrow \frac{a+3}{2} = 25k + 10 \Rightarrow r = 10$$

مسئله‌ی ۱۱: در یک تقسیم، مقسوم ۵۲۵ و باقی‌مانده ۲۵ است. اگر مقسوم‌علیه، مجذور دو برابر خارج قسمت باشد، خارج قسمت را بیابید.

حل: طبق فرض داریم:

$$525 = bq + 25,\ \ b = (2q)^2 = 4q^2$$

$$\Rightarrow 525 = 4q^2 \times q + 25 \Rightarrow 4q^3 = 500 \Rightarrow q^3 = 125 \Rightarrow q = 5$$

مسئله‌ی ۱۲: اگر a و b اعداد طبیعی و $b \neq 1$ باشد و باقی‌مانده‌ی تقسیم a بر b را r بنامیم، باقی‌مانده‌ی تقسیم $-a$ بر $-b$ را بیابید.

حل: طبق فرض مسئله و قضیه‌ی تقسیم داریم:

$$a = bq + r,\ \ 0 \le r < b \Rightarrow b - r > 0$$

$$-a = -bq - r \Rightarrow -a = -bq - r + \underbrace{b - b}$$

$$\Rightarrow -a = -b(q+1) + b - r$$

اگر فرض کنیم: $r' = b - r$ ، دیدیم که $b - r > 0$. واضح است که $b - r < |b|$. بنابراین باقی‌مانده‌ی تقسیم $-a$ بر $-b$ عدد $(b-r)$ است.

مسئله‌ی ۱۳: اگر در یک تقسیم، خارج قسمت را از مقسوم و مقسوم‌علیه کم کنیم، خارج قسمت تغییر نمی‌کند و ۲۰ واحد به باقی‌مانده اضافه می‌شود. خارج قسمت را بیابید.

حل: طبق فرض مسئله داریم:

$$a = bq + r,\ \ a - q = (b - q)q + r + 20$$

$$\Rightarrow a - q = bq - q^2 + r + 20$$

$$\overset{a=bq+r}{\Rightarrow} bq + r - q = bq - q^2 + r + 20$$

$$\Rightarrow -q^2 + q + 20 = 0 \Rightarrow (q-5)(q+4) = 0$$

$$\Rightarrow q = 5 \text{ یا } q = -4$$

مسئله‌ی ۱۴: چند عدد طبیعی بین ۷۰۰ و ۱۱۰۰ وجود دارد که اگر آن‌ها را بر ۱۴۳ تقسیم کنیم، باقی‌مانده‌ی تقسیم و خارج قسمت آن، مساوی باشند؟

حل: اگر عدد مورد نظر را a فرض کنیم، داریم: $700 < a < 1100$ و $a = 143q + r$ و $r = q$. بنابراین می‌توان نوشت:

$$700 < 143q + q < 1100 \Rightarrow 700 < 144q < 1100$$

$$\Rightarrow 4/86 < q < 7/63$$

$$\overset{q \in Z}{\Rightarrow} 5 \le q \le 7 \Rightarrow q = 5 \text{ یا } q = 6 \text{ یا } q = 7$$

بنابراین سه عدد طبیعی وجود دارد.

مسئله‌ی ۱۵: مجموعه ارقام کوچک‌ترین عدد طبیعی را بیابید که مضرب ۱۳ و مربع آن نیز بر ۳۱۵ بخش‌پذیر باشد.

حل: طبق فرض مسئله داریم:

$$n = 13k,\ \ 315 \mid n^2,\ \ 315 = 3^2 \times 5 \times 7$$

$$315 \mid n^2 \Rightarrow \frac{n^2}{315} \in Z \Rightarrow \frac{n^2}{3^2 \times 5 \times 7} \in Z \Rightarrow \frac{169k^2}{3^2 \times 5 \times 7} \in Z$$

$$\xRightarrow{\text{۱۶۹ فقط عامل ۱۳ دارد}} k_{min} = 3 \times 5 \times 7 = 105$$

$$\Rightarrow n_{min} = 13 \times 105 = 1365$$

$$\text{مجموع ارقام} = 1 + 3 + 6 + 5 = 15$$

مسئله‌ی ۱۶: مجموع سه عدد ۷۱ است. اگر اولی را بر دومی تقسیم کنیم، خارج قسمت ۲ و باقی‌مانده ۱ می‌شود و اگر سومی را بر دومی تقسیم کنیم، خارج قسمت ۳ و باقی‌مانده ۴ می‌شود. این سه عدد را بیابید.

حل: اگر عدد اول را a، دومی را b و سومی را c فرض کنیم، خواهیم داشت:

$$\begin{cases} a + b + c = 71 \\ a = 2b + 1 \\ c = 3b + 4 \end{cases} \Rightarrow (2b+1) + b + (3b+4) = 71$$

$$\Rightarrow 6b = 66 \Rightarrow b = 11 \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \times 11 + 1 = 23 \\ c = 3 \times 11 + 4 = 37 \end{cases}$$

● میرشهرام صدر

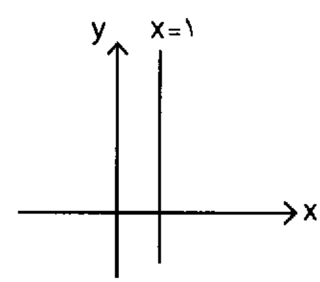
اشاره:

در این مقاله می کوشیم، با استفاده از دانسته ها و توانایی های شما درباره ی حل معادله ها و نامعادله های یک یا دو متغیره، نوعی سرگرمی آموزشی ارائه کنیم که با انجام آن، مهارتتان در رسم نمودار این گونه رابطه ها تقویت شود. در کلاس های درس، معمولاً معادله ها یا نامعادله ها را می دهند و از شما می خواهند نمودار آن ها را رسم کنید. ما در این جا علاوه بر این کار، قصد داریم به صورت عکس هم عمل کنیم؛ یعنی نمودار را به شما می دهیم و می خواهیم که معادله یا نامعادله ی مربوط به آن را بنویسید.

به این منظور، با استفاده از رابطه های (معادله ها و نامعادله ها) ریاضی حرف های یک کلمه را طراحی می کنیم. برای نمونه، شما می توانید نام خود را روی یک کاغذ شطرنجی به شکل دل خواه طراحی کنید؛ سپس برای هر قطعه از حروف کلمه ی نام خود، رابطه های ریاضی را بنویسید. وقتی تمام رابطه های ریاضی را برای حرف های نامتان نوشتید، آن گاه دستگاهی از معادله ها و نامعادله ها را خواهید داشت که با رسم آن ها، طراحی نامتان را خواهید دید.

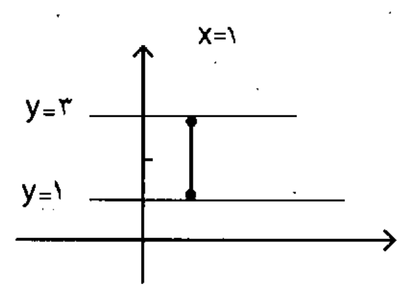
طراحی با رابطه های ریاضی

تا کنون در دوره ی متوسطه با رسم معادله ها و نامعادله های جبری آشنا شده اید. برای نمونه می دانید که نمودار معادله ی $x = 1$، خطی موازی محور yهاست (نمودار ۱).



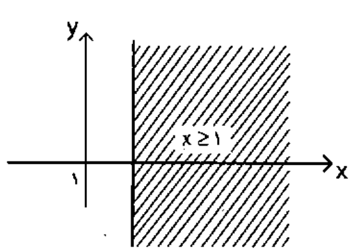
نمودار ۱

چنان که نمودار معادله ی $x = 1$ را با شرط $1 \le y \le 3$ رسم کنیم، یک پاره خط موازی محور yها به دست می آید (نمودار ۲).

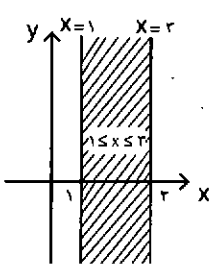


نمودار ۲

در زیر، مجموعه جواب نامعادله های $x \ge 1$ و $1 \le x \le 3$ را رسم کرده ایم:

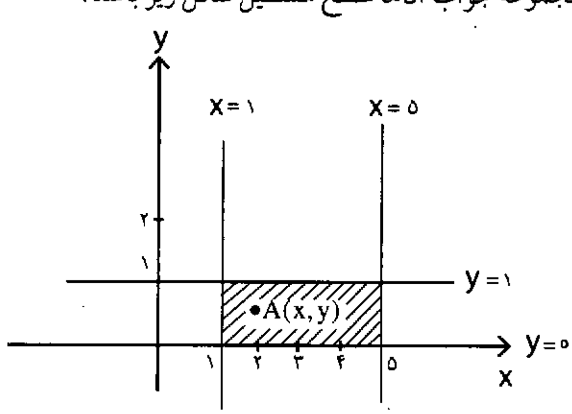


نمودار ۳



نمودار ۴

با اطلاعات به دست آمده، نامعادله هایی را بنویسید که مجموعه جواب آن ها سطح مستطیل شکل زیر باشد.

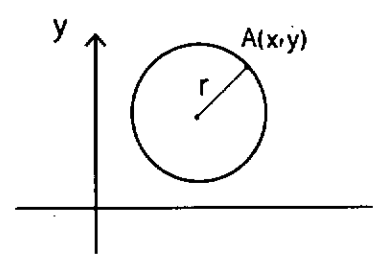


نمودار ۵



اگر $A(x,y)$ نقطه‌ای از سطح مستطیل شکل باشد، ملاحظه می‌کنید که طول این نقطه، یعنی x همواره بین دو عدد ۱ و ۵ قرار دارد؛ بنابراین: $1 \le x \le 5$. از طرف دیگر، عرض این نقطه یعنی y بین دو خط به معادله‌های $y = 0$ و $y = 1$ قرار دارد؛ پس: $0 \le y \le 1$ در نتیجه، نمودار دستگاه نامعادله‌های $\begin{cases} 1 \le x \le 5 \\ 0 \le y \le 1 \end{cases}$ این سطح مستطیل شکل را مشخص می‌کند.

معادله‌ی $(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = r^2$ ، مجموعه نقاط روی یک دایره به مرکز $S(\alpha, \beta)$ و شعاع r را مشخص می‌کند. زیرا فاصله‌ی نقطه‌ی S مرکز دایره تا نقطه‌ی دل‌خواه $A(x,y)$ روی دایره، همواره برابر با r است (نمودار ۶).



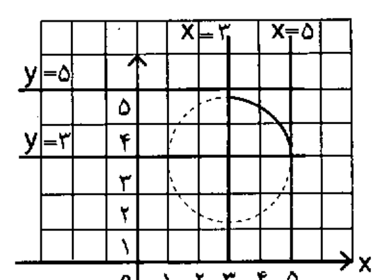
نمودار ۶

نامعادله‌های زیر به ترتیب مجموعه نقاط درون و برون دایره به مرکز $S(\alpha,\beta)$ و شعاع r را مشخص می‌کنند.

$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 < r^2$

$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 > r^2$

با توجه به مطالب گفته شده، سعی کنید رابطه‌ای بنویسید که مجموعه جواب آن، نقاط روی ربع دایره به صورت زیر باشد.



نمودار ۷

با توجه به نمودار، ملاحظه می‌کنیم که این ربع دایره، قسمتی از دایره‌ی به مرکز $S(3,3)$ و شعاع $r = 2$ است. بنابراین، معادله‌ی این دایره به صورت زیر است:

$$(x-3)^2 + (y-3)^2 = 4$$

اما این ربع دایره بین دو خط به معادله‌های $y = 3$ و $y = 5$ قرار دارد. بنابراین دستگاه زیر می‌تواند بیان‌کننده‌ی این نمودار باشد.

$$\begin{cases} (x-3)^2 + (y-3)^2 = 4 \\ 3 \le y \le 5 \end{cases}$$

از طرف دیگر ملاحظه می‌کنیم که این ربع دایره بین دو خط $x = 3$ و $x = 5$ نیز قرار دارد. بنابراین نمودار دستگاه زیر مشخص‌کننده‌ی این ربع دایره است:

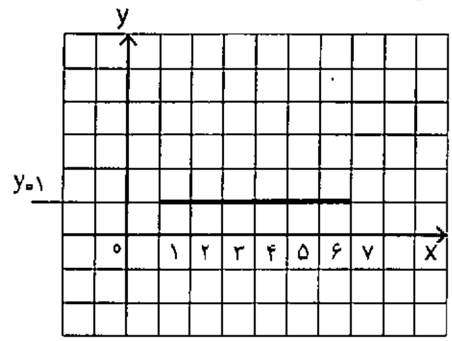
$$\begin{cases} (x-3)^2 + (y-3)^2 = 4 \\ 3 \le y \le 5 \\ 3 \le x \le 5 \end{cases}$$

(برای مطالعه‌ی بیشتر درباره‌ی رسم نامعادله‌ها می‌توانید به مجله‌ی ریاضی رشد برهان متوسطه، شماره‌ی ۶۱، بهار ۱۳۸۸ مراجعه کنید.)

طرح ۱. نمودار رابطه‌های زیر را در یک دستگاه مختصات رسم کنید.

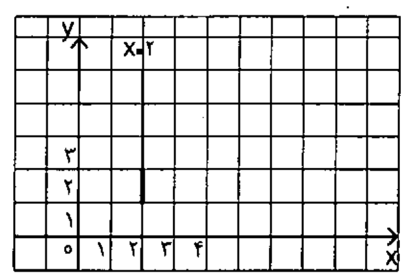
$$\begin{cases} y = 1 \quad ; 1 \le x \le 7 & (1) \\ x = 2 \quad ; 1 \le y \le 2 & (2) \\ y = x - 3; \ 4/5 \le x \le 5 & (3) \\ 2y + x = 9; \ 5 \le x \le 7 & (4) \end{cases}$$

رابطه‌ی «۱» پاره‌خطی موازی محور xها است. برای رسم نمودار آن، ابتدا خط به معادله‌ی y = ۱ را رسم می‌کنیم. سپس قطعه‌ای از آن را که مختص x بین ۱ و ۷ است، جدا می‌کنیم. (نمودار ۸).



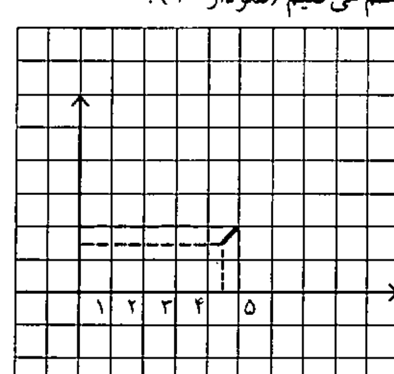
نمودار ۸

رابطه‌ی «۲» پاره‌خطی موازی محور yها است که طول آن برابر یک واحد است (نمودار ۹).



نمودار ۹

رابطه‌ی «۳» قسمتی از خط به معادله‌ی y = x − ۳ است که مختص x آن‌ها بین ۴/۵ و ۵ است. برای رسم این پاره‌خط در معادله‌ی y = x − ۳ یک بار x = ۴/۵ را قرار می‌دهیم و مقدار y را می‌یابیم. بار دیگر x = ۵ را قرار می‌دهیم و y را پیدا می‌کنیم. سپس به کمک دو نقطه‌ی ابتدا و انتهای پاره‌خط، نمودار آن را رسم می‌کنیم (نمودار ۱۰).



y = x − ۳;

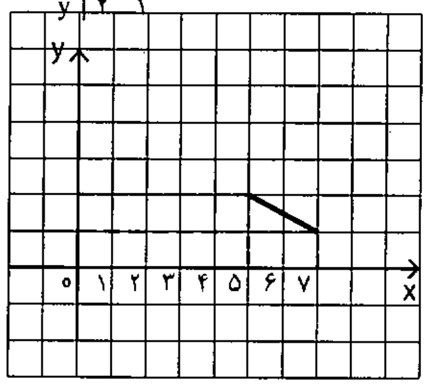
x	۴/۵	۵
y	۱/۵	۲

نمودار ۱۰

رابطه‌ی «۴» قسمتی از خط به معادله‌ی ۲y + x = ۹ است که مختص x آن‌ها بین ۵ و ۷ است (نمودار ۱۱).

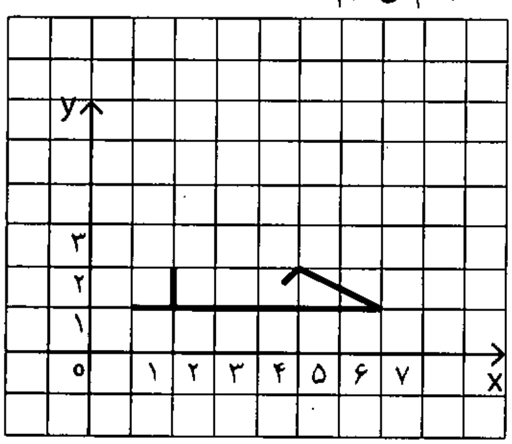
۲y + x = ۹;

x	۵	۷
y	۲	۱



نمودار ۱۱

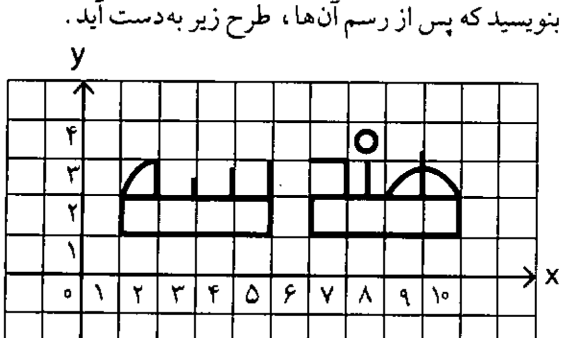
اکنون نمودارهای ۸، ۹، ۱۰ و ۱۱ را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم.



نمودار ۱۲

همان‌طور که ملاحظه می‌کنید، با رسم نمودار رابطه‌ها، کلمه‌ی «حد» را طراحی کرده‌ایم (مفهوم حد در کتاب‌های ریاضی سال سوم متوسطه آمده است).

طرح ۲. روی کاغذ شطرنجی، کلمه‌ی هندسه را به این صورت طراحی کرده‌ایم (نمودار ۱۳). رابطه‌هایی جبری بنویسید که پس از رسم آن‌ها، طرح زیر به‌دست آید.



نمودار ۱۳

در این طراحی دو سطح مستطیل شکل وجود دارد: یکی زیر «هند» که رابطه‌ی آن مطابق نمودار ۵ به‌صورت زیر است:

$$\begin{cases} ۶ \le x \le ۱۰ \\ ۱ \le y \le ۲ \end{cases} \quad (۱)$$

و دیگری سطح مستطیل شکل زیر «سه» که به‌طور مشابه به‌صورت زیر است:

$$\begin{cases} ۱ \le x \le ۵ \\ ۱ \le y \le ۲ \end{cases} \quad (۲)$$

رابطه‌های ۱ و ۲ را به‌طور خلاصه می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$\begin{cases} ۱ \le x \le ۵ \\ ۱ \le y \le ۲ \end{cases} \text{ یا } ۶ \le x \le ۱۰ \quad (۳)$$

حرف «هـ» در این طرح از یک نیم‌دایره و یک پاره‌خط تشکیل شده است. نیم‌دایره، قسمتی از یک دایره به مرکز S(۹,۲) و شعاع یک است که بین دو خط افقی y=۲ و y=۳ قرار دارد. بنابراین مشابه نمودار ۷ خواهیم داشت.

$$\begin{cases} (x-۹)^۲ + (y-۲)^۲ = ۱ \\ ۲ \le y \le ۳ \end{cases} \quad (۴)$$

پاره‌خطی که در حرف «هـ» وجود دارد، موازی محور yها است که رابطه‌ی آن به‌صورت زیر است:

$$\begin{cases} x = ۹ \\ ۲ \le y \le ۳\frac{۱}{۳} \end{cases} \quad (۵)$$

نقطه‌ی حرف «ن» دایره‌ای به مرکز S'(۷/۵, ۳/۵) و شعاع $\frac{۱}{۴}$ است که رابطه‌ی آن به این صورت زیر است:

$$(x-۷/۵)^۲ + (y-۳/۵)^۲ = \frac{۱}{۱۶} \quad (۶)$$

پاره‌خط هایی که مشخص‌کننده‌ی دو حرف «ن» و «د» هستند، معادله‌هایشان به این صورت‌اند:

$$\begin{cases} x = ۷/۵; \ ۲ \le y \le ۳ \\ x = ۷ \ ; \ ۲ \le y \le ۳ \\ y = ۳ \ ; \ ۶ \le x \le ۷ \end{cases} \quad (۷)$$

هم‌چنین پاره‌خط هایی که نمایش حرف «س» را طراحی می‌کنند، موازی محور yها و معادله‌هایشان چنین‌اند:

$$\begin{cases} x = ۵ \ ; \ ۲ \le y \le ۳ \\ x = ۴ \ ; \ ۲ \le y \le ۲\frac{۳}{۴} \\ x = ۳ \ ; \ ۲ \le y \le ۲\frac{۱}{۲} \end{cases} \quad (۸)$$

و اما آخرین دستگاهی که مشخص کننده‌ی حرف «ـه» آخر در کلمه‌ی هندسه است، از یک ربع دایره و پاره‌خط تشکیل شده است. ربع دایره، قسمتی از دایره به مرکز S(۲ و ۲) و شعاع یک است که بین دو خط افقی y = ۲ و y = ۳ و هم‌چنین بین دو خط عمودی x = ۱ و x = ۲ قرار دارد. پاره‌خط به‌کار رفته در حرف «ـه»، موازی محور y است و بین دو خط y=۲ و y=۳ قرار دارد. بنابراین:

$$\begin{cases} (x-۲)^۲ + (y-۲)^۲ = ۱ \\ ۱ \le x \le ۲ \\ ۲ \le y \le ۳ \end{cases} \quad (۹)$$

$$x = ۲ \ ; \ ۲ \le y \le ۳ \quad (۱۰)$$

اکنون اگر معادله‌ها و نامعادله‌های نوشته شده از رابطه‌های ۳ تا ۱۰ را در یک دستگاه بنویسیم، نمودار این دستگاه، واژه‌ی هندسه را طراحی می‌کند.

*از آن‌جا که رهبر معظم انقلاب اسلامی امسال را با عنوان «**اصلاح الگوی مصرف**» نام‌گذاری کرده است، با رابطه‌های ریاضی، عبارت «اصلاح الگوی مصرف» را با قلم (فونت) دل‌خواه طراحی کنید و معادله‌ها و نامعادله‌های مربوط به آن را بنویسید و برای ما بفرستید. هیئت تحریریه‌ی مجله‌ی رشد برهان متوسطه، پس از بررسی آثار رسیده، بهترین‌ها را در مجله به چاپ می‌رساند و برای طراحان آن‌ها جوایز ویژه‌ای ارسال خواهد کرد.*

بعد از طراحی این عبارت و نوشتن رابطه‌های ریاضی مربوط به آن، متوجه خواهید شد که طراحی این عبارت به صرف وقت و نوشتن رابطه‌های ریاضی آن به ظرافت و دقت خاصی نیاز دارد. پس متناظر با آن هم‌اکنون فکر کنید و با مدتی صرف وقت، طوری برنامه‌های زندگی و درسی خود را تدوین کنید که این امر در زندگی روزمره‌ی شما محقق شوند.

● سید محمدرضا هاشمی موسوی

hashemi- moosavi@ yahoo.com

۷

هم‌نهشتی
و کاربردهای آن

اشاره:

در قسمت قبل به بسیاری از کاربردهای هم‌نهشتی اشاره شد. در این شماره قصد داریم برخی از کاربردهای هم‌نهشتی را در حل مسئله‌های گوناگون و مطرح در المپیادهای ریاضی مورد کنکاش قرار دهیم تا قوت مطلب از این جنبه نیز نشان داده شود. بنابراین، ابتدا به حل تعدادی از مسئله‌های المپیادهای کشورهای متفاوت که در رابطه با موضوع هستند، می‌پردازیم و سپس تمرین‌هایی نظیر مسئله‌های حل شده ارائه می‌دهیم که با توجه به مثال‌ها می‌توانید آن‌ها را حل کنید.

حل مسئله‌هایی از المپیادهای کشورهای گوناگون به کمک هم‌نهشتی

مسئله‌ی ۱. اگر A مجموع ارقام عدد $N = 4444^{4444}$ و B مجموع ارقام A باشد، مجموع ارقام B را تعیین کنید (هفدهمین IMO، ۱۹۷۵).

حل: ابتدا نشان می‌دهیم که مجموع ارقام B بسیار کوچک است:

$$N = 4444^{4444} < 10000^{5000} = 10^{20000}$$

N کوچک‌تر از یک عدد ۲۰۰۰۰ رقمی است. اگر همه‌ی ارقام را ۹ در نظر بگیریم:

$$A < 9 \times 20000 = 180000$$

عددی کوچک‌تر از ۱۸۰۰۰۰ که دارای بزرگ‌ترین مجموع ارقام باشد، عدد ۱۷۹۹۹۹ است. پس:

$$B \leq 44 = 1+7+9+9+9+9$$

در بین اعداد کوچک‌تر از ۴۴ عدد ۳۹ از نظر مجموع ارقام (۱۲=۹+۳) بزرگ‌ترین عدد است، بنابراین جواب مسئله عددی نا بیشتر از ۱۲ خواهد بود. از طرفی می‌دانیم هر عددی با مجموع ارقامش به پیمانه‌ی ۹ هم‌نهشت است. بنابراین، عددی که مورد نظر است با N به پیمانه‌ی ۹ هم‌نهشت خواهد بود. از طرف دیگر:

$$N = 4444^{4444} \overset{9}{\equiv} 7^{4444} \overset{9}{\equiv} (7^3)^{1481} \times 7 \overset{9}{\equiv} 1 \times 7 = 7$$

پس با توجه به $7^3 \overset{9}{\equiv} 1$ می‌توان نوشت:

$$N \overset{9}{\equiv} 7$$

بنابراین، جواب مسئله عدد ۷ خواهد بود، زیرا تنها عددی است که کوچک‌تر از ۱۲ و با ۷ به پیمانه‌ی ۹ هم‌نهشت است.

در واقع از ابتدا می‌توانستیم بنویسیم:

$$N = 4444^{4444} \overset{9}{\equiv} A \overset{9}{\equiv} B \leq 12$$

و از هم‌نهشتی $N \overset{9}{\equiv} 7$ و نامعادله‌ی $B \leq 12$، به جواب بدیهی $B = 7$ برسیم.

زیرا از این نکته استفاده کردیم که: «هر عددی با مجموع ارقامش به پیمانه‌ی ۹ هم‌نهشت است.»

مسئله‌ی ۲: رقم پنجم از سمت راست عدد $M = 5^{5^{5^{5}}}$ را تعیین کنید (بخارست، ۱۹۸۶).



حل: این مسئله معادل هم‌نهشتی زیر است:

$$M = 5^{5^{555}} \overset{10^5}{\equiv} r$$

ممکن است از معادله‌ی هم‌نهشتی بالا، تعیین r مشکل باشد. به همین خاطر، ابتدا باقی مانده‌ی M را به پیمانه‌ی 2^5 تعیین می‌کنیم. به این منظور از قضیه‌ی اویلر (اگر a و n نسبت به هم اول باشند، آن‌گاه: $a^{\varphi(n)} \overset{n}{\equiv} 1$) استفاده می‌کنیم:

$$5^{\varphi(2^5)} \overset{2^5}{\equiv} 1$$

در واقع، $\varphi(2^5) = 2^4$ برابر با تعداد اعداد فرد کوچک‌تر از 2^5 است. در این‌جا باید نمای 5^{555} را به پیمانه‌ی $2^4 = 16$ ساده کرد. اما هم‌نهشتی‌های زیر بدیهی هستند:

$$5 \overset{4}{\equiv} 1 \;;\; 5^5 \overset{4}{\equiv} 1 \;,\; 5^{55} \overset{8}{\equiv} 5 \;,\; 5^{555} \overset{16}{\equiv} 5$$

پس می‌توان نوشت:

$$M = 5^5 + 2^5 k \quad (k \in Z)$$

چون طرف چپ برابری (M) بر 5 بخش‌پذیر است، واضح است که K نیز بر 5 بخش‌پذیر است. به این ترتیب برای یک t خواهیم داشت: $M = 5^5 + 10^5 t$

بنابراین، باقی‌مانده‌ی M به پیمانه‌ی 10^5 برابر $5^5 = 3125$ است و رقم پنجم از سمت راست M، صفر است.

مسئله‌ی ۳: ثابت کنید که معادله‌ی $y^2 = x^5 - 4$ جواب صحیحی ندارد (بالکان، ۱۹۹۸).

حل: معادله را به پیمانه‌ی ۱۱ در نظر می‌گیریم و با توجه به قضیه‌ی فرما (اگر a و p نسبت به هم اول باشند، آن‌گاه: $a^{p-1} \overset{p}{\equiv} 1$) و هم‌نهشتی‌های زیر:

$$(x^5)^2 = x^{10} \overset{11}{\equiv} 0 \text{ یا } 1 \;;\; x^5 \overset{11}{\equiv} -1 \text{ یا } 0 \text{ یا } 1$$

به این نتیجه می‌رسیم که سمت راست معادله‌ی مورد نظر به پیمانه‌ی ۱۱ یکی از عددهای ۶یا۷یا۸ است، در صورتی که مربع باقی‌مانده‌ها (y^2) به پیمانه‌ی ۱۱ یکی از عددهای ۰، ۱، ۳، ۴، ۵یا۹ خواهد بود. به این ترتیب، برای معادله‌ی مورد نظر هیچ جواب صحیحی وجود نخواهد داشت. در واقع هرگز دو طرف معادله به پیمانه‌ی ۱۱، هم باقی‌مانده نخواهد شد:

$$x^5 - 4 \overset{11}{\not\equiv} y^2$$

تمرین ۱. تمام زوج‌های صحیح مثبت (x,y) را بیابید که در معادله‌ی زیر صدق می‌کنند:

$$x^{2} = y! + 2001$$

راهنمایی: برای y بزرگ‌تر از ۵، همواره $y!$ بر ۹ بخش‌پذیر است و طرف دوم معادله $(y!+2001)$ به پیمانه‌ی ۹ باقی‌مانده‌ی ۳ را می‌دهد که بدیهی است از نوع باقی‌مانده‌ی درجه‌ی دوم نیست $(x = 45 \ , \ y = 4)$.

تمرین ۲. ثابت کنید که دستگاه معادله‌های زیر هیچ جواب صحیح غیربدیهی ندارد.

$$\begin{cases} x^{2} + 6y^{2} = z^{2} \\ 6x^{2} + y^{2} = t^{2} \end{cases}$$

راهنمایی: فرض می‌کنیم که دستگاه جوابی غیرصفر داشته باشد. با تقسیم کردن بر مقسوم‌علیه مشترک x، y، z و t می‌توانیم فرض کنیم که این چهار عدد هیچ مقسوم‌علیه مشترکی ندارند. از جمع دو معادله و کار به پیمانه‌ی ۷ به نتیجه برسید.

مسئله‌ی ۴: ثابت کنید که عدد $N = 19^{19}$ را نمی‌توان به صورت مجموعی از یک مکعب کامل و توان چهارم کامل نوشت (بخارست، ۱۹۸۶).

حل: در واقع مسئله معادل این است که ثابت کنیم معادله‌ی زیر در مجموعه‌ی اعداد صحیح جواب ندارد:

$$x^{3} + y^{4} = 19^{19} \qquad (1)$$

با توجه به قضیه‌ی فرما و برابری ۱۲=۴×۳، معادله‌ی (۱) را به پیمانه‌ی ۱۳ در نظر می‌گیریم. چون: $(x^{3})^{4} \overset{13}{\equiv} 0$ یا ۱، در نتیجه: $x^{3} \overset{13}{\equiv} -8$ یا -1 یا ۰ یا ۱ یا ۸.

از طرف دیگر داریم: $y^{4} \overset{13}{\equiv}$ ۰ یا ۱ یا ۳ یا ۹ (یعنی به پیمانه‌ی ۱۳، یک مکعب، باقی‌مانده‌های ۰، ۱، ۵، ۸ و ۱۲ و یک توان چهارم باقی‌مانده‌های ۰، ۱، ۳ و ۹ را خواهند داشت). به این ترتیب، مجموع یک مکعب و یک توان چهارم به پیمانه‌ی ۱۳ هم‌نهشت با ۰، ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۸، ۹، ۱۰، ۱۱ و ۱۲ خواهد بود و عدد ۷ در این فهرست ظاهر نمی‌شود. هم‌چنین داریم:

$$19^{19} \overset{13}{\equiv} 19^{12} \times 19^{7} \overset{13}{\equiv} 1 \times 6^{7} \overset{13}{\equiv} 6^{7} \overset{13}{\equiv} 7$$



و چون: $19^{19} \overset{13}{\equiv} 7$ و $x^{3} + y^{4} \overset{13}{\equiv} r \neq 7$، در این جا اثبات کامل می‌شود.

تمرین ۳. تحقیق کنید که آیا می‌توان عدد $N = 19^{19}$ را به صورت مجموعی از یک مکعب کامل، توان چهارم کامل و توان پنجم کامل نوشت؟

راهنمایی: واضح است که در واقع باید معادله‌ی $x^{3} + y^{4} + z^{5} = 19^{19}$ را در Z از نظر داشتن یا نداشتن جواب بررسی کنیم. با توجه به برابری $60 = 3 \times 4 \times 5$، کافی است معادله را به پیمانه‌ی ۶۱ در نظر بگیریم و مانند مسئله‌ی ۴ عمل کنیم (در میدان Z_{61} با مرتبه‌ی ۶۰).

مسئله‌ی ۵: اگر p عددی اول و w و n اعدادی صحیح باشند، به طوری که داشته باشیم: $2^{p} + 3^{p} = w^{n}$، ثابت کنید: $n = 1$ (ایرلند، ۱۹۹۶).

حل: در حالت $p = 2$ داریم: $w^{n} = 2^{2} + 3^{2} = 13$ و برابری $n = 1$ بدیهی است. اگر $p > 2$، آن‌گاه p عددی فرد است؛ بنابراین:

$$2^{p} + 3^{p} = (2+3)(2^{p-1} - 2^{p-1} \times 3 + \dots + 3^{p-1}) \ ;$$

$$5 \mid (2^{p} + 3^{p})$$

پس در این حالت $5 \mid w$ و اگر $n > 1$، آن‌گاه: $25 \mid w^{n}$، بنابراین:

$$5 \mid (2^{p-1} - 2^{p-1} \times 3 + \dots + 3^{p-1}) = \frac{2^{p} + 3^{p}}{2+3} = \lambda$$

چون به ازای هر k داریم: $3^{k} \overset{5}{\equiv} (-2)^{k}$، پس می‌توان نوشت:

$$(-1)^{k} 2^{p-k-1} 3^{k} \overset{5}{\equiv} 2^{p-1}$$

با توجه به هم‌نهشتی بالا می‌توان نوشت:

$$\lambda = \frac{2^{p} + 3^{p}}{2+3} = 2^{p-1} - 2^{p-1} \times 3 + \dots$$

$$+ (-1)^{k} 2^{p-k-1} 3^{k} + \dots + 3^{p-1} \overset{5}{\equiv} (2^{p-1}) p$$

بنابراین، λ با $p(2^{p-1})$ به پیمانه‌ی ۵ هم‌نهشت است، ولی $5 \mid p(2^{p-1})$ و این وقتی ممکن است که: $p = 5$. اما برای $p = 5$ داریم: $2^{5} + 3^{5} = 275$ و در این حالت نیز $n = 1$.

تمرین۴. مسئله‌ی۵ را برای برابری‌های زیر تحقیق کنید:

الف) $2^p+1=w^n$ ب) $3^p+4^p=w^n$

ج) $3^p+4^p+5^p=w^n$ د) $5^p+6^p=w^n$

راهنمایی: تحقیق عدم درستی حکم برای (الف)، (ب) و (ج) واضح است؛ به برابری‌های عددی $2^3+1=9=3^2$ ، $3^2+4^2=25=5^2$ و $6^3=216=5^3+4^3+3^3$ توجه کنید. پس کافی است فقط برابری(د) را به طریق حل مسئله‌ی ۵ بررسی کنید.

مسئله‌ی۶. تمام مقادیر ممکن برای مجموع ارقام یک مربع کامل را مشخص کنید (آمریکا، ۱۹۹۵).

حل: می‌دانیم که «مجموع ارقام یک عدد به پیمانه‌ی ۹ با آن عدد هم‌نهشت است».

بنابراین، یک مربع کامل باید به پیمانه‌ی ۹ با ۰، ۱، ۴ یا۷ هم‌نهشت باشد. نشان می‌دهیم: هر عددی مثل N را که یک باقی‌مانده‌ی درجه‌ی دوم به پیمانه‌ی ۹ باشد، می‌توان به عنوان مجموع ارقام یک مربع کامل محسوب کرد. حالت‌های $n=1$ و $n=4$ بدیهی هستند. بنابراین فرض می‌شود $n>4$ و با این فرض، اگر $n=9m$ ، آن‌گاه n مجموع ارقام $(10^m-1)^2=10^{2m}-2\times10^m+1$ است که عددی به صورت $9\ldots960\ldots04$ خواهد بود. هم‌چنین اگر $n=9m+4$ ، آن‌گاه n مجموع ارقام $(10^m-3)^2=10^{2m}-6\times10^m+9$ است که عددی به صورت $9\ldots940\ldots09$ خواهد بود. و سرانجام اگر $n=9m-2$ ، آن‌گاه n مجموع ارقام زیر است:

$$(10^m-5)^2=10^{2m}-10^{m+1}+25$$

که عددی به صورت $9\ldots900\ldots025$ خواهد بود.

مسئله‌ی۷: دنباله‌ی $\{a_n\}_{n\geq 0}$ به این صورت تعریف می‌شود: a_0 یک عدد گویای مثبت کوچک‌تر از $\sqrt{1998}$ است و اگر به ازای اعداد صحیح نسبت به هم اول p_n و q_n ، $a_n=\frac{p_n}{q_n}$ باشد، آن‌گاه: $a_{n+1}=\frac{p_n^2+5}{p_nq_n}$. ثابت کنید که برای هر n داریم: $a_n<\sqrt{1998}$ (IMO، ۱۹۹۸).

حل: کافی است نشان دهیم که اگر: $\frac{p}{q}<\sqrt{1998}$ ، آن‌گاه: $\frac{p}{q}+\frac{5}{pq}<\sqrt{1998}$.

از فرض $\frac{p}{q}<\sqrt{1998}$ ، نتیجه می‌شود $(p,q>0)$:

$$\frac{p^2}{q^2}<1998\ ;\ p^2<1998q^2\ ;\ 1998q^2-p^2>0$$

در نظر می‌گیریم: $n=1998q^2-p^2$ و نشان می‌دهیم که: $n\notin\{1,2,\dots,10\}$ ، به طوری که اگر $n>0$ ، آن‌گاه: $n\geq 11$.

با توجه به برابری $1998=2\times27\times37$:

$$n\overset{9}{\equiv}-p^2\overset{9}{\equiv}0,-1,-4,-7$$

بنابراین: $n\neq1,3,4,6,7,10$. اکنون کافی است $n=2,5,8$ را منفی کنیم که به پیمانه‌ی ۳۷ این کار را انجام می‌دهیم (قضیه فرما: $a^{p-1}\overset{p}{\equiv}1\ ;\ (a,p)=1$):

$n=2\ ,\ p=37:\ 1\overset{37}{\equiv}p^{36}\overset{37}{\equiv}(p^2)^{18}\overset{37}{\equiv}(-2)^{18}\overset{37}{\equiv}6^2\overset{37}{\equiv}-1$ (تناقض)

$n=5\ ,\ p=37:\ 1\overset{37}{\equiv}p^{36}\overset{37}{\equiv}(p^2)^{18}\overset{37}{\equiv}(-5)^{18}\overset{37}{\equiv}11^2\overset{37}{\equiv}-1$ (تناقض)

$n=8\ ,\ p=37:\ 1\overset{37}{\equiv}p^{36}\overset{37}{\equiv}(p^2)^{18}\overset{37}{\equiv}(-8)^{18}\overset{37}{\equiv}(-10)^9\overset{37}{\equiv}-1$ (تناقض)

بنابراین در این جا ثابت می‌شود: $n\geq 11$ ، به‌طوری که برای $p>5$:

$$p^2(1998q^2)\geq p^2(p^2+11)=p^4+11p^2=p^4+10p^2+p^2>p^4+10p^2+25$$

پس می‌توان نوشت:

$$1998p^2q^2>(p^2+5^2)^2$$

و یا:

$$\sqrt{1998}>\frac{p}{q}+\frac{5}{pq}$$

برای $p\leq 5$ داریم: $\frac{p}{q}+\frac{5}{pq}\leq\frac{10}{q}<\sqrt{1998}$ و به این ترتیب برقراری حکم واضح است. لازم به ذکر است که $n=11$ ، کوچک‌ترین مقداری است که نمی‌تواند توسط هم‌نهشتی به پیمانه‌ی ۱۹۹۸ منفی شود؛ چون: $1998|(787)^2+11$. از طرف دیگر، با بسط کسر مسلسل $\sqrt{1998}$ ، می‌توان نشان داد که کوچک‌ترین مقدار دست یافتنی $n=26$ است که به ازای $p=134$ و $q=3$ واقع می‌شود.

مسئله‌ی۸: ثابت کنید که اعداد صحیح x و y وجود ندارند که برای آن‌ها برابری:

$$x^2+3xy-2y^2=112$$



برقرار باشد (پوتنام، ۱۹۵۴).

حل: ابتدا معادله را به یک معادله‌ی ساده از نوع پل ($x^2 - Ry^2 = 1$) تبدیل می‌کنیم:

$$4(x^2 + 3xy - 2y^2) = 4(112)$$
$$(4x^2 + 12xy + 9y^2) - 17y^2 = 448$$
$$(2x + 3y)^2 - 17y^2 = 448$$

اکنون معادله را به پیمانه‌ی ۱۷ ساده می‌کنیم. باقی‌مانده‌های درجه‌ی دوم به پیمانه‌ی ۱۷ برابر ۰، ۱، ۴، ۹، ۱۶، ۸، ۲، ۱۵ و ۱۳ هستند، در حالی که داریم:

$$448 \overset{17}{\equiv} 6$$

چون عدد ۴۴۸ نمی‌تواند اختلاف یک مربع و مضربی از ۱۷ باشد، معادله هیچ جواب صحیحی ندارد.

مسئله‌ی۹: اگر n عددی صحیح بزرگ‌تر از ۱ باشد، احکام زیر را ثابت کنید:

الف) $k = 1! + 2! + \cdots + n!$ یک توان کامل است، اگر و تنها اگر: $n = 3$.

ب) $S = (1!)^3 + (2!)^3 + \cdots + (n!)^3$ یک توان کامل است، اگر و تنها اگر: $n = 3$.

حل: بدیهی است که به ازای $n = 3$ داریم: $S = (1!)^3 + (2!)^3 + (3!)^3 = 15^2$ و $k = 1! + 2! + 3! = 3^2$.

اکنون باید نشان دهیم که این تنها امکان است. به این منظور فرض می‌کنیم که n دیگری وجود دارد که برای $m > 1$: $k = 1! + 2! + \cdots + n! = t^m$.

از طریق آزمایش می‌توان نشان داد که n باید بزرگ‌تر یا برابر با ۹ باشد. برای $n \geq 5$، عدد k به ۳ ختم می‌شود و به این ترتیب m نمی‌تواند برابر با ۲ باشد (می‌دانیم که مربع‌ها تنها می‌توانند به ۰، ۱، ۴، ۵، ۶ یا ۹ ختم شوند) و این مطلب یعنی: $n \geq 3$. هم‌چنین، برای $n \geq 9$ عبارت k بر ۳ بخش‌پذیر است و در نتیجه: $3|t$ و یا $27|t^m$. بنابراین، باید $27|k$. ولی چون $n!$ به ازای $n \geq 9$ بر ۲۷ بخش‌پذیر است:

$$n \geq 9:\ k = 1! + 2! + \cdots + n! \overset{27}{\equiv} 1! + 2! + \cdots + 8! \overset{27}{\equiv} 9$$

این تناقض ثابت می‌کند که $n = 3$ تنها جواب مسئله است.

به همین ترتیب، عبارت $S = (1!)^3 + (2!)^3 + \cdots + (n!)^3$ یک توان کامل برای $n = 2,4,5,6$ نیست. برای $n \geq 7$، چون: $49|n!$، پس:

$$S = (1!)^3 + (2!)^3 + \cdots + (n!)^3 \overset{49}{\equiv} (1!)^3 + (2!)^3 + \cdots + (6!)^3 \overset{49}{\equiv} 7$$

چون ۷ باقی‌مانده‌ی یک توان کامل نیست، بنابراین $n = 3$، تنها جواب مسئله است.

تمرین۵. تحقیق کنید که عبارت $T = (1!)^2 + (2!)^2 + \cdots + (n!)^2$ به‌ازای چه مقادیری از n مربع کامل است.

تمرین۶. تحقیق کنید که آیا به‌ازای $n > 1$، عبارت زیر می‌تواند توان کامل شود:

$$M = (1!)^5 + (2!)^5 + \cdots + (n!)^5$$

مسئله‌ی۱۰: می‌دانیم:

$$34! = 295232799cd96041408476186096435ab000000$$

رقم‌های a، b، c و d را تعیین کنید (انگلستان، ۲۰۰۱ و ۲۰۰۲).

حل: می‌دانیم اگر n عدد طبیعی و $n \leq 1$ عددی اول باشد، تعداد عامل‌های p در $n!$ از دستور $t_p = \left[\frac{n}{p}\right] + \left[\frac{n}{p^2}\right] + \cdots$ تعیین می‌شود. چون تعداد صفرهای $n!$ بستگی به تعداد ۵های موجود در آن دارد، پس تعداد صفرهای سمت راست $n!$ برابر با $t_5 = \left[\frac{34}{5}\right] + \left[\frac{34}{25}\right] + \cdots = 7$ است و در نتیجه: $b = 0$.

از طرف دیگر، اگر صفرهای سمت راست $34!$ را حذف کنیم، عدد حاصل یعنی $\frac{34!}{10^7}$ بر ۸ بخش‌پذیر است (زیرا: $2^{32}|34!$ و $t_2 = \left[\frac{34}{2}\right] + \left[\frac{34}{4}\right] + \cdots = 32$). بنابراین عدد سه‌رقمی سمت راست آن، یعنی $\overline{35a}$، باید بر ۸ بخش‌پذیر و زوج باشد. پس a می‌تواند یکی از اعداد زوج بین صفر و ۱۰ باشد که با امتحان این چهار عدد، فقط عدد ۳۵۲ بر ۸ بخش‌پذیر است و در نتیجه: $a = 2$.

برای یافتن c و d توجه می‌کنیم که $34!$ باید بر ۹ و ۱۱ بخش‌پذیر باشد. از بخش‌پذیری آن بر ۹ نتیجه می‌شود که مجموع ارقام آن بر ۹ بخش‌پذیر است و با یک محاسبه‌ی ساده به دست می‌آید: $c + d = 9k - 6$،

$141 + c + d \overset{9}{\equiv} 6 + c + d \overset{9}{\equiv} 0$ چون: $0 \leq c + d \leq 18$، پس: $k = 1$ یا ۲. بنابراین: $c + d = 3$ یا 12 (*)

(c و d) = (۰,۳) یا (۱,۲) یا (۲,۱) یا (۳,۰) یا (۳,۹) یا (۴,۸) یا (۵,۷) یا (۶,۶) یا

(حالت‌های ممکن: $c + d = 3$ یا ۱۲)

(۳و۹) یا (۴و۸) یا (۵و۷) هم‌چنین، می‌دانیم عددی بر ۱۱ بخش‌پذیر است که داشته باشیم:

$$\overline{a_k a_{k-1}\cdots a_1 a_0} \overset{11}{\equiv} a_0 - a_1 + \cdots + a_{k-1} - a_k \quad (\text{زوج } k)$$

$$\overline{a_k a_{k-1}\cdots a_1 a_0} \overset{11}{\equiv} a_0 - a_1 + \cdots - a_{k-1} + a_k \quad (\text{فرد } k)$$

بنابراین، چون عدد !۳۴ دارای ۳۹ رقم است (k=۳۹)،

پس:

$$34! \overset{11}{\equiv} 0 - 0 + d - c + \cdots + 2 = 19 + d - c$$

$$\overset{11}{\equiv} d - c - 3 \overset{11}{\equiv} 0 \;;$$

$$d - c \overset{11}{\equiv} 3 \;;\; d - c = 11s + 3 \,,$$

$$0 \le d - c \le 8 \;;\; d - c = 3$$

تنها جوابی که در این شرایط صدق می‌کند، d = ۳ و c = ۰ است.

تمرین۷. می‌دانیم:

$$34! = 2a52327aadea6b414b8476186$$
$$ba6435cb \times 10^6$$

رقم‌های a، b، c، d، e را تعیین کنید.

راهنمایی: با توجه به ارقام حاصل !۳۴، بدیهی است که عدد تکراری a فقط ۰ یا ۹ می‌تواند باشد؛ زیرا بقیه‌ی عددها در طرف دوم دیده می‌شوند و حداقل دو بار هم تکرار شده‌اند. a غیر از ۹ نمی‌تواند باشد، زیرا نشان می‌دهیم که !۳۴ به هفت صفر ختم می‌شود و در واقع عدد b نیز صفر است. می‌دانیم که صفرهای !n، در واقع از ضرب عامل‌های ۵و۲ حاصل می‌شوند. بدیهی است که تعداد صفرهای !۳۴ همان تعداد ۵های موجود در !۳۴ است:

$$t_5 = \left[\frac{34}{5}\right] + \left[\frac{34}{25}\right] = 6 + 1 = 7$$

بنابراین هفت رقم سمت راست !۳۴ صفر است. برای تعیین c از خاصیت بخش‌پذیری بر ۸ و برای تعیین d و e از خاصیت بخش‌پذیری بر ۹ و ۱۱ (مطابق مسئله‌ی ۱۰) استفاده می‌کنیم.



تمرین

۱. اگر N = ۴۴۴۴، A مجموع ارقام عدد N^{N^N}، B مجموع ارقام A و C مجموع ارقام B باشد، مجموع ارقام C را بیابید.

۲. رقم پنجم از سمت راست عدد $M = 5^{5^{555}} + 25! + 99999^{55555} - 1$ را تعیین کنید.

۳. تحقیق کنید که آیا معادله‌ی $2y^2 = x^5 - 128$ در مجموعه‌ی اعداد صحیح دارای جواب است؟

۴. تمام زوج‌های صحیح مثبت (x,y) را بیابید که در معادله‌ی زوبه‌رو صدق کنند: $2025x^2 - 2001 = (4y)!$

۵. تحقیق کنید که آیا دستگاه زیر جواب صحیح غیربدیهی دارد؟

$$\begin{cases} 2x^2 + 3y^2 = 2z^2 \\ 24x^2 + y^2 = 4t^2 \end{cases}$$

۶. تحقیق کنید که آیا عدد $N = 19^{19}$ می‌تواند به صورت مجموعی از یک مربع کامل و یک مکعب کامل نوشته شود؟

۷. اگر p عددی اول و w و n اعدادی صحیح باشند، به‌طوری که داشته باشیم: $6^p + 7^p = w^n$

تحقیق کنید که n برابر با چه عددهایی می‌تواند باشد.

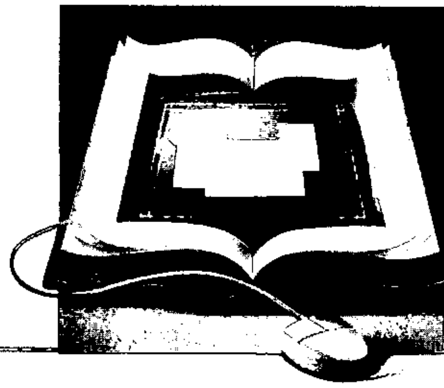
۸. تمام مقادیر ممکن برای مجموع ارقام یک مکعب کامل را مشخص کنید.

۹. ثابت کنید که اعداد صحیح x و y وجود ندارند که برای آن‌ها برابری زیر برقرار باشد: $2x^2 + 3xy - y^2 = 56$

۱۰. به ازای چه مقادیری از n، عبارت N یک توان کامل است؟ $N = (1!)^4 + (2!)^4 + \cdots + (n!)^4$

● احسان یارمحمدی

معرفی سایت‌های ریاضی جهان



عنوان سایت: .... **Analyze Math**

نشانی سایت: .... http://www.analyzemath.com

موضوع و محتوای اصلی این سایت شامل خودآموزها، مسائل و برگه‌های کاری رایگان پیرامون ریاضی، حساب دیفرانسیل و انتگرال، مثلثات و موضوعات هندسه است. در سمت چپ صفحه‌ی اصلی سایت موضوع‌های زیر را می‌توان مشاهده کرد:

● خودآموزهای حساب دیفرانسیل و انتگرال مقدماتی
(Precalculus Tutorials)

● توابع ترسیمی
(Graphing Functions)

● خودآموزهای حساب دیفرانسیل و مسائل
(Calculus Tutorials and Problems)

● پرسش‌های حساب دیفرانسیل و انتگرال و پاسخ‌ها
(Calculus Questions with Answers)

● خودآموزهای مثلثات و مسائل برای آزمون‌های شخصی
(Trigonometry Tutorials and Problems for Self Tests)

● خودآموزهای هندسه و مسائل
(Geometry Tutorials and Problems)

● مسائل ریاضی
(Math Problem)

● حل معادلات و نامعادلات
(Solving Equations and Inequations)

● نمودارهای توابع، معادلات و جبر
(Graphs of Functions, Equations and Algebra)

● ماشین حساب‌ها و حل کننده‌های ریاضی آنلاین
(Online Math Calculator and Solvers)

● ماشین حساب‌ها و حل کننده‌های هندسه‌ی آنلاین
(Online Geometry Calculator and Solvrs)

● خودآموزهای آمار مقدماتی و احتمال
(Elementary Statistics and Probability Tutorials)

● نرم‌افزار ریاضی
(Math Software)

● کاربردهای ریاضیات در فیزیک و مهندسی
(Applications of Mathematics in Physics and Engineering)

● برگه‌های کاری رایگان حساب دیفرانسیل و انتگرال، آماده برای دانلود کردن
(Free Calculus Worksheet to Download)

● برگه‌های کاری رایگان ریاضی، برای دانلود کردن
(Free Math Worksheet to Download)

● برگه‌های کاری رایگان هندسه، برای دانلود کردن
(Free Geometry Worksheet to Download)

● کاغذ رسم رایگان
(Free Graph Paper)

در صفحه‌ی اصلی سایت متنی وجود دارد که دربرگیرنده‌ی پیوندهای گوناگونی است و کاربر با کلیک روی آن‌ها، می‌تواند به مطالب قابل توجهی دست‌رسی پیدا کند. عنوان‌های اصلی این قسمت عبارت‌اند از:

● ریاضی و حساب دیفرانسیل و انتگرال مقدماتی
(MATH AND PRECALCULUS)

● ریاضی کاربردی
(APPLIED MATH)

● حساب دیفرانسیل و انتگرال [حسابان]
(CALCULUS)

● هندسه
(GEOMETRY)

● مثلثات
(TRIGONOMETRY)

● آمار
(STATISTICS)

● احمد قندهاری

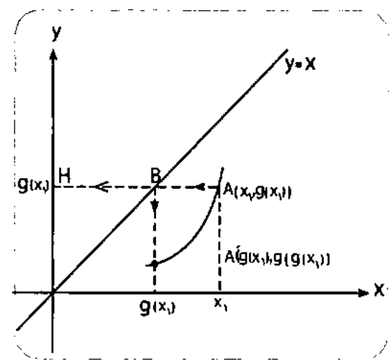


رسم نمودار fog از روی نمودارهای f و g

برای دانش‌آموزان سال سوم رشته‌ی ریاضی

اشاره: در این مقاله می‌خواهیم از روی نمودارهای f و g، نمودار $f(g(x))$ و از روی نمودار f، نمودار $f(f(x))$ را رسم کنیم.

۱. نمودار تابع g در شکل زیر مفروض است. می‌خواهیم نقطه‌ای روی نمودار g بیابیم که طول آن $g(x_1)$ باشد $(x_1 \in Dg)$.



برای این کار خط y=x را نیز در شکل رسم کرده‌ایم.

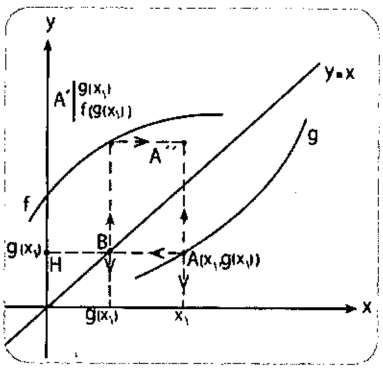
نقطه‌ای به طول x_1 روی محور xها انتخاب می‌کنیم و آن را به کمک رابط تا نمودار g امتداد می‌دهیم. نقطه‌ی A به مختصات $(x_1, g(x_1))$ است.

اگر از نقطه‌ی A رابطی موازی محور xها رسم کنیم تا خط y=x را در نقطه‌ی B و محور yها را در نقطه‌ی H قطع کند، خواهیم داشت: $y_H = g(x_1)$ و $x_B = y_B = g(x_1)$.

از نقطه‌ی B رابطی بر محور xها عمود می‌کنیم تا نمودار g را در نقطه‌ی A′ قطع کند. نقطه‌ی A′ روی نمودار g قرار دارد و طول آن $g(x_1)$ است. پس داریم: $A'(g(x_1), g(g(x_1)))$.

۲. نمودارهای دو تابع g و f در شکل رسم شده‌اند. می‌خواهیم نقطه‌ای روی نمودار f بیابیم که طول آن $g(x_1)$ باشد $(x_1 \in Dg)$.

در این‌جا هم از خط y=x کمک می‌گیریم.



فرض می‌کنیم $A(x_1, g(x_1))$ روی نمودار g باشد. از A رابطی عمود بر محور yها رسم می‌کنیم تا خط y=x را در B و محور yها را در H قطع کند. خواهیم داشت: $y_H = g(x_1)$ و $x_B = y_B = g(x_1)$.

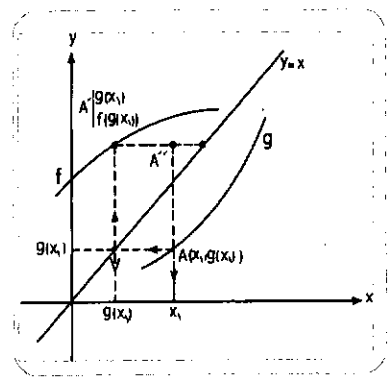
از نقطه‌ی B رابطی عمود بر محور xها رسم می‌کنیم تا محور xها را در نقطه‌ای به طول $g(x_1)$، و نمودار f را در نقطه‌ی A′ قطع کند. پس داریم:

. $x_{A'} = g(x_1)$

درنتیجه $A'(g(x_1), f(g(x_1)))$ است.

۳. می‌خواهیم نقطه‌ی A'' را در صفحه‌ی محورهای مختصاتی که نمودارهای دو تابع f و g رسم شده‌اند، طوری بیابیم که $A''(x_1, f(g(x_1)))$ باشد.

مانند دو قسمت قبل، خط y=x را رسم می‌کنیم.



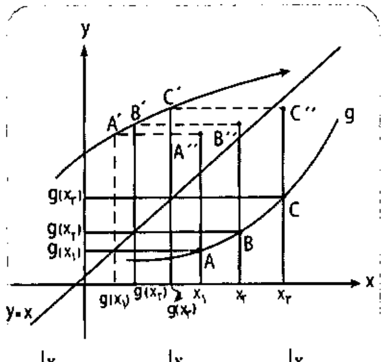
نقطه‌ی $A(x_1, g(x_1))$ را روی نمودار g در نظر می‌گیریم. با توجه به توضیحات مورد ۲، به نقطه‌ی $A'\left|\begin{matrix} g(x_1) \\ f(g(x_1)) \end{matrix}\right.$ می‌رسیم.

حال اگر از نقطه‌ی A' روی نمودار f خطی موازی محور xها رسم کنیم تا رابط رسم شده از نقطه‌ی A (موازی محور yها) را در نقطه‌ی A'' قطع کند، آن‌گاه $A''\left|\begin{matrix} x_1 \\ f(g(x_1)) \end{matrix}\right.$ خواهد شد.

بنابراین A'' نقطه‌ای از تابع $f(g(x))$ است. با تکرار این عمل، نقاط متعدد A'' که روی تابع fog قرار دارند، مشخص می‌شوند.

در شکل زیر، سه نقطه از تابع fog را با در دست داشتن نمودارهای دو تابع f و g به‌دست می‌آوریم $(x_1, x_2, x_3 \in Dg)$.

نقاط A''، B'' و C''، سه نقطه از تابع fog هستند.



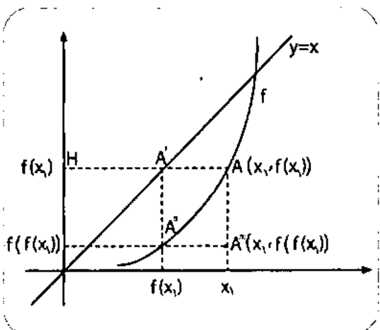
$A''\left|\begin{matrix} x_1 \\ f(g(x_1)) \end{matrix}\right.$ $B''\left|\begin{matrix} x_2 \\ f(g(x_2)) \end{matrix}\right.$ $C''\left|\begin{matrix} x_3 \\ f(g(x_3)) \end{matrix}\right.$

۴. می‌خواهیم از روی نمودار تابع f، نمودار تابع fof را رسم کنیم.

فرض می‌کنیم در صفحه‌ی محورهای مختصات، نمودار تابع f رسم شده است. خط y=x را هم در شکل رسم می‌کنیم. نقطه‌ای به طول x_1 روی نمودار تابع f در نظر می‌گیریم، مانند $A(x_1, f(x_1))$. از نقطه‌ی A رابطی موازی محور xها بر محور yها عمود می‌کنیم. این رابط، خط y=x را در نقطه‌ی $A'(f(x_1), f(x_1))$ و محور yها را در H قطع می‌کند که $y_H = f(x_1)$.

از نقطه‌ی A' به محور xها عمود می‌کنیم. طول پای عمود $f(x_1)$ است. این رابط نمودار تابع f را در نقطه‌ی A'' قطع می‌کند که $A''(f(x_1), f(f(x_1)))$ است.

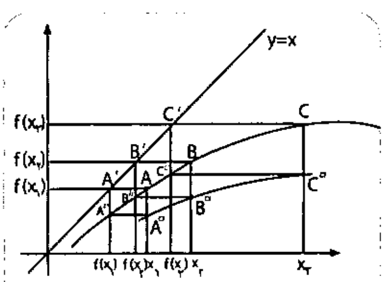
چنان‌چه از A'' رابطی موازی محور xها رسم کنیم تا رابط عمود بر محور xها به طول x_1 را در نقطه‌ی A''' قطع کند، آن‌گاه $A'''(x_1, f(f(x_1)))$ خواهد شد؛ مانند شکل زیر:



$A(x_1, f(x_1))$ ؛ $A'(f(x_1), f(x_1))$

$A''(f(x_1), f(f(x_1)))$ ؛ $A'''(x_1, f(f(x_1)))$

برای تمرین، در شکل زیر سه نقطه‌ی A'''، B''' و C''' را از تابع fof مشخص می‌کنیم.



$A'''(x_1, f(f(x_1)))$

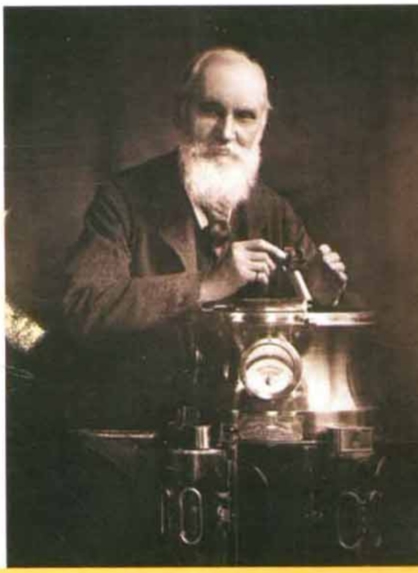
$B'''(x_2, f(f(x_2)))$

$C'''(x_3, f(f(x_3)))$

زبان حال ریاضی دانان

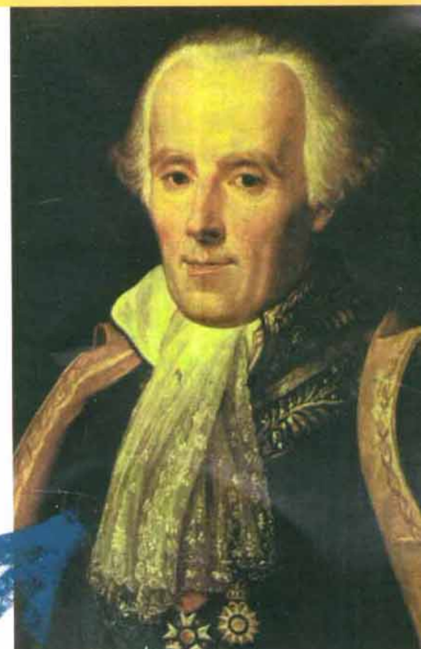
ریاضی دان کسی است که در نظرش $\int_{0}^{\infty} e^{-x^2}\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{۲}$ به روشنی دو دو تا برابر با چهار تا باشد.

لرد کلوین



برداشت‌های ما از نقطه‌ی ریاضی، مثالی است از تجربه و دقتی که ریاضی‌دانان دائماً سعی دارند بدان واصل شوند و این مثال از آن لحاظ اهمیت دارد که ثابت می کند هر بار که آدمی به تجربه و دقت لازم می‌رسد باز هم تلاش می کند که به درجه‌ی بالاتری از تجربه و دقت دست یابد تا بهتر قادر به درک واقعیت گردد.

ای.تی.بل



حساب احتمالات در واقع چیزی جز عقل سلیم نیست که به محاسبه درآمده است. این حساب چیزی را که صاحبان فکر بدون آن که متوجه باشند به غریزه در می یابند و با دقت و صحت بیان می دارد. این علم که با ملاحظات مربوط به بازی های شانسی و تصادفی به وجود آمد، امروزه آن چنان اهمیتی یافته است که از مهم ترین مسائل معرفت آدمی به شمار می آید.

پی یر سیمون لاپلاس

پراکندگی موضوعی تست‌های ریاضی آزمون سراسری
سال‌های ۱۳۸۰ تا ۱۳۸۷ (رشته‌ی ریاضی)

تهیه و تنظیم: محمدعلی نقی‌پور، گروه ریاضی ناحیه‌ی ۲ بندرعباس

ردیف	کتاب ـ موضوع	سال	۸۷	۸۶	۸۵	۸۴	۸۳	۸۲	۸۱	۸۰
۱	ریاضی ۱ ریاضی ۲ حسابان و حساب دیفرانسیل و انتگرال	معادله، نامعادله و بخش‌پذیری	۲	۲	–	–	۱	۲	–	۱
۲		تابع	۱	۱	۱	۱	۲	۳	۳	۲
۳		نمودار تابع	–	۱	۲	۱	۳	۱	۲	۱
۴		مثلثات	۲	۲	۲	۱	۲	۲	۲	۲
۵		حد و پیوستگی	۳	۴	۲	۵	۳	۳	۳	۵
۶		مشتق و کاربردها	۸	۵	۹	۷	۸	۷	۸	۸
۷		دیفرانسیل و انتگرال	۲	۴	۳	۳	۲	۳	۴	۳
۸		مجانب	۱	۱	۱	–	۱	۲	–	۱
۹		تصاعد	۱	۱	۱	۲	۱	–	۱	–
۱۰		لگاریتم	۱	۱	۱	۱	–	۱	۱	–
۱۱		دستگاه اعداد، دنباله و سری	۲	۲	۲	۲	۲	۲	۲	۳
۱۲	آمار	آمار و مدل‌سازی	۲	۲	۲	–	–	–	۱	–
۱۳	هندسه‌ی ۱	هندسه	۴	۴	۳	۴	۴	۴	۴	–
۱۴	هندسه‌ی ۲	استدلال	۱	–	۲	۲	۲	۲	۲	۴
۱۵		دایره	۱	۲	۱	۱	۱	۱	۱	–
۱۶		تبدیل‌ها	۱	۱	۱	۱	۱	–	–	۲
۱۷		هندسه فضایی	۱	۱	۱	۲	۱	۱	۱	۱
۱۸	هندسه‌ی تحلیلی و جبر خطی	بردارها	۱	۱	۲	۲	۲	۱	۲	۱
۱۹		معادلات خط و صفحه	۲	۲	۲	۱	۱	۲	۱	۲
۲۰		مقاطع مخروطی	۲	۱	۲	۲	۳	۱	۱	–
۲۱		ماتریس و دترمینان	۲	۲	۲	۲	۲	۱	۱	۴
۲۲		دستگاه معادلات خطی	۱	۳	–	۱	–	۴	۲	۱
۲۳	جبر و احتمال	استدلال ریاضی	–	۱	–	–	۱	۱	۲	۱
۲۴		مجموعه، رابطه و حاصل‌ضرب دکارتی	۳	۲	۳	۳	۳	۲	۲	۲
۲۵		احتمال	۳	۲	۳	۳	۳	۱	۲	۳
۲۶	ریاضیات گسسته	گراف	۱	۲	۱	۲	۱	۲	۱	۲
۲۷		نظریه اعداد	۳	۱	۳	۳	۳	۳	۴	۳
۲۸		آنالیز ترکیبی و ترکیبیات	۲	۱	۱	–	–	۱	–	۱
۲۹		احتمال	۲	۳	۲	۳	۲	۲	۲	۲

منبع: گروه درس ریاضی دفتر برنامه‌ریزی و تألیف کتب درسی وزارت آموزش و پرورش، math-dept.talif.sch.ir

رشد برهان ۶۴

مجله‌ی ریاضی

دوره‌ی متوسطه

دوره‌ی نوزدهم / زمستان ۱۳۸۸ / شماره‌ی ۲ / بها ۴۵۰۰ ریال / ۶۴ صفحه

فصلنامه‌ی آموزشی، تحلیلی و اطلاع رسانی

www.roshdmag.ir

ISSN:1735-4951

وزارت آموزش و پرورش

سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی

دفتر انتشارات کمک آموزشی

- رسم نمودار تابع f' از روی نمودار تابع f
- چند مسئله در جبر هندسه و هندسه‌ی تحلیلی
- کاربردهای قضیه‌ی تقسیم
- رویکرد هندسی و جبری ـ مختصاتی در آموزش هندسه
- با راهیان المپیادهای ریاضی







روش تحلیلی من همان قدر نسبت به راه و رسم قدما ارجح است که فصاحت و بلاغت سیسروس[1] بر حروف الفبا.

رنه دکارت

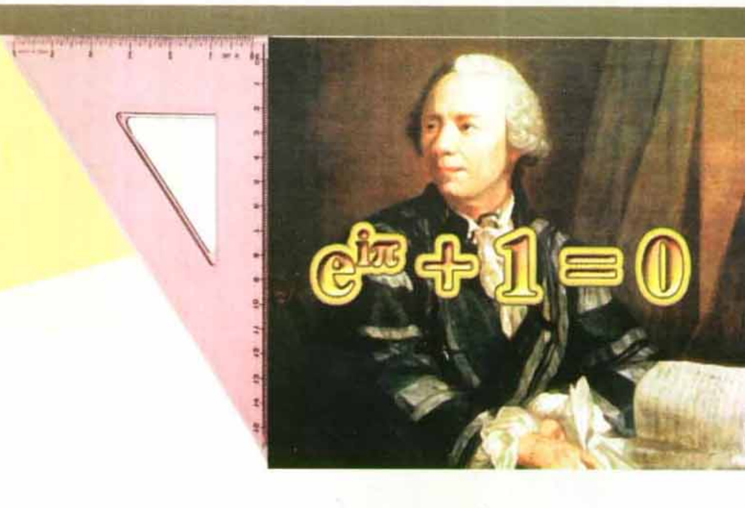
۱. خطیب معروف رومی

تمام نظریه‌ی حرکت سیالات به فرمول‌های ریاضی تحویل یافته است.

لئونارد داویلد

اکتشاف در ریاضیات از برهان استنتاجی مهم تر است. بدون اکتشاف چیزی وجود ندارد تا استنتاج بر آن بتازد و آن را منظم سازد.

ای. تی. بل



بسم الله الرحمن الرحیم

رشد برهان ۶۴ متوسطه

مجله‌ی ریاضی

دوره‌ی آموزش متوسطه

فصلنامه‌ی آموزشی، تحلیلی و اطلاع‌رسانی

وزارت آموزش و پرورش

سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی

دفتر انتشارات کمک آموزشی

دوره‌ی نوزدهم /شماره‌ی ۲ / زمستان ۱۳۸۸

•مدیر مسئول: محمد ناصری •سردبیر: حمیدرضا امیری

•مدیر داخلی: میرشهرام صدر •طراح گرافیک: شاهرخ خرمغانی

•هیئت تحریریه: حمیدرضا امیری، محمد هاشم رستمی، احمد قندهاری، میرشهرام صدر، هوشنگ شرقی، سید محمدرضا هاشمی موسوی، غلامرضا یاسی‌پور و با تشکر از همکاری ارزنده‌ی استاد پرویز شهریاری •ویراستار ادبی: کبری محمودی

• پایگاه اینترنتی www.roshd mag.ir

• Borhanm@roshdmag.ir

•پیام‌گیر نشریات رشد: ۰۲۱-۸۸۳۰۱۴۸۲

نشانی دفتر مجله: تهران، صندوق پستی ۱۵۸۷۵/۶۵۸۵

•تلفن دفتر مجله: ۰۲۱-۸۸۳۰۵۸۶۲

•تلفن امور مشترکین: ۰۲۱-۷۷۳۳۵۱۱۰_۷۷۳۳۶۶۵۶

•شمارگان: ۱۲۰۰۰ نسخه

■ چاپ: شرکت افست (سهامی عام)

رشد برهان متوسطه، تمامی دبیران محترم و دانش‌آموزان عزیز را در زمینه‌های زیر به همکاری دعوت می‌کند:

■ نگارش مقاله‌های کمک درسی (شرح و بسط و رفع مشکلات مبحث درسی کتاب‌های ریاضی دوره‌ی متوسطه و پیش‌دانشگاهی)

■ طرح مسائل کلیدی به همراه حل آن‌ها (برای دانش‌آموزان)

■ طرح مسائل مسابقه‌ای به همراه حل آن‌ها (برای دانش‌آموزان)

■ طرح معماهای ریاضی

■ نگارش یا ترجمه‌ی مقاله‌های عمومی ریاضی (مانند تاریخ ریاضیات، زندگینامه‌ی علمی و اجتماعی ریاضیدانان، نکته‌های تازه و لطیف ریاضیات، آموزش ریاضیات، آموزش کامپیوتر و ...)

رشد برهان متوسطه هر سه ماه، یکبار منتشر می‌شود.

مجلّه در حکّ، اصلاح، حذف و اضافه‌ی مقاله‌ها آزاد است.

مقاله‌های وارده، باید خوانا و حتی‌الامکان کوتاه باشد.

مقاله‌های رسیده مسترد نمی‌شود.

حرف اول

امام صادق (ع) در حدیثی گهربار می‌فرمایند: «عالم به علوم زمان خود باشید.»

شاید یکی از تعبیرات و تفسیرهای این روایت نورانی، مطلع بودن و آگاه بودن از علوم زمان است. اما با پیشرفتی که علوم در زمان فعلی کرده‌اند و گسترش روبه‌رشد علوم پایه، مهندسی، تجربی، انسانی و... شاید این گزاره درست باشد که در زمان حاضر، عالم به کسی اطلاق می‌شود که نشانی بیشتری بداند و برای هر موضوع مورد نیاز خود، دقیقاً بداند از چه مراجع و منابعی باید استفاده کرد.

البته این اطلاع داشتن و نشانی بلد بودن که متأسفانه امروزه به صورت «copy-paste» درآمده است، اصلاً قابل اطمینان و اعتماد نیست و اطلاعاتی که در وب لاگ‌ها و سایت‌ها انباشته شده‌اند، همگی از صحت کافی برخوردار نیستند. حتی در بعضی موارد با غرض‌ورزی و سودجویی‌هایی نیز همراه هستند. اطلاعات باید بر مبنای پژوهش و تحقیق آن هم توسط افراد و مراکز تأیید شده تهیه شده باشند تا بتوان به آن‌ها تکیه کرد و براساس آن‌ها تصمیم گرفت یا تجزیه و تحلیل درستی صورت داد.

در واقع برای ورود به هر مبحثی و یا مطالعه و حرکتِ رو به رشد در هر موضوعی، ابتدا باید با استفاده از منابع اصیل و محکم، درباره‌ی آن مطلب یا موضوع و حتی تاریخچه و فلسفه‌ی آن، اطلاعات کافی جمع‌آوری کنیم و به اصطلاح، خودمان را آماده کنیم و با چشمی باز، گوشی شنوا و قلبی محکم، به سراغ آن موضوع برویم.

بزرگی می‌گفت: شیطان از سه راه می‌تواند به وجود انسان‌ها راه یابد و باعث گمراهی آن‌ها شود: یکی چشم، یکی گوش و سومی قلب یا دل. ایشان می‌فرمودند: به هر چیزی نمی‌شود نگاه کرد، به هر چیزی نمی‌توان گوش داد و به هر چیزی نمی‌توان دل داد. برای هر کدام از موارد فوق، ابتدا باید مسلح و قوی شد و سپس به راه ادامه داد. چه بسیار انسان‌ها که با نگاه کردن به یک نوشته یا به یک تصویر، برای همیشه در ورطه‌ی گمراهی افتاده و به ناکجا آباد رفته‌اند.

چه‌قدر کتاب‌های ناخوانده دارم که جرئت خواندن آن‌ها را نداشته‌ام و منتظرم تا به سپری قوی و محکم دست پیدا کنم و پس از آن به مطالعه‌ی آن‌ها بپردازم. راستی، قلبی که «عرشِ خداست»، جای چه چیز یا چیزهای دیگری می‌تواند باشد؟ خداوند می‌فرمایند: «قلب مؤمن عرش من است.» پس چه‌طور است که خیلی آسان آن را به هر موجودی یا مطلبی یا فیلمی یا... گره زده و وابسته‌اش می‌شویم؟

عزیزان دانش‌آموز، بیایید همان‌طور که برای حل یک مسئله‌ی ریاضی کوتاه‌ترین و بهترین راه را انتخاب می‌کنیم و با استفاده‌ی صحیح از فرض مسئله به حکم می‌رسیم، در تمامی مسائل موجود در زندگی و اجتماع نیز درست، محکم، دقیق و با پشتوانه‌ی تحقیق و پژوهش گام برداریم، ان‌شاءالله.

سردبیر

پرویز شهریاری

خوارزمی و عیلامی‌ها

درباره‌ی **محمد فرزند موسی خوارزمی**، باید اندکی بیش‌تر صحبت کنیم. **جورج سارتون** در مقدمه‌ی تاریخ دانش، سده‌ی نهم میلادی را «دوران خوارزمی» نامیده است. او گفته است: «اگر همه‌ی جهت‌ها در نظر گرفته شود. خوارزمی یکی از بزرگ‌ترین ریاضی‌دانان همه‌ی دوران‌ها بوده است.»

آمتیسمار[۱] فرانسوی می‌گوید: «امروز یک موضوع را نمی‌توان فراموش کرد و آن این است که محمد، فرزند موسی خوارزمی، در واقع معلم اروپایی‌های جدید در دانش جبر است و جبر رشته‌ی اصلی ریاضیات به شمار می‌آید.



خوارزمی دانشمندی است که در پایان سده‌ی دوم هجری قمری بوده، تا سال ۲۳۲ زیسته و در سال‌های پس از آن درگذشته است. او به جز ریاضیات، در شاخه‌های دیگری مثل نجوم، جغرافیا، استرلاب، ساعت آفتابی و جز آن هم نوشته‌هایی داشته است که کمتر به دست ما رسیده اند.

خوارزمی کتابی درباره‌ی «جمع و تفریق» داشته که در زمان ما تنها برگردان لاتینی آن در دست است. او از عددشماری هندی و نوشتن عددها به یاری آن‌چه که هندی‌ها به‌کار می‌بردند و بعدها در همه‌ی جهان با تفاوت‌هایی مرسوم گشت، یاد می‌کند.

جدولی هم برای سینوس‌ها تنظیم کرده و ارائه داده است. در کتاب‌ها سینوس را «جیب» به کار برده‌اند که به معنای «گریبان» است. بعدها وقتی کتاب خوارزمی به فرانسه ترجمه شد، همین جیب را به سینوس ترجمه کردند که باز هم به معنای «گریبان» است و من نمی‌فهمم سینوس چه ربطی به گریبان دارد. چه بسا خوارزمی از واژه‌ی «جیپ» که واژه‌ای فارسی (پهلوی) است و به معنای چوب عمودی که در زمین قرار گرفته استفاده کرده باشد، ولی هجی کردن واژه‌ی جیب به‌دلیل داشتن حرف

«پ» که ناآشنا بود، آن را به «ب» تبدیل کرد، چون در زبان عربی «پ» وجود ندارد، ولی «ب» وجود دارد و وقتی به فرانسوی هم برگردان شد، از همان واژه‌ی جیب که به معنای گریبان است، استفاده کردند.

در زمان خوارزمی، اخترشناسان بسیاری وجود داشتند که به‌طور خلاصه از آن‌ها یاد می‌کنیم:

احمد فرزند **محمد**، اهل نهاوند که به حاسب مشهور بوده است. او هم اخترشناس و هم ریاضی‌دان بود و در نیمه‌ی دوم سده‌ی دوم هجری در نیشابور می‌زیست.

یحیی فرزند **ابومنصور ابوعلی** که با **فضل** فرزند **سهل سرخسی** که وزیر مأمون، خلیفه‌ی عباسی بود، نسبت داشت. او به «بیت‌الحکمه» رفت و کارهای اخترشناسی خود را در آن‌جا انجام می‌داد.

خالد فرزند **عبدالملک مرورودی** که اهل مرورود خراسان هم‌زمان با مأمون عباسی و مدتی هم در دمشق بود.

ابوسعید جرجانی که کتاب‌های «مسئله‌های هندسی» و «استخراج خط نصف‌النهار» او در قاهره موجودند. کتاب دوم را **کارل شو** به زبان آلمانی برگردانده است.

سرگذشت ریاضیات

در سال ۱۳۷۹ گروه ریاضی انتشارات مدرسه کتابی به نام «فرهنگ ریاضیات» منتشر کرد که فصل نخست آن با عنوان «ریاضیات، واژه‌شناسی، فلسفه‌ی تاریخ، کاربردها و سرگذشت ریاضیات نظری»، به قلم این‌جانب است. این مقاله در ۵۳ صفحه (صفحه‌ی ۵ تا ۵۸) است که همه‌ی خوانندگان علاقه‌مند را به مطالعه‌ی آن دعوت می‌کنم. در این‌جا برخی از نکته‌های اساسی این مقاله را می‌آوریم.

واژه‌ی ریاضیات به جای واژه‌ی «ماته ماتیکه»[2] گذاشته شده که خود از «ماته ما»[3] به معنای دانش و دانایی آمده است.

❖ جورج سارتون در «مقدمه‌ی تاریخ دانش»، سده‌ی نهم میلادی را «دوران خوارزمی» نامیده است. او گفته است: «اگر همه‌ی جهت‌ها در نظر گرفته شود، خوارزمی یکی از بزرگ‌ترین ریاضی‌دانان همه‌ی دوران‌ها بوده است

غالباً واژه‌ی ریاضیات را برگرفته از واژه‌ی ریاضت دانسته‌اند، چرا که ریاضت تنها به معنای «پرهیزکاری بدنی» نیست، بلکه «در خود فرو رفتن»، «فهمیدن» و «رسیدن به رازها» را هم می‌رساند. دیدگاه‌های دیگری هم وجود دارند. بسیاری از زبان‌شناسان با بخش‌های زبان‌شناختی خود نتیجه می‌گیرند: «ماته‌ما» همان واژه‌ی پارسی «مزدا» ست که همان معنای واژه‌ی یونانی را دارد: «دانا» و «آگاه».

دیدگاه سوم معتقد است، واژه‌ی «ریاضی» از واژه‌ی پارسی «راز» به معنای «اندازه‌گرفتن» آمده است این واژه‌ی «راز» هنوز در واژه‌های «تراز» و «ترازو» با حفظ معنای خود باقی مانده است. در واژه‌ی «ترازو»، «ترا» به معنای «این سو و آن‌سو» و «راز» به معنای اندازه‌گیری است. پسوند «او» بسیاری جاها در زبان پارسی به معنای «بسیار» به کار رفته است. به این ترتیب، «ترازو» یعنی «اندازه‌گیری و مقایسه‌ی بسیار».

در ضمن، واژه‌ی «مَر» در زبان پارسی (که در واژه‌های «شمر» و «شمردن» وجود دارد.) به معنای شمردن و محاسبه‌کردن با دست است. به این ترتیب، اینان به جای واژه‌ی ریاضیات، واژه‌ی «راز و مَر» را پیشنهاد می‌کنند که درست به معنای «اندازه گرفتن و شمردن» است و اگر ریاضیات را دانش رابطه‌های کمیتی و شکل‌های فضایی بدانیم، واژه‌ی «راز و مَر» می‌تواند به تنهایی درست باشد.

اگر واژه‌ی «ریاضیات» را (که نه در ترکیب زیباست و نه به روشنی معرف یکی از دانش‌هاست)، برگرفته از واژه‌ی «ریاضت» فرض کنیم، می‌تواند اثری منفی در علاقه‌مندان به این دانش بگذارد، زیر همگان «ریاضت» را به معنای «سختی کشیدن»، «در انزوا فرو رفتن» و «فشار بیش از اندازه به خود» می‌دانند که با ماهیت دانش ریاضی سازگاری ندارد. ولی این تغییر شبیه تغییری است که برخی برای واژه‌ی جبر می‌آورند و آن را به معنای «زور» و «فشار» می‌دانند، در حالی که خوارزمی واژه‌ی جبر را به معنای «جبران کردن» گرفته است. چرا که به تعبیر خوارزمی و به زبان امروزی می‌توان مقدار منفی را از یک سمت معادله به سمت دیگر معادله برد تا مقداری مثبت شود (یعنی جبران شود). در مصراع سعدی: «که جبر خاطر مسکین بلا بگرداند»، واژه‌ی «جبر» درست به همین معنای جبران کردن به کار رفته است.

جدا از این بحث که «ماته‌ما» از واژه‌ی «مزدا» گرفته شده یا ریاضیات از واژه‌ی «راز» آمده است، به نظر می‌رسد اگر قرار باشد واژه‌ی پارسی به جای «ریاضیات» انتخاب شود، بهترین پیشنهاد همان واژه‌ی «راز و مَر» باشد که

هم زیباست و هم از نظر معنا با واژه‌ی «ریاضیات» سازگار است.

من به شرح ادامه‌ی این مقاله پایان می‌دهم و تنها عنوان‌های آن را یاد می‌کنم:

«موضوع ریاضیات و بستگی آن با صنعت و دیگر دانش‌ها»، «ریاضیات و دانش‌های دیگر»، «ریاضیات و صنعت»، «دو انگیزه‌ی پیشرفت ریاضیات»، «دوره‌ی دوم تکامل ریاضیات یا ریاضیات یونانی»، «دوره‌ی سوم تکامل ریاضیات یا ریاضیات ایرانی»، «سرگذشت ریاضیات نظری از آغاز تا امروز»، «برداشت کلی»، «دوره‌ی بعدی ریاضیات»، «دوره‌ی ریاضیات مقدماتی»، «ایران، آسیای میانه و خاور نزدیک»، «اروپای غربی تا سده‌ی شانزدهم میلادی»، «دوران پیدایش ریاضیات با کمیت‌های متغیر»، «ریاضیات امروزی»، «پایان سده‌ی نوزدهم و آغاز سده‌ی بیستم.»



پی نوشت.....................

1. A. mare
2. mathematike
3. mathema

تقسیم بندی علوم از نظر ابن سینا



برگرفته از مجله‌ی ریاضی یکان / شماره‌ی مسلسل ۲۸ / شهریورماه ۱۳۴۵

شیخ ابوعلی سینا در کتاب مشهور **شفا** علوم زمان خود را به سه دسته تقسیم کرده است:

اول **علوم عالی** و آن‌ها علومی هستند که با ماده سروکار ندارند و درک و فهم آن‌ها فقط با تعقل صورت می‌گیرد و آن‌ها را **علوم ماوراءالطبیعه** نامند. مانند الهیات و فلسفه و منطق که علوم اولی نیز نامیده می‌شوند.

دوم ـ **علوم اوسط** یا وسطی هستند که هم با ماده سروکار دارند و هم برای یاد گرفتن علوم اولی دانستن آن‌ها لازم است و آن‌ها **علوم ریاضی** هستند چنانچه فلاسفه‌ی قدیم برای درک مطالب علمی خود ابتدا ریاضیات را فرامی گرفتند.

سوم ـ **علوم ادنی** یا دانی هستند که فقط با ماده سروکار دارند و آن‌ها را با مشاهده و تجربه می‌توان درک کرد و آن‌ها **علوم طبیعی** هستند که امروزه آن‌ها را **علوم تجربی** گویند.

اما علوم ریاضی در نظر شیخ ابوعلی سینا به چهار قسمت تقسیم می‌شد:

۱. **علم اعداد** که عبارت از آشنا شدن به انواع اعداد و دانستن خاصیت هر کدام و نسبت آن‌ها با یکدیگر است ـ جمع و تفریق ارقام هندسی و جبر و مقابله نیز جزو این علم محسوب می‌شد. این علم را **علم الارثما طیقی** (علم الحساب) نیز می‌گویند.

۲. **علم هندسه** ـ که عبارت از آشنایی به احوال خطوط و اشکال سطوح و مجسمات و مساحات اشکال و نسبت بین آن‌ها و **علوم** جر اثقال و اوزان و موازین و آلات جریه و مناظر و موایا و نقل میاه باشد.

۳. **علم هیأت** ـ که عبارت از آشنایی به عالم و شکل و اوضاع و مقادیر و حرکات ستارگان است و از فروع این علم همان زیجات و تقاویم می‌باشد.

۴. **علم موسیقی** ـ که عبارت از آشنا شدن به انواع نغمه‌ها و اتفاق و اختلاف آن‌ها و ابعاد و اجناس و جمع و انتقالات و ارتفاع آن‌ها و کیفیت تألیف لحن‌هاست، علم تهیه‌ی آلات موسیقی نیز از متفرغات این علم است.

ابن سینا یکایک این علوم را که از قدما به او رسیده می‌دانسته و اضافاتی نو نیز بر آن‌ها نموده است به خصوص در کتاب **المجسطی** اضافاتی به آخر آن نموده است. نکته‌ی قابل توجه آن است که در نظر ابن سینا علم هیأت یکی از علوم اساسی ریاضی است و به آن توجه به خصوصی داشته است. به طور کلی دانشمندان قدیم به این علم اهمیت فوق‌العاده‌ای می‌داده‌اند. هم‌چنین شیخ علم موسیقی را نیز جزو علوم ریاضی دانسته است.

احمد قندهاری

رسم نمودار تابع f' از روی نمودار تابع f

ابتدا در توابع کثیرالجمله، رابطه‌ی بین منحنی تابع f و منحنی تابع f' را به‌صورت شهودی بررسی و سپس نتایج را بیان می‌کنیم.

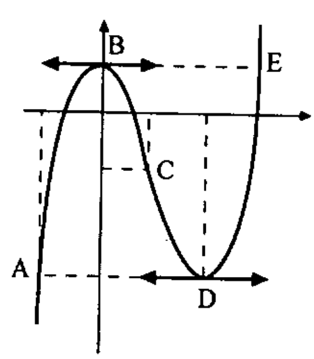
مثال: تابع f به معادله‌ی $f(x) = x^۳ - ۳x^۲ + ۱$ را رسم می‌کنیم.

طول‌های اکسترمم تابع f:

$$f'(x) = ۳x^۲ - ۶x = ۰ \Rightarrow ۳x(x-۲) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = ۰ \\ x = ۲ \end{cases}$$

$f''(x) = ۶x - ۶ = ۰ \Rightarrow x = ۱$ طول نقطه‌ی عطف تابع f

x	$-\infty$		۱-		⓪		۱		②		۳		$+\infty$
$f'(x)$		+		+	۰	−		−	۰	+		+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	۳-	↗	۱	↘	۱-	↘	۳-	↗	۱	↗	$+\infty$
			A		B		C		D		E		



حال تابع f' به معادله‌ی $U(x) = f'(x) = ۳x^۲ - ۶x$ را رسم می‌کنیم. طول نقطه‌ی عطف تابع f برابر است با طول نقطه‌ی اکسترمم تابع f':

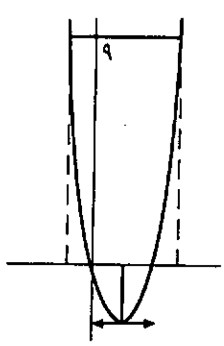
$$U'(x) = ۶x - ۶ = ۰ \Rightarrow x = ۱$$

$$U(x) = ۰ \Rightarrow ۳x^۲ - ۶x = ۰ \Rightarrow ۳x(x-۲) = ۰$$

طول‌های اکسترمم تابع f برابرند با طول‌های نقاط تقاطع تابع f' با محور xها:

$$\Rightarrow \begin{cases} x = ۰ \\ x = ۲ \end{cases}$$

x	$-\infty$		۱-		۰		①		۲		۳		$+\infty$
$U'(x)$		−		−		−	۰	+		+		+	
$U(x)$	$+\infty$	↘	۹	↘	۰	↘	۳-	↗	۰	↗	۹	↗	$+\infty$



۱. به‌طوری که ملاحظه شد، $x = ۰$ و $x = ۲$ طول‌های نقاط اکسترمم منحنی تابع f هستند که برابر طول‌های نقاط تقاطع منحنی تابع f' با محور xهایند. پس می‌توان گفت:

نتیجه‌ی ۱. طول‌های نقاط اکسترمم منحنی تابع f برابر است با طول‌های نقاط تقاطع منحنی تابع f' با محور xها؛ به‌شرطی که در نقاط اکسترمم منحنی تابع f، $f'(x)$ مساوی صفر باشد.

۲. اگر کمی توجه کنیم، درمی‌یابیم که طول نقطه‌ی عطف تابع f برابر ۱ است. از طرف دیگر، طول نقطه‌ی اکسترمم منحنی تابع f′ برابر ۱ است. پس می‌توان گفت:

نتیجه‌ی ۲. طول‌های نقاط عطف منحنی تابع f برابر است با طول‌های نقاط اکسترمم منحنی تابع f′.

۳. به‌طوری که در شکل تابع f ملاحظه می‌شود، تقعر قطعه‌ی منحنی ABC به طرف پایین است. پس y″ تابع f در فاصله‌ی طول‌های نقاط C و A یعنی در فاصله‌ی [۱,۱−] منفی است. از طرف دیگر، y″ تابع f همان U′ است. پس U′ در این فاصله منفی و بنابراین تابع U در این فاصله اکیداً نزولی است.

نتیجه‌ی ۳. اگر تقعر منحنی تابع f در فاصله‌ی [a,b] به سمت پایین (جهت منفی محور yها) باشد، منحنی f′ در این فاصله اکیداً نزولی است.

۴. هم‌چنین می‌توان گفت که تقعر قطعه‌ی منحنی CDE در تابع f به سمت بالا (جهت مثبت محور yها) است. پس y″ در فاصله‌ی طول‌های نقاط E و C، یعنی در فاصله‌ی [۱,۳] مثبت است. از طرف دیگر، y″ همان U′ است. پس U′ در این فاصله مثبت و درنتیجه، تابع U در این فاصله اکیداً صعودی است.

نتیجه‌ی ۴. اگر تقعر منحنی تابع f در فاصله‌ی [c,d] به سمت بالا (جهت مثبت محور xها) باشد، منحنی f′ در این فاصله اکیداً صعودی است.

۵. باز به شکل منحنی تابع f توجه کنیم. منحنی تابع f روی قطعه‌ی منحنی AB اکیداً صعودی است. یعنی تابع f در فاصله‌ی طول‌های این دو نقطه یعنی فاصله‌ی [۰,۱−] اکیداً صعودی است. پس عبارت f′(x) در این فاصله مثبت یا صفر است؛ یعنی: $f' \geq 0$. بنابراین: $U(x) \geq 0$ و درنتیجه نمودار تابع U(x) در فاصله‌ی [۰,۱−] بالای محور xها یا روی محور xهاست.

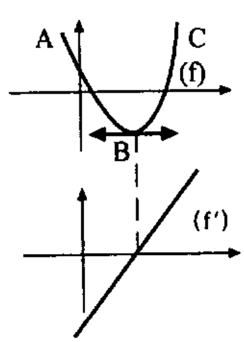
نتیجه‌ی ۵. اگر منحنی تابع f در فاصله‌ی [a,b] اکیداً صعودی باشد، آن‌گاه عبارت f′(x) در این فاصله مثبت یا صفر است. بنابراین نمودار f′ که همان نمودار تابع U(x) است، در این فاصله بالای محور xها یا روی محور xهاست.

۶. منحنی تابع f روی قطعه منحنی BCD اکیداً نزولی است. پس تابع f در فاصله‌ی طول‌های نقاط D و B، یعنی فاصله‌ی [۰,۲]، اکیداً نزولی است و عبارت f′(x) در این فاصله منفی یا صفر است. بنابراین، نمودار f′ که همان نمودار تابع U(x) است، در این فاصله زیر محور xها یا روی محور xهاست.

نتیجه‌ی ۶. اگر منحنی تابع f در فاصله‌ی [b,c] اکیداً نزولی باشد، آن‌گاه f′(x) در این فاصله منفی یا صفر است. بنابراین، نمودار f′ در این فاصله پایین محور xها یا روی محور xهاست.

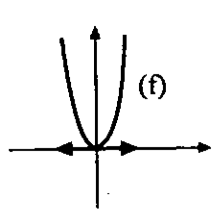
اکنون با توجه به شش نتیجه‌ی فوق تمرین‌های زیر را حل می‌کنیم. در مثال‌های زیر سعی شده است، محور yها در دو نمودار تابع f و f′ در یک امتداد باشد تا از نتایج گفته شده بهتر بهره‌گیری شود.

مثال ۱. فرض می‌کنیم نمودار یک تابع درجه‌ی دوم به صورت شکل زیر باشد. با توجه به مطالب گفته شده، منحنی مشتق آن را رسم می‌کنیم.

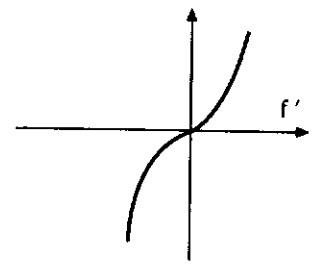


توضیح: تقعر منحنی f به طرف بالاست، پس تابع f′ اکیداً صعودی است و طول نقطه‌ی B (نقطه‌ی مینی‌مم تابع f) برابر طول نقطه‌ی تقاطع منحنی f′ با محور xهاست. با توجه به این‌که تابع درجه‌ی دوم است، مشتق آن تابعی از درجه‌ی اول خواهد شد و نمودار آن یک خط راست است.

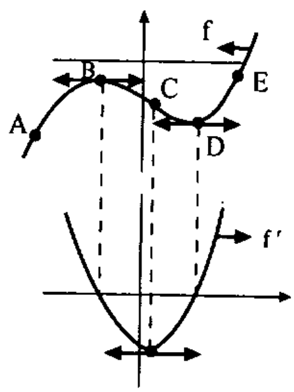
مثال ۲. فرض می‌کنیم تابع f به معادله‌ی $f(x) = x^{2n}$، $n \geq 2, n \in N$ باشد. نمودار این تابع به‌صورت زیر است:



تابع f' به صورت یک منحنی و اکیداً صعودی است و از مبدأ مختصات می‌گذرد.



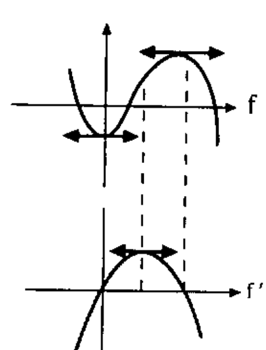
مثال ۳. فرض می‌کنیم نمودار تابع f به صورت زیر باشد. با توجه به مطالب گفته شده، نمودار f' نموداری است که زیر نمودار تابع f آمده است.



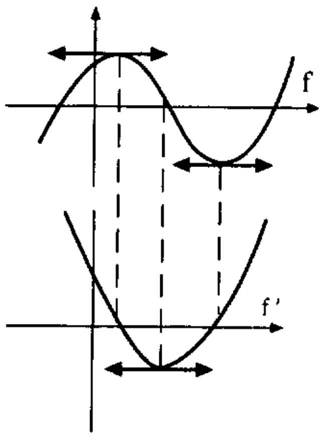
توضیح: طول‌های نقاط B و D برابر طول‌های نقاط تقاطع منحنی f' با محور xهاست. نقطه‌ی C، نقطه‌ی عطف منحنی تابع f است که طول آن برابر طول اکسترمم منحنی تابع f' است.

تقعر قطعه‌ی منحنی ABC به طرف پایین است. پس منحنی تابع f' در فاصله‌ی طول‌های نقاط C و A اکیداً نزولی (با توجه به نتیجه‌ی ۳) و تقعر قطعه‌ی منحنی CDE به طرف بالاست. بنابراین منحنی تابع f' در فاصله‌ی طول‌های نقاط E و C اکیداً صعودی است (با توجه به نتیجه‌ی ۴).

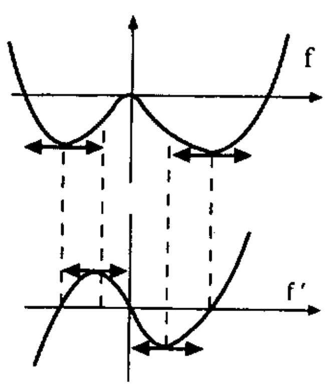
مثال ۴. نمودار تابع f به صورت شکل مقابل است و نمودار مشتق آن زیر شکل منحنی f رسم شده است.



مثال ۵. نمودار تابع f به صورت شکل زیر است و نمودار مشتق آن زیر شکل منحنی f رسم شده است.



مثال ۶. نمودار تابع f به صورت شکل زیر است و نمودار مشتق آن زیر شکل منحنی f رسم شده است.

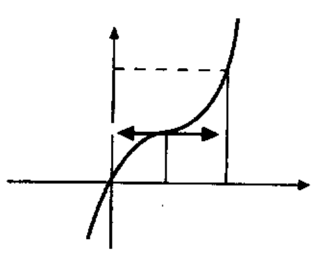


۷. حال تابع f به معادله‌ی $f(x) = (x-۱)^۳ + ۱$ را در نظر می‌گیریم. جدول تغییرات و نمودار تابع f را رسم می‌کنیم. ضمناً $D_f = R$ و تابع در R پیوسته است.

$f'(x) = ۳(x-۱)^۲ = ۰ \Rightarrow x = ۱$

طول نقطه‌ی عطف تابع f = ریشه‌ی مضاعف ؛ $x = ۱$

x	$-\infty$		۰		۱		۲		$+\infty$
$f'(x)$		+		+	۰	+		+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	۰	↗	۱	↗	۲	↗	$+\infty$

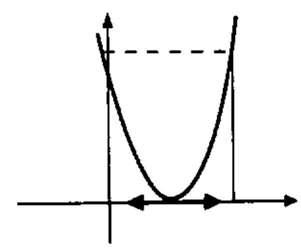


حال منحنی تابع f' به معادله‌ی $U(x) = 3(x-1)^2$ را در نظر می‌گیریم. این تابع هم در R پیوسته است.

طول نقطه‌ی عطف تابع f = طول اکسترمم تابع f'

$U'(x) = 6(x-1) = 0 \Rightarrow x = 1$

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
U'		−		−	0	+		+	
U	$+\infty$	↘	3	↘	0	↗		↗	$+\infty$

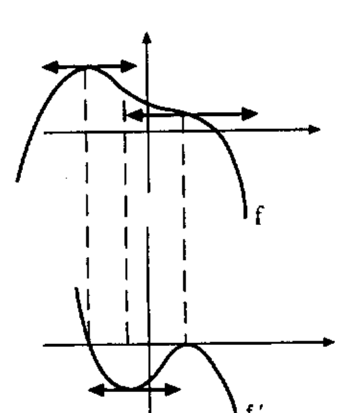


توجه: $x = 1$ طول نقطه‌ی عطف تابع f است. پس بنابر نتیجه‌ی ۲، $x = 1$ طول نقطه‌ی اکسترمم تابع f' است.

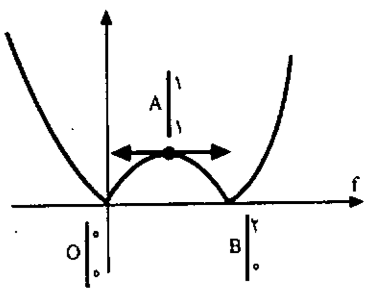
چون $x = 1$ ریشه‌ی مضاعف مشتق تابع f است، پس $x = 1$ طول نقطه‌ی عطفی از تابع f است که خط مماس بر منحنی در نقطه‌ی عطف موازی محور xهاست. بنابراین، ضریب زاویه‌ی خط مماس بر منحنی تابع f در این نقطه صفر است. از این‌جا نتیجه می‌گیریم که $x = 1$ طول نقطه‌ی اکسترمم تابع f' و عرض این اکسترمم صفر است.

> **نتیجه‌ی ۷.** اگر $x = a$ طول نقطه‌ی عطفی از تابع f باشد که خط مماس در این نقطه موازی محور xها باشد، آن‌گاه نقطه‌ی $M\left|\begin{matrix}a\\0\end{matrix}\right.$ نقطه‌ی اکسترمم منحنی تابع f' است.

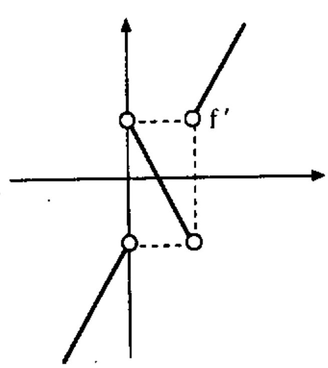
مثال ۷. اگر نمودار تابع f به صورت شکل زیر شد، آن‌گاه نمودار تابع مشتق، نموداری است که زیر منحنی تابع f رسم شده است.



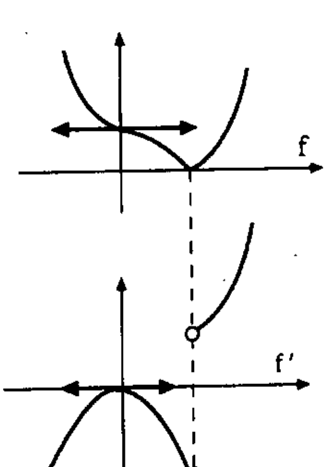
۸. تابع f به معادله‌ی $f(x) = |x^2 - 2x|$ را در نظر می‌گیریم. نمودار این تابع چنین است:



توجه: این تابع در نقطه‌ی A ماکزیمم نسبی است، لذا طول نقطه‌ی A برابر طول نقطه‌ی تقاطع منحنی f' با محور xهاست. این تابع در نقاط O و B مینیمم نسبی است، نظر به این‌که تابع f در نقاط O و B مشتق‌پذیر نیست، لذا تابع f' در نقاط به طول‌های (صفر و ۲) ناپیوسته است و درنتیجه نمودار تابع f' چنین است:



مثال ۸. اگر نمودار تابع f به صورت زیر باشد، آن‌گاه نمودار مشتق تابع f نموداری است که زیر آن آمده است:



۹. تابع کسری به معادله‌ی $n \in N$ ، $y = \dfrac{(ax+b)^n}{(a'x+b')^n}$ را در نظر می‌گیریم. این تابع کسری یک مجانب افقی به معادله‌ی $y = \dfrac{a}{a'}$ دارد. می‌خواهیم نشان دهیم، تابع y' یک مجانب افقی به معادله‌ی $y = 0$ دارد؛ زیرا:

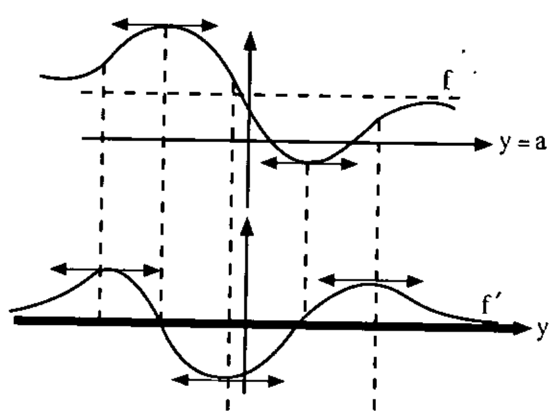
$$y' = \frac{an(ax+b)^{n-1}(a'x+b')^n - a'n(a'x+b')^{n-1}(ax+b)^n}{(a'x+b')^{2n}}$$

$$y' = \frac{an(ax+b)^{n-1}(a'x+b') - a'n(ax+b)^n}{(a'x+b')^{n+1}}$$

ملاحظه می‌کنیم که در تابع y' درجه‌ی مخرج بیشتر از درجه‌ی صورت است. بنابراین، اگر $x \to \infty$ ، آن‌گاه $y' \to 0$. پس خط $y = 0$ مجانب افقی منحنی تابع y' است.

نتیجه‌ی ۹. اگر تابع f دارای مجانب افقی باشد، آن‌گاه خط $y = 0$ مجانب افقی منحنی تابع f' خواهد بود.

مثال ۹. اگر نمودار تابع f به صورت شکل زیر باشد، آن‌گاه نمودار تابع f' نموداری خواهد بود که زیر آن آمده است.



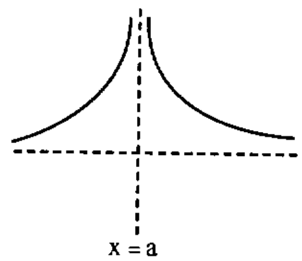
توجه: منحنی تابع f سه نقطه‌ی عطف دارد. پس منحنی تابع f' سه اکسترمم دارد.

تذکر: اگر معادله‌ی تابع f به صورت $f(x) = \dfrac{g(x)}{(x-a)^{2n-1}}$ ، $n \in N$ باشد و $g(a), g'(a) \neq 0$ آن‌گاه خط $x = a$ معادله‌ی مجانب قائم منحنی تابع f است. نوع انفصال ایجاد شده را «انفصال ساده» گوییم.

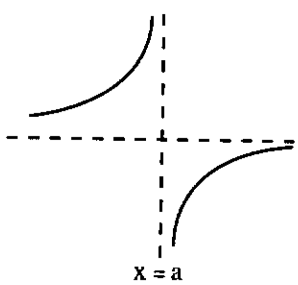
اگر $x \to a \Rightarrow f(x) \to \pm\infty$

اگر معادله‌ی تابع f به صورت $f(x) = \dfrac{g(x)}{(x-a)^{2n}}$ ، $n \in N$ باشد، و $g(a), g'(a) \neq 0$ آن‌گاه خط $x = a$ ، معادله‌ی مجانب قائم منحنی تابع f است. نوع انفصال ایجاد شده را «انفصال مضاعف» گوییم.

اگر $x \to a \Rightarrow f(x) \to +\infty$ یا $f(x) \to -\infty$



در نمودار بالا خط $x = a$ انفصال مضاعف نمودار است.



در نمودار بالا خط $x = a$ انفصال ساده‌ی نمودار است.

۱۰. اگر منحنی تابع f مجانب قائمی به معادله‌ی $x = a$ داشته باشد (انفصال ساده)، آن‌گاه منحنی تابع f' دارای مجانب قائمی به معادله‌ی $x = a$ خواهد شد که $x = a$ انفصال مضاعف تابع f' است.

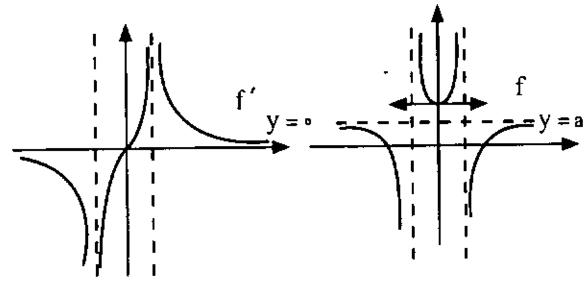
اثبات: فرض می‌کنیم معادله‌ی تابع f به صورت $f(x) = \dfrac{g(x)}{(x-a)^{2n-1}}$ ، $n \in N$ و $g(a), g'(a) \neq 0$ باشد.

می‌دانیم که خط $x = a$ انفصال ساده‌ی تابع f است. پس از مشتق‌گیری نسبت به x داریم:

$$f'(x) = \frac{(x-a)g'(x) + g(x)}{(x-a)^{2n}}$$

به طوری که دیده می‌شود، منحنی تابع f' دارای مجانب قائمی به معادله‌ی $x = a$ است. چون توان $(x-a)$ در مخرج زوج است، پس انفصال حاصل، انفصال مضاعف است.

مثال ۱۰. اگر منحنی تابع f به صورت ذیل باشد، آن‌گاه منحنی تابع f' با توجه به مطالب گفته شده، به صورت نموداری است که آن را مقابل نمودار f می‌بینید.



توضیح: مجانب‌های قائم به انفصال‌های مضاعف تبدیل شده‌اند. مجانب افقی تابع که به صورت $y = k > 0$ است، به $y = 0$ تبدیل شده است.

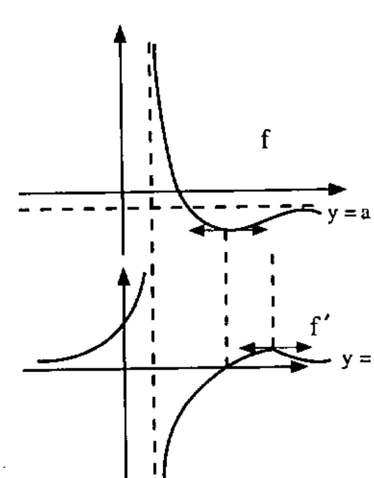
۱۱. اگر منحنی تابع f دارای مجانب قائمی به صورت $x = a$ و $x = a$ انفصال مضاعف تابع f باشد، آن‌گاه منحنی تابع f' دارای مجانب قائمی به معادله‌ی $x = a$ است، ولی انفصال حاصل در منحنی f'، انفصال ساده خواهد بود.

اثبات: فرض می‌کنیم معادله‌ی منحنی تابع f به‌صورت $f(x) = \frac{g(x)}{(x-a)^{2n}}$، $n \in N$ و $g(a), g'(a) \neq 0$ باشد. پس منحنی تابع f در $x = a$ انفصال مضاعف خواهد بود، اما پس از مشتق‌گیری نسبت به x خواهیم داشت:

$$f'(x) = \frac{(x-a)g'(x) - 2ng(x)}{(x-a)^{2n+1}}$$

ملاحظه می‌شود که عامل $(x-a)$ در تابع f' دارای توان فرد است. پس خط $x = a$ مجانب قائمی است که انفصال حاصل از آن، انفصال ساده خواهد بود.

مثال ۱۱. اگر منحنی تابع f به‌صورت زیر باشد، آن‌گاه منحنی تابع f' به‌صورت نموداری خواهد بود که زیر آن آمده است.



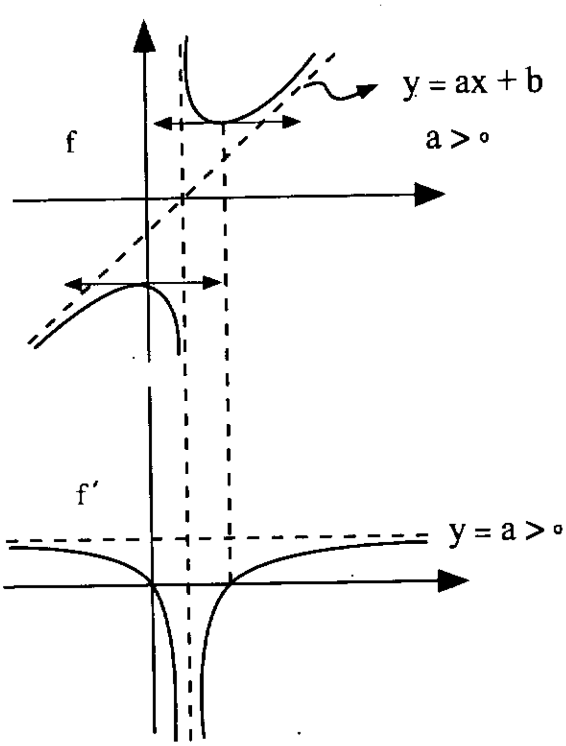
۱۲. اگر در توابع کسری، معادله‌ی مجانب مایل منحنی تابع به صورت $y = ax + b$ باشد، آن‌گاه منحنی تابع f' دارای مجانب افقی به معادله‌ی $y = a$ است.

اثبات: فرض می‌کنیم معادله‌ی تابع f به‌صورت $f(x) = ax + b + \frac{g(x)}{h(x)}$ و درجه‌ی h(x) حداقل یک واحد بیشتر از درجه‌ی g(x) باشد. اگر از معادله‌ی تابع f مشتق بگیریم خواهیم داشت:

$$f'(x) = a + \frac{g'(x).h(x) + h'(x).g(x)}{(h(x))^2}$$

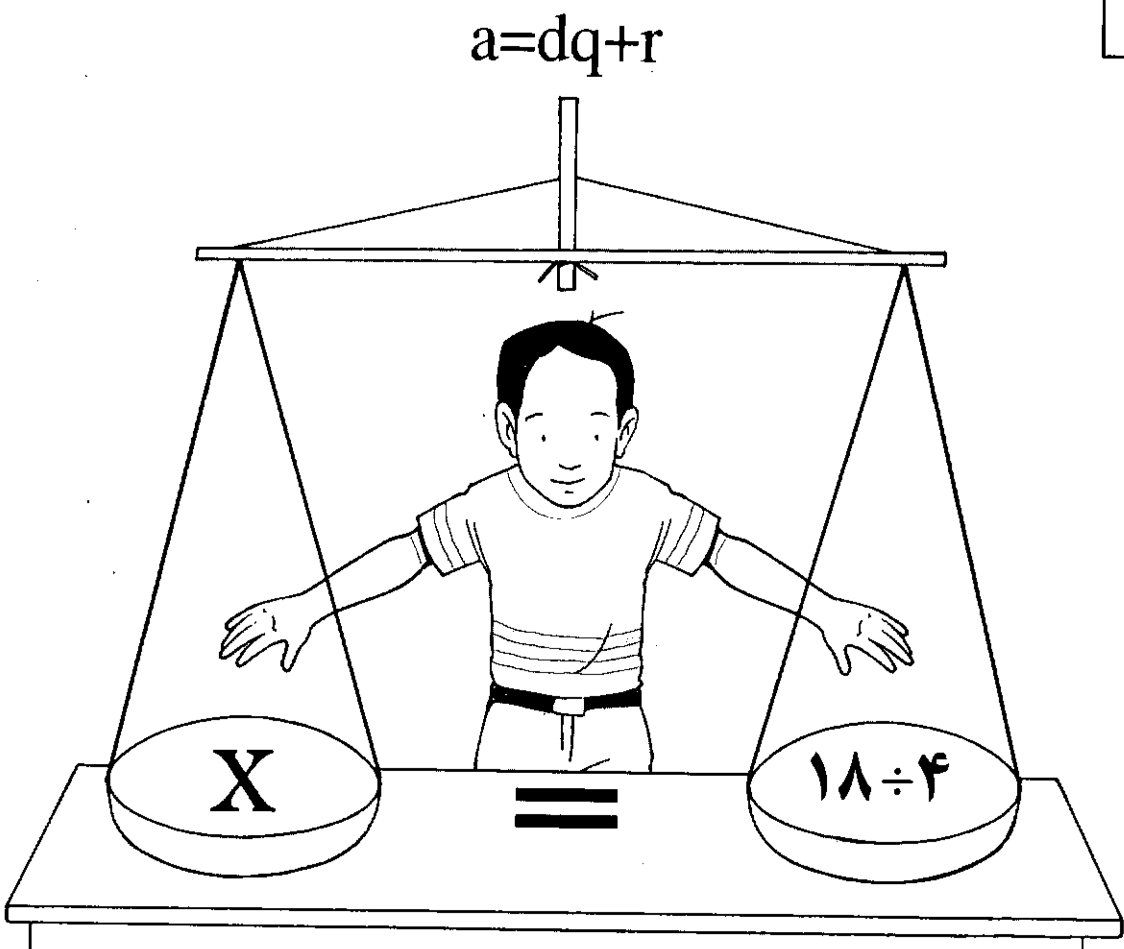
اگر درجه‌ی g(x)، n و درجه‌ی h(x)، $n+1$ و $n \in N$ باشد، آن‌گاه درجه‌ی صورت کسر $f'(x)$ مساوی $2n$ و درجه‌ی مخرج آن $(2n+2)$ است. پس اگر $x \to \infty$، آن‌گاه حد کسر صفر می‌شود و حد $f'(x)$ در این حالت برابر با a است که همان مجانب افقی منحنی تابع f' است.

مثال ۱۱. اگر منحنی تابع f به صورت زیر باشد، آن‌گاه منحنی تابع f' به صورت نموداری خواهد بود که زیر آن آمده است.



○ حمیدرضا امیری

۴



کاربردهای قضیه‌ی تقسیم

افراز Z توسط قضیه‌ی تقسیم

در قضیه‌ی تقسیم مشاهده شد که اگر a عددی صحیح و دل‌خواه باشد و $b \in \mathbb{N}$ ، با تقسیم a بر b رابطه‌ی $a=bq+r$ را برای $0 \leq r < b$ و در b حالت ممکن، یعنی حالتی که $r=0$ تا $r=b-1$ باشد، می‌توان نوشت. برای مثال اگر $b=4$ ، در این صورت باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد صحیح a بر ۴، طبق قضیه‌ی تقسیم عبارت است از $r=0$ یا $r=1$ یا $r=2$ یا $r=3$. به بیان دیگر، هر عدد صحیح مانند a را به یکی از چهار صورت زیر می‌توان نوشت:

$a=4q$ یا $a=4q+1$ یا $a=4q+2$ یا $a=4q+3$

در واقع می‌توان یک افراز ۴ عضوی برای Z و به صورت زیر تعریف کرد:

$$A_1=\{x \in Z | x=4k\}$$

$$A_2=\{x \in Z | x=4k+1\}$$

$$A_3=\{x \in Z | x=4k+2\}$$

$$A_4=\{x \in Z | x=4k+3\}$$

در حالت کلی می‌توان یک افراز k عضوی برای Z تعریف کرد؛ یعنی Z را به k زیر مجموعه، افراز یا تقسیم کنیم (منظور از افراز یک مجموعه به n زیر مجموعه‌ی خودش، تقسیم آن مجموعه به n زیر مجموعه است که اول، هیچ‌کدام از زیر مجموعه‌ها تهی نباشند. دوم، دو به دو اشتراکی نداشته باشند و سوم، اجتماع زیر مجموعه‌ها، مجموعه‌ی اصلی را تشکیل دهد):

$$Z=A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k$$

که $A_k=\{x \in Z;\ x=kq+(k-1)\}$

حال می‌خواهیم از این نوع افراز Z، که توسط قضیه‌ی تقسیم صورت گرفت و با استفاده از روشی در استدلال به نام «روش اشباع» چند مسئله در نظریه‌ی اعداد طرح و حل کنیم.

مسئله‌ی ۱: ثابت کنید حاصل‌ضرب هر دو عدد صحیح و متوالی، همواره بر ۲ بخش‌پذیر است.

حل: فرض کنیم $a = n(n-1)$. ثابت می‌کنیم $2|a$. برای این منظور، طبقه قضیه‌ی تقسیم، برای n دو حالت در نظر می‌گیریم. در هر دو حالت ثابت می‌کنیم a بر ۲ بخش‌پذیر است:

الف) $n = 2k \Rightarrow 2|n \Rightarrow 2|n(n-1) \Rightarrow 2|a$

ب) $n = 2k+1 \Rightarrow n-1 = 2k \Rightarrow 2|n-1 \Rightarrow 2|n(n-1) \Rightarrow 2|a$

مسئله‌ی ۲: ثابت کنید حاصل‌ضرب هر سه عدد صحیح و متوالی، همواره بر ۶ بخش‌پذیر است.

حل: فرض کنیم $a = (n-1)n(n+1)$. ثابت می‌کنیم $6|a$. کافی است ثابت شود $2|a$ و $3|a$. برای این منظور، برای n سه حالت در نظر می‌گیریم و از مسئله‌ی ۱ نیز استفاده می‌کنیم:

الف) $n = 3k \Rightarrow 3|n \Rightarrow 3|(n-1)n(n+1) \Rightarrow 3|a$

ب) $n = 3k+1 \Rightarrow n-1 = 3k \Rightarrow 3|n-1$
$\Rightarrow 3|(n-1)n(n+1) = a$

ج) $n = 3k+2 \Rightarrow n+1 = 3k+3 = 3k'$
$\Rightarrow 3|n+1 \Rightarrow 3|(n-1)n(n+1) = a$

ثابت شد که $3|a$. در مسئله‌ی ۱ نیز ثابت کردیم $2|n(n-1)$. بنابراین $2|n(n-1)(n+1) = a$ و در نتیجه $6|a$ (اگر عدد بر ۲ و ۳ بخش‌پذیر باشد، آن‌گاه بر ۶ هم بخش‌پذیر است).

مسئله‌ی ۳: ثابت کنید هر عدد صحیح و فرد را به یکی از دو صورت $(4k+1)$ یا $(4k+3)$ می‌توان نوشت. سپس نشان دهید مربع هر عدد صحیح فرد به‌صورت $(8t+1)$ است.

حل: فرض کنیم a عدد صحیح و دل‌خواه باشد. در این صورت طبق قضیه‌ی تقسیم، a را به یکی از چهار صورت $a = 4k$ یا $a = 4k+1$ یا $a = 4k+2$ یا $a = 4k+3$ می‌توان نوشت. حال اگر a فرد باشد، $a \neq 4k$ و $a \neq 4k+2$. بنابراین، فقط به یکی از دو صورت $a = 4k+1$ یا $a = 4k+3$ نوشته می‌شود:

الف) $a = 4k+1 \Rightarrow a^2 = 16k^2 + 8k + 1 = 8t_1 + 1$

ب) $a = 4k+3 \Rightarrow a^2 = 16k^2 + 24k + 9$
$\Rightarrow a^2 = 16k^2 + 24k + 8 + 1 = 8t_2 + 1$

مسئله‌ی ۴: ثابت کنید برای هر $n \in Z$ عدد $a = n^5 - n$ بر ۳۰ بخش‌پذیر است.

حل: چون $a = n(n-1)(n+1)(n^2+1)$ و قبلاً طبق مسئله‌ی ۲ ثابت کردیم $6|n(n-1)(n+1)$ ، پس $6|a$. کافی است ثابت کنیم $5|a$. برای این منظور، برای n، پنج حالت در نظر می‌گیریم:

الف) $n = 5k \Rightarrow 5|n \Rightarrow 5|n(n^4-1) \Rightarrow 5|a$

ب) $n = 5k+1 \Rightarrow n-1 = 5k \Rightarrow 5|n-1 \Rightarrow 5|a$

پ) $n = 5k+2 \Rightarrow n^2 = 25k^2 + 20k + 4$
$\Rightarrow n^2+1 = 25k^2 + 20k + 5 = 5t \Rightarrow 5|n^2+1$
$\Rightarrow 5|(n^2-1) \times n \times (n^2+1) = a$

ت) $n = 5k+3 \Rightarrow n^2 = 25k^2 + 30k + 9 \Rightarrow n^2+1$
$\Rightarrow n^2+1 = 25k^2 + 30k + 10 = 5t$
$\Rightarrow 5|n^2+1 \Rightarrow 5|a$

ث) $n = 5k+4 \Rightarrow n+1 = 5k+5 = 5t \Rightarrow 5|n+1 \Rightarrow 5|a$

مسئله‌ی ۵: اگر a عددی فرد و مضرب ۳ نباشد، ثابت کنید (a^2+23) بر ۲۴ بخش‌پذیر است.

حل: کافی است ثابت کنیم (a^2+23) بر ۸ و بر ۳ بخش‌پذیر است.

a فرد است $\Rightarrow a^2 = 8t+1$
$\Rightarrow a^2 + 23 = 8t + 1 + 23 = 8t + 24$
$\Rightarrow a^2 + 23 = 8(\underbrace{t+3}_{t_1}) \Rightarrow 8|a^2+23$

طبق فرض $a \neq 3k \Rightarrow \begin{cases} a = 3k+1 \\ a = 3k+2 \end{cases}$

اگر $a = 3k+1 \Rightarrow a^2 = 9k^2 + 6k + 1$
$\Rightarrow a^2 + 23 = 9k^2 + 6k + 24 = 3k'$

اگر $a = 3k+2 \Rightarrow a^2 = 9k^2 + 12k + 4$
$\Rightarrow a^2 + 23 = 9k^2 + 12k + 27 = 3k''$

مسئله‌ی ۶: ثابت کنید، اگر $p > 3$ عددی اول باشد، فقط به یکی از دو صورت $6k \pm 1$ نوشته می‌شود.

حل: می‌دانیم عدد $p \in N$ و $p \neq 1$ اول است، هرگاه هیچ شمارنده یا مقسوم‌علیه مثبتی به جز ۱ و خودش نداشته باشد و می‌دانیم عدد ۲ تنها عدد اول و زوج است. و نیز می‌دانیم هر عدد به صورت $6t + 5$ همان $6k - 1$ است، زیرا:

$$6t + 5 = 6t + 6 - 1 = 6(t+1) - 1 = 6k - 1$$

حال اگر p عددی اول باشد، لذا عددی صحیح است و هر عدد صحیح به یکی از ۶ صورت $6k$ یا $6k+1$ یا $6k+2$ یا $6k+3$ یا $6k+4$ یا $6k+5$ نوشته می‌شود که چون p اول و بزرگ‌تر از ۳ است، پس p زوج نیست و $p \neq 6k$، $p \neq 6k+2$ و $p \neq 6k+4$ و نیز p، مضرب ۳ نیستند. پس $p \neq 6k+3$. بنابراین فقط می‌تواند به یکی از دو صورت $p = 6k+1$ یا $p = 6k+5$ باشد که همان $6t - 1$ است.

نتیجه‌ی متمم از مسئله‌ی ۶: اگر عددی طبیعی و بزرگ‌تر از ۳ را بر ۶ تقسیم کنیم و باقی‌مانده‌ی تقسیم آن عدد با ۱ یا ۵ برابر نباشد، قطعاً آن عدد اول نیست و اگر باقی‌مانده ۱ یا ۵ باشد، دلیل بر اول بودن آن عدد نیست. فقط می‌توان گفت آن عدد می‌تواند اول باشد. مانند عدد ۲۵ که به صورت $6 \times 4 + 1$ است، ولی اول نیست.

مسئله‌ی ۷: اگر a عددی فرد و اول باشد، ثابت کنید a را فقط به یک صورت منحصربه‌فرد به شکل تفاضل مربعین دو عدد طبیعی می‌توان نوشت.

حل: می‌دانیم اگر a فرد باشد، اعداد $(\frac{a+1}{2})$ و $(\frac{a-1}{2})$ اعدادی طبیعی و $a = (\frac{a+1}{2})^2 - (\frac{a-1}{2})^2$.

حال برای اثبات منحصر به فردی فرض کنیم x و y دو عدد طبیعی هستند و $a = x^2 - y^2$. در این صورت داریم: $a = (x-y)(x+y)$ که $0 < x-y < x+y$ و چون a اول است $a = 1 \times a$، پس $x - y = 1$ و $x + y = a$ که با حل دستگاه $\begin{cases} x+y=a \\ x-y=1 \end{cases}$ داریم:

$x = \frac{a+1}{2}$ و $y = \frac{a-1}{2}$.

یعنی: $a = x^2 - y^2 = (\frac{a+1}{2})^2 - (\frac{a-1}{2})^2$

تمرین: عکس مسئله‌ی ۷ را ثابت کنید. یعنی ثابت کنید: اگر یک عدد طبیعی و فرد که مخالف یک است، فقط یک نمایش به‌صورت تفاضل مربعین دو عدد صحیح و نامنفی داشته باشد، آن‌گاه آن عدد اول است (روش اثبات خود را برای ما بفرستید).

مسئله‌ی ۸: اگر p عددی اول و بزرگ‌تر از ۳ باشد، ثابت کنید $p^2 - 1$ بر ۲۴ بخش‌پذیر است.

حل: فرض کنیم: $a = p^2 - 1$. ثابت می‌کنیم: $24|a$. برای این منظور کافی است ثابت کنیم: $8|a$ و $3|a$.

$p > 3$ اول است $\Rightarrow$ فرد است $p \Rightarrow p^2 = 8k + 1 \Rightarrow p^2 - 1 = 8k$

$$\Rightarrow 8|p^2 - 1 \Rightarrow 8|a$$

بخش‌پذیری ۳: $p > 3$ اول است $\Rightarrow p \neq 3k \begin{cases} p = 3k+1 \Rightarrow p-1 = 3k \\ p = 3k+2 \Rightarrow p+1 = 3k' \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3|p-1 \Rightarrow 3|(p-1)(p+1) = p^2 - 1 = a \\ 3|p+1 \Rightarrow 3|(p+1)(p-1) = p^2 - 1 = a \end{cases}$$

مسئله‌ی ۹: اگر p عددی اول و بزرگ‌تر از ۵ باشد، ثابت کنید $(p^4 - 1)$ بر ۱۲۰ بخش‌پذیر است.

حل: اگر فرض کنیم $a = p^4 - 1$، ثابت می‌کنیم $120|p^4 - 1$. کافی است ثابت کنیم $(p^4 - 1)$ بر ۵ و ۲۴ بخش‌پذیر است.

بخش‌پذیری بر ۲۴: $24|p^2 - 1$ ثابت شد $\Rightarrow 24|(p^2-1)(p^2+1) \Rightarrow 24|a$

بخش‌پذیری بر ۵: $p > 5$ اول است

$$\Rightarrow p \neq 5k \begin{cases} p = 5k+1 \Rightarrow p-1 = 5k \Rightarrow 5|p-1 \Rightarrow 5|a \\ p = 5k+2 \\ p = 5k+3 \\ p = 5k+4 \end{cases}$$

اگر $p = 5k+2 \Rightarrow p^2 = 25k^2 + 20k + 4$

$$\Rightarrow p^2 + 1 = 5k' \Rightarrow 5|p^2 + 1 \Rightarrow 5|a$$

اگر $p = 5k+3 \Rightarrow p^2 = 25k^2 + 30k + 9$

$$\Rightarrow p^2 + 1 = 5k'' \Rightarrow 5|p^2 + 1 \Rightarrow 5|a$$

اگر $p = 5k+4 \Rightarrow p+1 = 5t \Rightarrow 5|p+1 \Rightarrow 5|a$

● تونی کریلی

ترجمه: غلامرضا یاسی‌پور



عدد پی (π)

π یا پی، طول دور دایره (پیرامون یا محیط آن) تقسیم بر طولِ در امتداد مرکز آن (قطر آن) است. مقدار این تقسیم، یعنی نسبت این دو طول، به اندازه‌ی دایره بستگی ندارد. درواقع، دایره هرچه بزرگ یا کوچک باشد، π ثابتی ریاضی است.

π معروف‌ترین عدد در ریاضیات است. جمیع ثابت‌های دیگر طبیعت را فراموش کنید، چه π همواره در رأس فهرستمان قرار می‌گیرد. اگر برای اعداد نیز جایزه‌ی اُسکار وجود داشت، π هر ساله جایزه را می‌برد.

π یا پی، طول دور دایره (پیرامون یا محیط آن) تقسیم بر طولِ در امتداد مرکز آن (قطر آن) است. مقدار این تقسیم، یعنی نسبتِ این دو طول، به اندازه‌ی دایره بستگی ندارد. درواقع، دایره هرچه بزرگ یا کوچک باشد، π ثابتی ریاضی است.

زیستگاه طبیعی π دایره است، اما این عدد در هر گوشه‌ی ریاضیات و در مکان‌هایی که به‌هیچ‌وجه با دایره مرتبط نیستند نیز خود را نشان می‌دهد.

> **به‌ازای دایره‌ای به قطر d و شعاع r:**
>
> پیرامون $= \pi d = 2\pi r$
>
> سطح $= \pi r^2$
>
> **به‌ازای کره‌ای به قطر d و شعاع r:**
>
> سطح رویه $= \pi d^2 = 4\pi r^2$
>
> حجم $= 4/3\pi r^3$

ارشمیدس سیراکیوزی[1]

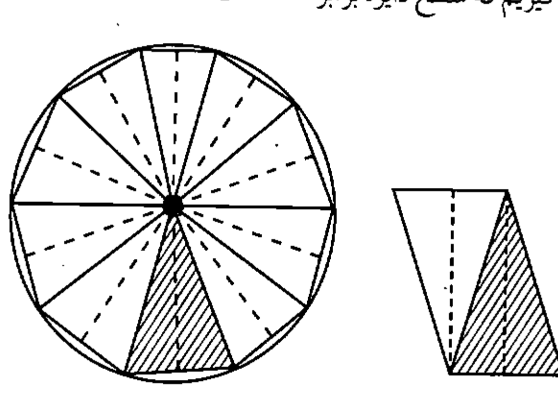
نسبت پیرامون دایره به قطر آن، موضوعی مورد توجه فرهنگ باستان بود. در حدود سال ۲۰۰۰ قبل از میلاد، بابلی‌ها متوجه شدند که پیرامون دایره، به تقریب، سه برابر طول قطر آن است. سپس در سال ۲۲۵ قبل از میلاد، این ارشمیدس سیراکیوزی بود که به‌طور جدی بررسی نظریه‌ی ریاضی π را آغاز کرد و از این‌رو در عداد بزرگان قرار گرفت. ریاضی‌دانان دوست دارند به این همکار خود درجه بدهند و او را هم‌سطح، و البته پیش‌گام کارل فردریش گاوس[2] (شاهزاده‌ی ریاضی‌دانان) و سر اسحق نیوتن[3] قرار دهند. درستی این قضاوت هرچه باشد، واضح است که ارشمیدس از شهرت و اعتبار بالایی برخوردار است. او غیر از سهمش در نجوم، ریاضی و فیزیک، سلاح‌های جنگی از قبیل منجنیق، اهرم و «آینه‌های سوزان»ی طراحی کرد که تمام آن‌ها برای دور نگه‌داشتن رومیان و متوقف کردن آنان به کار می‌رفت. اما با تمام این احوال، وی چون پروفسورهای پریشان‌حواس عمل می‌کرد، وگرنه چرا هنگام کشف قانون تقلیل وزن اجسام در مایعات، برهنه از حمام بیرون جست و فریاد «یافتم، یافتم»[4] سر داد؟!

افتخار تخصیص نماد فعلی π به ریاضی‌دان ولزی[6] کمتر معروف، یعنی ویلیام جونز[7] برمی‌گردد که در قرن هجدهم، معاون انجمن سلطنتی لندن[8] بود

این که چگونه کار خود را در مورد π جشن گرفت، هنوز مشخص نشده است!

باری، با در دست داشتن این تعریف که π نسبت پیرامون دایره به قطرش است، رابطه‌ی آن با سطح[5] دایره چه می‌شود؟ چنین استنتاج کرده‌اند که سطح دایره‌ای، به شعاع r، برابر πr^2 است؛ گرچه احتمالاً این رابطه معروف‌تر از تعریف نسبت پیرامون به قطر (π) است. این واقعیت که π وظایفی دوگانه در مورد سطح و پیرامون دایره دارد، قابل توجه است.

اما این مطلب را چگونه می‌توان نشان داد؟ دایره را می‌توان به تعدادی مثلث برابر و باریک تجزیه کرد که طول قاعده‌شان b و طول ارتفاعشان نزدیک به r باشد. این مثلث‌ها در داخل دایره، یک چندضلعی تشکیل می‌دهند که به سطح دایره نزدیک می‌شود. برای آغاز کار، ۱۰۰۰ مثلث را در نظر می‌گیریم. کل جریان، تمرین در تقریب‌ها است. در این صورت می‌توانیم، هر زوج مجاور از این مثلث‌ها را به هم وصل کنیم و مستطیلی بسازیم (تقریباً) با مساحت $b \times r$. بنابراین سطح یا مساحت کل چندضلعی، برابر $500 \times b \times r$ خواهد شد. مقدار $500 \times b$، از آن‌جا که در حدود نصف پیرامون دایره است، دارای طول πr می‌شود و سطح چندضلعی مورد بحث $\pi r \times r = \pi r^2$ خواهد شد. هرچه تعداد مثلث‌هایمان بیشتر باشد، شکل تقریبی‌مان به دایره نزدیک‌تر می‌شود و در حد نتیجه می‌گیریم که سطح دایره برابر πr^2 است.



ارشمیدس مقدار π را بین دو کسر ۲۲۳/۷۱ و ۲۲۰/۷۰ برآورد کرد. بنابراین تقریب آشنای ۲۲/۷ برای π را به ارشمیدس مدیونیم. افتخار تخصیص نماد فعلی π به ریاضی‌دان ولزی[6] کمتر معروف، یعنی ویلیام جونز[7] برمی‌گردد که در قرن هجدهم، معاون انجمن سلطنتی لندن[8] بود. اما این لئونارد اویلر[9] ریاضی‌دان و فیزیک‌دان بود که π را در زمینه‌ی نسبت دایره‌ای متداول ساخت.

مقدار دقیق π

هرگز نمی‌توانیم مقدار دقیق π را بدانیم، چرا که این عدد، عددی گنگ است؛ موضوعی که در سال ۱۷۶۸ یوهان **لامبرت**[10] اثبات کرد، این بود که: بسط دهدهی عدد π، بدون نمونه‌ای قابل پیش‌بینی، نامتناهی است. ۲۰ رقم ده‌دهی اولیه عبارت‌اند از:

۳.۱۴۱۵۹۲۶۵۳۵۸۹۷۹۳۲۳۸۴۶...

مقدار $\sqrt{10}$ که ریاضی‌دانان چینی در نظر می‌گرفتند، برابر است با:

۳.۱۶۲۲۷۷۶۶۰۱۶۸۳۷۹۳۳۱۹۹

این مقدار که در حدود سال ۵۰۰ میلادی، توسط **براهما گوپتا**[11] پذیرفته شد، درواقع اندکی بهتر از مقدار تقریبی‌تر ۳ است؛ گرچه در رقم دوم ده‌دهی، با π اختلاف دارد.

π را می‌توان با استفاده از یک سری[12] از اعداد محاسبه کرد. یکی از معروف‌ترین این سری‌ها عبارت است از:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \dots$$

گرچه این سری در هم‌گرایی به π، به گونه‌ای پردردسر آهسته، و برای محاسبه نومیدکننده است. در این مورد، اویلر سری جالب توجه زیر را به‌دست آورد:

$$\frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \dots$$

رامانوجان[13]، نابغه‌ی خودآموخته‌ی هندی، چندین فرمول تقریبی جالب برای π به‌دست داد که یکی از آن‌ها شامل تنها جذر ۲، عبارت است از:

$$\frac{9801}{4412}\sqrt{2} = 3.14159273001330560313996189\dots$$

ریاضی‌دانان شیفته و مجذوب π هستند. در ایامی که لامبرت ثابت کرده بود این عدد نمی‌تواند کسری باشد، به سال ۱۸۸۲، **لیندمان**[14]، ریاضی‌دان آلمانی، برجسته‌ترین مسئله‌ی مرتبط با π را حل کرد. یعنی نشان داد که π «متعالی»[15] است به این معنی که نمی‌تواند جواب یک معادله‌ی جبری باشد (یعنی معادله‌ای که تنها شامل توان‌های x است). لیندمان، با حل این معمای روزگاران، به مسئله‌ی «تربیع دایره»[16] نیز خاتمه داد. مسئله به این ترتیب بود که با مفروض بودن یک دایره و تنها با به کار بردن پرگار و خط‌کش نامدرج، مربعی رسم کنیم که مساحتش برابر مساحت آن دایره باشد. لیندمان به طور قطعی اثبات کرد که این کار غیرممکن است. امروزه عبارت تربیع دایره، هم ارز غیرممکن به کار می‌رود.

محاسبه‌ی دقیق‌تر مقدار π به سرعت ادامه یافت. در سال

۱۸۵۳ م، ویلیام شنکس[17] مدعی محاسبه‌ی مقدار صحیح آن تا ۶۰۷ رقم ده‌دهی شد (عملاً تنها تا ۵۲۷ رقم ده‌دهی). در دوران جدید، تحقیق در محاسبه‌ی مقدار π با رقم‌های بیشتر بعد از ممیز، به کمک رایانه، شدت و حدت بیشتری یافته است. در سال ۱۹۴۹، π تا ۲۰۳۷ رقم ده‌دهی محاسبه شد و این کار با رایانه‌ی انیاک[18] ۷۰ ساعت طول کشید. تا سال ۲۰۰۲، محاسبه‌ی π تا مقدار گیج‌کننده‌ی ۱/۲۴۱/۱۰۰/۰۰۰/۰۰۰ رقم ده‌دهی رسید، اما این رشته هم‌چنان سر دراز دارد. در این مورد، اگر در خط استوا بایستیم و شروع به نوشتن بسط π کنیم، طول محاسبه‌ی شنکس به ۱۴ متر می‌رسد، در حالی که بسط سال ۲۰۰۲ به حدود ۶۲ بار گردش دور زمین می‌انجامد.

در مورد π پرسش‌های گوناگونی مطرح و به آن‌ها پاسخ داده شده است. آیا رقم‌های π تصادفی[19] هستند؟ آیا یافتن دنباله‌ای قابل پیش‌بینی در بسط آن ممکن است؟ برای نمونه، آیا می‌توان دنباله‌ی ۰۱۲۳۴۵۶۷۸۹ را در این بسط یافت؟ در دهه‌ی ۱۹۵۰ پاسخ این پرسش نادانستنی به نظر می‌رسید. هیچ‌کس چنین دنباله‌ای در ۲۰۰۰ رقم دانسته‌ی π نیافته بود. براوور[20]، ریاضی‌دان پیشرو هلندی می‌گفت، این پرسش فاقد معنی است. زیرا بر این اعتقاد بود که تجربه‌پذیر نیست. درواقع، این ارقام در سال ۱۹۹۷ در آغاز مکان ۱۷۳۸۷۵۹۴۸۸۰، یا با به‌کار بردن استعاره‌ی خط استوا، در حدود ۳۰۰۰ مایل پیش از آن‌که دور اول کامل شود، به‌دست آمدند. در بسط π، پیش از آن‌که ۶۰۰ مایل کامل شود، ده شش می‌یابیم، اما برای یافتن ده هفت در یک ردیف، باید تا تکمیل یک دور و طی ۳۶۰۰ مایل دیگر صبر کنیم.

π در اشعار

در صورتی که بخواهیم مقادیر اولیه‌ی بسط π را به‌خاطر بسپریم، شاید چند بیتی شعر کارساز باشد. در این جا یکی از این ابیات را می‌آوریم:

گر ز قدر عدد پی بکنند از تو سؤال
پاسخی ده که خردمند تو را آموزد
خرد و دانش و آگاهی دانشمندان
ره بسر منزل توفیق به‌ما آموزد

تعداد حروف هر یک از کلمات بیت دوم، یکی از ارقام اولیه را مشخص می‌کند.

(از: سرگرمی‌های هندسه، پرویز شهریاری)

اهمیت π

فایده‌ی دانستن مقدار π با این همه رقم ده‌دهی چیست در حالی که اغلب محاسبات، تنها به چند رقم ده‌دهی نیاز دارند.

موضوعی که در سال ۱۷۶۸ یوهان لامبرت[10] اثبات کرد، این بود که: بسط بخش دهدهی عدد π، بدون نمونه‌ای قابل پیش‌بینی، نامتناهی است

زیرا احتمالاً در مورد هر کاربرد عملی، به بیش از ده رقم ده‌دهی نیاز نیست و تقریب ارشمیدس، یعنی ۲۲/۷ برای اغلبشان کفایت می‌کند. باید توجه داشته باشیم محاسبات مفصل مزبور تنها برای تفریح نیست. این محاسبات علاوه بر به‌کار گرفتن شیفتگی گروهی از ریاضی‌دانان که خود را «دوست‌داران پی» می‌خوانند، برای امتحان حد و مرز توانایی رایانه‌ها نیز به‌کار می‌روند.

شاید عجیب‌ترین قسمت داستان π تلاشی باشد که در مجلس مقننه‌ی ایالت ایندیانای آمریکا برای گذراندن لایحه‌ای برای تثبیت مقدار آن به‌وقوع پیوست. این عمل در پایان قرن نوزدهم، زمانی به‌وقوع پیوست که دکتر گودوین[21] طبیب، لایحه‌ای تقدیم مجلس کرد که π را «قابل هضم» کند. اما نتیجه‌ی عملی حاصل در این مرحله از قانون‌گذاری، عجز طراح آن برای تثبیت کردن مقداری بود که می‌خواست. خوش‌بختانه از لحاظ ایندیانا، پیش از آن‌که لایحه‌ی مورد بحث به تمامی تصویب شود، حماقت قانونی کردن π آشکار شد. و از آن زمان به بعد، سیاست‌مداران π را راحت گذاشتند.

چند تاریخچه

۲۰۰۰ قبل از میلاد: بابلی‌ها دریافتند که π به‌طور تقریب برابر ۳ است.

۲۵۰ قبل از میلاد: ارشمیدس تقریب نزدیک‌تر به π ی ۲۲/۷ را به دست داد.

۱۷۰۶ میلادی: ویلیام جونز نماد π را معرفی کرد.

۱۷۶۱ میلادی: لامبرت اثبات کرد که π عددی گنگ است.

۱۸۸۲ میلادی: لیندمان ثابت کرد که π متعالی است.

پی‌نوشت

1. Archimedes of Syracuse
2. Carl Friedrich Gauss
3. Sir Isaac Newton
4. Eureka
5. area
6. Welsh
7. William Jones
8. Royal Society of London
9. Leonhard Euler
10. Johann Lambert
11. Brahmagupta
12. series
13. Srinivasa Ramanujan
14. Ferdinand von Lindemann
15. transcendental
16. squaring the circle
17. William Shanks
18. Eniac
19. random
20. L. E. J. Brouwer



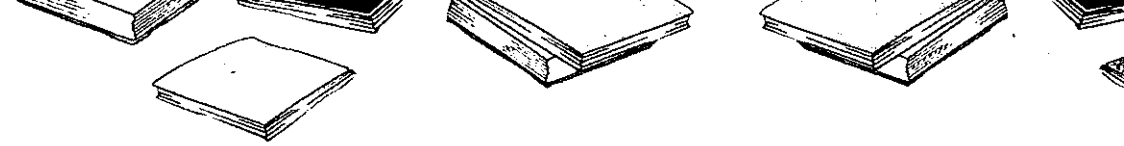
● هوشنگ شرقی

مسائل مسابقات ریاضی در کشورهای مختلف جهان

المپیاد ریاضی در یوگسلاوی سابق

کشور یوگسلاوی هم‌چون بیشتر کشورهای شرق قاره‌ی اروپا، همواره از پیشگامان المپیادهای ریاضی بوده است. از سال ۱۹۵۰، المپیادهای ریاضی منطقه‌ای در این کشور سامان داده شد و از سال ۱۹۶۰ نیز مسابقه‌ی سراسری ریاضی در چهار مرحله (مدرسه، منطقه، جمهوری‌ها و سراسر کشور) در آن برگزار می‌شود. از سال ۱۹۶۳ این کشور به المپیاد بین‌المللی ریاضی پیوست و برای تعیین تیم نهایی شرکت کننده در المپیاد بین‌المللی، مرحله‌ای دیگر نیز به مراحل فوق افزوده شد. با این مقدمات، واضح است که سطح آزمون‌های المپیادهای داخلی این کشور، باید قابل قبول باشد و سؤالات آن‌ها مسائل خوبی باشند و همین طور هم هست. با نگاهی به آرشیو مسائل ریاضی، المپیادها و مسابقات ریاضی و نیز نشریات ریاضی که در این کشور منتشر می‌شوند، به درستی این موضوع پی می‌بریم. با توجه به این موضوع بر آن شدیم، نمونه‌هایی از مسائل مرحله‌ی نهایی المپیاد ریاضی این کشور در سال ۱۹۸۶ را در این شماره، همراه با راه‌حل آن‌ها، بیاوریم.

لازم به یادآوری است، کشور یوگسلاوی در سال‌های ۱۹۷۷ و ۱۹۶۷ دو بار میزبان المپیاد ریاضی بوده و در سال‌های ۱۹۵۹ تا ۱۹۹۹ (قبل از فروپاشی و تجزیه) مقام‌های خوبی در این رقابت‌ها به دست آورده است. پس از تجزیه نیز کشورهای جدا شده از آن یعنی صربستان، کروواسی، اسلوونی، مقدونیه بوسنی-هرزگوین، در المپیادهای ریاضی فعالانه شرکت داشته و کشور اسلوونی در سال ۲۰۰۶ میزبانی این رقابت‌ها را برعهده داشته است. در صورتی که به مسائل المپیادهای ریاضی این کشورها نیز دست‌رسی پیدا کنیم، در شماره‌های آینده از آن‌ها نیز استفاده خواهیم کرد.



مسائل

۱. ثابت کنید می‌توان بی‌نهایت مقدار برای $n \in \mathbb{N}$ پیدا کرد که به ازای هر کدام از آن‌ها، هر یک از عددهای n، $n+1$ و $n+2$ به صورت مجموع مجذورهای دو عدد درست باشند.

۲. ثابت کنید اگر برای چهارضلعی محدب $ABCD$ داشته باشیم: $AB + BD \le AC + CD$ آن وقت $AB \le AC$

۳. ثابت کنید اگر برای عددهای طبیعی m و n داشته باشیم: $2m^2 + m = 3n^2 + n$ آن‌وقت عددهای $m-n$، $2m+2n+1$ و $3m+3n+1$ مجذورهای عددهای درستی هستند.

۴. ثابت کنید برای عددهای حقیقی و مثبت a، b و c همیشه داریم:

$$\frac{a^3}{a^2+ab+b^2}+\frac{b^3}{b^2+bc+c^2}+\frac{c^3}{c^2+ca+a^2} \ge \frac{1}{3}(a+b+c)$$

۵. روی محیط دایره‌ای به قطر AD، نقطه‌ی B و روی قطر AD نقطه‌ی C را طوری انتخاب کرده‌ایم که داشته باشیم: $AB=CD$

ثابت کنید در مثلث ABC، نیم‌ساز رأس A، میانه‌ی رأس B و ارتفاع رأس C از یک نقطه می‌گذرند.

۶. همه‌ی تابع‌های صعودی $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ را طوری بیابید که در اتحاد زیر صدق کنند: $f(x+f(y)) = f(x+y)+1 \quad (x,y \in \mathbb{R})$

حل مسائل



۱. ابتدا نشان می‌دهیم بی‌شمار عدد طبیعی مربع کامل به فرم $2k^2+1$ (مانند ۱، ۹، ۲۸۹ و...) وجود دارد. سپس درباره‌ی ارتباط این مسئله با مسئله‌ی اصلی می‌گوییم، برای این موضوع در واقع باید ثابت کنیم که معادله‌ی سیاله‌ی $x^2 = 2y^2 + 1$ بی‌شمار جواب در $\mathbb{N}$ دارد. به سادگی می‌توان نشان داد، اگر (x_0, y_0) یک جواب این معادله باشد (یعنی: $x_0^2 - 2y_0^2 = 1$) آن‌گاه $(3x_0 + 4y_0$ و $2x_0 + 3y_0)$ نیز یک جواب این معادله است، زیرا:

$$(3x_0+4y_0)^2 - 2(2x_0+3y_0)^2 = 9x_0^2+16y_0^2+24x_0y_0$$
$$-2(4x_0^2+9y_0^2+12x_0y_0) = x_0^2 - 2y_0^2 = 1$$

برای مثال می‌دانیم، $x=3$ و $y=2$ یک جواب معادله است. پس $x = 3\times3+4\times2 = 17$ و $y = 2\times3+3\times2 = 12$ نیز یک جواب معادله است و در نتیجه $289 = 17^2 = 2(12)^2+1$. لذا می‌توان از هر جواب این معادله جوابی دیگر نیز به دست آورد. در نتیجه، بی‌شمار عدد مربع کامل به صورت $2k^2+1$ تولید کرد.

اکنون با توجه به این نتیجه، می‌توان پاسخ مسئله را به سادگی داد.

عدد طبیعی $n+1 = x^2 = 2y^2 + 1$ را در نظر می‌گیریم. مطابق نتیجه‌ی فوق بی‌شمار x و y و در نتیجه بی‌شمار $n+1$ به صورت $2y^2+1$ داریم. حال عددهای قبل و بعد از این عدد را ببینیم:

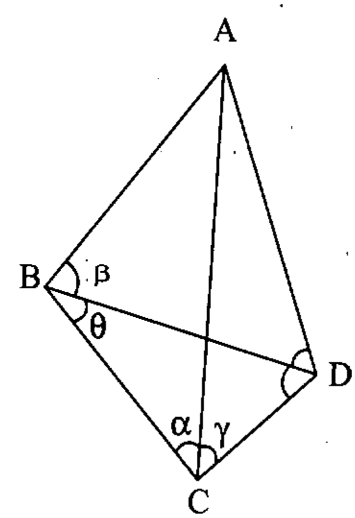
$$n = 2y^2 = y^2 + y^2$$
$$n+1 = 2y^2 + 1 = x^2 = x^2 + (0)^2$$
$$n+2 = x^2 + 1 = x^2 + (1)^2$$

چنان‌که می‌بینیم، هر سه‌ی این عددها به صورت مجموع مجذورهای دو عدد درست نوشته شده‌اند.

در حالت کلی، معادله‌ی سیاله‌ی $x^2 - dy^2 = 1$ را

معادله‌ی پل[1] می‌نامند. به نظر می‌رسد که نخستین بار **ارشمیدس** از این معادله نام برده است. البته **لرد برانکو** (ریاضی‌دان انگلیسی قرن هفدهم)، یک روش برای حل آن ارائه داده است. **فرما**، **والیس** و **لاگرانژ** نیز در سال‌های بعد کارهایی روی این معادله انجام دادند. در نظریه‌ی اعداد ثابت شده است، این معادله به ازای هر مقدار d که مجذور کامل نباشد، بی‌شمار جواب دارد.

۲. اثبات با برهان خلف انجام می‌شود. یعنی فرض می‌کنیم $AB > AC$. در آن صورت مطابق شکل در مثلث ABC داریم: $(I)\ \ \alpha > \beta + \theta$



و از ترکیب این نابرابری با فرض مسئله نتیجه می‌شود:

$$\begin{cases} AC + CD \geq AB + BD \\ AB > AC \end{cases}$$
$$\overline{\qquad CD \geq BD \qquad}$$

در نتیجه، در مثلث CBD داریم: $\theta \geq \alpha + \gamma$ (II). از مقایسه‌ی این نابرابری با نابرابری (I) نتیجه می‌شود:

$$\alpha > \beta + \alpha + \gamma \Rightarrow \beta + \gamma < 0$$

از نادرستی این نتیجه‌ی آخر، درستی حکم ثابت می‌شود.

۳. فرض مسئله را به صورت زیر تغییر می‌دهیم:

$$2m^2 + m - 2n^2 - n = n^2 \Rightarrow 2(m^2 - n^2) + (m - n) = n^2$$
$$\Rightarrow (m-n)(2m+2n+1) = n^2$$

حال اگر فرض کنیم که $((m-n),(2m+2n+1)) = d$ خواهیم داشت:

$$m - n = kd,\ \ 2m + 2n + 1 = k'd \Rightarrow$$
$$kk'd^2 = n^2 \Rightarrow d^2 | n^2 \Rightarrow d | n$$

هم‌چنین واضح است، $d | m - n$ و در نتیجه: $d | m$

بنابراین:

$$d|m,\ \ d|n \Rightarrow d | 2m + 2n$$

با توجه به این‌که $d = ((m-n),(2m+2n+1))$، $d | 2m+2n+1$ و از مقایسه با $d | 2m+2n$ نتیجه می‌شود $d | 1$

در نتیجه: $d = 1$ بنابراین: $(m-n)$ و $(2m+2n+1)$ نسبت به هم اول‌اند و حاصل‌ضرب آن‌ها مساوی n^2. یعنی مجذور کامل است. پس هر دوی آن‌ها باید مجذور کامل باشند.

برای اثبات قسمت بعد، کافی است برابری فرض را چنین تغییر دهیم:

$$2m^2 + m = 3n^2 + n \Rightarrow$$
$$3m^2 - 3n^2 + m - n = m^2 \Rightarrow 3(m^2 - n^2) + (m - n) = m^2$$
$$\Rightarrow (m-n)(3m+3n+1) = m^2$$

و چون $m - n$ و m^2 هر دو مربع کامل هستند، پس $3m + 3n + 1$ نیز مربع کامل است.

۴. با استدلال بازگشتی و به صورت زیر، درستی این نابرابری اثبات می‌شود:

$$\frac{a^3}{a^2+ab+b^2} + \frac{b^3}{b^2+bc+c^2} + \frac{c^3}{c^2+ca+a^2} =$$

$$\frac{a(a^2+ab+b^2) - ab(a+b)}{a^2+ab+b^2} + \frac{b(b^2+bc+c^2) - bc(b+c)}{b^2+bc+c^2}$$

$$+ \frac{c(c^2+ca+a^2) - ca(c+a)}{c^2+ca+a^2}$$

$$= a - \frac{ab(a+b)}{a^2+ab+b^2} + b - \frac{bc(b+c)}{b^2+bc+c^2} +$$

$$c - \frac{ca(c+a)}{c^2+ca+a^2} \geq \frac{1}{3}(a+b+c)$$

$$\Rightarrow \frac{ab(a+b)}{a^2+ab+b^2} + \frac{bc(b+c)}{b^2+bc+c^2} + \frac{ca(a+c)}{c^2+ca+a^2}$$
$$\leq \frac{2(a+b+c)}{3}$$

اکنون این نابرابری را به سه نابرابری متقارن زیر تجزیه می‌کنیم:

$$\begin{cases} \dfrac{ab(a+b)}{a^2+ab+b^2} \le \dfrac{a+b}{3} \\ \dfrac{bc(b+c)}{b^2+bc+c^2} \le \dfrac{b+c}{3} \\ \dfrac{ca(a+c)}{c^2+ca+a^2} \le \dfrac{a+c}{3} \end{cases}$$

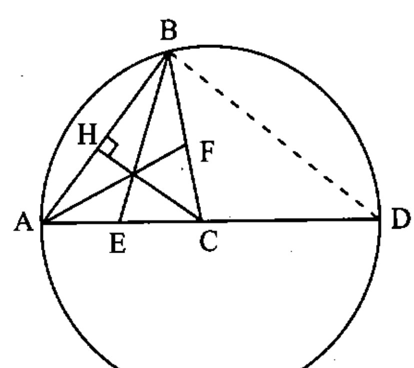
(از جمع این سه نابرابری، نابرابری فوق اثبات می‌شود)
اکنون کافی است درستی یکی از این سه نابرابری را به روش بازگشتی اثبات کنیم:

$$\frac{ab(a+b)}{a^2+ab+b^2} \le \frac{a+b}{3} \Rightarrow a^2+ab+b^2 \ge 3ab$$

$$\Rightarrow a^2-2ab+b^2 \ge 0 \Rightarrow (a-b)^2 \ge 0$$

که به دلیل بازگشت‌پذیری همه‌ی مراحل، درستی حکم ثابت می‌شود.

۵. شکل زیر را مطابق مفروضات مسئله رسم می‌کنیم. برای اثبات همرسی نیم‌ساز AF، میانه‌ی BE و ارتفاع CH در مثلث ABC، از «قضیه‌ی سه وا»[2] کمک می‌گیریم. چون AD قطر دایره است، $A\hat{B}D = 90°$ و در نتیجه $CH \parallel BD$ و از قضیه‌ی تالس در مثلث ABD کمک می‌گیریم:



$$\frac{AH}{BH} = \frac{AC}{CD}$$

هم‌چنین به کمک قضیه‌ی نیم‌سازها در مثلث ABC داریم:

$$\frac{BF}{CF} = \frac{AB}{AC} = \frac{CD}{AC}$$

و چون BE میانه است، پس $AE = CE$ و بنابراین:

$$\frac{AH}{BH} \times \frac{BF}{CF} \times \frac{CE}{EA} = \frac{AC}{CD} \times \frac{CD}{AC} \times \frac{AE}{AE} = 1$$

و طبق عکس قضیه‌ی سه‌وا، BE، AF و CH از یک نقطه می‌گذرند.

۶. در تساوی فوق $x = -y$ قرار می‌دهیم:

$$f(-y+f(y)) = f(0)+1$$

و چون $f(0)+1$ مقداری ثابت است و با توجه این‌که f تابع ثابت نیست، پس باید $-y+f(y)$ مقداری ثابت باشد:

$$-y+f(y) = k \Rightarrow f(y) = y+k \Rightarrow$$

$$f(x) = x+k$$

با قرار دادن $x = 0$ در این رابطه نتیجه می‌شود: $f(0) = k$ و یا $f(x) = x+f(0)$ و اگر در این رابطه $x = f(0)$ قرار دهیم، نتیجه می‌شود:

$$f(f(0)) = f(0)+f(0) = 2f(0) \quad (I)$$

و اگر در رابطه‌ی اولیه $x = y = 0$ قرار دهیم، نتیجه می‌شود:

$$f(f(0)) = f(0)+1 \quad (II)$$

و از مقایسه‌ی روابط I و II نتیجه می‌شود:

$$2f(0) = f(0)+1 \Rightarrow f(0) = 1$$

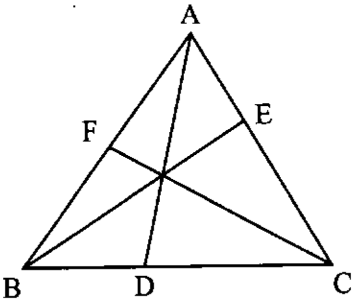
و لذا: $f(x) = x+1$.

پی‌نوشت..

1. Pell equation

۲. طبق قضیه‌ی سه‌وا، شرط لازم و کافی برای آن که سه خط AD و BE و CF در مثلث ABC در یک نقطه همرس باشند، آن است که:

$$\frac{AF}{FB} \times \frac{BD}{DC} \times \frac{CE}{EA} = 1$$



برای اطلاع بیشتر، به کتاب بازآموزی و بازشناخت هندسه، ترجمه‌ی عبدالحسین مصحفی از انتشارات مدرسه مراجعه کنید.

● میرشهرام صدر

برای دانش‌آموزان سال دوم



تابع چندجمله‌ای

چندجمله‌ای

هر عبارت جبری با تعدادی جملات متناهی متشکل از متغیرها و مقادیر ثابتی که بین آن‌ها از عمل‌های جمع، تفریق و ضرب استفاده شده باشد، یک چندجمله‌ای است. نکته‌ی مهم در چندجمله‌ای‌ها این است که توان متغیرها در آن‌ها عددهای صحیح نامنفی است. برای مثال، عبارت جبری $x^2 - 3x + 2$ چندجمله‌ای است که از سه جمله تشکیل شده است. اما عبارت جبری $x^2 - \frac{4}{x} + 3x^{\frac{5}{2}}$ چندجمله‌ای نیست، زیرا در عبارت $\frac{4}{x}$ که می‌توان آن را به صورت $4x^{-1}$ نوشت، یا در عبارت $3x^{\frac{5}{2}}$، توان x عددی صحیح و نامنفی نیست.

صورت دیگر چندجمله‌ای

هر عبارتی که به صورت حاصل ضرب چندجمله‌ای‌ها باشد، می‌تواند با استفاده از قانون توزیع‌پذیری در ضرب چندجمله‌ای‌ها، به صورت یک چندجمله‌ای نوشته شود. برای مثال، عبارت جبری $(x+1)^3$ یک چندجمله‌ای به این صورت است:

$$\begin{aligned}(x+1)^3 &= (x+1)(x+1)(x+1)\\ &= (x^2+2x+1)(x+1)\\ &= x^3+3x^2+3x+1\end{aligned}$$

توجه داشته باشید که عبارت $\frac{1}{(x+2)^2}$ چندجمله‌ای نیست، زیرا:

$$\frac{1}{(x+2)^2} = (x+2)^{-2}$$

در عبارت $(x+2)^{-2}$ توان پرانتز منفی است.

معادلات چندجمله‌ای

به معادله‌ای که در آن یک چندجمله‌ای با چندجمله‌ای دیگر برابر شده باشد، معادله‌ی چندجمله‌ای می‌گوییم.

برای مثال معادله‌ی:

$$3x^2 - 3x + 2 = x^2 + 1 \qquad (1)$$

یک معادله‌ی چندجمله‌ای است. هدف از حل این معادله، یافتن مقادیری برای متغیر x است که وقتی آن‌ها را در معادله قرار می‌دهیم، به یک برابری درست برسیم. برای این منظور داریم:

$$3x^2 - 3x + 2 - x^2 - 1 = 0$$
$$2x^2 - 3x + 1 = 0$$
$$\Rightarrow (x-1)(2x-1) = 0$$
$$\Rightarrow x = 1, x = \frac{1}{2}$$

این معادله دو جواب دارد که آن‌ها را ریشه‌های معادله‌ی ۱ می‌گوییم. زیرا وقتی آن‌ها را در این معادله قرار دهیم، به یک برابری درست می‌رسیم. (خودتان امتحان کنید.)

معادله‌ی چندجمله‌ای می‌تواند به صورت یک اتحاد بین چندجمله‌ای‌ها باشد؛ مانند:

$$(x-1)(x+1) = x^2 - 1$$

این معادله دارای بی‌شمار جواب است، زیرا برای هر مقدار حقیقی که جای‌گزین x کنیم، به یک برابری همیشه درست می‌رسیم. (خودتان امتحان کنید.)

تابع چندجمله‌ای

هر تابع با ضابطه‌ی

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

که در آن a_iها اعداد حقیقی ثابت باشند، یک تابع چندجمله‌ای از درجه‌ی عدد صحیح و نامنفی n (با شرط $a_n \neq 0$) برحسب متغیر x است؛ برای مثال: $f_1(x) = ax + b$ $(a \neq 0)$ ضابطه‌ی یک تابع دوجمله‌ای درجه اول و $f_2(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ ضابطه‌ی یک تابع سه‌جمله‌ای درجه دوم است.

می‌دانیم، نمودار تابع f_1 یک خط راست و نمودار تابع f_2 یک سهمی با راس به طول $x = -\frac{b}{2a}$ و محور تقارن به معادله‌ی $x = \frac{-b}{2a}$ است. اگر $a > 0$ باشد، سهمی در راس خود دارای می‌نیمم است و اگر $a < 0$، دارای ماکزیمم خواهد بود.

توجه داشته باشید که $x = \frac{-b}{2a}$ طول نقطه‌ی ماکزیمم یا می‌نیمم است و برای محاسبه‌ی عرض این نقطه کافی است در ضابطه‌ی f به جای xها مقدار $\frac{-b}{2a}$ را قرار دهیم تا عرض نقطه‌ی ماکزیمم یا می‌نیمم که اصطلاحاً به آن مقدار ماکزیمم یا می‌نیمم گفته می‌شود، به دست آید.

مثال: تابع درجه دوم f با ضابطه‌ی $f(x) = 2x^2 - 4x + 1$ مفروض است. راس سهمی و مقدار می‌نیمم تابع f را بیابید. (چون $a = 2 > 0$ پس سهمی در راس خود می‌نیمم دارد.)

حل: در این تابع درجه‌ی ۲ داریم: $a = 2$ ، $b = -4$ و $c = 1$. پس:

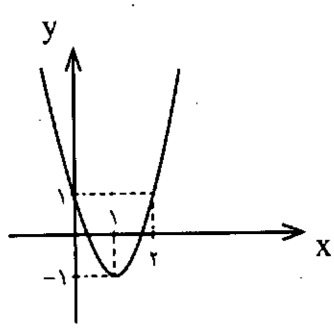
طول نقطه‌ی می‌نیمم $x = \frac{-b}{2a} = \frac{4}{4} = 1$

مقدار می‌نیمم تابع $f(1) = 2 \times (1)^2 - 4 \times (1) + 1 = -1$

در واقع برای تابع f در دامنه‌ی تعریف خود که $\mathbb{R}$ است، کم‌ترین مقدار ممکن با ۱- برابر است.

به عبارت دیگر، برای هر $k \in \mathbb{R}$ همواره داریم: $f(k) \geq -1$.

نمودار این سهمی به صورت زیراست:



x	۰	۱	۲
y	۱	۱-	۱

دامنه‌ی توابع چند جمله‌ای، مجموعه‌ی اعداد حقیقی $\mathbb{R}$ است. در مثال بالا، هر عدد حقیقی دل‌خواهی را می‌توان جای‌گزین x در تابع f(x) کرد. بنابراین: $D_f = \mathbb{R}$.

از طرف دیگر، با توجه به نمودار تابع ملاحظه می‌کنیم که عرض هر نقطه روی نمودار، یعنی $y = f(x)$ همواره بزرگ‌تر یا برابر با ۱- است. در نتیجه با توجه به نمودار، برد این تابع $y \geq -1$ است. بنابراین: $R_f = [-1, +\infty)$.

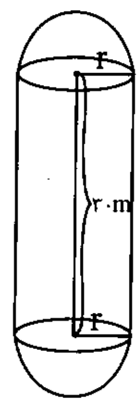
طول محل برخورد نمودار تابع با محور xها را صفرهای تابع می‌نامیم، که برای یافتن آن‌ها کافی است معادله‌ی $f(x) = 0$ را حل کنیم. در مثال قبل داریم:

$$f(x) = 0 \Rightarrow 2x^2 - 4x + 1 = 0 \Rightarrow x_1, x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

صفرهای تابع $\Rightarrow x_1, x_2 = \frac{4 \pm \sqrt{8}}{4} = \frac{4 \pm 2\sqrt{2}}{4} = \frac{2 \pm \sqrt{2}}{2}$

در نتیجه، محل برخورد نمودار این تابع با محور xها، نقاط $A_1\left|\begin{matrix}\frac{۲+\sqrt{۲}}{۲}\\ ۰\end{matrix}\right.$ و $A_2\left|\begin{matrix}\frac{۲-\sqrt{۲}}{۲}\\ ۰\end{matrix}\right.$ هستند.

مثال: یک تانکر گاز از یک استوانه و دو نیم کره به شعاع r در دو انتهای استوانه تشکیل شده است. اگر ارتفاع استوانه ۳۰ متر باشد، حجم تانکر را بر حسب تابعی از r بنویسید.



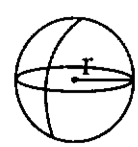
حل: حجم این تانکر از یک استوانه و یک کره که هر دو به شعاع r هستند، تشکیل شده است.

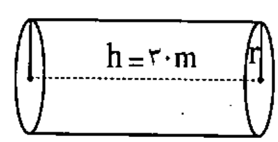
بنابراین داریم:

حجم کره به شعاع r : $y_1 = \frac{۴}{۳}\pi r^۳$

حجم استوانه به شعاع r $y_2 = \pi r^۲ h = ۳۰\pi r^۲$

و ارتفاع $h = ۳۰$





حجم تانکر $f(x) = y_1 + y_2 \Rightarrow f(x) = \frac{۴}{۳}\pi r^۳ + ۳۰\pi r^۲$

$\Rightarrow f(x) = \pi r^۲(\frac{۴}{۳}r + ۳۰)$

تمرین: مخزنی از یک استوانه و دو مخروط به شعاع مقطع ۵ در دو انتهای استوانه تشکیل شده است. اگر ارتفاع استوانه و مخروط‌ها h باشد، حجم این مخزن را بر حسب تابعی از h بنویسید.

راهنمایی: حجم مخروط به شعاع r و ارتفاع h، $\frac{۱}{۳}$ حجم استوانه به شعاع مقطع r و ارتفاع h است.

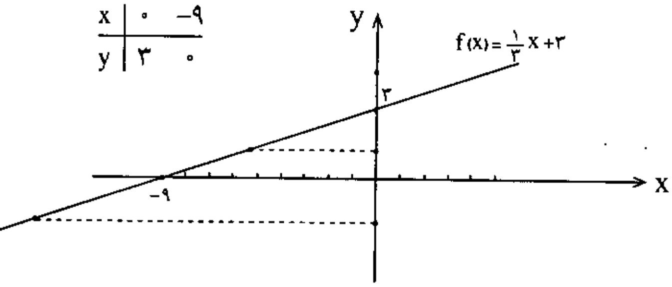
مثال: نمودار توابع زیر را در یک دستگاه مختصات رسم کنید و دامنه و برد هر یک را به دست آورید.

۱) $f(x) = \frac{۱}{۳}x + ۳$ ۲) $g(x) = -x^۲ + ۴x - ۳$

حل:

۱. $f(x)$ تابع چند جمله‌ای است، پس: $D_f = \mathbb{R}$. چون این تابع چند جمله‌ای از درجه‌ی اول است، بنابراین نمودار آن یک خط است که برای رسم آن از دو نقطه استفاده می‌کنیم:

x	۰	−۹
y	۳	۰



با توجه به نمودار تابع ملاحظه می‌کنیم، عرض هر نقطه روی نمودار می‌تواند یک عدد حقیقی از بازه‌ی $(-\infty, +\infty)$ باشد. بنابراین $R_f = \mathbb{R}$.

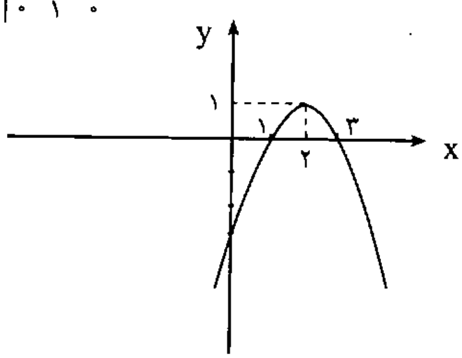
۲. $g(x)$ تابع چند جمله‌ای است، پس: $D_g = \mathbb{R}$. چون این تابع چند جمله‌ای از درجه‌ی دوم است، بنابراین نمودار آن یک سهمی است.

طول نقطه‌ی ماکزیمم $x = \frac{-b}{۲a} = \frac{-۴}{-۲} = ۲$

مقدار ماکزیمم تابع $f(۲) = -(۲)^۲ + ۴(۲) - ۳ = ۱$

برای رسم سهمی از مختصات چند نقطه از سهمی استفاده می‌کنیم:

x	۱	۲	۳
y	۰	۱	۰



با توجه به نمودار تابع ملاحظه می‌کنیم که عرض هر نقطه روی سهمی، همواره کوچک‌تر یا برابر با ۱ است؛ یعنی همواره $f(x) \leq ۱$.

در نتیجه داریم: $R_f = (-\infty, ۱]$.

مثال: فرض کنیم $f(x)$ یک تابع چند جمله‌ای درجه اول باشد؛ به طوری که در آن $f(-۱) = ۲$ و $f(۲) = -۳$. ضابطه‌ی

این تابع را پیدا کنید.

حل: می‌دانیم ضابطه‌ی این تابع به صورت $f(x)=ax+b$ است. بنابراین داریم:

$$\begin{array}{l} f(-1)=2 \Rightarrow a(-1)+b=2 \\ f(2)=-3 \Rightarrow a(2)+b=-3 \end{array} \Rightarrow \begin{cases} -a+b=2 \\ 2a+b=-3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -2a+2b=4 \\ 2a+b=-3 \end{cases}$$
$$3b=1 \Rightarrow b=\frac{1}{3}$$

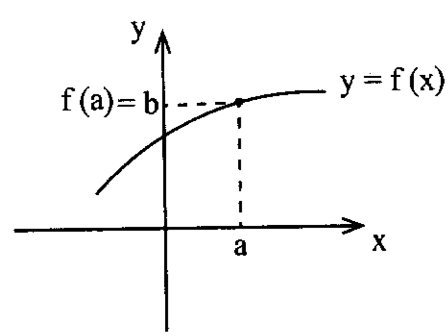
$$b=\frac{1}{3} \Rightarrow -a+\frac{1}{3}=2 \Rightarrow a=-\frac{5}{3} \Rightarrow f(x)=-\frac{5}{3}x+\frac{1}{3}$$

مثال: هرگاه $f(x)=3x-2$ و نقطه‌ی $(m+1,\ 2m-1)$ روی نمودار تابع $f(x)$ باشد، مقدار m را بیابید.

حل: چون این نقطه روی نمودار تابع است، بنابراین داریم:

$$f(m+1)=2m-1 \Rightarrow 3(m+1)-2=2m-1 \Rightarrow m=-2$$

نکته: هرگاه نقطه‌ی (a,b) روی نمودار تابع $y=f(x)$ باشد، در این صورت داریم: $f(a)=b$.



مثال: فرض کنیم $f(x)=2x^2-1$ مطلوب است:

الف) $f(\sqrt{2})$ ب) $f(2x)$ ج) $f(x+1)$

حل:

الف) کافی است به جای x در تابع $f(x)$، عدد $\sqrt{2}$ را قرار دهیم:

$$f(\sqrt{2})=2(\sqrt{2})^2-1=4-1=3$$

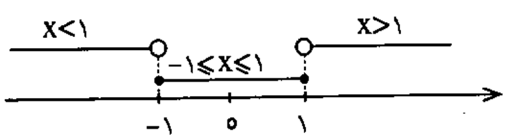
ب)
$$f(2x)=2(2x)^2-1$$
$$=8x^2-1$$

ج)
$$f(x+1)=2(x+1)^2-1$$
$$=2(x^2+2x+1)-1=2x^2+4x+1$$

تابع چندضابطه‌ای ....

هرگاه دامنه‌ی یک تابع را به چند مجموعه‌ی جدا از هم تقسیم کنیم، به طوری که اجتماع آن مجموعه‌ها برابر با دامنه‌ی تابع باشد و روی هر مجموعه ضابطه‌ای متمایز تعریف کنیم، در این صورت یک تابع چند ضابطه‌ای به دست می‌آید.

مثال: دامنه‌ی تابع $f(x)$ برابر با $\mathbb{R}$ است. ابتدا به صورت زیر، این دامنه را به سه مجموعه‌ی جدا از هم تقسیم می‌کنیم:



اکنون روی هر مجموعه، ضابطه‌ای متمایز به این صورت تعریف می‌کنیم:

$$f(x)=\begin{cases} 2x & x>1 \\ 2 & -1\le x\le 1 \\ -2x & x<-1 \end{cases}$$

در این صورت به $f(x)$ تابع ای سه ضابطه‌ای می‌گوییم.

مثال: نمودار تابع سه ضابطه‌ای مثال قبل را رسم کنید و برد آن را به دست آورید.

برای رسم نمودار این تابع باید نمودار هر ضابطه را در محدوده‌ی دامنه‌اش رسم کنیم. به همین منظور، $f(x)=2$ را برای $x>1$، $f(x)=2$ را برای $-1\le x\le 1$ و $f(x)=-2x$ را برای $x<-1$ رسم می‌کنیم:

$f(x)=2x;$

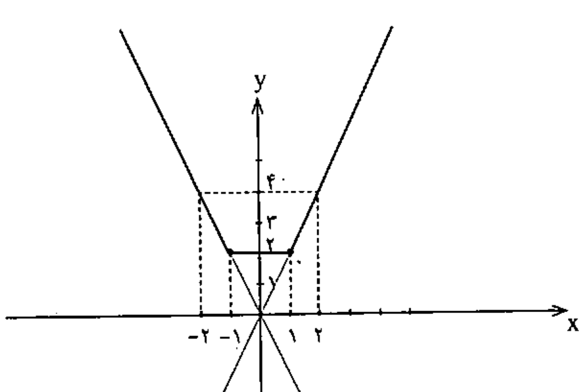
x	1	2
y	2	4

$f(x)=2;$

x	-1	1
y	2	2

$f(x)=-2x;$

x	-1	-2
y	2	4



توجه: نمودار هر ضابطه از تابع را رسم کردیم و روی هر نمودار، قسمت‌هایی را که در دامنه است، پر رنگ کردیم. ملاحظه می‌کنیم که عرض هر نقطه روی نمودار این تابع سه ضابطه‌ای، همواره بزرگ‌تر یا برابر با ۲ است. پس داریم:

$$R_f=[2,+\infty)$$

مثال: تابع $f(x)=\begin{cases}-x^2+1 & x\ge 0\\ 1-2x & x<0\end{cases}$ را در نظر بگیرید.

حاصل $f(x^2+1)$، $f(-\sqrt{2})$ و $f(-\frac{1}{2}x^2-1)$ را به دست آورید.

حل: چون همواره $x^2+1>0$، بنابراین از ضابطه‌ی اول برای محاسبه‌ی $f(x^2+1)$ استفاده می‌کنیم:

$$f(x^2+1)=-(x^2+1)^2+1=-(x^4+2x^2+1)+1=-x^4-2x^2$$

چون $-\sqrt{2}<0$، بنابراین برای محاسبه‌ی $f(-\sqrt{2})$ از ضابطه‌ی دوم استفاده می‌کنیم:

$$f(-\sqrt{2})=1-2(-\sqrt{2})=1+2\sqrt{2}$$

چون $-\frac{1}{2}x^2<0$ بنابراین $-\frac{1}{2}x^2-1<0$. در نتیجه برای محاسبه‌ی $f(-\frac{1}{2}x^2-1)$ از ضابطه‌ی دوم استفاده می‌کنیم:

$$f(-\frac{1}{2}x^2-1)=1-2(-\frac{1}{2}x^2-1)=1+x^2+2=x^2+3$$

تابع قدر مطلق

تابع با ضابطه‌ی $f(x)=|x|$ را تابع قدر مطلق می‌نامیم و آن را به صورت یک تابع دو ضابطه‌ای تعریف می‌کنیم:

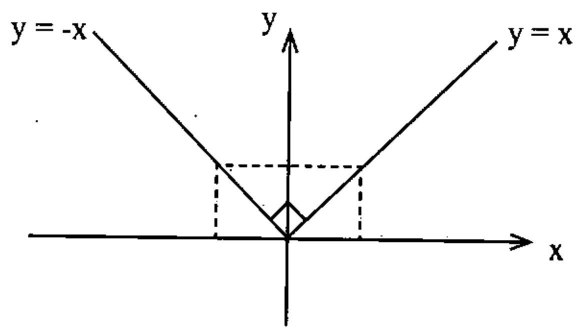
$$f(x)=|x|=\begin{cases}x & x\ge 0\\ -x & x<0\end{cases}$$

این تابع به هر عضو از دامنه‌اش ($\mathbb{R}$)، قدر مطلق آن را نسبت می‌دهد. در حقیقت، حاصلِ تأثیر این تابع روی هر عدد حقیقی، یک عدد حقیقی نامنفی است. برای مثال:

$$f(3)=|3|=3;\quad f(-3)=|-3|=-(-3)=3;\quad f(0)=|0|=0$$

نمودار این تابع به صورت زیر است:

x	-1	0	1
y	1	0	1



دامنه‌ی تعریف این تابع مجموعه‌ی اعداد حقیقی است. از طرف دیگر، عرض هر نقطه واقع بر این تابع، بزرگ‌تر یا برابر صفر است. یعنی همواره $y\ge 0$. در نتیجه برد این تابع $R_f=[0,\infty)$ است.

نکته ۱. می‌توان نمودار این تابع را یک زاویه قائمه دانست که رأس آن منطبق بر مبداء و دو ضلع این زاویه نیمسازهای ربع اول و دوم محورهای مختصات هستند.

نکته ۲. تابع قدر مطلق یک به یک نیست، زیرا خطی موازی محور طول وجود دارد که نمودار آن را در دو نقطه قطع می‌کند.

تمرین: نمودار هر یک از تابع‌های چند ضابطه‌ای زیر را رسم کنید. سپس دامنه و برد هر کدام را به دست آورید.

۱.
$$f(x)=\begin{cases}x^2 & -1\le x\le 1\\ -x+2 & x>1\\ x+2 & x<-1\end{cases}$$

۲.
$$g(x)=\begin{cases}-x^2 & -1\le x\le 1\\ x-2 & x>1\\ -x-2 & x<-1\end{cases}$$

۳. تابع s(x) به تابع علامت معروف است.
$$s(x)=\begin{cases}1 & x>0\\ 0 & x=0\\ -1 & x<0\end{cases}$$

۴.

$$h(x)=\begin{cases} x & x\geq 0 \\ -x & x<0 \end{cases}$$

۵. با توجه به تابع علامت $s(x)$ که در تمرین ۳ ارائه شده است، مطلوب است محاسبه‌ی $s(x^2)-s(x)$.

جواب ۵: $s(x^2)-s(x)=\begin{cases} 0 & x\geq 0 \\ 2 & x<0 \end{cases}$.

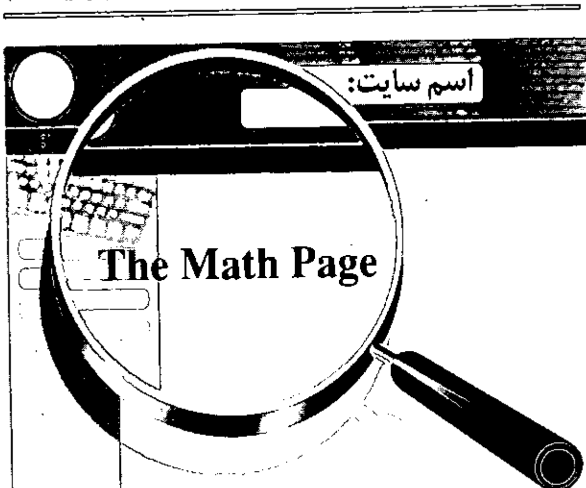
۶. اگر $f(x)=\begin{cases} 4 & x>2 \\ -2 & x\leq 2 \end{cases}$ ، آن‌گاه حاصل $-5f(\sqrt{3})+4f(\frac{1}{100})+f(100)$ را بیابید.

جواب ۶:

۷. هرگاه داشته باشیم $f(x)=\begin{cases} 2x-1 & x>2 \\ 4 & x=2 \\ x^2+1 & x<2 \end{cases}$ ، در این صورت مطلوب است محاسبه‌ی $f(\sqrt{2})$ ، $f(4)$ ، $f(2)$ و $f(k-1)$.

جواب ۷: $f(2)=4$ و $f(k-1)=\begin{cases} 2k-3 & k>3 \\ 4 & k=3 \\ k^2-2k+2 & k<3 \end{cases}$

احسان یارمحمدی



معرفی سایت‌های ریاضی جهان

آدرس اینترنتی سایت: htttp://www.themathpage.com

صفحه‌ی اصلی این سایت شامل عنوان‌های زیر است، هر یک از این عنوان‌ها شامل زیر عنوان‌هایی است که هر کدام حاوی مطالبی مفصل می‌باشند.

- مهارت در حساب (Skill in Arithmetic)
- هندسه مسطحه (Plane Geometry)
- مهارت در جبر (Skill in Algebra)
- عناوینی در مثلثات (Topics in Trigonometry)
- عناوینی در حسابان مقدماتی (Topics in Pre-Calculus)
- رویکردی به حسابان (An Approach to Calculus)
- سیر تکامل اعداد حقیقی (The Evolution of the Real Numbers)

در پایین صفحه اصلی سایت، آدرس الکترونیکی

E-mail:themathpage@ncy.rr.com

وجود دارد که کاربر می‌تواند از طریق آن با سایت ارتباط داشته باشد.

محمد هاشم رستمی

۹

رویکرد هندسی و رویکرد جبری ـ مختصاتی در آموزش هندسه



اشاره

یکی از مهم ترین پیوندها و اتصال‌ها در همه‌ی ریاضیات، اتصال و پیوند بین هندسه و جبر است.

از استانداردهای موضوعی NCTM

در این شماره نیز این اتصال و پیوند را در فضای سه بعدی بررسی می‌کنیم.

نکته‌ی مهم: ضمن بررسی رویکرد هندسی، رویکرد جبری ـ مختصاتی در آموزش هندسه، برخی از راهبردهای مهم برای حل مسئله‌های هندسه مانند «تحدید یا کوچک کردن مسئله، مسئله را حل شده فرض می‌کنیم، چگونگی به‌کارگیری مکان‌های هندسی، انواع روش‌های حل یک مسئله، ...» را مطرح می‌کنیم. در ضمن لازم است گفته شود، مسئله‌هایی را که با دو رویکرد هندسی و رویکرد جبری ـ مختصاتی حل می‌کنیم، کلیدی هستند و از کتاب‌های هندسه‌ی ۱ و هندسه‌ی ۲ انتخاب شده‌اند تا دانش‌آموزان بتوانند مسئله‌های دیگر این کتاب‌ها را به راحتی با این دو رویکرد حل کنند.

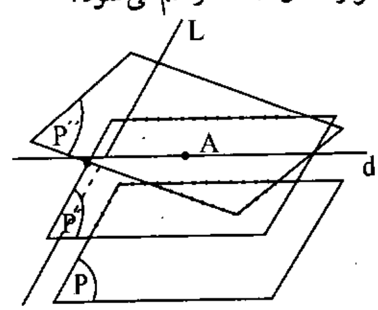
مسئله‌ی ۱۱. برای یک خط دل‌خواه L و صفحه‌ی دل‌خواه P و نقطه‌ی دل‌خواه A ، آیا خطی وجود دارد که از A بگذرد، با P موازی باشد و بر L عمود شود؟ بنابر وضعیت‌های متفاوت بین A ، P و L ، چند جواب وجود دارد؟

مسئله را در حالتی کلی حل می‌کنیم که نقطه‌ی A روی خط L و صفحه‌ی P نباشد و خط L هم غیرموازی با صفحه‌ی P و غیرعمود بر این صفحه باشد.

الف) حل با روش هندسی

برای حل این مسئله از راهبرد «مسئله را حل شده فرض می‌کنیم»، استفاده می‌کنیم؛ راهبردی بسیار مهم و کارامد برای حل مسئله‌ها، به‌ویژه مسئله‌های هندسه. در این راهبرد، با حل شده در نظر گرفتن مسئله، ویژگی‌هایی از آن را استخراج و از آن‌ها برای حل مسئله استفاده می‌کنیم. اینک به این راه‌حل توجه کنید:

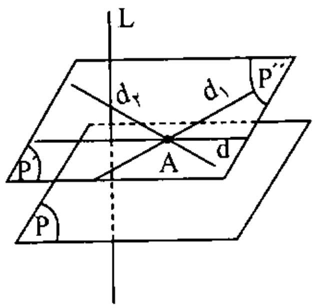
فرض می‌کنیم مسئله حل شده و خط d جواب مسئله است؛ یعنی خطی است که از نقطه‌ی A می‌گذرد، با صفحه‌ی P موازی و برخط L عمود است. چون خط d از نقطه‌ی A می‌گذرد و با صفحه‌ی P موازی است، پس در صفحه‌ای مانند 'P قرار دارد که از نقطه‌ی A به موازات صفحه‌ی P رسم می‌شود. زیرا می‌دانیم، **مکان هندسی خط‌هایی که از یک نقطه به موازات یک صفحه رسم می‌شوند، یک صفحه است که از آن نقطه به موازات آن صفحه رسم می‌شود.**



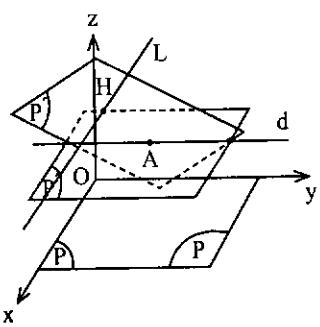
از طرفی خط d از نقطه‌ی A می‌گذرد و بر خط L عمود است، پس در صفحه‌ای مانند "P قرار دارد که از نقطه‌ی A عمود بر خط L رسم می‌شود. زیرا می‌دانیم، **مکان هندسی خط‌هایی که از یک نقطه عمود بر یک خط رسم می‌شوند، یک صفحه است که از آن نقطه عمود بر آن خط رسم می‌شود.**

بنابراین، برای حل مسئله، از نقطه‌ی A صفحه‌ی 'P را موازی صفحه‌ی P و سپس از همین نقطه‌ی A صفحه‌ی "P را عمود بر خط L رسم می‌کنیم. فصل مشترک این دو صفحه خط d، جواب مسئله است که از نقطه‌ی A نیز می‌گذرد.

بحث: جواب مسئله فصل مشترک دو صفحه‌ی 'P و "P است که از نقطه‌ی A می‌گذرد. پس وضعیت این دو صفحه، معین‌کننده‌ی وجود جواب و تعداد جواب است. چون صفحه‌های 'P و "P هر دو از نقطه‌ی A می‌گذرند، یعنی حداقل یک نقطه‌ی مشترک دارند، پس دو حالت منطبق یا متقاطع می‌توانند داشته باشند. در حالت انطباق، تعداد جواب‌های مسئله بی‌شمار است، یعنی بی‌شمار خط وجود دارد که از نقطه‌ی A می‌گذرد، با صفحه‌ی P موازی است و بر خط L عمود است (شکل الف) و در حالت متقاطع، مسئله جواب یکتایی دارد که همان خط d است (شکل ب).



(الف)

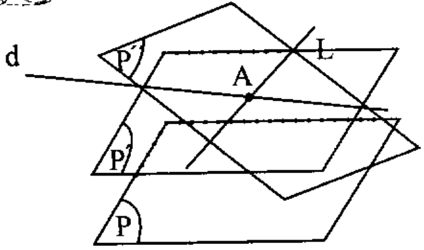


(ب)

'P و "P وقتی برهم منطبق‌اند که L و P بر هم عمود باشند. در غیر این صورت، 'P و "P متقاطع خواهند بود.

نکته: بحث در وجود جواب تعداد جواب‌های مسئله را می‌توان به روش دیگری نیز انجام داد. بدین ترتیب که حالت‌های متفاوتی را که نقطه‌ی A، خط L و صفحه‌ی P نسبت به هم می‌توانند داشته باشند، در نظر بگیریم. این حالت‌ها عبارت‌اند از:

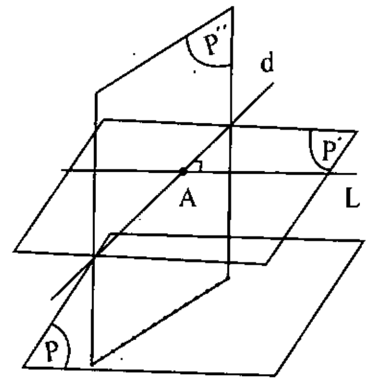
۱. نقطه‌ی A روی خط L باشد و خط L، غیرموازی با P و غیرعمود با P باشد.



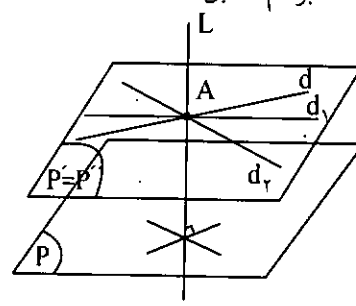
در این حالت دو صفحه‌ی 'P و "P متمایزاند و در یک خط که همان خط d (جواب مسأله) است، متقاطع هستند.



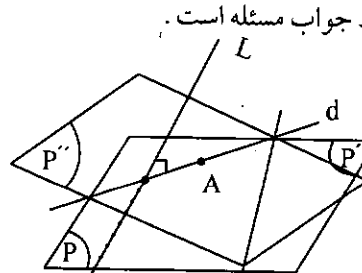
۲. نقطه‌ی A روی خط L و خط L موازی با صفحه‌ی P باشد. در این حالت، مسئله تنها یک جواب دارد، زیرا دو صفحه‌ی P′ و P″ متمایز و متقاطع‌اند.



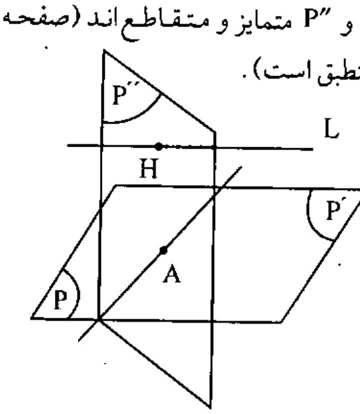
۳. نقطه‌ی A روی خط L و خط L عمود بر صفحه‌ی P باشد. در این حالت، مسئله بی‌شمار جواب دارد، زیرا دو صفحه‌ی P′ و P″ برهم منطبق‌اند.



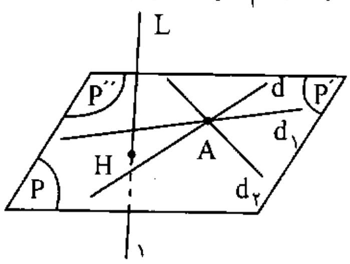
۴. نقطه‌ی A روی صفحه‌ی P و خط L غیرعمود بر P و L موازی با P باشد. در این حالت، صفحه‌ی P′ بر صفحه‌ی P منطبق است و دو صفحه‌ی P′ و P″ متمایز و متقاطع‌اند. پس تنها یک خط جواب مسئله است.



۵. نقطه‌ی A روی صفحه‌ی P و خط L موازی صفحه‌ی P باشد. در این حالت، مسئله تنها یک جواب دارد، زیرا دو صفحه‌ی P′ و P″ متمایز و متقاطع‌اند (صفحه‌ی P′ بر صفحه‌ی P منطبق است).

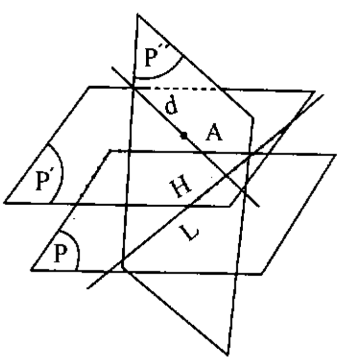


۶. نقطه‌ی A روی صفحه‌ی P و خط L عمود بر صفحه‌ی P باشد. در این حالت، دو صفحه‌ی P′ و P″ بر صفحه‌ی P منطبق‌اند و مسئله بی‌شمار جواب دارد. یعنی هر خطی که از A در صفحه‌ی P رسم شود، جواب مسئله است.

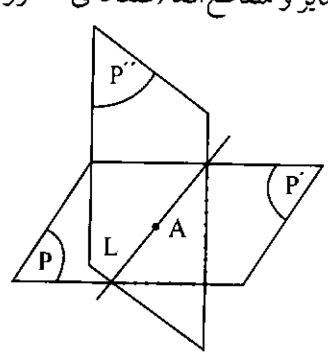


۷. نقطه‌ی A و خط L هر دو روی صفحه‌ی P قرار داشته باشند. در این حالت، مسئله تنها یک جواب دارد، زیرا دو صفحه‌ی P′ و P″ متمایزند. این حالت شبیه حالت ۵ است.

۸. نقطه‌ی A خارج صفحه‌ی P و خط L روی صفحه‌ی P واقع باشند. در این حالت، مسئله تنها یک جواب دارد، زیرا دو صفحه‌ی P′ و P″ متمایز و متقاطع‌اند.



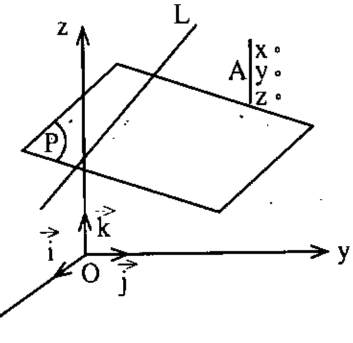
۹. نقطه‌ی A روی خط L و هر دو روی صفحه‌ی P باشند. در این حالت نیز مسئله تنها یک جواب دارد، زیرا دو صفحه‌ی P′ و P″ متمایز و متقاطع‌اند (صفحه‌ی P′ روی صفحه‌ی P قرار دارد).



نکته: اگر حالت دیگری نیز وجود دارد، آن را مشخص کنید و برای مجله‌ی برهان متوسطه بفرستید. در کدام حالت ممکن است خط d که تنها جواب مسئله است، بر خط L که در فرض مسئله داده شده است، منطبق باشد؟ اگر چنین حالتی وجود دارد، با ذکر دلیل، آن را بنویسید.

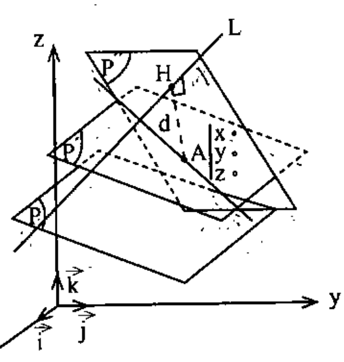
ب) حل با روش جبری ـ مختصاتی

دستگاه مختصات دکارتی قائم O-xyz با بردارهای یکه‌ی $\vec{i}$ ، $\vec{j}$ و $\vec{k}$ را در نظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم در این دستگاه، نقطه‌ی A به مختصات $A=(x_\circ, y_\circ, z_\circ)$ ، خط L به معادله‌ی: $L: \frac{x-x_1}{p}=\frac{y-y_1}{q}=\frac{z-z_1}{r}$ و صفحه‌ی P به معادله‌ی $ax+by+cz+d=\circ$ باشد. می‌خواهیم از نقطه‌ی A خطی رسم کنیم که با صفحه‌ی P موازی و بر خط L هم عمود باشد.



می‌دانیم مکان هندسی خط‌هایی که از یک نقطه موازی یک صفحه رسم می‌شوند، صفحه‌ای است که از آن نقطه، موازی آن صفحه رسم می‌شود. این صفحه را P' می‌نامیم و معادله‌ی آن را می‌نویسیم. می‌دانیم، معادله‌ی تمام صفحه‌های موازی صفحه‌ی P به صورت کلی $ax+by+cz+d'=\circ$ (۱) است. برای تعیین معادله‌ی صفحه‌ی P' که از نقطه‌ی A می‌گذرد، باید مختصات این نقطه در معادله‌ی بالا صدق کند. یعنی داشته باشیم:

$$A=(x_\circ, y_\circ, z_\circ) \xrightarrow{\text{در } (1)} ax_\circ+by_\circ+cz_\circ+d=\circ$$
$$\Rightarrow d'=-(ax_\circ+by_\circ+cz_\circ)$$



بنابراین، معادله‌ی صفحه‌ی P' که از نقطه‌ی A موازی صفحه‌ی P رسم می‌شود، به صورت $P': ax+by+cz-(ax_\circ+by_\circ+cz_\circ)=\circ$ (۲) است.

از طرفی، مکان هندسی خط‌هایی که از یک نقطه عمود بر یک خط رسم می‌شوند، صفحه‌ای است که از آن نقطه بر آن خط عمود می‌شود. این صفحه را P'' می‌نامیم. می‌دانیم، معادله‌ی تمام صفحه‌هایی که بر خط $L: \frac{x-x_1}{p}=\frac{y-y_1}{q}=\frac{z-z_1}{r}$ عمود می‌شوند، به صورت $px+qy+rz+d''=\circ$ (۳) است، زیرا بردار نرمال این صفحه‌ها، همان بردار هادی خط L یعنی $\vec{V}_{P''}=\vec{V}_L=(p,q,r)$ است. برای تعیین معادله‌ی صفحه‌ای از این مجموعه صفحه که از نقطه‌ی $A=(x_\circ, y_\circ, z_\circ)$ می‌گذرد، باید مختصات نقطه‌ی A در معادله‌ی (۳) صدق کند. داریم:

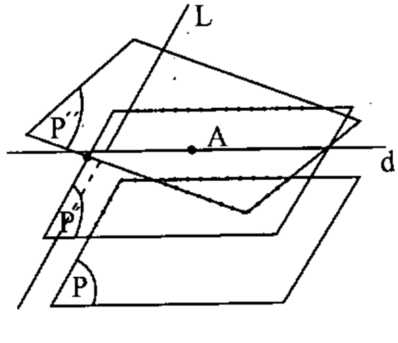
$$A=(x_\circ, y_\circ, z_\circ) \xrightarrow{\text{در } (3)} px_\circ+qy_\circ+rz_\circ+d''=\circ$$
$$\Rightarrow d''=-(ax_\circ+by_\circ+cz_\circ)$$
$$\Rightarrow P'': px+qy+rz-(px_\circ+qy_\circ+rz_\circ)=\circ \quad (4)$$

فصل مشترک دو صفحه‌ی P' و P'' که آن را خط d می‌نامیم و از نقطه‌ی A نیز می‌گذرد، جواب مسئله است که معادله‌ی آن به صورت زیر است:

$$d: \begin{cases} ax+by+cz-(ax_\circ+by_\circ+cz_\circ)=\circ \\ px+qy+rz-(px_\circ+qy_\circ+rz_\circ)=\circ \end{cases}$$

نکته: در صورت لزوم می‌توان معادله‌ی خط d را به صورت کانونیک درآورد.

نکته‌ی بسیار مهم: در قسمت‌های قبل رویکرد هندسی، رویکرد جبری ـ مختصاتی گفتیم، چگونگی انتخاب دستگاه مختصات، در ساده‌تر شدن یا مشکل‌تر شدن حل مسئله نقش بسزایی دارد و این مطلب را با ذکر نمونه‌هایی نشان دادیم. در مورد این مسئله نیز روش حل بیان شده‌ی جبری ـ مختصاتی را در حالت کلی در نظر گرفتیم. حال اگر دستگاه مختصات دکارتی را چنان در نظر بگیریم که صفحه‌ی P به عنوان صفحه‌ی xoy از دستگاه مختصات باشد (شکل). با فرض



$A=(x_0,y_0,z_0)$ و $L:\frac{x-x_1}{p}=\frac{y-y_1}{q}=\frac{z-z_1}{r}$ معادله‌ی صفحه‌ی P' که از نقطه‌ی A موازی صفحه‌ی P رسم می‌شود، به صورت $z=z_0$ (۱) و معادله‌ی صفحه‌ی P'' که از نقطه‌ی A عمود بر خط L رسم می‌شود، به همان صورت $px+qy+rz-(px_0+qy_0+rz_0)=0$ (۲) خواهد بود. در نتیجه، معادله‌ی خط d، فصل مشترک دو صفحه‌ی P' و P'' که از نقطه‌ی A نیز می‌گذرد، به صورت زیر خواهد بود:

$$d:\begin{cases} P': z=z_0 \\ P'': px+qy+rz-(px_0+qy_0+rz_0)=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow d:\begin{cases} \dfrac{x}{-q}=\dfrac{y-\dfrac{px_0+qy_0}{q}}{P} \\ z=z_0 \end{cases}$$ معادله‌ی کانونیک d

اینک مثال‌هایی از روش جبری ـ مختصاتی را در چند حالت بررسی می‌کنیم.

مثال ۱: نقطه‌ی $A=(1,2,-1)$، خط $L:\frac{x-2}{3}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z}{2}$ و صفحه‌ی $P:x-2y+z-3=0$ داده شده‌اند. معادله‌ی خطی را بنویسید که از نقطه‌ی A می‌گذرد، با صفحه‌ی P موازی و بر خط L عمود است.

حل: از معادله‌ی خط L و صفحه‌ی P مشخص است که دستگاه مختصات قائم در نظر گرفته شده در این مسئله، حالت کلی دارد. بنابراین، محاسبات برای حل مسئله، حالت کلی دارد، کم و ساده نیست. بنابراین، برای حل مسئله، معادله‌های صفحه‌ی P' (که از A موازی صفحه‌ی P رسم می‌شود) و P'' (که از A عمود بر L رسم می‌شود) را می‌نویسیم و فصل مشترک آن‌ها را که جواب مسئله است، پیدا می‌کنیم. داریم:

$$P:x-2y+z-3=0 \Rightarrow \vec{V_P}=(1,-2,1)$$

$$\Rightarrow \vec{V_{P'}}=\vec{V_P}=(1,-2,1)$$

$$A=(1,2,-1)\in P'$$

$$\Rightarrow P':a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$$

$$\Rightarrow 1(x-1)-2(y-2)+1(z+1)=0 \Rightarrow P':x-2y+z+4=0$$

$$L:\frac{x-2}{3}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z}{2} \Rightarrow \vec{V_L}=(3,-1,2)=\vec{V_{P''}},$$

$$A=(1,2,-1)\in P''$$

$$\Rightarrow P'':3(x-1)-1(y-2)+2(z+1)=0$$

$$\Rightarrow P'':3x-y+2z+1=0$$

$$\Rightarrow d:\begin{cases} x-2y+z+4=0 \\ 3x-y+2z+1=0 \end{cases}$$ معادله‌ی خط خواسته شده

در صورتی که بخواهیم معادله‌ی کانونیک خط d را به دست آوریم، باید معادله‌ی دو صفحه‌ی مصور این خط روی دو صفحه‌ی مختصات را به دست آوریم.

(صفحه‌های مصور یک خط، سه صفحه هستند که بر آن خط می‌گذرند و بر صفحه‌های مختصات عمودند). خواهیم داشت:

$$\begin{cases} P': x-2y+z+4=0 \\ P'': 3x-y+2z+1=0 \end{cases} -2P'+P''=0 \Rightarrow x+3y-7=0 \quad (1)$$

$$-P'+2P''=0 \Rightarrow +5x+3z-2=0 \quad (2)$$

$$(1)\Rightarrow x=-3y+7 \quad (3),(2)\Rightarrow x=\frac{-3z+2}{5} \quad (4)$$

$$(3),(4)\Rightarrow x=-\frac{3y-7}{1}=\frac{-3z+2}{5}$$

$$\Rightarrow x=\frac{y-\frac{7}{3}}{-\frac{1}{3}}=\frac{z-\frac{2}{3}}{-\frac{5}{3}} \Rightarrow \frac{x}{3}=\frac{y-\frac{7}{3}}{-1}=\frac{z-\frac{2}{3}}{-5}$$

معادله‌ی کانونیک خط d، فصل مشترک دو صفحه‌ی P' و P'' که جواب مسئله است.

مثال ۲. نقطه‌ی $A=(0,-2,1)$ و خط $L:\frac{x+1}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z-1}{4}$ و صفحه‌ی $P:z=0$ داده شده‌اند. معادله‌ی خطی را بنویسید که از نقطه‌ی A می‌گذرد، با صفحه‌ی P موازی و بر خط L عمود است.

حل: به طوری که دیده می‌شود، در این مسئله، صفحه‌ی P بر صفحه‌ی xoy از دستگاه مختصات قائم o-xyz در فضا منطبق است: بنابراین، محاسبه‌ها و به طور کلی راه‌حل مسئله ساده‌تر خواهد بود. برای حل این مسئله، معادله‌ی صفحه‌ی P' را که از A به موازات صفحه‌ی P رسم می‌شود، هم‌چنین معادله‌ی صفحه‌ی P'' را که از نقطه‌ی A عمود بر خط L رسم می‌شود، می‌نویسیم و فصل مشترک آن‌ها را به دست می‌آوریم. داریم:

$$A=(0,-2,1)\in P' \Rightarrow P':z=z_0 \Rightarrow z=1$$

$$\vec{V_L}(2,3,4)=\vec{V_{P''}} \Rightarrow P'':2(x-0)+3(y+2)+4(z-1)=0$$

$$\Rightarrow P'':2x+3y+4z+2=0$$

$$\Rightarrow d:\begin{cases} z=1 \\ 2x+3y+4z+2=0 \end{cases} \Rightarrow 2x+3y+4(1)+2=0$$

$$\Rightarrow 2x+3y+6=0 \Rightarrow 2x=-3(y+2) \Rightarrow \frac{x}{-3}=\frac{y+2}{2}$$

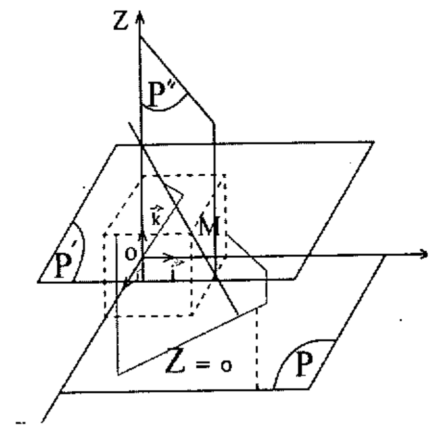
$$\Rightarrow d:\begin{cases} \dfrac{x}{-3}=\dfrac{y+2}{2} \\ z=1 \end{cases}$$

معادله‌ی کانونیک خط d، که جواب مسئله است

مثال ۳. معادله‌ی خطی را بنویسید که از نقطه‌ی $M = (۲,۲,۲)$ به موازات صفحه‌ی $P: z = ۰$ رسم می‌شود و بر

خط $L: \begin{cases} x = y - ۲ \\ z = ۱ \end{cases}$ عمود است.

حل: به‌طوری که دیده می‌شود، صفحه‌ی P بر صفحه‌ی xoy منطبق است ($z = ۰$ معادله‌ی صفحه‌ی xoy است) و خط L نیز موازی صفحه‌ی P است، زیرا داریم:



$$\vec{V}_P = (۰,۰,۱),\ \vec{V}_L = (۱,۱,۰) \Rightarrow \vec{V}_P . \vec{V}_L = ۰+۰+۰=۰$$

$$\Rightarrow \vec{V}_P - \vec{V}_L \Rightarrow \vec{L} || P$$

اکنون معادله‌ی صفحه‌ی P' را که از نقطه‌ی M موازی صفحه‌ی P رسم می‌شود، می‌نویسیم. سپس معادله‌ی صفحه‌ی P'' را که از M عمود بر خط L رسم می‌شود می‌نویسیم و معادله‌ی فصل مشترک دو صفحه‌ی P' و P'' را که خط d جواب مسئله است، به دست می‌آوریم.

$$P': z = z_۰ \Rightarrow P': z = ۲ \quad و \quad \vec{V}_{P''} = \vec{V}_L = (۱,۱,۰)$$

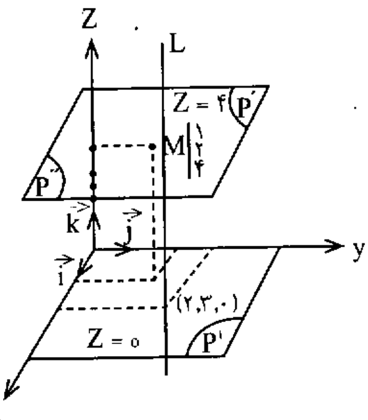
$$P'': ۱(x-۲)+۱(y-۲)+۰(z-۲)=۰ \Rightarrow P'': x+y-۴=۰$$

$$\Rightarrow d: \begin{cases} z=۲ \\ x+y-۴=۰ \end{cases} \Rightarrow d: \begin{cases} x = \frac{y-۴}{-۱} \\ z=۲ \end{cases}$$

مثال ۴. معادله‌ی خطی را بنویسید که از نقطه‌ی $A = (۱,۲,۴)$ موازی صفحه‌ی $P: z = ۰$ و عمود بر خط

$L: \begin{cases} x = ۲ \\ y = ۳ \end{cases}$ باشد.

حل: در این مسئله، صفحه‌ی P منطبق بر صفحه‌ی xoy از دستگاه مختصات o-xyz و خط L عمود بر صفحه‌ی P یا در این مسئله، عمود بر صفحه‌ی xoy است.



برای حل، معادله‌ی صفحه‌ی P' را که از A موازی صفحه‌ی P رسم می‌شود، هم‌چنین معادله‌ی صفحه‌ی P'' را که از نقطه‌ی A عمود بر خط L رسم می‌شود، می‌نویسیم و خط d، فصل مشترک آن‌ها را، به دست می‌آوریم.

داریم:

$$P' || P,\ A = (۱,۲,۴) \in P' \Rightarrow P': z = ۴ \quad (۱)$$

$$\vec{L} || P: \vec{V}_L = (۰,۰,۱),\ \vec{V}_P = (۰,۰,۱) \Rightarrow \vec{V}_L || \vec{V}_P$$

$$\Rightarrow \vec{L} || P \Rightarrow P'': ۰(x-۱)+۰(y-۲)+۱(z-۴)=۰$$

$$\Rightarrow P'': z-۴=۰ \Rightarrow P'': z=۴ \quad (۲)$$

به‌طوری که دیده می‌شود، دو صفحه‌ی P' و P'' برهم منطبق هستند. بنابراین، هر خطی که از نقطه‌ی A در این دو صفحه‌ی منطبق برهم می‌گذرد، جواب مسئله است. یعنی مسئله بی‌شمار جواب دارد.

برای تعیین معادله‌ی یک خط دل‌خواه از این مجموعه خط، کافی است مختصات یک نقطه‌ی دل‌خواه از صفحه‌ی مشترک P' و P'' را به دست آوریم و آن‌گاه معادله‌ی خط گذرنده از این نقطه و نقطه‌ی A را بنویسیم. برای مثال داریم:

$$B = (۰,۰,۴) \in P' = P'' \quad و \quad A = (۱,۲,۴)$$

$$\Rightarrow AB: \frac{x-۱}{۰-۱} = \frac{y-۲}{۰-۲} = \frac{z-۴}{۴-۴} \Rightarrow AB = d_۱: \begin{cases} \frac{x-۱}{-۱} = \frac{y-۲}{-۲} \\ z-۴=۰ \end{cases}$$

$$\Rightarrow d_۱: \begin{cases} x = \frac{y}{۲} \\ z = ۴ \end{cases}$$

و اینک یک جواب دیگر:

$$C = (۳,۱,۴) \in P' = P'' \quad و \quad A = (۱,۲,۴)$$

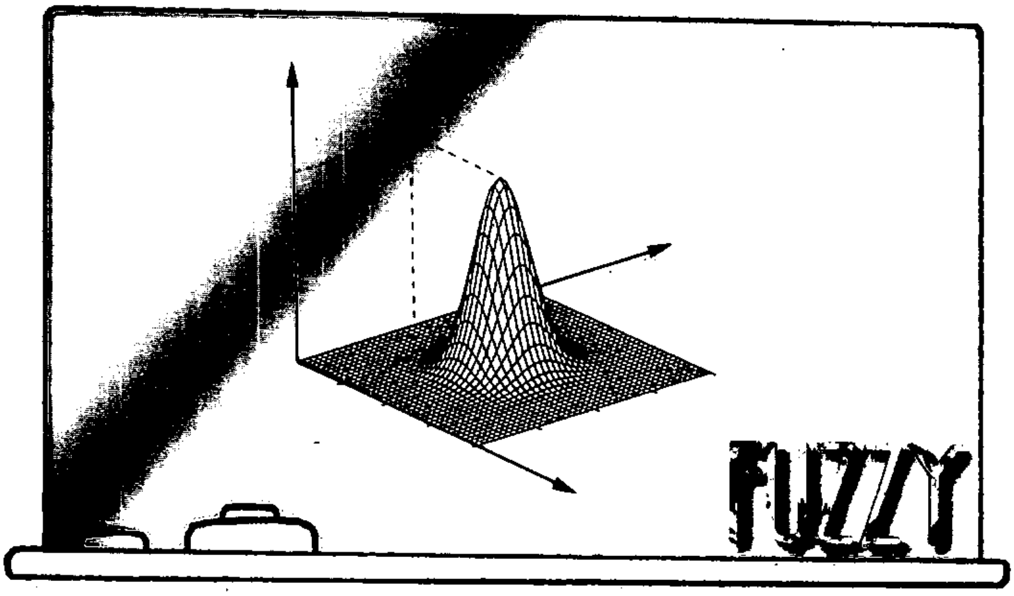
$$\Rightarrow AC: \frac{x-۱}{۳-۱} = \frac{y-۲}{۱-۲} = \frac{z-۴}{۴-۴} \Rightarrow AC: \begin{cases} \frac{x-۱}{۲} = \frac{y-۲}{-۱} \\ z-۴=۰ \end{cases}$$

$$\Rightarrow AC = d_۲: \begin{cases} \frac{x-۱}{۲} = \frac{y-۲}{-۱} \\ z = ۴ \end{cases}$$

با همین روش، معادله‌ی خط‌های دیگر جواب مسئله را می‌توان به دست آورد.

دکتر محمدعلی فریبرزی عراقی°

۶



نظریه‌ی مجموعه‌های فازی

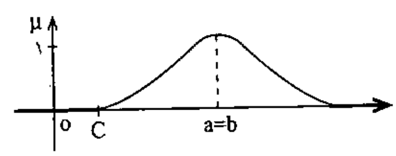
سرآغاز

مغز انسان مملو از مفاهیم فازی است. انسان با مجموعه‌های فازی فکر می‌کند و هرکدام از مرزهای فازی خود را با روش‌های متفاوت تعریف و مشخص می‌کند. اجزای جهان را در قالب مجموعه‌های فازی انباشته می‌کند و سپس به استدلال روی آن‌ها می‌پردازد. این همان چیزی است که به منطق فازی شهرت دارد. این منطق، رایانه‌ها را به فکر کردن روی مجموعه‌های فازی وامی‌دارد و به پیشرفتی می‌انجامد که نتیجه‌ی آن قدرت استدلال رایانه‌ها به کمک مجموعه‌های فازی است. در جهان، هر چیزی درجه‌بندی شده است. حتی اعداد که بیانگر دقت هستند، می‌توانند به شکل فازی مدل‌سازی شوند و اعداد فازی را پدید آورند. درواقع منظور از منطق فازی، استدلال کردن با اعداد فازی و مجموعه‌های فازی است. در این حالت، باید بتوانیم رایانه‌ای طراحی کنیم که قادر باشد با اعداد فازی در قالب جملات شرطی به صورت اگر- آن‌گاه یا قوانین تجربی، به استدلال بپردازد. مجموعه‌های فازی زمانی مطرح می‌شوند که یک مرز مبهم و نامشخص وجود داشته باشد. در این حالت، بین بودن (A) و نبودن (نه A) یک تلاقی رخ می‌دهد و این حالت نمی‌تواند با منطق دو ارزشی تفسیر شود. برای مثال، کلاسی را در نظر بگیرید که در آن معلم از دانش‌آموزان سؤالاتی از این قبیل می‌پرسد: کدام یک از شما گرمتان است؟ کدام یک خوش‌حال هستید؟ چه کسانی خود را موفق و خوش‌بخت می‌دانند؟ چند نفر از شما قد بلند هستید؟ کدامتان برای امتحان آمادگی دارید؟...

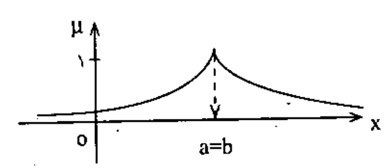
در این حالت، اگر برخی از محصلان دست‌های خود را کامل بالا ببرند و برخی اصلاً بالا نبرند و هم‌چنین برخی دست‌های خود را کمی بالا ببرند و برخی نیز نه به طور کامل بالا ببرند، نمی‌توان با یک قانون دقیق و قطعی، حد فاصلی برای احساس گرما کردن یا نکردن، خوش‌حال بودن یا نبودن، موفق بودن یا نبودن و امثال آن‌ها قائل شد. تنها در محیط منطق فازی می‌توان این مفاهیم را بررسی کرد. در این بحث، ابتدا عدد فازی نوع LR را معرفی و در ادامه یکی از اصول بنیادین نظریه‌ی مجموعه‌های فازی با عنوان «اصل گسترش»[1] را مطرح می‌کنیم.

یادآوری می‌کنیم که یک عدد فازی، مجموعه‌ی فازی روی خط حقیقی با تابع عضویت پیوسته، محدب، نرمال و تکیه‌گاهی کران‌دار است. در این حالت، مقدار تابع عضویت در خارج از بازه‌ای چون $[c,d]$ صفر است و دو عدد حقیقی a

و b وجود دارند که $c \le a \le b \le d$ و تابع عضویت روی $[c,a]$ به‌طور یکنواخت صعودی و روی $[b,d]$ به‌طور یکنواخت نزولی است. در این حالت، مقدار تابع عضویت به ازای هر $x \in [a,b]$ یک است (شکل ۱). در صورتی که تکیه‌گاه مجموعه‌ای بیکران باشد، در برخی از کتاب‌های فازی، به آن عدد شبه‌فازی[۲] گفته می‌شود. در این حالت، اعداد حقیقی a و b که $a \le b$ وجود دارند که برای هر $x \in [a,b]$، مقدار تابع عضویت یک است. هم‌چنین $\lim_{x\to+\infty} \mu_{\tilde{A}}(x) = 0$ و $\lim_{x\to-\infty} \mu_{\tilde{A}}(x) = 0$ (شکل ۲).



شکل ۱ نمونه‌ای از یک عدد فازی با تکیه‌گاه کران‌دار



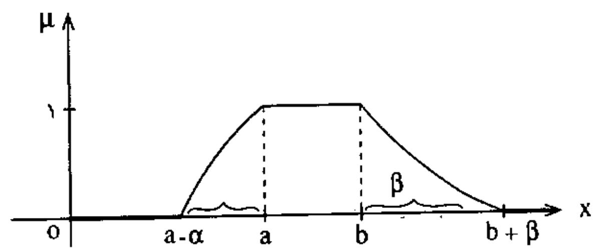
شکل ۲ نمونه‌ای از یک عدد فازی با تکیه‌گاه بی‌کران (عدد شبه‌فازی)

تعریف: در صورتی که تابع عضویت عدد فازی $\tilde{A}$ (با تکیه‌گاه کران‌دار) دارای نمایش کلی زیر باشد، آن‌گاه $\tilde{A}$ را یک عدد فازی از نوع LR می‌گوییم

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} L(\frac{a-x}{\alpha}) & a-\alpha \le x \le a \\ 1 & a \le x \le b \\ R(\frac{x-b}{\beta}) & b \le x \le b+\beta \end{cases}$$

که در آن $L:[0,1] \to [0,1]$ و $R:[0,1] \to [0,1]$ توابعی پیوسته و ناصعودی با خاصیت $L(0) = R(0) = 1$ و $L(1) = R(1) = 0$ موسوم به توابع مرجع یا توابع شکل[۳] هستند. در این حالت می‌نویسیم $\tilde{A} = (a,b,\alpha,\beta)_{LR}$.

به دو عدد مثبت α و β به‌ترتیب پهنا (یا گستره)ی چپ و پهنای راست می‌گوییم. تکیه‌گاه عدد فازی $\tilde{A}$ به‌صورت $\text{Sup}\tilde{A} = (a-\alpha, b+\beta)$ است (شکل ۳).



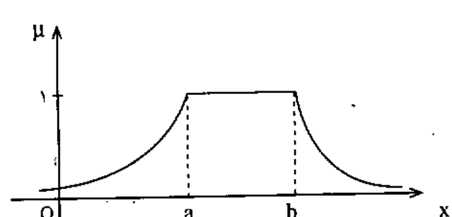
شکل ۳ نمونه‌ای از یک عدد فازی LR با تکیه‌گاه کران‌دار

هم‌چنین، در صورتی که تابع عضویت عدد فازی $\tilde{A}$ با تکیه‌گاه بی‌کران (عدد شبه‌فازی) دارای نمایش کلی زیر باشد، $\tilde{A}$ را یک عدد فازی از نوع LR می‌گوییم.

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} L(\frac{a-x}{\alpha}) & x \le a \\ 1 & a \le x \le b \\ R(\frac{x-b}{\beta}) & x \ge b \end{cases}$$

که در آن $L:[0,+\infty] \to [0,1]$ و $R:[0,+\infty] \to [0,1]$ توابعی پیوسته و ناصعودی با خاصیت $L(0) = R(0) = 1$ و $\lim_{x\to+\infty} R(x) = \lim_{x\to+\infty} L(x) = 0$ هستند.

در این حالت نیز، مشابه حالت قبل، عدد فازی $\tilde{A}$ را به‌صورت $\tilde{A} = (a,b,\alpha,\beta)_{LR}$ نمایش می‌دهیم (شکل ۴).



شکل ۴ نمونه‌ای از یک عدد فازی نوع LR با تکیه‌گاه بی‌کران

گاهی اوقات عدد فازی از نوع LR را چون به‌ازای کلیه‌ی مقادیر موجود در $[a,b]$ دارای درجه‌ی عضویت یک است، بازه‌ی فازی از نوع LR هم می‌گویند. در حالت خاص، اگر $a = b = m$ یعنی در حالتی که فقط در یک نقطه مقدار تابع عضویت یک باشد، به عدد فازی نوع LR، شبه‌مثلثی نیز می‌گویند. در این حالت می‌نویسیم $\tilde{A} = (m,\alpha,\beta)_{LR}$. اعداد فازی مثلثی و ذوزنقه‌ای که قبلاً معرفی شدند، حالت‌های

خاصی از اعداد فازی نوع LR هستند. در صورتی که در تعریف فوق $\alpha=\beta=0$ ، عدد $\tilde{A}=(a,b,0,0)_{LR}$ یک بازه‌ی قطعی (همان بازه‌ی $[a,b]$) و در صورتی که در این حالت $a=b=m$ عدد $\tilde{A}=(m,m,0,0)_{LR}$ یک عدد قطعی (همان عدد حقیقی m) است.

نمونه‌هایی از ضابطه‌ی توابع مرجع L و R عبارت‌اند از: (L برای معرفی تابع طرف چپ و R برای معرفی تابع طرف راست استفاده می‌شود.)

$\frac{1}{1+x^2}$ و e^{-x} و e^{-x^2} و $\max\{0,1-x^p\}(p>0)$ و $\frac{1}{1+2|x|}$

در حالتی که $L(x)=R(x)=\max\{0,1-x\}$ عدد فازی نوع LR همان عدد فازی ذوزنقه‌ای را مشخص می‌کند که اگر $a=b=m$ این عدد همان عدد فازی مثلثی است.

اعمال روی اعداد فازی نوع LR (در حالت شبه‌مثلثی)

فرض کنیم $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ دو عدد فازی نوع LR به صورت کلی $\tilde{A}=(m,\alpha,\beta)_{LR}$ و $\tilde{B}=(n,\gamma,\delta)_{LR}$ باشند. در این صورت، جمع و تفریق این دو عدد فازی و نیز قرینه‌ی یک عدد فازی نوع LR به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\tilde{A}\oplus\tilde{B}=(m+n,\alpha+\gamma,\beta+\delta)_{LR}$$

$$-\tilde{A}=(-m,\beta,\alpha)_{LR}$$

$$\tilde{A}\ominus\tilde{B}=(m-n,\alpha+\delta,\beta+\gamma)_{LR}$$

لازم به ذکر است، ضرب و تقسیم دو عدد فازی نوع LR لزوماً به صورت یک عدد فازی نوع LR نیست، ولی به صورت تقریبی می‌توان آن‌ها را با یک عدد فازی نوع LR برابر گرفت. برای نمونه در زیر، ضرب دو عدد فازی $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ تعریف شده‌اند. برای عمل تقسیم، علاقه‌مندان می‌توانند به کتاب‌های مرجع فازی نظیر مرجع ۵ مراجعه کنند.

$$\tilde{A}\otimes\tilde{B}\approx\begin{cases}(mn,m\gamma+n\alpha,m\delta+n\beta)_{LR} & \tilde{A},\tilde{B}>0 \text{ اگر}\\(mn,n\alpha-m\delta,n\beta-m\gamma)_{LR} & \tilde{B}>0,\tilde{A}<0 \text{ اگر}\\(mn,-n\beta-m\delta,-n\alpha-m\gamma)_{LR} & \tilde{A},\tilde{B}<0 \text{ اگر}\end{cases}$$

ملاحظه می‌شود، ضرب این دو عدد فازی تعریف پیچیده‌تری دارد و به مثبت یا منفی بودن عدد وابسته است. به این ترتیب، اگر عدد فازی مثبت یا منفی نباشد، ضرب آن‌ها قابل تعریف نیست. حالت کلی اعمال روی اعداد فازی نوع LR در کتاب‌های پیشرفته‌ی مجموعه‌های فازی مطرح شده‌اند که به علت پیچیدگی، در این مقاله بررسی نمی‌شوند.

مثال: فرض کنید $L(x)=R(x)=\frac{1}{1+x^2}$ و $\tilde{A}=(1,0/5,0/8)_{LR}$ و $\tilde{B}=(2,0/6,0/2)_{LR}$. در این حالت:

$$\mu_{\tilde{A}}(x)=\begin{cases}L(\frac{1-x}{0/5})=\frac{1}{1+(\frac{1-x}{0/5})^2}=\frac{1}{1+4(1-x)^2} & x\le 1\\ R(\frac{x-1}{0/8})=\frac{1}{1+(\frac{x-1}{0/8})^2}=\frac{1}{1+\frac{25}{16}(x-1)^2} & x\ge 1\end{cases}$$

به همین ترتیب:

$$\mu_{\tilde{B}}(x)=\begin{cases}\frac{1}{1+\frac{25}{9}(2-x)^2} & x\le 2\\ \frac{1}{1+25(x-2)^2} & x\ge 2\end{cases}$$

هم‌چنین:

$$-\tilde{B}=(-2,0/2,0/6)_{LR}$$

$$\tilde{A}\oplus\tilde{B}=(1,0/5,0/8)_{LR}\oplus(2,0/6,0/2)_{LR}=(3,1/1,1)_{LR}$$

$$\tilde{A}\ominus\tilde{B}=(1,0/5,0/8)_{LR}\ominus(2,0/6,0/2)_{LR}=(-1,0/7,1/4)_{LR}$$

و با توجه به مثبت بودن هر دو عدد فازی $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ خواهیم داشت:

$$\tilde{A}\otimes\tilde{B}=(1,0/5,0/8)_{LR}\otimes(2,0/6,0/2)_{LR}\approx(2,1/6,1/8)_{LR}$$

اصل گسترش یکی از مفاهیم اساسی و یک ابزار مهم در نظریه‌ی مجموعه‌های فازی است که به کمک آن می‌توان مفاهیم کلاسیک ریاضی را به محیط فازی تعمیم داد. در آنالیز ریاضی، مفاهیمی نظیر تابع، مشتق و انتگرال را می‌توان به کمک اصل گسترش، به حالت فازی گسترش داد. این اصل اولین بار توسط **لطفی عسگرزاده** مطرح و سپس توسط **جین**[3] و **دوبویس**[4] و **پرید**[5] مورد استفاده قرار گرفت.

اصل گسترش: فرض کنیم، X و Y مجموعه‌های قطعی باشند و f نگاشتی از X به Y باشد $(f:X\to Y)$ به‌طوری که برای $x\in X$ ، $f(x)=y\in Y$ و فرض کنیم $\tilde{A}$ یک زیرمجموعه‌ی فازی X باشد. در این صورت، تابع عضویت $f(\tilde{A})$ به‌عنوان یک زیرمجموعه‌ی فازی از Y به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mu_{f(\tilde{A})}(y)=\begin{cases}\operatorname{Sup}\ \mu_{\tilde{A}}(x) & f^{-1}(y)\ne\phi\\ 0 & \text{در غیر این صورت}\end{cases}$$

که در آن $f^{-1}(y)$ به معنای تصویر معکوس عضو y در Y

است، یعنی:

$$f^{-1}(y) = \{x \in X | f(x) = y\}$$

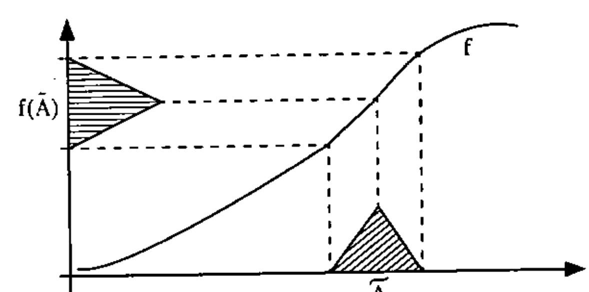
لازم به ذکر است، نماد Sup به معنای کوچک‌ترین کران بالای یک مجموعه و «سوپرمم» خوانده می‌شود. مثلاً سوپرمم مجموعه‌ی $[\circ,1)$ عدد ۱ است و سوپرمم مجموعه‌ی $\{-1,\circ,1,2,3,4\}$ عدد ۴ است.

در صورتی که سوپرمم یک مجموعه عضو همان مجموعه باشد، این عدد همان ماکزیمم مجموعه خواهد بود. هم‌چنین اگر مجموعه‌ای متناهی باشد، سوپرمم همان ماکزیمم یعنی بزرگ‌ترین عضو آن مجموعه خواهد بود. به این ترتیب، اگر مجموعه‌ی $f^{-1}(y)$ متناهی باشد، نماد Sup در صورت اصل گسترش مذکور در بالا، به نماد Max تبدیل می‌شود. هم‌چنین، اگر نگاشت f اکیداً یک‌نوا باشد، چون در این حالت اعضای موجود در برد f (R_f) تنها تصویر یک عضو از X هستند، لذا $f^{-1}(y)$ مجموعه‌ای تک‌عضوی است و می‌توان نماد Sup یا Max را برداشت و تابع عضویت را در اصل گسترش به شکل زیر در نظر گرفت:

$$\mu_{f(\tilde{A})}(y) = \begin{cases} \mu_{\tilde{A}}(f^{-1}(y)) & y \in R_f \\ \circ & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

که $R_f = \{y \in Y | \exists x \in X, f(x) = y\}$.

به عبارت دیگر، اگر f نگاشتی یک به یک باشد، برای $y \in R_f$ داریم: $\mu_{f(\tilde{A})}(y) = \mu_{\tilde{A}}(f^{-1}(y))$ و اگر f یک‌به‌یک نباشد، چون دو یا چند مقدار متمایز در x می‌تواند به‌عنوان تصویر معکوس عضو $y \in Y$ نگاشته شود، بین مقادیر تابع عضویت $\tilde{A}$ در نقاط موجود در تصویر معکوس y، مقدار بزرگ‌تر را به تابع عضویت $f(\tilde{A})$ در y نسبت می‌دهیم. شکل زیر، عملکرد اصل گسترش را در حالتی که f تابعی صعودی است، نمایش می‌دهد.



شکل ۵ اصل گسترش برای یک تابع صعودی یکنواخت

مثال ۱: فرض کنیم $\begin{cases} f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ f(x) = x^2 \end{cases}$ و $\tilde{A}$ مجموعه‌ای فازی با تابع عضویت زیر باشد:

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{2} & 1 \le x \le 3 \\ \frac{5-x}{2} & 3 \le x \le 5 \\ \circ & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

این تابع عضویت بیانگر عدد فازی مثلثی تقریباً ۳ است که می‌توان آن را به صورت زیر نیز نوشت:

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} 1 - \frac{|3-x|}{2} & |3-x| \le 2 \\ \circ & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

با توجه به این‌که $\text{Supp}\tilde{A} = (1,5)$ و به‌ازای مقادیر موجود در این بازه تابع f یک‌به‌یک است و چون $y = x^2$ لذا $x = \sqrt{y}$ که $y \ge \circ$ یعنی: $f^{-1}(y) = \sqrt{y}$. به این ترتیب، بنابر اصل گسترش داریم:

$$\mu_{f(\tilde{A})}(y) = \mu_{\tilde{A}}(\sqrt{y}), \quad y \ge \circ$$

به این ترتیب:

$$\mu_{f(\tilde{A})}(y) = \begin{cases} \frac{\sqrt{y}-1}{2}, & 1 \le y \le 9 \\ \frac{5-\sqrt{y}}{2}, & 9 \le y \le 25 \\ \circ & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

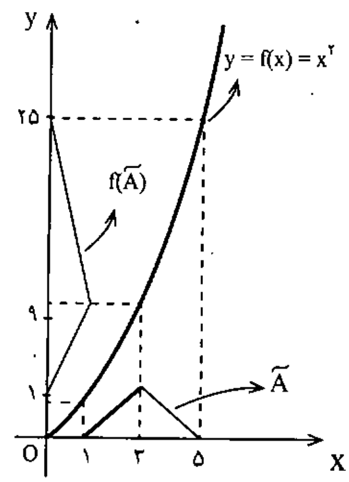
که می‌توان آن را به صورت زیر نیز خلاصه کرد:

$$\mu_{f(\tilde{A})}(y) = \begin{cases} 1 - \frac{|3-\sqrt{y}|}{2}, & |3-\sqrt{y}| \le 2, y \ge \circ \\ \circ & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

ملاحظه می‌کنیم، تابع عضویت فوق بیانگر عدد فازی مثلثی تقریباً ۹ است. عدد فازی مثلثی $\tilde{A}$ به‌صورت $\tilde{A} = (3,2,2)$ و عدد فازی مثلثی $\tilde{B} = f(\tilde{A})$ به‌صورت

$\tilde{B}=(۹,۸,۱۶)$ است.

البته نمی‌توان گفت همواره یک عدد فازی مثلثی یا ذوزنقه‌ای به یک عدد فازی مثلثی یا ذوزنقه‌ای تصویر می‌شود و این به ضابطه‌ی تابع f و خواص این تابع وابسته است. شکل زیر، نتیجه‌ی اجرای اصل گسترش را روی مثال فوق مشخص می‌کند. در این حالت می‌توان نوشت: $f(\tilde{A})=\tilde{A}^۲$.



شکل ۶ **اعمال اصل گسترش در مثال ۱**

مثال ۲: فرض کنیم $\tilde{A}=\{(-۱,۰/۵),(۰,۰/۸),(۱,۱),(۲,۰/۴)\}$ و $y=f(x)=x^۲$. در این حالت $x\in\{-۱,۰,۱,۲\}$ و $y\in\{۱,۰,۴\}$. بنابراین $f^{-۱}(y)$ مجموعه‌ای متناهی برای هر کدام از مقادیر y خواهد بود. در این حالت:

اگر $y=۱\Rightarrow f^{-۱}(۱)=\{-۱,۱\}\Rightarrow \mu_{f(\tilde{A})}(۱)=\underset{x\in f^{-۱}(y)}{Max}\mu_{\tilde{A}}(x)$

$=Max\{\mu_{\tilde{A}}(۱),\ \mu_{\tilde{A}}(-۱)\}=Max\{۱,۰/۵\}=۱$

اگر $y=۰\Rightarrow f^{-۱}(۰)=\{۰\}\Rightarrow \mu_{f(\tilde{A})}(۰)=\mu_{\tilde{A}}(۰)=۰/۸$

اگر $y=۴\Rightarrow f^{-۱}(۴)=\{۲\}\Rightarrow \mu_{f(\tilde{A})}(۴)=\mu_{\tilde{A}}(۲)=۰/۴$

به این ترتیب:

$\tilde{B}=f(\tilde{A})=\{(۰,۰/۸),(۱,۱),(۴,۰/۴)\}$

نکته: اگر $\lambda\neq ۰$، عدد حقیقی و $f(x)=\lambda x$ تابعی خطی و $\tilde{A}$ یک عدد فازی باشد، چون $x=f^{-۱}(y)=\frac{۱}{\lambda}y$، بنابر اصل گسترش:

$$\mu_{f(\tilde{A})}(y)=Sup\{\mu_{\tilde{A}}(x)|\lambda x=y\}=\mu_{\tilde{A}}(\frac{y}{\lambda})$$

در این حالت می‌توان نوشت:

$f(\tilde{A})=\lambda\tilde{A}$

مثلاً به‌ازای $\lambda=۵$ خواهیم داشت:

$$y=f(x)=۵x\Rightarrow x=\frac{y}{۵}$$

$$\Rightarrow \mu_{f(\tilde{A})}(y)=\mu_{\tilde{A}}(\frac{y}{۵})$$

حال اگر $\tilde{A}$ همان عدد فازی مثال ۱ باشد، با جای‌گذاری $\frac{y}{۵}$ به جای x در ضابطه‌ی تابع عضویت $\tilde{A}$ خواهیم داشت:

$$\mu_{۵\tilde{A}}(y)=\begin{cases}\frac{y-۵}{۱۰}, & ۵\le y\le ۱۵\\ \frac{۲۵-y}{۱۰}, & ۱۵\le y\le ۲۵\\ ۰ & \text{در غیر این صورت}\end{cases}$$

ملاحظه می‌کنیم، تابع عضویت فوق بیانگر عدد فازی مثلثی تقریباً ۱۵ است. به این ترتیب، طبق اصل گسترش عدد فازی $\tilde{A}=(۳,۲,۲)$ (تقریباً ۳) تحت تابع f با ضابطه‌ی $f(x)=۵x$ به عدد فازی $\tilde{B}=f(\tilde{A})=(۱۵,۱۰,۱۰)$ نگاشته می‌شود.

نکته: اگر $\tilde{A}$ یک عدد فازی باشد و $f(x)=۰.x=۰$ آن‌گاه تابع عضویت عدد فازی $\tilde{A}\times۰$ بنابر اصل گسترش به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\mu_{f(\tilde{A})}(y)=\mu_{۰\times\tilde{A}}(y)=Sup\{\mu_{\tilde{A}}(x)|۰.x=y\}=\begin{cases}۰ & y\neq ۰\\ ۱ & y=۰\end{cases}$$

یعنی: $۰\times\tilde{A}=\tilde{۰}$.

اصل گسترش یک صورت کلی‌تر دارد که در آن f روی حاصل‌ضرب دکارتی n مجموعه مرجع قطعی در نظر گرفته می‌شود. علاقه‌مندان می‌توانند برای مطالعه‌ی بیشتر روی این اصل، به مراجع مذکور در انتهای مقاله مراجعه کنند. در قسمت بعد، مباحثی دیگر از منطق فازی را می‌آوریم.

پی‌نوشت

* عضو هیئت علمی دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکزی

1. Extension Principle
2. Quasi Fuzzy number
3. Shape (Refrence) function
4. Dubois
5. prade

منابع

۱. منهاج، محمدباقر. محاسبات فازی. انتشارات دانش‌نگار. چاپ اول. ۱۳۸۶.

۲. کاسکو، بارت. تفکر فازی. دانشگاه خواجه نصیرالدین طوسی. چاپ اول. ۱۳۷۷. ترجمه‌ی علی غفاری و دیگران.

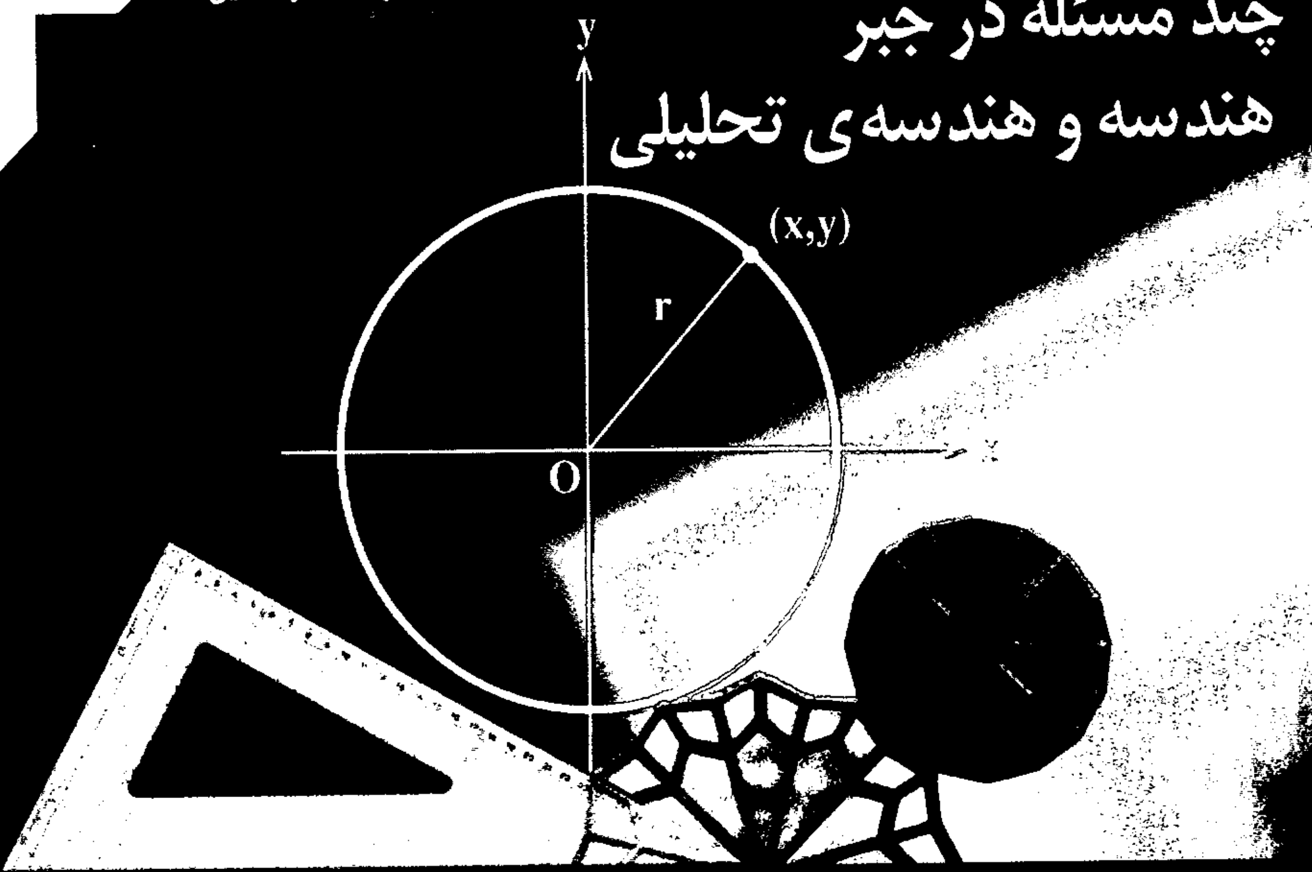
3. Fuller, R. Fuzzy Reasoning and Fuzzy optimization. Turko centre for Computer science, Abo, 1998.

4. Zimmermann H. J., Fuzzy Sets theory and its applications. 3rd edition. Kluwer Academic Publishers. 1996.

5. Dubois D. & Prade H., Fuzzy set and systems. theory and applications. Academic Press, Inc. 1980.

دکتر احمد شرف‌الدین

چند مسئله در جبر هندسه و هندسه‌ی تحلیلی



مسئله‌ی جبر ....

تعداد $(x+1)$ عدد حقیقیِ دوبه‌دو متمایز a_1 ، a_2 ، ... ، a_{n+1} و متغیر حقیقی x را در نظر می‌گیریم و مجموعه‌ی زیر را با عضوهای $x-a_1$ ، $x-a_2$ ، ... ، $x-a_{n+1}$ تشکیل می‌دهیم:

$$E=\{x-a_1, x-a_2, \ldots, x-a_n, x-a_{n+1}\}$$

از اعضای مجموعه‌ی E ، n تا n تا انتخاب می‌کنیم و هر n عضو انتخاب شده را در هم ضرب می‌کنیم. سپس حاصل ضرب‌ها را باهم جمع می‌کنیم و مجموع را $f_n(x)$ می‌نامیم:

ثابت کنید معادله‌ی زیر دارای n جواب حقیقی دوبه‌دو متمایز است:

$$f_n(x)=0$$

دو برهان ....

برهان اول

بدون کاسته شدن از کلیت استدلال فرض می‌کنیم: $a_1<a_2<\ldots<a_{n+1}$ چندجمله‌ای $f_n(x)=0$ شامل

$(n+1)$ حاصل ضرب است. فقط یکی از این حاصل ضرب‌ها شامل $(x-a_1)$ نیست و آن حاصل ضرب به صورت زیر است:

$$(x-a_2)(x-a_3)(x-a_4)\ldots(x-a_{n+1})$$

هم‌چنین، فقط یکی از حاصل ضرب‌های یادشده شامل $(x-a_2)$ نیست که به صورت زیر است:

$$(x-a_1)(x-a_3)(x-a_4)\ldots(x-a_{n+1})$$

دو رابطه‌ی زیر را در نظر می‌گیریم (در تابع $f_n(x)$ یک‌بار به‌جای x ، a_1 و یک‌بار a_2 می‌گذاریم:

$$\begin{cases} f_n(a_1)=(a_1-a_2)(a_1-a_3)(a_1-a_4)\ldots(a_1-a_{n+1}) \\ f_n(a_2)=(a_2-a_1)(a_2-a_3)(a_2-a_4)\ldots(a_2-a_{n+1}) \end{cases}$$

از دو رابطه‌ی بالا، رابطه‌ی زیر به‌دست می‌آید:

$$f_n(a_1).f_n(a_2)=(a_1-a_2)(a_2-a_1)$$
$$\times[(a_1-a_3)(a_2-a_3)]\ [(a_1-a_4)(a_2-a_4)]$$
$$\times\ldots\times[(a_1-a_{n+1})(a_2-a_{n+1})]$$

مقدار داخل هر کروشه مثبت است، زیرا مثلاً چون $a_1<a_2<a_3$ پس $(a_1-a_3)(a_2-a_3)>0$.

عبارت جلوی کروشه‌ی اول، یعنی $(a_1-a_2)(a_2-a_1)$ منفی است. پس $f_n(a_1)f_n(a_2)<0$. تابع $f_n(x)$ پیوسته است، زیرا یک چندجمله‌ای است. بنابراین، چندجمله‌ای $f_n(x)$ حداقل به ازای یک مقدار بین a_1 و a_2 صفر می‌شود. با همین شیوه‌ی استدلال نتیجه می‌شود، چندجمله‌ای مذکور در هر یک از فاصله‌های (a_2,a_3)، (a_3,a_4)، ... و (a_n,a_{n+1}) حداقل یک ریشه دارد. اما در هر یک از فاصله‌های (a_1,a_2)، (a_2,a_3)، ... و (a_n,a_{n+1})، معادله‌ی $f_n(x)=0$ فقط یک ریشه دارد، نه بیشتر. زیرا در غیر این صورت به تناقض می‌رسیم.

می‌دانیم هر چندجمله‌ای که دارای n ریشه باشد، از درجه‌ی n است. اگر فرض کنیم که یک چندجمله‌ای درجه‌ی n دارای $(n+1)$ ریشه‌ی α_1، α_2، ...، α_n و α_{n+1} باشد، این معادله را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\dots(x-\alpha_n)(x-\alpha_{n+1})=0$$

و این معادله از درجه‌ی $(n+1)$ است (تناقض).

برهان دوم

عبارت زیر را تشکیل می‌دهیم:

$$q(x)=\frac{f_n(x)}{(x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_{n+1})}$$
$$=\frac{1}{x-a_1}+\frac{1}{x-a_2}+\dots+\frac{1}{x-a_{n+1}}$$

خط‌های $x=a_1$، $x=a_2$، ... و $x=a_{n+1}$ مجانب‌های قائم نمودار تابع $q(x)$ هستند.

مشتق تابع $q(x)$ نسبت به x چنین است:

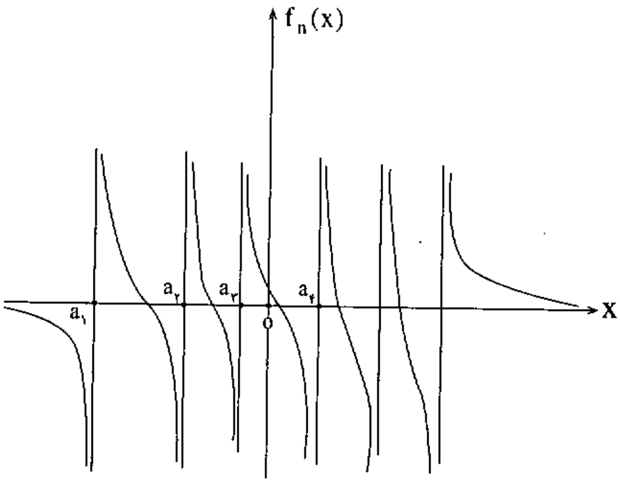
$$q'(x)=-\frac{1}{(x-a_1)^2}-\frac{1}{(x-a_2)^2}-\dots-\frac{1}{(x-a_{n+1})^2}$$

مشتق منفی است و لذا تابع نزولی است.

رفتار تابع را در یکی از فاصله‌ها مثلاً در فاصله‌ی (a_1,a_2) نشان می‌دهیم. تابع در این فاصله نزولی است و دو خط $x_1=a_1$ و $x_2=a_2$ دو مجانب نمودار هستند. به ازای $x=a_1+\varepsilon$ (ε مقدار مثبت بی‌نهایت کوچک فرض می‌شود)، مقدار تابع بی‌نهایت بزرگ است. به ازای $x=a_2-\varepsilon$ مقدار تابع منفی است و قدرمطلق آن بی‌نهایت بزرگ. نتیجه می‌شود که معادله‌ی $f_n(x)=0$ در فاصله‌ی (a_1,a_2) یک جواب و فقط یک جواب دارد.

معادله‌ی $f_n(x)=0$ در هر یک از فاصله‌های (a_2,a_3)، (a_3,a_4)، ... و (a_n,a_{n+1}) دارای جواب یکتاست. بنابراین، معادله‌ی موردنظر n جواب دارد.

نمودار معادله به شکل زیر است:



مسئله‌ای در چهارضلعی

چهارضلعی ABCD را در نظر می‌گیریم (شکل زیر). نقطه‌ی برخورد دو خط AB و CD را E و نقطه‌ی برخورد دو خط AD و BC را F می‌نامیم.

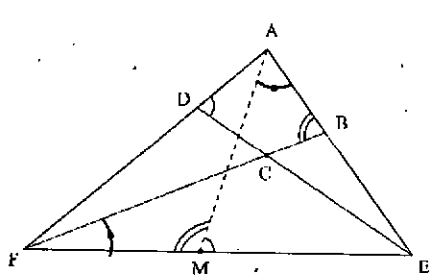
الف) ثابت کنید دایره‌های محیطی دو مثلث ABF و ADE روی خط EF یکدیگر را قطع می‌کنند.

ب) ثابت کنید رابطه‌ی زیر مسلم است:

$$\overline{EA}.\overline{EB}+\overline{FA}.\overline{FD}=\overline{EA}^2 \qquad (1)$$

پ) در مثلث ABC، دو ارتفاع BE و CE را در نظر می‌گیریم. ثابت کنید رابطه‌ی زیر محقق است:

$$\overline{BC}^2=\overline{BA}.\overline{BF}+\overline{CA}.\overline{CE} \qquad (2)$$



برهان

الف) نقطه‌ی برخورد دایره‌ی محیطی مثلث ADE را با خط EF نقطه‌ی M می‌نامیم. ثابت می‌کنیم دو زاویه‌ی ADE و AME روبه‌روی یک کمان‌اند. زاویه‌ی ABF مکمل زاویه‌ی ADE است و زاویه‌ی AMF مکمل زاویه‌ی ADE است. پس دو زاویه‌ی ABF و AMF برابرند. نتیجه می‌شود که نقطه‌ی M روی دایره‌ی محیطی مثلث ABF قرار دارد.

ب) ثابت می‌کنیم دو مثلث EAM و EFB متشابهند، زیرا زاویه‌ی E در هر مثلث مشترک است. دو زاویه‌ی EMA و EFB برابرند، زیرا در دایره‌ی محیطی چهارضلعی ABMF، دو زاویه‌ی یادشده، مقابل به کمان EM قرار دارند. از تشابه این دو مثلث، رابطه‌ی زیر نتیجه می‌شود:

$$\frac{\overline{EB}}{\overline{EF}}=\frac{\overline{EM}}{\overline{EA}}$$

از این تساوی رابطه‌ی زیر به‌دست می‌آید:

$$\overline{EA}.\overline{EB}=\overline{EF}.\overline{EM} \qquad (3)$$

با همین شیوه‌ی استدلال، درستی رابطه‌ی زیر را ثابت می‌کنیم:

$$\overline{FA}.\overline{FD}=\overline{FM}.\overline{FE} \qquad (4)$$

به کمک دو رابطه‌ی ۳ و ۴، رابطه‌ی زیر را می‌نویسیم:

$$\overline{EA}.\overline{EB}+\overline{FA}.\overline{FD}=\overline{EF}^2$$

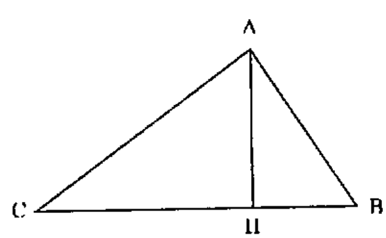
پ) به کمک حکم پ، رابطه‌ی ۲ ثابت می‌شود.

خاصیتی از مثلث قائم‌الزاویه ....

می‌خواهیم یکی از خاصیت‌های مثلث قائم‌الزاویه را از سه راه ثابت می‌کنیم:

قضیه: در مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABC که A رأس زاویه‌ی قائمه و AH ارتفاع است، رابطه‌ی زیر بین طول‌های دو ضلع زاویه‌ی قائمه و ارتفاع وجود دارد:

$$\frac{1}{\overline{AH}^2}=\frac{1}{\overline{AB}^2}+\frac{1}{\overline{AC}^2} \qquad (1)$$



برهان ....

الف) اثبات با مثلثات: دو رابطه‌ی زیر را می‌نویسیم:

$$\begin{cases}\dfrac{\overline{AH}}{\overline{AB}}=\sin B\\[2mm] \dfrac{\overline{AH}}{\overline{AC}}=\sin C\end{cases}$$

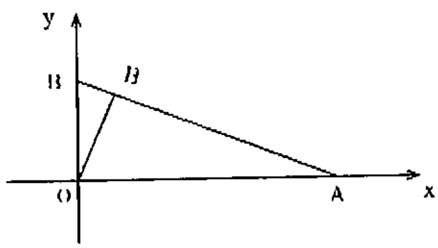
چون زاویه‌ی B متمم زاویه‌ی C است، نتیجه می‌شود:

$$\frac{\overline{AH}^2}{\overline{AB}^2}+\frac{\overline{AH}^2}{\overline{AC}^2}=\sin^2 B+\cos^2 B=1 \qquad (2)$$

از رابطه‌ی ۲، رابطه‌ی ۱ به‌دست می‌آید.

ب) برهان با هندسه‌ی تحلیلی: در دستگاه مختصات oxy، دو نقطه‌ی A(a,o) و B(o,b) را در نظر می‌گیریم. طول ارتفاع OH را h می‌نامیم. می‌خواهیم ثابت کنیم:

$$\frac{1}{h^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2} \qquad (1)$$



در دستگاه مختصات oxy، دو نقطه‌ی A(a,o) و B(o,b) را در نظر می‌گیریم. طول ارتفاع OH را h می‌نامیم. معادله خط AB چنین است:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1 \qquad (2)$$

می‌دانیم که فاصله‌ی نقطه $M(x_0,y_0)$ از خط به معادله‌ی $ax+by+c=0$ از دستور زیر به‌دست می‌آید:

$$\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}} \qquad (3)$$

طول OH، ارتفاع مثلث قائم‌الزاویه‌ی OAB را از دستور ۳ حساب می‌کنیم. این چنین:

$$\overline{OH}=\frac{\left|\frac{1}{a}\times 0+\frac{1}{b}\times 0-1\right|}{\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}}} \qquad (4)$$

از رابطه‌ی ۴، رابطه‌ی مطلوب ۱ به‌دست می‌آید.

پ) برهان هندسی: در مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABC که A رأس زاویه‌ی قائمه است و طول‌های $\overline{AB}$، $\overline{AC}$ و $\overline{AH}$ را به ترتیب c، b و h می‌نامیم، دو رابطه‌ی زیرا را می‌نویسیم:

$$\begin{cases}b^2+c^2=a^2 & \text{(قضیه‌ی فیثاغورس)}\\ bc=ah & \text{(با به‌کارگیری مساحت مثلث)}\end{cases}$$

از دو رابطه‌ی بالا، رابطه‌ی زیر حاصل می‌شود:

$$\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=\frac{1}{h^2}$$

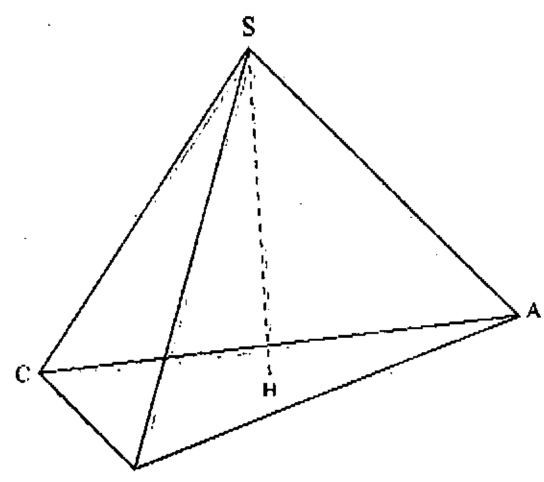
حکمی در چهاروجهی سه قائمه ....

تعریف چهاروجهی سه‌قائمه. چهاروجهی SABC را در رأس S، سه قائمه می‌نامند؛ اگر هر یک از سه زاویه‌ی اطراف رأس S یعنی سه زاویه‌ی ASB، BSC و CSA قائمه باشند.

حکم چنین است:

چهاروجهی SABC را که در رأس S سه قائمه است، در نظر می‌گیریم و ارتفاع رأس S را SH می‌نامیم. ثابت کنید رابطه‌ی زیر محقق است:

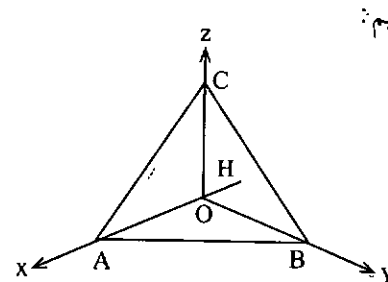
$$\frac{1}{\overline{SH}^2}=\frac{1}{\overline{SA}^2}+\frac{1}{\overline{SB}^2}+\frac{1}{\overline{SC}^2} \qquad (1)$$



برهان ۱ ....

الف) برهان با به‌کارگیری هندسه‌ی تحلیلی

دستگاه مختصات oxyz و نقاط $A(a,0,0)$، $B(0,b,0)$ و $C(0,0,c)$ را در نظر می‌گیریم. عمود OH را بر صفحه‌ی ABC وارد می‌کنیم:



معادله‌ی صفحه‌ی ABC چنین است:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1 \qquad (2)$$

می‌دانیم که فاصله‌ی نقطه‌ی $M(x_0,y_0,z_0)$ از صفحه‌ی $ax+by+cz=1$ چنین است:

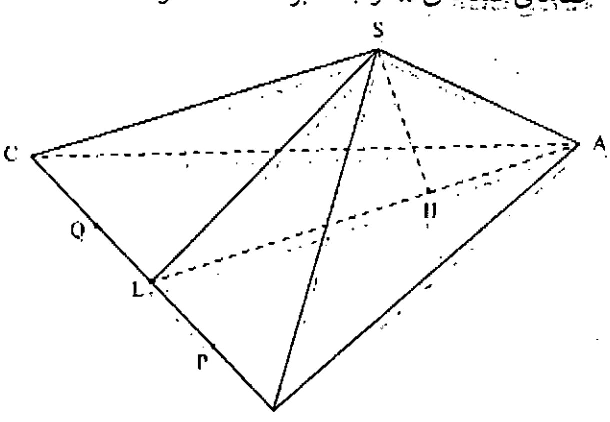
$$\frac{|ax_0+by_0+cz_0-1|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \qquad (3)$$

به کمک دستور ۳، فاصله‌ی نقطه‌ی o را از صفحه به معادله‌ی ۲ حساب می‌کنیم:

$$\overline{o'H}=\frac{\left|\frac{1}{a}\times 0+\frac{1}{b}\times 0+\frac{1}{c}\times 0-1\right|}{\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}}} \qquad (4)$$

از تساوی ۴، رابطه‌ی مطلوب ۱ به‌دست می‌آید.

برهان۲. چهاروجهی سه قائمه‌ی SABC، سه قائمه در رأس S را در نظر می‌گیریم. چون خط AS بر دو خط SB و SC از صفحه‌ی $SBC=\pi$ عمود است، پس خط AS بر تمام خط‌های صفحه‌ی π از جمله بر خط BC عمود است.

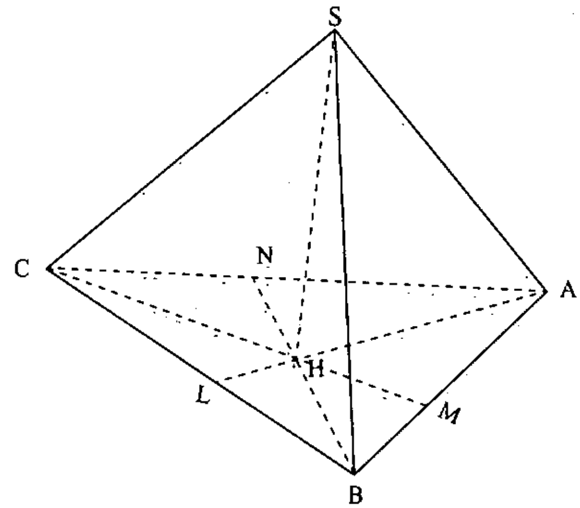


در صفحه‌ی π، از نقطه‌ی S خط SL را بر خط BC عمود می‌کنیم. از نقطه‌ی S، خط SH را بر صفحه‌ی ABC عمود می‌کنیم. اکنون می‌خواهیم ثابت کنیم خط AL ارتفاع مثلث ABC است و نقطه‌ی H که پای ارتفاع هرم SABC است، روی خط AL قرار دارد. دو نقطه‌ی P و Q را روی خط BC، به فاصله‌های مساوی از نقطه‌ی L اختیار می‌کنیم. هرم ASPQ نسبت به صفحه‌ی ASL متقارن است. برای درک آسان مطلب، نقطه‌ی A را رأس و مثلث APQ را قاعده‌ی هرم در نظر بگیریم و توجه داشته باشیم که هرم یاد شده قائم است (خط AS بر قاعده‌ی SPQ عمود است).

بنابراین، اگر عمود SH را بر صفحه‌ی APQ وارد کنیم، در صفحه‌ی ASP قرار می‌گیرد. نتیجه آن‌که نقطه‌ی H، پای

عمودی که از نقطه‌ی S بر صفحه‌ی ABC وارد می‌شود، بر نقطه‌ی تقاطع سه ارتفاع مثلث ABC می‌گذرد.

اکنون رابطه‌ی ۱ را ثابت می‌کنیم. در شکل زیر، SABC یک هرم است که زاویه‌های رأس S قائمه‌اند.



نقطه‌ی H، نقطه‌ی برخوردار سه ارتفاع مثلث ABC است. ارتفاع رأس S هرم از نقطه‌ی H می‌گذرد. ارتفاع رأس S از مثلث SBC و ارتفاع رأس A از مثلث ABC، یکدیگر را روی خط BC قطع می‌کنند. (این مطلب در سطرهای گذشته ثابت شده است).

در دو مثلث قائم‌الزاویه‌ی SBC و ASL، به ترتیب رابطه‌های زیر را می‌نویسیم:

$$\frac{1}{\overline{SB}^2}+\frac{1}{\overline{SC}^2}=\frac{1}{\overline{SL}^2}$$

$$\frac{1}{\overline{SA}^2}+\frac{1}{\overline{SL}^2}=\frac{1}{\overline{SH}^2}$$

از دو رابطه‌ی بالا، رابطه‌ی ۱ به دست می‌آید.

تبصره ....

الف) در مثلث ABC که زاویه‌ی A قائمه است، این رابطه‌ی برقرار است:

$$\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=\overline{BC}^2 \qquad (1)$$

برعکس، اگر در مثلث ABC رابطه‌ی ۱ برقرار باشد، زاویه‌ی A قائمه است. به عبارت دیگر، شرط لازم و کافی برای آن که در مثلث ABC زاویه‌ی A قائمه باشد، آن است که رابطه‌ی ۱ برقرار باشد.

ب) اگر در مثلث ABC که AH ارتفاع است، رابطه‌ی زیر برقرار باشد، آیا زاویه‌ی A قائمه است؟

$$\frac{1}{\overline{AB}^2}+\frac{1}{\overline{AC}^2}=\frac{1}{\overline{AH}^2} \qquad (2)$$

ثابت کردیم، در مثلث ABC که زاویه‌ی A قائمه و AH ارتفاع است، رابطه‌ی ۲ برقرار است. عکس این حکم صحیح نیست، یعنی اگر در مثلث ABC که AH ارتفاع است، رابطه‌ی ۲ برقرار باشد، زاویه‌ی A الزاماً قائمه نیست. در سطرهای آینده، در این باره توضیح می‌دهیم:

در صفحه‌ی p، دو نقطه‌ی ثابت B و C و نقطه‌ی متحرک A را درنظر می‌گیریم و پای عمود وارد از نقطه‌ی A بر خط BC را H می‌نامیم. مطلوب است مکان هندسی نقطه‌ی A به‌طوری که رابطه‌ی ۲ برقرار باشد.

حل. دستگاه مختصات دکارتی xy را طوری انتخاب می‌کنیم که محور xها بر خط BC منطبق باشد و مبدأ آن نقطه‌ی O وسط پاره‌خط BC باشد. طول پاره‌خط AB را ۲a فرض می‌کنیم. رابطه‌ی ۲ به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\frac{1}{y^2}=\frac{1}{(x-a)^2+y^2}+\frac{1}{(x+a)^2+y^2} \qquad (3)$$

معادله‌ی ۳ پس از عمل‌های جبری متعددی، به صورت زیر در می‌آید:

$$(x^2+y^2-a^2)(x^2-y^2-a^2)=0 \qquad (4)$$

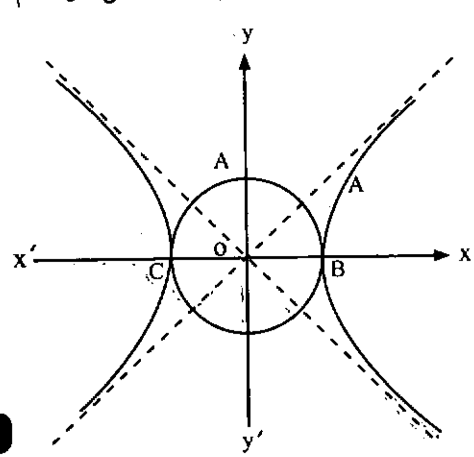
از معادله‌ی ۴ نتیجه می‌شود:

$$x^2+y^2-a^2=0 \qquad (5)$$

یا

$$x^2-y^2-a^2=0 \qquad (6)$$

نمودار معادله‌ی ۵ دایره‌ای به قطر BC است و نمودار ۶، یک هذلولی متساوی‌الساقین با رأس‌های B و C است. پس مکان هندسی نقطه‌ی A که در رابطه‌ی ۲ صدق کند، عبارت است از اجتماع دایره‌ای به قطر BC و هذلولی متساوی‌الساقینی با دو رأس B و C. نمودار معادله‌ی ۴ در شکل زیر رسم شده است.



● غلامرضا یاسی‌پور

با راهیان المپیادهای ریاضی



دستگاه‌های معادلات

در این بخش، دستگاه‌های معادلات نااستاندارد را انتخاب کرده‌ایم. اولین مسئله، گزیده‌ای است از المپیاد ریاضی بریتانیا در سال ۱۹۹۶:

۱. *جمیع جواب‌های اعداد حقیقی و مثبت a، b، c و d دستگاه زیر را بیابید:*

$$a+b+c+d=12$$

$$abcd = 27 + ab + ac + ad + bc + bd + cd$$

با استفاده از نابرابری AM − GM در معادله‌ی دوم، رابطه‌ی زیر را به دست می‌آوریم:

$$abcd \geq 27 + 6\sqrt{abcd}$$

با انتقال تمام عبارات به سمت چپ و تجزیه‌ی کل عبارت، و در نظر گرفتن آن به‌عنوان چندجمله‌ای درجه‌ی دومی برحسب $\sqrt{abcd}$، خواهیم داشت:

$$(\sqrt{abcd}+3)(\sqrt{abcd}-9) \geq 0$$

این نابرابری مستلزم آن است که داشته باشیم: $\sqrt{abcd} \geq 9$ که هرگاه با معادله‌ی اول دستگاه ترکیب شود، نابرابری زیر را بدهد:

$$\sqrt[4]{abcd} \geq \frac{a+b+c+d}{4}$$

نابرابری AM − GM مستلزم آن است که $a=b=c=d=3$ تنها جواب دستگاه باشد.

مسئله‌ی دوم، از المپیاد ریاضی ویتنام (سال ۱۹۹۶) برگزیده شده است.

۲. *جمیع اعداد حقیقی و مثبت x و y صادق در دستگاه معادلات زیر را بیابید:*

$$\sqrt{3x}\left(1+\frac{1}{x+y}\right)=2$$

$$\sqrt{7y}\left(1-\frac{1}{x+y}\right)=4\sqrt{2}$$

در این مسئله، جانشینی $u=\sqrt{x}$ و $v=\sqrt{y}$ طبیعی است.

در این صورت، دستگاه به‌صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$u\left(1+\frac{1}{u^2+v^2}\right)=\frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$v\left(1-\frac{1}{u^2+v^2}\right)=\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{7}}$$

اما u^2+v^2 مربع قدرمطلق عدد مختلط $z=u+iv$ است. این مطلب ما را راهنمایی می‌کند که معادله‌ی دوم ضرب در i را با معادله‌ی اول جمع کنیم. در این صورت داریم:

$$u+iv+\frac{u-iv}{u^2+v^2}=\left(\frac{2}{\sqrt{3}}+i\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{7}}\right)$$

خارج قسمت $\frac{(u-iv)}{(u^2+v^2)}$ برابر است با:

$$\frac{\bar{z}}{|z|^2}=\frac{\bar{z}}{(z\bar{z})}=\frac{1}{z}$$

بنابراین، معادله‌ی بالا به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$z+\frac{1}{z}=\left(\frac{2}{\sqrt{3}}+i\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{7}}\right)$$

درنتیجه z در معادله‌ی درجه‌ی دوم $z^2-\left(\frac{2}{\sqrt{3}}+i\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{7}}\right)z+1=0$ با جواب‌های

$$\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\pm\frac{2}{\sqrt{21}}\right)+i\left(\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{7}}\pm\sqrt{2}\right)$$

صدق می‌کند که در آن علامت‌های + و − متناظرند.

این موضوع نشان می‌دهد، دستگاه اولیه جواب‌های زیر را دارد:

$$x = \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \pm \frac{2}{\sqrt{21}}\right)^2, \quad y = \left(\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{7}} \pm \sqrt{2}\right)^2$$

که در آن علامت‌های + و − متناظرند.

دستگاه‌های زیر، جز در موارد مشخص‌شده، برحسب جواب‌های حقیقی حل می‌شوند.

مسائل

۱. دستگاه زیر را حل کنید:

$$\log(2xy) = \log x \quad \log y$$
$$\log(yz) = \log y \quad \log z$$
$$\log(2zx) = \log z \quad \log x$$

۲. جمع جواب‌های دستگاه معادلات زیر را بیابید:

$$\frac{4x^2}{4x^2+1} = y$$
$$\frac{4y^2}{4y^2+1} = z$$
$$\frac{4z^2}{4z^2+1} = x$$

۳. درصورتی که اعداد a، b، x و y در دستگاه معادلات زیر صدق کنند، $ax^5 + by^5$ را بیابید:

$$ax + by = 3$$
$$ax^2 + by^2 = 7$$
$$ax^3 + by^3 = 16$$
$$ax^4 + by^4 = 42$$

۴. دستگاه زیر را حل کنید:

$$x + \frac{2}{x} = 2y$$
$$y + \frac{2}{y} = 2z$$
$$z + \frac{2}{z} = 2x$$

۵. دستگاه معادلات زیر را حل کنید:

$$(x+y)^3 = z$$
$$(y+z)^3 = x$$
$$(z+x)^3 = y$$

۶. دستگاه زیر را حل کنید:

$$x^2 - |x| = |yz|$$
$$y^2 - |y| = |zx|$$
$$z^2 - |z| = |xy|$$

۷. جواب‌های دستگاه معادلات زیر را بیابید:

$$x + \lfloor y \rfloor + \{z\} = 1.1$$
$$\lfloor x \rfloor + \{y\} + z = 2.2$$
$$\{x\} + y + \lfloor z \rfloor = 3.3$$

که در آن ⌊ ⌋ و { }، به‌ترتیب بزرگ‌ترین تابع صحیح و جزء کسری تابع را نشان می‌دهند.

۸. به‌ازای عدد مختلط مفروض a، جواب‌های متفاوت دستگاه زیر را بیابید:

$$(x_1 + x_2 + x_3)x_4 = a$$
$$(x_1 + x_2 + x_4)x_3 = a$$
$$(x_1 + x_3 + x_4)x_2 = a$$
$$(x_2 + x_3 + x_4)x_1 = a$$

۹. جمع عددهای حقیقی aای را بیابید که به‌ازای آن‌ها، اعداد حقیقی نامنفی x_1، x_2، x_3، x_4 و x_5 صادق و در دستگاه زیر موجودند:

$$\sum_{k=1}^{5} kx_k = a$$
$$\sum_{k=1}^{5} k^3 x_k = a^2$$
$$\sum_{k=1}^{5} k^5 x_k = a^3$$

۱۰. دستگاه معادلات زیر را حل کنید:

$$x^3 - 9(y^2 + 3y - 3) = 0$$
$$y^3 - 9(z^2 + 3z - 3) = 0$$
$$z^3 - 9(x^2 + 3x - 3) = 0$$

۱۱. دستگاه زیر را حل کنید:

$$ax + by = (x-y)^2$$
$$by + cz = (y-z)^2$$
$$cz + ax = (z-x)^2$$

در این دستگاه: $a, b, c > 0$.

۱۲. فرض می‌کنیم a، b و c اعدادی حقیقی و مثبت (نه همه برابر) باشند. جمع جواب‌های حقیقی x، y و z دستگاه معادلات زیر را بیابید:

$$x^2 - yz = a$$
$$y^2 - zx = b$$
$$z^2 - xy = c$$



۱. داریم:

$$\log(2xy) = \log 2 + \log x + \log y$$

با انتقال لگاریتم‌های شامل متغیر به سمت راست و افزودن ۱ به هر طرف سه معادله، حاصل می‌کنیم:

$$\log 20 = (\log x - 1)(\log y - 1)$$
$$1 = (\log y - 1)(\log z - 1)$$
$$\log 20 = (\log z - 1)(\log x - 1)$$

با ضرب جمیع معادلات و گرفتن ریشه‌ی دوم خواهیم داشت:

$$\pm \log 20 = (\log x - 1)(\log y - 1)(\log z - 1)$$

این رابطه، در ترکیب با برابری زیر:

$$\log 20 = (\log x - 1)(\log y - 1)$$

نشان می‌دهد: $\log 2 - 1 = \pm 1$

معادله‌های دیگر، $\log x - 1 = \pm \log 20$ و $\log y - 1 = \pm 1$ را به‌دست می‌دهند و دو جواب دستگاه یعنی $(200,100,100)$ و $(\frac{1}{2},1,1)$ را به‌دست می‌آوریم.

۲. کار را با ملاحظه‌ی این مطلب آغاز می‌کنیم که تابع: $f:[0,\infty) \to [0,\infty), f(t) = \frac{4t^2}{(4t^2+1)}$ اکیداً صعودی است.
درنتیجه اگر $x < y$، آن‌گاه $f(x) < f(y)$. بنابراین $y < z$.
با تکرار این استدلال، $z < x$ را به‌دست می‌آوریم.
درنتیجه داریم: $x < y < z < x$ که غیرممکن است.
به همین ترتیب، $x > y$ به تناقض می‌انجامد.
بنابراین: $x = y = z$.

حل معادله‌ی $t = \frac{4t^2}{(4t^2+1)}$، دو مقدار $t = \frac{1}{2}$ یا $t = 0$ را به‌دست می‌دهد. درنتیجه، تنها سه‌تایی‌هایی که در دستگاه صادق‌اند، عبارت‌اند از:

$(0,0,0)$ و $(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2})$

(المپیاد ریاضی کانادا، ۱۹۹۶)

۳. به ازای $n = 2$ و $n = 3$، اتحاد

$$(ax^n + by^n)(x+y) - (ax^{n-1} + by^{n-1})xy = ax^{n+1} + by^{n+1}$$

به معادلات زیر می‌انجامد:

$7(x+y) - 3xy = 16$ و $16(x+y) - 7xy = 42$

حل هم‌زمان این دو معادله، $x + y = -14$ و $xy = -38$ را به‌دست می‌دهد.

با به‌کار بردن اتحاد بازگشتی، به ازای $n = 4$ داریم:

$$ax^5 + by^5 = (42)(-14) - (16)(-38) = -588 + 608 + 20$$

۴. فرض می‌کنیم (x,y,z) یکی از جواب‌ها باشد. واضح است، اگر یکی از این عددها مثبت باشد، دو عدد دیگر نیز باید مثبت باشند. در صورت ضرورت، با ضرب در ۱− می‌توان فرض کرد: $x,y,z > 0$.

با جمع سه معادله حاصل می‌کنیم:

$$x + y + z = 2(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z})$$

نیز، کاربرد نابرابری AM − GM در مورد هر معادله‌ی دستگاه، موارد زیر را به‌دست می‌دهد:

$2x \ge 2\sqrt{2}$ و $2y \ge 2\sqrt{2}$ و $2z \ge 2\sqrt{2}$

این موضوع نشان می‌دهد که در معادله‌ی فوق، سمت چپ بزرگ‌تر از یا برابر با $3\sqrt{2}$ است. در حالی که سمت راست کمتر از یا برابر با $3\sqrt{2}$ است. برای به‌دست آوردن برابری، باید داشته باشیم:

$$x = y = z = \sqrt{2}$$

که یک جواب را به دست می‌دهد. جواب دیگر، با تغییر علامت به دست می‌آید و عبارت است از:

$$x = y = z = -\sqrt{2}$$

تبصره: این دستگاه به‌صورت:

$y = f(x)$ و $z = f(y)$ و $x = f(z)$

است که در آن داریم:

$$f(t) = \frac{1}{2}(t + \frac{2}{t})$$

دنباله‌ی داده شده با $n \ge 0$ و $t_{n+1} = f(t_n)$ و $t_0 \in \mathbb{R}$ به‌طور سنتی برای محاسبه‌ی $\sqrt{2}$ با دقت بسیار به‌کار رفته است، زیرا با سرعت خوبی به آن هم‌گرا می‌شود. هریک از جمله‌های تالی، بی‌توجه به مقدار $t_0 \in \mathbb{R}$، در قدرمطلق بزرگ‌تر از یا برابر با $\sqrt{2}$ است. اگر برای راحتی کار فرض کنیم: $t_0 > 0$، آن‌گاه داریم: $t_n \ge r_2$، به‌ازای $n \ge 1$ و نیز:

$t_1 \ge t_2 \ge \cdots$

جمله‌ی واقع در این دنباله، تنها اگر دقیقاً $\sqrt{2}$ باشد، می‌تواند تکرار شود. حل دستگاهی مشابه با هر تعداد متغیر، مشکل نیست.

۵. با تفریق معادله‌ی دوم از معادله‌ی اول، به‌دست می‌آوریم:

$$(x-z)((x+y)^2+(x+y)(x+z)+(y+z)^2)=z-x$$

از آن‌جا که:

$$(x+y)^2+(x+y)(y+z)+(y+z)^2>0$$

به‌دست می‌آوریم: $x=z$. بنا به تقارن، $y=z$، و کار ما به حل معادله‌ی $8x^3=x$ می‌انجامد. این معادله دارای جواب‌های $x=0$ و $x=\pm\frac{1}{2}$ است. نتیجه می‌شود، جواب‌های دستگاه معادلات مفروض عبارت‌اند از:

$$x=y=z=0$$

$$x=y=z=\frac{1}{(2\sqrt{2})}$$

$$x=y=z=-\frac{1}{(2\sqrt{2})}$$

(تورنمنت شهرها، ۱۹۸۵)

۶. فرض می‌کنیم (x,y,z) یکی از جواب‌ها باشد. اگر $xyz\neq 0$، آن‌گاه از آن‌جا که قدرمطلق مثبت است، موارد زیر را به‌دست می‌آوریم:

$$x^2>|yz| \text{ و } y^2>|zx| \text{ و } z^2>|xy|$$

با ضرب این موارد داریم:

$$x^2y^2z^2>x^2y^2z^2$$

که متناقض است. بنابراین یکی از اعداد صفر است، و با استفاده از معادله‌ای که شامل آن در سمت چپ است، درمی‌یابیم که یکی دیگر از این سه عدد نیز باید صفر باشد. عدد سوم تنها می‌تواند ۰ یا ۱± باشد.

به این ترتیب، جواب‌ها عبارت‌اند از:

$(0,0,0)$ ، $(1,0,0)$ ، $(0,1,0)$ ، $(0,0,1)$ ، $(-1,0,0)$ ، $(0,-1,0)$ و $(0,0,-1)$

۷. با جمع سه معادله به دست می‌آوریم:

$$2x+2y+2z=6.6$$

درنتیجه:

$$x+y+z=3.3$$

تفریق معادلات اولیه از این معادله، دستگاه هم‌ارز زیر را به‌دست می‌دهد:

$$\{y\}+\lfloor z\rfloor=2.2$$

$$\{x\}+\lfloor y\rfloor=1.1$$

$$\{z\}+\lfloor x\rfloor=0$$

جواب‌های اولین معادله $\{y\}=0.2$ و $\lfloor z\rfloor=2$، جواب‌های دومین معادله $\{x\}=0.1$ و $\lfloor y\rfloor=1$ و جواب‌های سومین معادله $\{z\}=0$ و $\lfloor x\rfloor=0$ هستند. درنتیجه، جواب دستگاه عبارت است از: $x=0.1$ ، $y=1.2$ و $z=2$.

(مسابقه‌ی ریاضی رومانی ۱۹۷۹، طرح از T. Anderscu)

۸. فرض می‌کنیم:

$$s=x_1+x_2+x_3+x_4$$

در این صورت دستگاه می‌شود:

$$(s-x_4)x_4=a$$

$$(s-x_3)x_3=a$$

$$(s-x_2)x_2=a$$

$$(s-x_1)x_1=a$$

که هم‌ارز مورد زیر است:

$$x_k^2-sx_k+a=0 \text{ و } k=1,2,3,4$$

نتیجه می‌شود که x_1 ، x_2 ، x_3 و x_4 جواب‌های معادله‌ی زیرند:

$$u^2-su+a=0$$

ادامه‌ی کار بدیهی است. به جای این‌که ۱۶ حالت ممکن را به‌طور جداگانه تحلیل کنیم، به‌طریق زیر اقدام می‌کنیم:

اگر $x_1=x_2=x_3=x_4$ ، هر x_i برابر $s/4$ است. با قرار دادن این رابطه در هریک از معادلات داریم: $s=\pm4\alpha$ که در آن α یکی از جواب‌های معادله‌ی $a=3x^2$ است (به‌خاطر داشته باشید که a مختلط است و بنابراین نماد $\sqrt{a}$ معنی ندارد). این حالت به دو جواب $(\alpha,\alpha,\alpha,\alpha)$ و $(-\alpha,-\alpha,-\alpha,-\alpha)$ می‌انجامد.

اگر دو x_i متمایز باشند، مثلاً $x_1\neq x_2$ ، آن‌گاه این دو،

ریشه‌های معادله‌ی $u^2 - su + a = 0$ می‌شوند و بنابراین مجموعشان s است. در این صورت داریم:

$x_3 + x_4 = 0$

بررسی دو حالت کافی است.

اگر $x_4 \neq x_3$ باشد، همین استدلال نشان می‌دهد که: $x_3 + x_4 = s$. درنتیجه $s = 0$، و چهارتایی (x_1, x_2, x_3, x_4) به صورت $(\beta, -\beta, \beta, -\beta)$ است که در آن β یکی از جواب‌های معادله‌ی $x^2 + a = 0$ است. از تقارن، شش جواب زیر را به‌دست می‌آوریم:

$$(\beta,-\beta,\beta,-\beta),(\beta,\beta,-\beta,-\beta)(\beta,-\beta,-\beta,\beta),(-\beta,\beta,\beta,-\beta),(-\beta,\beta,-\beta,\beta),(-\beta,-\beta,\beta,\beta)$$

اگر داشته باشیم: $x_1 \neq x_2$ و $x_3 = x_4$، آن‌گاه خواهیم داشت: $x_3 = x_4 = 0$. این مستلزم آن است که سه x_i برابر صفر و چهارمی s باشد. اما این حالت، اگر و تنها اگر $a = 0$ باشد، امکان‌پذیر است. در این حال، جواب‌های اضافی $(0,0,0,s)$ و $(0,0,s,0)$ و $(0,s,0,0)$ و $(s,0,0,0)$ را با sای به‌دست می‌آوریم که عددی مختلط است.

(امتحان انتخابی IMO رومانی، ۱۹۷۶، طرح از T.Cuculescu)

۹. راه‌حل اول: توجه داشته باشید که $(0,0,0,0,0)$ یکی از جواب‌هاست. فرض می‌کنیم x_1، x_2، x_3، x_4 و x_5 جواب‌های نابدیهی هستند. بنابراین:

$$\sum(ak - k^3)x_k = 0$$

و:

$$\sum(ak^3 - k^5)x_k = 0$$

داریم:

$$\sum_{k^2 \le a}(a - k^2)kx_k = \sum_{k^2 > a}(a - k^2)kx_k$$

$$\sum_{k^2 \le a}(a - k^2)k^3x_k = \sum_{k^2 > a}(a - k^2)k^3x_k$$

اما:

$$\sum_{k^2 \le a}(a - k^2)k^3x_k \le a\sum_{k^2 \le a}(a - k^2)kx_k$$
$$= a\sum_{k^2 > a}(a - k^2)kx_k \le \sum_{k^2 > a}(a - k^2)k^3x_k$$

از آن‌جا که جمله‌های اول و آخر برابرند، جمیع علامت‌های نابرابری، درواقع برابری‌اند. در این صورت داریم:

$$\sum_{k^2 > a} a(a - k^2)kx_k = \sum_{k^2 > a} k^2(a - k^2)kx_4$$

اما به ازای $k^2 > a$ داریم:

$$a(k^2 - a)kx_k > k^2(k^2 - a)kx_k$$

که در ترکیب با نابرابری فوق، نشان می‌دهد که به ازای $k^2 > a$ داریم: $x_k = 0$.

استدلالی مشابه نشان می‌دهد، اگر $k^2 < a$ و $a_k = 0$، بنابراین برای این‌که دستگاه جواب نابدیهی را قبول کند، باید a برابر یکی از مربع‌های کامل ۱، ۴، ۹، ۱۶ و ۲۵ باشد.

توجه داشته باشید که اگر به‌ازای ۵ یا $m = 1,2,3,4$ داشته باشیم $a = m^2$، آن‌گاه به‌ازای $k \neq m$ و $x_k = 0$، $x_m = m$ یک جواب خواهد بود.

راه‌حل دوم: مانند قبل، فرض می‌کنیم x_1، x_2، x_3، x_4 و x_5 جواب‌هایی نابدیهی باشند. از معادلات دستگاه نتیجه می‌شود:

$$\left(\sum_{k=1}^{5} k^3x_k\right)^2 = \left(\sum_{k=1}^{5} kx_k\right)\left(\sum_{k=1}^{5} k^5x_k\right)$$

از طرف دیگر، نابرابری کوشی-شوارتز، چون در مورد دنباله‌های

$$\left\{\sqrt{kx_k}\right\}_{k=1,\dots,5} \text{ و } \left\{\sqrt{k^5x_k}\right\}_{k=1,\dots,5}$$

به کار رود، می‌دهد:

$$\left(\sum_{k=1}^{5} k^3x_k\right)^2 \le \left(\sum_{k=1}^{5} kx_k\right)\left(\sum_{k=1}^{5} k^5x_k\right)$$

رابطه‌ی استنتاج شده در فوق نشان می‌دهد، در نابرابری کوشی-شوارتز، برابری داریم و درنتیجه دو دنباله متناسب‌اند. به ازای $x_k = 0$، داریم:

$$\frac{\sqrt{k^5x_k}}{\sqrt{kx_k}} = k^2$$

و از آن‌جا که جمیع این مقادیر متمایزند، نتیجه می‌شود که به‌ازای دقیقاً یک k داریم: $x_k \neq 0$. مانند قبل درمی‌یابیم، تنها مقادیر ممکن a عبارت‌اند از: ۱، ۴، ۹، ۱۶ و ۲۵.

(المپیاد بین‌المللی ریاضی بیست‌ویکم، ۱۹۷۹)

۱۰. دستگاه را می‌توان به صورت زیر دوباره‌نویسی کرد:

$$(y-3)^3 = y^3 - x^3$$

$$(z-3)^3 = z^3 - y^3$$

$$(x-3) = x^3 - z^3$$

با جمع آن‌ها خواهیم داشت:

$$(x-3)^3 + (y-3)^3 + (z-3)^3 = 0$$

بدون از دست رفتن کلیت کار، می‌توان فرض کرد که: $x \geq 3$. از سومین معادله‌ی دستگاه اولیه درمی‌یابیم:

$$z^3 - 27 = 9x(x-3)$$

از این رو:

$$z \geq 3$$

به همین ترتیب، $y \geq 3$، و برقراری نابرابری فوق مستلزم آن است که تنها جواب ممکن عبارت باشد از:

$$x = y = z = 3$$

۱۱. با جمع معادله‌ی سوم با اول، و تفریق از دوم، خواهیم داشت:

$$2ax = (x-y)^2 + (z-x)^2 - (y-z)^2$$
$$= 2(x^2 - xy - xz + yz)$$

با تجزیه‌ی این عبارت به دست می‌آوریم:

$$ax = (x-y)(x-z)$$

با روشی مشابه به دست می‌آوریم:

$$by = (y-z)(y-x) \text{ و } cz = (z-x)(z-y)$$

اکنون فرض می‌کنیم (x,y,z) یک جواب باشد. بدون از دست دادن کلیت کار، می‌توان فرض کرد: $x \geq y \geq z$. در این صورت:

$$by = (y-z)(y-x) \leq 0$$

و

$$cz = (z-x)(z-y) \geq 0$$

و شرایط $b > 0$ و $c > 0$ مستلزم آن است که: $y \leq 0 \leq z \leq y$.

به این ترتیب داریم: $y = z = 0$ و $ax = x^2$. بنابراین، در این حالت جواب‌ها عبارت‌اند از: $(0,0,0)$ و $(a,0,0)$. بنابر تقارن، جمیع جواب‌ها عبارت‌اند از:

$(0,0,0)$ و $(a,0,0)$ و $(0,b,0)$ و $(0,0,c)$

(المپیاد ریاضی بالکان، ۱۹۸۴)



۱۲. مربع کردن هر معادله و تفریق از حاصل ضرب دو معادله‌ی دیگر می‌دهد:

$$a^2 - bc = x(x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz)$$
$$b^2 - ca = y(x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz)$$
$$c^2 - ab = z(x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz)$$

فرض می‌کنیم:

$$k = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$$

در این صورت:

$$(a^2 - bc)^2 - (b^2 - ca)(c^2 - ab) = k^2(x^2 - yz) = k^2 a$$

محاسبه‌ی مشابهی که دستگاه فوق به دست می‌دهد، نشان می‌دهد که عبارت سمت چپ عبارت است از:

$$a(a^3 + b^3 + c^3 - 3abc)$$

و مورد اخیر، با توجه به نابرابری AM − GM، مثبت است. درنتیجه:

$$k = \pm\sqrt{a^3 + b^3 + c^3 - 3abc}$$

و دو جواب دستگاه (به ازای هر انتخاب k یکی) عبارت‌اند از:

$$x = \frac{a^2 - bc}{k} \text{ و } y = \frac{b^2 - ca}{k} \text{ و } z = \frac{c^2 - ab}{k}$$

(طرح از k.kedlaya برای المپیاد بین‌المللی ریاضی ایالات متحده، ۱۹۹۸)

● سید محمدرضا هاشمی موسوی

معادله‌های سیاله و روش‌های حل آن‌ها

اشاره

در قسمت قبل، به کاربردهای هم‌نهشتی در حل مسئله‌هایی در سطح المپیاد اشاره کردیم. در این قسمت می‌کوشیم، ابتدا روش‌های حل معادله‌های سیاله را بیاوریم و سپس روش‌های جدید حل معادله‌های دیوفانتی چند متغیره را که بر پایه‌ی هم‌نهشتی است، ارائه دهیم. از آن‌جا که بسیاری از مسئله‌های علوم پایه (ریاضی، فیزیک، شیمی و...) به یک معادله‌ی جبری چند متغیره می‌انجامد، اهمیت روش‌های حل معادله‌های سیاله‌ی چند متغیره به وضوح روشن می‌شود.

معادله‌های سیاله ....

می‌دانیم، بسیاری از مسئله‌های جبر به معادله‌هایی می‌انجامد که تعداد مجهول‌های مسئله، بیش از تعداد معادله‌های مربوط به آن است. از لحاظ تاریخی، این گونه مسئله‌ها از زمان **دیوفانت** مطرح بوده‌اند و به همین مناسبت به آن‌ها «معادله‌های دیوفانتی» می‌گویند. از طرف دیگر، بسیاری از مسئله‌های فیزیک، شیمی و دیگر رشته‌ها، به حل یکی از انواع درجه nام معادله‌های سیاله منجر می‌شود که هیچ الگوریتمی برای حل آن‌ها وجود ندارد. در حال حاضر نیز این گونه معادله‌ها در مسابقه‌ها و المپیادها، به‌عنوان مسئله‌هایی مستقل دیده می‌شوند. بنابراین، حل و بحث در مورد معادله‌های سیاله، بسیار ضروری به‌نظر می‌رسد.

اگرچه تا به‌حال به جز در مورد معادله‌های سیاله‌ی درجه اول دو مجهولی و یا بعضی از نوع‌های دیگر، فقط راه‌حل‌های عمومی و کلی ذکر شده است، ولی در واقع ذوق و ابتکار هر شخص، بیش از هر قاعده‌ای می‌تواند وسیله‌ای برای حل این گونه معادله‌ها باشد. ویژگی اصلی این مقاله آن است که روش حل و یک جواب عمومی معادله‌های درجه nام با ضرایب گویا را به‌دست می‌دهد که در اصل به بررسی معادله‌های سیاله‌ی عمومی از نظر وجود جواب با ضرایب گویا خاتمه می‌دهد؛ زیرا معادله‌های سیاله از نظر تعداد می‌توانند دارای بی‌شمار جواب باشند و یا هیچ جوابی نداشته باشند. برای مثال، برای معادله‌ی سیاله‌ی $x+y=1$ در مجموعه‌ی اعداد طبیعی، هیچ جوابی یافت نمی‌شود، ولی در مجموعه‌ی اعداد صحیح، بی‌شمار جواب به صورت $(x,y)=(\alpha,1-\alpha)$ وجود دارد.

معادله‌های سیاله‌ی درجه اول دو مجهولی ....

تاکنون مسئله‌های گوناگونی مطرح شده‌اند که در واقع به یک معادله‌ی دو مجهولی ساده می‌انجامند و پس از بررسی از نظر وجود جواب، به یک نتیجه‌ی قطعی منتهی شده‌اند. صورت عمومی معادله‌های سیاله درجه اول دو مجهولی را که از ابتدا مطرح بوده‌اند، با فرض وجود a، b و c پارامتر و این‌که x و y مجهول باشند، به شکل زیر در نظر می‌گیریم:

$$ax+by=c \qquad (1)$$

درباره‌ی معادله‌ی ۱ باید متذکر این واقعیت شد که برای به دست آوردن جواب‌های گویای بسیاری از معادلات خاص از نوع ۱ در کارهای دیوفانتین اسکندرانی (۲۵۰ سال بعد از میلاد) روش قانون‌مندی پیدا شده است. در واقع، عبارت «معادله‌های دیوفانتی» به معادله‌هایی اطلاق می‌شود که جواب‌های آن‌ها اعدادی گویا باشند. اما در زمان حاضر،

معادله‌هایی که جواب‌های صحیح برای آن‌ها در نظر گرفته شود، به «معادله‌های دیوفانتی» مشهورند.

در این‌جا، جواب‌های صحیح معادله‌ی عمومی ۱ مورد نظر است. پیش از بحث روی وجود جواب‌های معادله‌ی ۱ و بیان قضیه‌ی مربوط به آن، چند مثال کاربردی ارائه می‌دهیم که به نوع خاصی از معادله‌ی ۱ منجر می‌شوند.

مثال ۱: علی با ۲۰۰۰ تومان، چند عدد مداد ۱۵۰ تومانی و چند عدد دفترچه‌ی ۳۵۰ تومانی می‌تواند خریداری کند؛ با شرط این‌که تعداد مدادها از ۴ عدد و تعداد دفترچه‌ها از ۳ عدد کم‌تر نباشد.

حل: با توجه به شرایط مسئله، با معادله‌ی دیوفانتی زیر روبه‌رو هستیم: $150x+350y=2000$ ؛ ($y \ge 3$: تعداد دفترچه‌ها و $x \ge 4$: تعداد مدادها) پس از تقسیم معادله بر ۵۰، به معادله‌ی ساده شده‌ی زیر می‌رسیم:

$$3x+7y=40$$

معادله را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$x=\frac{40-7y}{3}=13-2y+\frac{1-y}{3}$$

با فرض $t=\frac{1-y}{3}$ خواهیم داشت:

$$x=11+7t \quad , \quad y=1-3t$$

$$t=-1:\ x=4\ ;\ y=4$$

تنها جواب مسئله با شرایط مذکور، ۴ عدد مداد و ۴ عدد دفترچه است. ملاحظه می‌شود، همیشه تعداد جواب‌ها به شرایط اولیه‌ی مذکور در مسئله بستگی دارد. در مثال اخیر، شرایط اولیه‌ی تعداد مدادها و دفترچه‌ها، سبب منحصر به فرد بودن جواب، یعنی به تعداد برابر دفترچه و مداد شد:

$$x=y\ ;\ 3x+7x=40\ ;\ 10x=40\ ;\ x=4$$

(تعداد مداد یا دفترچه) $x=y=4$

حل و بحث معادله‌ی سیاله‌ی خطی ax+by=c (۱)

از نظر تحلیلی، معادله‌ی درجه اول دو مجهولی ۱، در صفحه‌ی مختصات دکارتی، می‌تواند نمودار یک خط راست را مشخص کند که با رسم چنین خطوطی آشنا هستید. می‌دانیم، هر خط به معادله‌ی ۱ که در آن a و b هر دو با هم صفر نباشند، نشان دهنده‌ی بی‌نهایت نقطه است که با اختیار عددی برای x یا y، دیگری به دست می‌آید. برای مثال، اگر $x=0$ و $b\neq 0$، مقدار y محاسبه می‌شود: $y=\frac{c}{b}$ و اگر $y=0$ و $a\neq 0$، مقدار x محاسبه می‌شود: $x=\frac{c}{a}$.

در این‌جا، برای بحث روی معادله‌ی ۱، کافی است به دو پرسش زیر پاسخ دهیم:

۱. آیا معادله‌ی ۱ با فرض صحیح بودن a، b و c در مجموعه‌ی اعداد صحیح (Z) جواب صحیح دارد؟ به بیان دیگر، نقطه‌ی $A\begin{vmatrix}x_0\\y_0\end{vmatrix}$ را که $y_0\in Z$ و x_0، چگونه می‌توان تعیین کرد تا در معادله‌ی ۱ صدق کند؟

۲. در صورتی که یک جواب معادله‌ی ۱ مانند $A\begin{vmatrix}x_0\\y_0\end{vmatrix}$ معلوم باشد، چگونه می‌توان همه‌ی جواب‌های صحیح معادله را تعیین کرد؟ به بیان دیگر، با فرض وجود یک جواب صحیح معادله‌ی ۱، چگونه جواب عمومی معادله‌ی ۱ را ارائه دهیم؟

بسیاری از مسئله‌های جبر به معادله‌هایی می‌انجامد که تعداد مجهول‌های مسئله، بیش از تعداد معادله‌های مربوط به آن است

پاسخ پرسش اول را در برهان قضیه‌ی زیر می‌توان یافت:

قضیه: معادله‌ی ۱ در مجموعه‌ی اعداد صحیح Z دارای جواب است، اگر و تنها اگر بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک a و b (ضریب‌های x و y). عدد c (ثابت معادله) را بشمارد. در واقع، اگر $(a,b)=d$، آن‌گاه باید داشته باشیم: $d|c$.

برهان این قضیه در کتاب ریاضیات گسسته پیش دانشگاهی آمده است.

نتیجه: اگر ضریب‌های مجهول‌های معادله‌ی سیاله نسبت به هم اول باشند، معادله همیشه دارای جواب‌های صحیح است.

در این‌جا، جواب عمومی معادله‌ی ۱، توسط یک جواب خصوصی معادله به این صورت تعیین می‌شود:

$$\alpha,\beta,a,b\in Z: x=\alpha+bt \quad , \quad y=\beta-at$$

مثال ۱: در صورتی که یک جواب خصوصی معادله‌ی زیر معلوم (۱۶ و ۹) باشد، جواب عمومی معادله را بیابید.

$$24x+14y=440$$

حل: چون ۲=(۱۴ و ۲۴)، پس:

$$12x+7y=220$$

هم چنین، با معلوم بودن یک جواب خصوصی معادله، به طور مستقیم می‌توان به جواب عمومی آن رسید:

$$(\alpha=9\ ,\ \beta=16)$$

$$x=9+7t \quad , \quad y=16-12t$$

جواب‌های طبیعی معادله، به‌ازای مقادیر ۱−، ۰ و ۱ به دست می‌آیند:

t	−1	0	1
x	2	9	16
y	28	16	4

مثال۲: عدد۲۹ را به تفاضل دو عدد بنویسید که یکی از آن‌ها بر ۱۱ و دیگری بر ۱۴ بخش‌پذیر باشد.

حل: مسئله، معادل حل معادله‌ی زیر است:

$11x - 14y = 29$;

دو طرف معادله را بر ضریب مجهول کوچک‌تر تقسیم می‌کنیم:

$$x - y - \frac{3y}{11} = 2 + \frac{7}{11} ;$$

$$x - y - 2 = \frac{3y+7}{11} = t ;$$

$$3y + 7 = 11t \ ; \ y = \frac{11t-7}{3} = 3t + \frac{2t}{3} - 2 - \frac{1}{3} ;$$

$$y - 3t + 2 = \frac{2t-1}{3} = k \ ; \ 2t - 1 = 3k ;$$

$$t = \frac{3k+1}{2} = k + \frac{k+1}{2} \ ; \ \frac{k+1}{2} = S \ ; \ k = 2S - 1$$

پس از جایگزینی مقدارهای فوق و اختصار لازم، خواهیم داشت:

$x = 14S - 5 \ , \ y = 11S - 6$

ساده کردن برخی از صورت‌های معادله‌ی ۱ ....

در برخی از صورت‌های معادله‌ی ۱ می‌توان روش‌های ساده‌تری را به‌کار برد تا با سرعت بیش‌تری به جواب برسیم:

۱. اگر ضریب یکی از مجهول‌ها و مقدار ثابت، مقسوم‌علیه مشترکی داشته باشند، می‌توانیم با انتخاب مجهول کمکی جدید به جای مجهول دوم، دو طرف معادله را به مقسوم‌علیه مشترک ساده کنیم.

مثال۱: جواب عمومی معادله‌ی زیر را بیابید:

$18x - 25y = 21$

حل: چون ۳=(۲۱و۱۸)، پس جمله‌ی $25y$ نیز باید بر ۳ بخش‌پذیر باشد. چون ۱=(۳و۲۵)، پس y باید مضربی از ۳ باشد: $y = 3t$

$18x - 75t = 21$

معادله را به ۳ ساده می‌کنیم:

$6x - 25t = 7$

در این جا، معادله‌ی ساده شده را حل می‌کنیم:

$$6x = 25t + 7 \ ; \ x = \frac{25t+7}{6} = 4t + 1 + \frac{t+1}{6}$$

$$\frac{t+1}{6} = k \ ; \ t = 6k - 1 \ ; \ x = 25k - 3$$

$$y = 3(6k-1) = 18k - 3 \ ; \ y = 18k - 3$$

۲. در ضمن محاسبه‌ی یکی از مجهول‌ها بر حسب مجهول دیگر، اگر بین جمله‌های صورت کسری که به‌دست می‌آید (پس از گرفتن مقدار صحیح آن) مقسوم‌علیه مشترکی وجود داشته باشد، معادله را ساده‌تر می‌توان حل کرد.

مثال۲: معادله‌ی سیاله‌ی زیر را حل کنید.

$24x + 17y = 41$

حل: ابتدا y را بر حسب x محاسبه می‌کنیم:

$$17y = 41 - 24x \ ; \ y = 2 - x + \frac{7 - 7x}{17} ;$$

$$y = 2 - x + 7\left(\frac{1-x}{17}\right) \ ; \ \frac{1-x}{17} = t \ ; \ x = 1 - 17t$$

$$y = 2 - (1 - 17t) + 7t = 1 + 24t \ ; \ y = 1 + 24t$$

هم‌چنین:

۳. در ضمن تقسیم، ممکن است باقی‌مانده بزرگ‌تر از نصف مقسوم‌علیه باشد. در این صورت بهتر است از باقی‌مانده‌ی منفی استفاده شود.

مثال۳: معادله‌ی سیاله‌ی زیر را حل کنید.

$11x - 40y = 49$

حل: ابتدا x را بر حسب y حل می‌کنیم:

$$x = \frac{49 + 40y}{11} = 4 + 3y + \frac{5 + 7y}{11} \ ; \ \frac{5+7y}{11} = t ;$$

$$y = \frac{11t - 5}{7} = t - 1 + \frac{4t+2}{7} \ ; \ \frac{4t+2}{7} = k$$

$$t = \frac{7k-2}{4} \overset{**}{=} \frac{8k - k - 2}{4} = 2k - \frac{k+2}{4} ;$$

$$\frac{k+2}{4} = m ; k = 4m - 2$$

پس از اختصار لازم:

$x = 40m - 21 \ , \ y = 11m - 7$

حل معادله‌ی سیاله‌ی ۱ به کمک کسرهای مسلسل

به کمک کسرهای مسلسل می‌توان یکی از جواب‌های معادله‌ی سیاله‌ی ۱ را در صورت وجود به‌دست آورد. این مطلب را ضمن مثال نشان می‌دهیم.

مثال۱: معادله‌ی سیاله‌ی $30x + 86y = 16$ را به کمک کسرهای مسلسل حل کنید.

حل: ابتدا معادله را به ۲ ساده می‌کنیم:

$15x + 43y = 8$

کسر $\frac{43}{15}$ را در نظر می‌گیریم و آن را به کسر مسلسل تبدیل می‌کنیم:

$$\frac{۴۳}{۱۵}=۲+\cfrac{۱}{۱+\cfrac{۱}{۶+\cfrac{۱}{۲}}}$$

در این جا، کسر متقارب ماقبل آخر را در نظر می‌گیریم. این کسر برابر $\frac{۲۰}{۷}$ است. آخرین کسر برابر با مقدار حقیقی کسر $\frac{۴۳}{۱۵}$ است و $\frac{۲۰}{۷}$ هم کسر متقارب ردیف فرداست. پس با توجه به قضیه‌های مربوط به کسرهای مسلسل می‌توان نوشت:

$$\frac{۴۳}{۱۵}-\frac{۲۰}{۷}=\frac{۱}{۱۵\times ۷}$$

برابری عددی بالا را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$۴۳\times ۷-۱۵\times ۲۰=۱$$

دو طرف برابری بالا را هشت برابر می‌کنیم و با توجه به معادله‌ی اصلی، برابری عددی زیر را می‌نویسیم:

$$۱۵(-۱۶۰)+۴۳(۵۶)=۸$$

با مقایسه‌ی رابطه عددی اخیر و معادله‌ی اصلی، یک جواب معادله به دست می‌آید:

$$x=-۱۶۰\ ,\ y=۵۶$$

با وجود یک جواب خصوصی معادله، جواب عمومی معادله به‌دست می‌آید:

$$\begin{cases}x=-۱۶۰+۴۳t\\ y=۵۶-۱۵t\end{cases}$$

برای ساده‌تر شدن جواب‌ها، کافی است t را به $t+۳$ تبدیل کنیم:

$$x=-۱۶۰+۴۳(t+۳)=-۳۱+۴۳t$$
$$y=۵۶-۱۵(t+۳)=۱۱-۱۵t$$

مثال۲: معادله‌ی سیاله‌ی $۲۱x-۵۷y=۱۵$ را به کمک کسرهای مسلسل حل کنید.

حل: معادله را به ۳ ساده می‌کنیم:

$$۷x-۱۹y=۵$$

ابتدا $\frac{۷}{۱۹}$ را به کسر مسلسل تبدیل می‌کنیم:

$$\frac{۷}{۱۹}=۰+\cfrac{۱}{۲+\cfrac{۱}{۱+\cfrac{۱}{۲+\cfrac{۱}{۲}}}}$$

کسر متقارب ماقبل آخر $\frac{۳}{۸}$ و چون کسر متقارب ردیف زوج است:

$$\frac{۷}{۱۹}-\frac{۳}{۸}=\frac{-۱}{۱۹\times ۸}$$

این برابری را در $۸\times ۱۹\times ۵$ ضرب می‌کنیم و با توجه به معادله‌ی اصلی به صورت زیر می‌نویسیم:

$$۷(-۴۰)-۱۹(-۱۵)=۵$$

یک جواب خصوصی معادله، $x=-۴۰$, $y=-۱۵$ و جواب عمومی معادله چنین است:

$$\begin{cases}x=-۴۰+۱۹t\\ y=-۱۵+۷t\end{cases}$$

حل معادله‌ی سیاله‌ی ۱ به کمک هم‌نهشتی ....

یکی دیگر از کاربردهای هم‌نهشتی، حل معادله‌ی سیاله است. معادله‌ی سیاله‌ی ax+by=c را می‌توان به یکی از دو صورت زیر نوشت:

$$ax\overset{b}{\equiv}c \text{ و } by\overset{a}{\equiv}c$$

معادله‌های سیاله از نظر تعداد می‌توانند دارای بی‌شمار جواب باشند و یا هیچ جوابی نداشته باشند

بدیهی است که برای حل هر یک از معادله‌های بالا، شرط $(a,b)|c$ باید برقرار باشد. با فرض این‌که $(a,b)=۱$، معادله‌ی سیاله قابل حل است. در صورتی‌که $(a,b)=d$، آن‌گاه کافی است $d|c$. برای مثال، معادله‌ی $۶x+۲۱y=۱۳۸۹$ با توجه به $(۶,۲۱)=۳$ و $۱۳۸۹=۳\times ۴۶۳$ و $۳|۱۳۸۹$، دارای جواب است و آن را می‌توان به صورت ساده شده‌ی زیر نوشت:

$$۲x+۷y=۴۶۳ \qquad (۱)$$

برای حل معادله‌ی بالا به کمک هم‌نهشتی، می‌توان معادله را به یکی از دو صورت زیر نوشت:

$$۲x\overset{۷}{\equiv}۴۶۳\ ;\ ۷y\overset{۲}{\equiv}۴۶۳$$

با توجه به برابری‌های $۴۶۳=۷\times ۶۶+۱$ و $۴۶۳=۲\times ۲۳۱+۱$ معادله‌های بالا ساده می‌شوند:

$$۲x\overset{۷}{\equiv}۷\times ۶۶+۱\overset{۷}{\equiv}۱\ ;\ ۲x\overset{۷}{\equiv}۱\ ;\ x=۷k+۴$$
$$۷y\overset{۲}{\equiv}۲\times ۲۳۱+۱\overset{۲}{\equiv}۱\ ;\ ۷y\overset{۲}{\equiv}۱\ ;\ y=۲s+۱$$

با قرار دادن x (یا y) در معادله‌ی اصلی (۱) مجهول دیگری را بر حسب k (یا s) به‌دست می‌آوریم که این جواب عمومی معادله محسوب می‌شود. زیرا بر حسب پارامتر دل‌خواه k (یا s) است. $۲(۷k+۴)+۷y=۴۶۳\ ;\ y=۶۵-۲k$ بنابراین، جواب عمومی معادله به صورت زیر است:

$$(x=۷k+۴\ ,\ y=۶۵-۲k)\ ;\ (x=۲۲۸-۷s\ ,\ y=۲s+۱)$$

برای آزمایش جواب‌ها کافی است هر جفت جواب را داخل معادله‌ی اصلی (۱) قرار دهیم.

پی نوشت ....

hashemi- moosavi@ yahoo.com

* برای (x,y) جفت‌های طبیعی (۱۰۴ و ۷)، ... و (۴ و ۲۶۷) به‌دست می‌آیند.

**: از باقی‌مانده‌ی منفی استفاده شد.

مسائل برای حل

● میرشهرام صدر

ریاضی سال اول

۱ . مقدار a را چنان بیابید که عدد گویای $\frac{a}{۲۰}$ بین دو عدد $\frac{۲}{۵}$ و ۰/۳ باشد.

۲ . با شرط $x < -۱$ ، حاصل $\sqrt{x^۲} + ||x|-۱|$ را بیابید.

۳ . ساده شده‌ی عبارت زیر را محاسبه کنید.

$$A = |\sqrt{۲} - \sqrt{۳}| + |\sqrt{۳} - \sqrt{۲} - ۱|$$

۴ . جمله‌ی زیر را به زبان ریاضی بنویسید.
«اگر از ربع مربع عدد ۸ ، ۱۳ واحد کم کنیم، حاصل برابر با ثلث مجذور ۳ می‌شود.»

۵ . فرض کنید $A = \{a,b,c,d\}$ ، $B = \{b,e,f,g\}$ و $C = \{a,b,f,h\}$ ، درستی رابطه‌ی زیر را تحقیق کنید.

$$(A \cup B) - (B \cup C) = (A - B) - C$$

۶ . مجموعه‌ای را که با اعضا مشخص شده است، با نماد ریاضی و مجموعه‌ای را که با نماد ریاضی مشخص شده است، با اعضایش مشخص کنید.

$$A = \{۶,۱۱,۱۸,...,۸۳\}$$

$$B = \left\{\frac{(-۱)^n}{n(n+۱)} \middle| n \in N\right\}$$

۷ . فرض کنید A یک مجموعه‌ی n عضوی است، چنان‌چه ۲ عضو از اعضای A حذف کنیم، تعداد زیرمجموعه‌های آن ۲۴ تا کم می‌شود، تعداد اعضای A را مشخص کنید.

۸ . معادله‌ی توانی زیر را حل کنید.

$$\frac{۷^{۳x} \times ۴۹^{x-۲}}{۷^{x-۱} \times ۱۴^x} = \frac{۱}{۲^x}$$

۹ . اگر $A = ۴^n \times ۲^۴ \times ۵^{n-۲}$ و $B = ۲^{۲n} \times ۱۰^{۲n-۴}$ چه رابطه‌ای بین A و B برقرار است.

۱۰ . حاصل عبارت زیر را محاسبه کنید.

$$\sqrt[۳]{۵۴ - ۲۷a} - \sqrt[۳]{۸a - ۱۶}$$

۱۱ . با توجه به برابری زیر، حاصل $a+b+c+d+e$ را پیدا کنید.

$$(x^۲ - ۲x + ۱)(x^۲ + x - ۲) = ax^۴ + bx^۳ + cx^۲ + dx + e$$

۱۲ . با استفاده از اتحادها، حاصل هر عبارت را بیابید.

الف) $(a^۴ + ۴a^۲ + ۴)(a^۴ - ۴a^۲ + ۴)$

ب) $(x^۲ + ۱ - ۵x)(x^۲ + ۱ + ۴x)$

۱۳ . هر یک از عبارت‌های زیر را به حاصل ضرب عوامل اول تجزیه کنید.

الف) $n^۴ + ۴n^۲ - ۳۲$

ب) $n^۴ - ۲n^۲ + ۴۹$

ج) $a^۲b + b^۲c - ab^۲ - abc$

د) $۴x^۲ + ۲x - ۹y^۲ - ۳y$

۱۴ . IQ افراد مختلف از فرمول زیر به دست می‌آید:

$$IQ = \frac{MA}{CA} \times ۱۰۰$$

که در آن MA سن هوشی و CA سن تقویتی افراد است. در صورتی که $۸۰ \le IQ \le ۱۴۰$ برای بچه‌های ۱۲ ساله حدود تغییرات سن هوشی را به دست آورید.

● محمدرضا هاشمی موسوی

ریاضیات سال دوم

۱ . اگر $f(k,s) = ۳^k - ۴s$ ، آن‌گاه حاصل $f(f(۲,۲),f(۳,۴))$ را بیابید.

۲ . دامنه و برد تابع با ضابطه‌ی $y = f(x) = \frac{\sqrt{x-۱}}{x-۱}$ را بیابید.

۳ . معادله‌ی $۳m^۲x = ۲۷x + m^۲$ به ازای چه مقادیری از m دارای جواب است؟

۴ . اگر $x_۱$ و $x_۲$ ریشه‌های معادله‌ی درجه دوم $x^۲ = x + ۱$ باشند، مقدار عبارت $S = \frac{۱}{x_۱^۲} + \frac{۱}{x_۲^۲} + x_۱^۴x_۲^۴$ را بیابید.

۵ . تعداد ریشه‌های حقیقی معادله‌ی زیر را تعیین کنید:

$$\frac{(x^۴ - x^۲)(x^۳ + ۱)(x^۲ - ۳x + ۲)}{(x^۳ + ۲x^۲)(x^۲ - ۱)^۲} = ۰$$

۶ . اندازه‌ی مجذور قطر مستطیلی برابر ۱۰۰ است. در صورتی که اندازه‌ی محیط این مستطیل برابر ۲۸ باشد، قدرمطلق تفاضل طول و عرض مستطیل را بیابید.

۷ . اگر مجموع و حاصل‌ضرب سه عدد طبیعی متوالی برابر باشد، مجموع مربعات آن سه عدد را بیابید.

۸ . مجموعه‌ی جواب‌های مشترک دو نامعادله‌ی زیر را با شرط $-۱ < x < ۳$ تعیین کنید: $-۹x^۲ - ۱۲x < ۳$ ، $۴x^۲ - ۱۲x > ۰$

۹ . از رابطه‌ی $\log_۴(۱ - x^۲) \ge \frac{-۱}{۲}$ ، حدود $|x|$ را تعیین کنید.

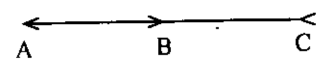
۱۰ . در یک تصاعد حسابی (عددی) جمله‌ی پنجم ۲۳ و جمله‌ی هفتم ۳۸ است، جمله‌ی سوم آن را تعیین کنید.

۱۱ . اگر در یک تصاعد هندسی، جمله‌ی چهارم ۲۴ و جمله‌ی هفتم ۱۹۲ باشد، جمله‌ی دوم آن را بیابید.

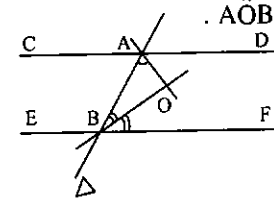
● محمدهاشم رستمی

هندسه‌ی ۱

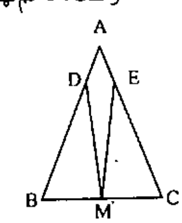
۱. در شکل زیر اندازه‌های دو پاره‌خط AB و BC نسبت به هم چگونه‌اند؟



۲. خط مورب Δ دو خط موازی CD و EF را به ترتیب در نقطه‌های A و B قطع کرده است. OA نیم‌ساز زاویه‌ی DAB و OB نیم‌ساز زاویه‌ی ABF است. ثابت کنید $A\hat{O}B = 90^\circ$.

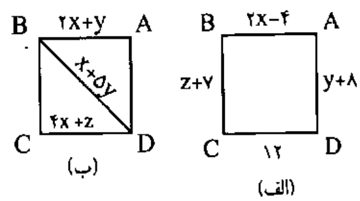


۳. نقطه‌ی M وسط قاعده‌ی BC از مثلث متساوی‌الساقین ABC، و BD=CE است (شکل). اگر از M به D و E وصل کنیم، ثابت کنید دو مثلث MBD و MCE هم‌نهشت‌اند.



۴. تعداد قطرهای یک چندضلعی محدب ۱۴ است. مجموع زاویه‌های درونی این چندضلعی را بیابید.

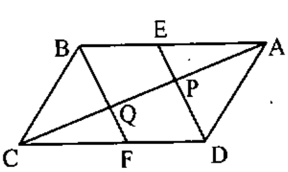
۵. اندازه‌ی x، y و z را در هر یک از مدل‌های (الف) و (ب) تعیین کنید.



۶. نقطه‌های E و F وسط ضلع‌های AB و CD از متوازی‌الاضلاع ABCD را به ترتیب به رأس‌های D و B وصل می‌کنیم تا قطر AC از متوازی‌الاضلاع را در P و Q قطع کنند. ثابت کنید:

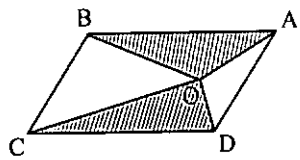
الف) BF موازی DE است.

ب) AP=PQ=QC



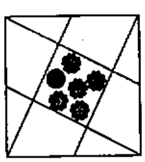
۷. نقطه‌ی O واقع در درون متوازی‌الاضلاع ABCD را به رأس‌های A، B و C و D وصل می‌کنیم. ثابت کنید:

$$S_{OAD} + S_{OBC} = S_{OAB} + S_{OCD}$$



۸. یک ضلع زاویه‌ی قائمه از مثلث قائم‌الزاویه‌ای، سه واحد بیش‌تر از ضلع دیگر زاویه‌ی قائمه است. اگر مساحت این مثلث ۲۳۰ واحد سطح باشد، طول ضلع‌های این مثلث را به‌دست آورید.

۹. در یک باغچه به شکل مربع و به ضلع ۲۰ متر، از هر رأس به وسط ضلع مقابلش وصل کرده‌ایم.



قسمت وسط را درخت و بقیه‌ی باغچه را چمن کاشته‌ایم. مساحت قسمت چمن‌کاری شده چه مقدار است؟ در صورتی که قیمت هر مترمربع چمن ۳۰۰۰ تومان باشد، هزینه‌ی چمن‌کاری چه قدر است؟

۱۰. الف) در جاهای خالی، حروف یا عددهای مناسب بنویسید.

$$\frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{4} \Rightarrow \frac{a-b+c}{\dots} = \frac{\dots}{2}$$

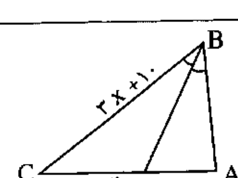
ب) واسطه‌ی هندسی بین دو عدد $\sqrt{2}$ و $3\sqrt{2}$ را تعیین کنید.

● محمدهاشم رستمی

هندسه‌ی ۲

۱. سه ضلع مثلثی ۱۲، ۶ و ۸ سانتی‌مترند، اندازه‌ی پاره‌خط‌هایی را که نیم‌ساز بزرگ‌ترین زاویه‌ی مثلث روی ضلع روبه‌رویش ایجاد می‌کند، تعیین کنید.

۲. در شکل داده شده، BD نیم‌ساز زاویه‌ی درونی B از مثلث ABC است. با توجه به شکل، اندازه‌ی x را تعیین کنید.



۳. ثابت کنید در هر مثلث، اندازه‌ی ارتفاع وارد بر هر ضلع، از نصف مجموع دو ضلع دیگر کوچک‌تر است.

۴. سه پاره‌خط به طول‌های ۱۷، $x-1$، ۲۳ داده شده‌اند. حدود x را چنان بیابید که این سه پاره‌خط، ضلع‌های یک مثلث باشند.

۵. مثلث ABC را با داده‌های زیر رسم کنید:

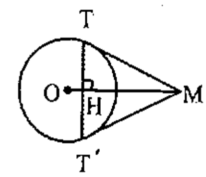
الف) AB=c، BC=a و AH=ha

ب) BC=a، $\hat{A} = \alpha$ و AH=ha

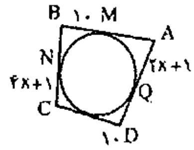
۶. دو نقطه‌ی A و B و خط L داده شده‌اند. مثلث متساوی‌الساقینی رسم کنید که رأسش روی L و قاعده‌اش پاره‌خط AB باشد.

۷. در دایره‌ی C به شعاع ۱۰ سانتی‌متر، دو وتر به طول‌های ۱۶ سانتی‌متر و ۱۲ سانتی‌متر رسم کرده‌ایم. نسبت فاصله‌های مرکز دایره از این دو وتر را تعیین کنید.

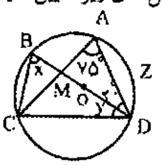
۸. از نقطه‌ی M که به فاصله‌ی ۲۵ از مرکز دایره‌ی (۱۵ و O) قرار دارد، دو مماس MT و MT' را بر این دایره رسم کرده‌ایم. اگر OM پاره‌خط TT' را در نقطه‌ی H قطع کند، اندازه‌ی پاره‌خط‌های MT، OH، TH و TT' را تعیین کنید.



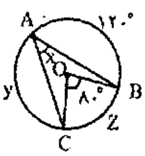
۹. اگر نصف محیط چهارضلعی محیطی ABCD برابر ۵۲ سانتی‌متر باشد، اندازه‌ی x را تعیین کنید (شکل).



۱۰. اندازه‌ی x، y و z را در هر یک از شکل‌های زیر تعیین کنید.



(الف)



(ب)

● هوشنگ شرقی

جبر و احتمال

۱. به کمک قضیه‌ی استقرای ریاضی ثابت کنید: $(n \in IN)$

الف) $\frac{1}{2^1}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\dots+\frac{n}{2^n}=\frac{2^{n+1}-n-2}{2^n}$

ب) $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\dots+\frac{1}{3n+1}>1$

ج) $3^{2n-1}+4n+5=4r \quad (r\in Z)$

۲. به کمک استدلال استنتاجی ثابت کنید، هرگاه عدد طبیعی a در تقسیم بر ۵ باقی‌مانده‌ی ۳ داشته باشد، مکعب آن در تقسیم بر ۵، باقی‌مانده‌ی ۲ دارد.

۳. درستی نابرابری زیر را برای هر دو عدد حقیقی a و b ثابت کنید:

$(a^2+1)(b^2+1)\geq 4ab$

۴. ثابت کنید، اگر a و b دو عدد حقیقی غیر صفر باشند و $a\neq b$، آن‌گاه $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\neq 2$.

۵. ثابت کنید، اگر بدانیم $\sqrt{2}$ عددی گنگ است، $\sqrt[3]{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$ نیز عددی گنگ است.

۶. در یک اداره، نوزده کارمند زن و مرد در بخش‌های رایانه، حسابداری و بازرگانی مشغول به کارند که مدرک‌های تحصیلی آن‌ها دیپلم، فوق‌دیپلم و لیسانس است. ثابت کنید حداقل دو نفر از این کارمندان هم‌جنس و هم‌مدرک هستند و در یک بخش کار می‌کنند.

۷. مجموعه‌ی زیر را با نماد ریاضی نمایش دهید.

$A=\{1-\sqrt{3},1+\sqrt{3}\}$

۸. مجموعه‌ی $B=\left\{x \mid x\in Z, \frac{6}{x-4}<-1\right\}$ را با اعضای خود نمایش دهید.

● مجتبی رفیعی

حسابان

۱. دامنه‌ی تابع $f(x)=\frac{1}{|[x]|-1}$ را پیدا کنید.

۲. فرض کنید x_1 و x_2 ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم $x^2+px+12=0$ باشند. p را چنان بیابید که $x_1-x_2=1$.

۳. فرض کنید x عددی حقیقی و تابع $f(x)=x^3-kx^2+2x$ فرد باشد. k را پیدا کنید.

۴. ثابت کنید تابع $f:IR\to IR$ با ضابطه‌ی $f(x)=\frac{x^3+2x}{1+x^2}$ صعودی است.

۵. ثابت کنید:

$$1+\sin\alpha+\cos\alpha=2\sqrt{2}\cos\frac{\alpha}{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)$$

۶. حد توابع زیر را حساب کنید.

الف) $\lim_{x\to 1}\frac{x^3+x^2-2}{\sin(x-1)}$

ب) $\lim_{x\to 0^-}\frac{\tan x}{\sqrt[3]{(1-\cos x)^2}}$

۷. مجانب‌های نمودار تابع زیر را پیدا کنید.

$$f(x)=\frac{x^2}{\sqrt{|x^2-1|}},\quad x\in IR-\{-1,1\}$$

۸. ثابت کنید تابع $f(x)=\begin{cases}x & x\in Q\\ 1-x & x\notin Q\end{cases}$ در نقطه‌ی $\frac{1}{2}$ پیوسته است.

حل تشریحی مسائل

ریاضی
سال اول

۱. $0/3<\frac{a}{20}<\frac{2}{5}\Rightarrow \frac{3}{10}<\frac{a}{20}<\frac{2}{5}$

$\Rightarrow \frac{6}{20}<\frac{a}{20}<\frac{8}{20}\Rightarrow a=7$

۲. $x<-1\Rightarrow |x|=-x$

$x<-1\Rightarrow x+1<0$

$\left|1-|x|\right|+\sqrt{x^2}=|1-(-x)|+|x|=|1+x|+|x|$

$=-(1+x)-x=-1-2x$

۳. $\sqrt{2}<\sqrt{3}\Rightarrow \sqrt{2}-\sqrt{3}<0$

$\Rightarrow \left|\sqrt{2}-\sqrt{3}\right|=-(\sqrt{2}-\sqrt{3})$

$0<\sqrt{3}-\sqrt{2}<1\Rightarrow -1<\sqrt{3}-\sqrt{2}-1<0$

$\Rightarrow \left|\sqrt{3}-\sqrt{2}-1\right|=-(\sqrt{3}-\sqrt{2}-1)$

$A=-(\sqrt{2}-\sqrt{3})-(\sqrt{3}-\sqrt{2}-1)$

$=-\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{3}+\sqrt{2}+1=1$

۴. ربع a = $\frac{1}{4}a$ ، مربع a = a^2 = مجذور a

ثلث a = $\frac{1}{3}a$

$\frac{1}{4}(8)^2-12=\frac{1}{3}(3)^2\Rightarrow 16-12=3$

۵. $A\cup B=\{a,b,c,d,e,f,g\}$

$B\cup C=\{a,b,e,f,g,h\}$

$(A\cup B)-(B\cup C)=\{a,b,c,d,e,f,g\}=\{c,d\}\quad (1)$

$A-B=\{a,b,c,d\}=\{a,c,d\}$

$(A-B)-C=\{a,c,d\}=\{c,d\}\quad (2)$

با توجه به رابطه‌های (۱) و (۲) درستی حکم برقرار است.

۶. $A=\{4+2,9+2,16+2,\dots,81+2\}$

$=\{2^2+2,3^2+2,4^2+2,\dots,9^2+2\}$

$\Rightarrow A=\{n^2+2 \mid n\in N, 2\le n\le 9\}$

$B=\left\{\frac{(-1)^1}{1(1+1)},\frac{(-1)^2}{2(2+1)},\frac{(-1)^3}{3(3+1)},\frac{(-1)^4}{4(4+1)},\dots\right\}$

$\Rightarrow B=\left\{\frac{-1}{2},\frac{1}{6},\frac{1}{12},\frac{1}{20},\dots\right\}$

۷. می‌دانیم تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه‌ی n عضوی برابر با 2^n و تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه‌ی (n-2) عضوی برابر است با $2^{(n-2)}$ است.

$2^n-24=2^{(n-2)}\Rightarrow 2^n-24=\frac{2^n}{2^2}$

$\Rightarrow 4\times 2^n-96=2^n$

$\Rightarrow 3\times 2^n=96\Rightarrow 2^n=32$

$\Rightarrow 2^n=2^5\Rightarrow n=5$

۸. $\frac{7^{2x}\times(7^2)^{x-2}}{7^{x-1}\times(2\times 7)^x}=\frac{1}{2^x}$

$\Rightarrow \frac{7^{2x}\times 7^{2x-4}}{7^{x-1}\times 2^x\times 7^x}=\frac{1}{2^x}$

$\Rightarrow \frac{7^{2x+2x-4}}{7^{x-1+x}\times 2^x}=\frac{1}{2^x}\Rightarrow \frac{7^{5x-4}}{7^{2x-1}\times 2^x}=\frac{1}{2x}$

با ضرب دوطرف تساوی اخیر در 2^x داریم:

$\Rightarrow \frac{7^{5x-4}}{7^{2x-1}}=1\Rightarrow 7^{5x-4}=7^{2x-1}\Rightarrow 5x-4=2x-1$

$\Rightarrow 3x=3\Rightarrow x=1$

۹. $A=(2^2)^n\times 2^4\times 5^{n-2}=2^{2n+4}\times 5^{n-2}$

$B=2^{2n}\times(5\times 2)^{2n-4}$

$=2^{2n}\times 5^{2n-4}\times 2^{2n-4}=2^{4n-4}\times 5^{2n-4}$

$\frac{A}{B}=\frac{2^{2n+4}\times 5^{n-2}}{2^{4n-4}\times 5^{2n-4}}$

$=2^{(2n+4)}\times 2^{-(4n-4)}\times 5^{(n-2)}\times 5^{-(2n-4)}$

$\Rightarrow \frac{A}{B}=2^{-2n+8}\times 5^{-n+2}$

۱۰. $\sqrt[3]{27(2-a)}-\sqrt[3]{8(a-2)}$

$=3\sqrt[3]{2-a}-2\sqrt[3]{-(2-a)}$

$=3\sqrt[3]{2-a}+2\sqrt[3]{2-a}$

$=5\sqrt[3]{2-a}$

۱۱. $(x^2-2x+1)(x^2+x-2)$

$=x^4-x^3-3x^2+5x-2$

با مقایسه‌ی این تساوی و حکم داریم:

$a=1,b=-1,c=-3,d=5,e=-2$

۱۲. الف) $\left[(a^4+4)+4a^2\right]\left[(a^4+4)-4a^2\right]=(a^4+4)^2-(4a^2)^2$

$=(a^4)^2+2(a^4)(4)+4^2-16a^4$

$=a^8+8a^4+16-16a^4$

$=a^8-8a^4+16$

ب) $\left[(x^2+1)-5x\right]\left[(x^2+1)+4x\right]$

$=(x^2+1)^2+(-5x+4x)(x^2+1)+(-5x)(4x)$

$=x^4+2x^2+1-x^3-x-20x^2$

$=x^4-x^3-18x^2-x+1$

۱۳.

الف) $(n^2)^2+(8-4)n^2+(8)(-4)$

$=(n^2+8)(n^2-4)=(n^2+8)(n-2)(n+2)$

ب) $n^4+14n^2-16n^2+49=(n^4+14n^2+49)-16n^2$

$=(n^2+7)^2-16n^2$

$=(n^2+7-4n)(n^2+7+4n)$

ج) $(a^2b-ab^2)+(b^2c-abc)$

$=ab(a-b)-bc(a-b)$

$=(a-b)(ab-bc)$

$=(a-b)\times b\times(a-c)$

د) $(4x^2-9y^2)+(2x-3y)$

$=(2x-3y)(2x+3y)+(2x-3y)$

$=(2x-3y)(2x+3y+1)$

۱۴.

$80\le\frac{MA}{12}\times100\le140\Rightarrow$

$9/6\le MA\le16/8$

---

۱. ابتدا $f(2,2)$ و $f(3,4)$ را تعیین می‌کنیم:

$f(k,s)=3^k-4s$

$f(3,4)=3^3-4(4)=27-16=11$

$f(2,2)=3^2-4(2)=1$

بنابراین:

$f(f(2,2),f(3,4))=f(1,11)$

$=3^1-4(11)=3-44=-41$

۲. دامنه‌ی تابع با ضابطه‌ی $y=f(x)=\frac{\sqrt{x-1}}{x-1}$ چنین است:

$\begin{cases}x-1\ge0\\x-1\ne0\end{cases};\ \begin{cases}x\ge1\\x\ne1\end{cases};\ x>1;\ D_f=(1,+\infty)$

تعیین برد می‌کنیم:

$y=f(x)=\frac{\sqrt{x-1}}{x-1}\ \underline{\underline{(x\in D_f)}}\ \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1}\sqrt{x-1}}=\frac{1}{\sqrt{x-1}};$

$\sqrt{x-1}=\frac{1}{y}(y>0);\ x-1=\frac{1}{y^2};\ x=\frac{1}{y^2}+1>;\ \frac{1}{y^2}>0;$

$\begin{cases}y\ne0\\y>0\end{cases};\ R_f=\mathbb{R}^+=(0,+\infty)$

۳.

$3m^3x=27x+m^2;\ 3m^3x-27x=m^2;\ x=\frac{m^2}{3m^3-27}$

$3m^3-27=0;\ m^3=9;\ m=\sqrt[3]{9},\ D=\mathbb{R}-\{\sqrt[3]{9}\}$

معادله به ازای هر عدد حقیقی برای m به جز عدد $\sqrt[3]{9}$، دارای جواب است.

۴. برای معادله‌ی درجه‌ی دوم $x^2-x-1=0$:

$\begin{cases}x_1+x_2=\frac{-b}{a}=1\\x_1x_2=\frac{c}{a}=-1\end{cases}$

$S=\frac{1}{x_1^3}+\frac{1}{x_2^3}+x_1^4x_2^4=\frac{x_1^3+x_2^3}{(x_1x_2)^3}+(x_1x_2)^4$

$=\frac{(x_1+x_2)^3-3x_1x_2(x_1+x_2)}{(-1)^3}+1$

$S=\frac{1-3(-1)(1)}{-1}+1=-4+1=-3;\ \boxed{S=-3}$

۵. کسری برابر صفر است که صورت آن صفر باشد. هم‌چنین، ریشه‌های صورت یک معادله‌ی کسری، نباید مخرج را صفر کند:

$x^4-x^2=0;\ x^2(x^2-1)=0;\ x^2=0;\ x^2-1=0$

$x^3+1=0;\ x^3=-1;\ x=-1,\ x^2-3x+2=0;$

$(x-1)(x-2)=0;\ x=1;\ x=2,\ (x^2-1)^2=0;$

$x^2=1;\ x=\pm1,\ x^3+2x^2=0;\ x^2(x+2)=0;$

$x^2=0;\ x=-2$

جواب معادله فقط یک ریشه است: $\boxed{x=2}$

۶. اگر طول و عرض مستطیل را به ترتیب با x و y نمایش دهیم، خواهیم داشت:

$\begin{cases}x^2+y^2=100\\2(x+y)=28\end{cases};\ \begin{cases}(x+y)^2-2xy=100\\x+y=14\end{cases};\ \begin{cases}x+y=14\\xy=48\end{cases}$

$z^2-14z+48=0;\ (z-6)(z-8)=0,\ \begin{cases}x=8\\y=6\end{cases};$

$|x-y|=|8-6|=2;\ |x-y|=2$

۷. اگر اعداد متوالی را با $x-1$، x و $x+1$ نمایش دهیم:

$(x-1)x(x+1)=(x-1)+x+(x+1);$

$x(x^2-1)=3x;\ x(x^2-1)-3x=0$

$;\ x(x^2-1-3)=0;$

$x=0;\ x^2-4=0;\ x=\pm2;\ x=2$

چون سه عدد طبیعی هستند، پس $x_1=1$، $x_2=2$ و $x_3=3$

$x_1^2+x_2^2+x_3^2=1^2+2^2+3^2=1+4+9=14$

۸. با شرط $-1<x<3$:

$\begin{cases}-9x^2-12x<3;\ 9x^2+12x+3>0\\4x^2-12x>0;\ 4x(x-3)>0\end{cases};\ \begin{cases}(3x+1)(x+1)>0\\x(x-3)>0\end{cases}$

x		−۱		$-\frac{۱}{۲}$		۰		۲	
(x+۱)(۳x+۱)	+	●	−	●	+		+		+
x(x−۳)	+		+		+	●	−	●	+
جواب					$-\frac{۱}{۲}<x<۰$ جواب				

۹. با توجه به رابطه‌ی $\log_b^a = \frac{\log a}{\log b}$ می‌توان نوشت:

$$\log_۴(۱-x^۲) = \frac{\log(۱-x^۲)}{\log^۴};$$

$$\frac{\log(۱-x^۲)}{۲\log ۲} \geq \frac{-۱}{۲};\ \log(۱-x^۲) \geq -\log ۲(=\log\frac{۱}{۲});$$

$$\log(۱-x^۲) \geq \log\frac{۱}{۲};\ ۱-x^۲ \geq \frac{۱}{۲};\ x^۲ \leq \frac{۱}{۲};\ |x| \leq \frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

۱۰. جمله‌ی nام (عمومی) تصاعد حسابی (عددی) فوق به صورت زیر است:

$a_n = a_۱ + (n-۱)d$ (جمله‌ی عمومی تصاعد حسابی)

با توجه به جمله‌ی عمومی تصاعد:

$$\begin{cases} n=۵:\ a_۵ = a_۱ + ۴d = ۲۳ \\ n=۸:\ a_۸ = a_۱ + ۷d = ۳۸ \end{cases};\ a_۸ - a_۵ = ۷d - ۴d = ۱۵;$$

$$۳d = ۱۵\ \boxed{d = ۵};$$

$$a_۱ = ۲۳ - ۴d = ۲۳ - ۴(۵) = ۳\ \boxed{a_۱ = ۳}$$

$$a_۳ = ۳ + (۳-۱)(۵) = ۱۳;\ \boxed{a_۳ = ۱۳}$$

۱۱. جمله‌ی عمومی تصاعد هندسی فوق به صورت زیر است:

$a_n = a_۱ r^{n-۱}$ (جمله‌ی عمومی تصاعد هندسی)

با توجه به جمله‌ی عمومی تصاعد:

$$\begin{cases} n=۴:\ a_۴ = a_۱ r^۳ = ۲۴ \\ n=۷:\ a_۷ = a_۱ r^۶ = ۱۹۲ \end{cases};\ \frac{a_۷}{a_۴} = \frac{r^۶}{r^۳} = \frac{۱۹۲}{۲۴};$$

$$r^۳ = ۸;\ \boxed{r = ۲},\ a_۱ r^۳ = ۲۴;\ a_۱ = \frac{۲۴}{r^۳} = \frac{۲۴}{۸} = ۳;\ \boxed{a_۱ = ۳}$$

$$a_۲ = ۳ \times ۲^{۲-۱} = ۳ \times ۲ = ۶$$

$\boxed{a_۲ = ۶}$ (جمله‌ی دوم تصاعد)

هندسه‌ی (۱)

۱. به نظر می‌رسد که $AB < BC$ است. اما درواقع چنین نیست، بلکه $AB = BC$ است و این موضوع، خطای مشاهده را نشان می‌دهد.

۲. بنا به داده‌های مسئله داریم:

$$\begin{cases} CD \| EF \\ \text{و} \\ AB\ \text{قاطع} \end{cases} \Rightarrow D\hat{A}B + A\hat{B}F = ۱۸۰^\circ (۱)$$

$$\Rightarrow \frac{D\hat{A}B}{۲} + \frac{A\hat{B}F}{۲} = ۹۰^\circ$$

اما AO نیم‌ساز زاویه‌ی DAB و OB نیم‌ساز زاویه‌ی ABF است. یعنی:

$$\frac{D\hat{A}B}{۲} = O\hat{A}B, \frac{A\hat{B}F}{۲} = O\hat{B}A \qquad (۲)$$

پس از رابطه‌های ۱ و ۲ خواهیم داشت:

$$O\hat{A}B + O\hat{B}A = ۹۰^\circ \qquad (۳)$$

اما در مثلث OAB داریم:

$$A\hat{O}B + O\hat{A}B + O\hat{B}A = ۱۸۰^\circ \qquad (۴)$$

از رابطه‌های ۳ و ۴ نتیجه می‌شود:

$$A\hat{O}B + ۹۰^\circ = ۱۸۰^\circ \Rightarrow A\hat{O}B = ۱۸۰^\circ - ۹۰^\circ = ۹۰^\circ$$

۳. دو مثلث MBD و MCE به حالت (ض ز ض) هم‌نهشت‌اند، زیرا به دلیل متساوی‌الساقین بودن مثلث ABC، $\hat{B} = \hat{C}$ است. و چون M وسط ضلع BC است، پس $MB = MC$. از طرف دیگر، بنا به فرض مسئله $BD = CE$ است. بنابراین، دو مثلث MBD و MCE هم‌نهشت‌اند.

۴. داریم:

$$\frac{n(n-۳)}{۲} = ۱۴ \Rightarrow n(n-۳) = ۲۸ \Rightarrow n^۲ - ۳n - ۲۸ = ۰$$

$$\Rightarrow (n-۷)(n+۴) = ۰ \Rightarrow n-۷ = ۰ \Rightarrow n = ۷,\ n+۴ = ۰$$

$$\Rightarrow n = -۴ < ۰$$

اما مجموع زاویه‌های درونی هر nضلعی محدب مساوی $(۲n-۴)$ قائمه یا $(n-۲)\times۱۸۰^\circ$ است. پس برای ۷ ضلعی محدب داریم:

$$\text{مجموع زاویه‌های درونی} = (۷-۲)\times۱۸۰^\circ = ۹۰۰^\circ$$

۵. الف) ضلع‌های مربع با هم مساوی‌اند. پس داریم:

$$y+۸ = ۲x+۴ = z+۷ = ۱۲ \Rightarrow y = ۴,\ x = ۴,\ z = ۵$$

ب) هر قطر مربع، نیم‌ساز زاویه‌های آن است و هر زاویه‌ی مربع نیز ۹۰° است. پس داریم:

$$۴x + z = ۹۰^\circ\ (۱), ۲x + y = ۴۵^\circ (۲)\ \text{و}$$

$$\text{و}\ x + ۵y = ۴۵^\circ (۳)$$

از حل دستگاه سه معادله‌ی سه‌مجهولی تشکیل شده از رابطه‌های ۱، ۲ و ۳ خواهیم داشت:

$$x = ۲۰^\circ,\ y = ۵^\circ,\ z = ۱۰^\circ$$

۶. الف) چهارضلعی BEDF متوازی‌الاضلاع است. زیرا ثابت می‌کنیم که دو ضلع روبه‌روی آن یعنی BE و DF موازی و مساوی‌اند. چون چهارضلعی ABCD متوازی‌الاضلاع است، پس $AB \| CD$ و $AB = CD$ است.

درنتیجه $BE \| DF$ است. از طرف دیگر:

$$BE = \frac{AB}{۲} = \frac{CD}{۲} = FD \Rightarrow BE = DF$$

از متوازی‌الاضلاع بودن BEDF نتیجه می‌شود که BF موازی DE است.

نکته: این فرض مسئله را به روش‌های دیگری نیز می‌توان حل کرد. از آن جمله می‌توانیم ثابت کنیم که زاویه‌های روبه‌روی چهارضلعی BEDF دوبه‌دو مساوی‌اند و یا می‌توانیم ثابت کنیم که $B\hat{F}C = E\hat{D}F$ است.

ب) دو مثلث APE و CFQ به حالت «زض ز» هم‌نهشت‌اند، زیرا:

$$AE = CF\ \text{و}\ Q\hat{C}F = P\hat{A}E\ \text{و}\ C\hat{F}Q = A\hat{E}P$$

درنتیجه (۱) $AP = CQ$ است.

اما در مثلث CDP از نقطه‌ی F وسط CD خطی موازی DP رسم شده است. پس این خط از وسط ضلع دیگر، یعنی از وسط CP می‌گذرد. یعنی (۲) $PQ = CQ$ است. از رابطه‌های ۱ و ۲ نتیجه می‌شود:

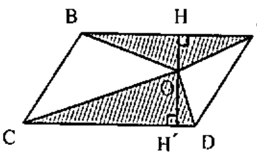
$$AP = PQ = QC.$$

نکته: این مسئله، در کتاب کار هندسه‌ی ۱ از انتشارات مدرسه، به روش دیگری حل شده است.

۷. کافی است ثابت کنیم که:

$$S_{OAD} + S_{OBC} = S_{OAB} + S_{OCD} = \frac{۱}{۲} S_{ABCD}$$

زیرا متوازی‌الاضلاع ABCD به این چهار مثلث افراز شده است. برای اثبات، از O خطی عمود بر دو ضلع موازی AB و CD از متوازی‌الاضلاع رسم می‌کنیم تا AB را در H و



CD را در H' قطع کند. می‌دانیم که HH' ارتفاع متوازی‌الاضلاع است. بنابراین داریم:

$$S_{ABCD} = AB \times HH' \qquad (1)$$

$$S_{OAB} = \frac{1}{2} OH.AB \qquad (2)$$

$$S_{OCD} = \frac{1}{2} OH'.CD = \frac{1}{2} OH'.AB \qquad (3)$$

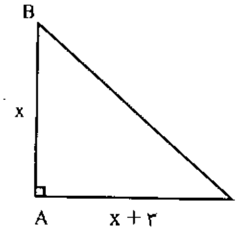
و

$$S_{OAB} + S_{OCD} = \frac{1}{2} AB(OH + OH')$$
$$= \frac{1}{2} AB.HH' \qquad (4)$$

$$(1),\ (4) \Rightarrow S_{OAB} + S_{OCD} = \frac{1}{2} S_{ABCD}$$

و حکم مسئله ثابت شد.

۸. ضلع کوچک‌تر زاویه‌ی قائمه از مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABC را x فرض می‌کنیم. در این صورت، بنابه فرض، ضلع بزرگ‌تر زاویه‌ی قائمه $x + 3$ خواهد بود. از آن‌جا داریم:



$$S = \frac{1}{2} AB.AC \Rightarrow 230 = \frac{1}{2} \times x(x+3)$$ مثلث

$$\Rightarrow x^2 + 3x - 460 = 0$$

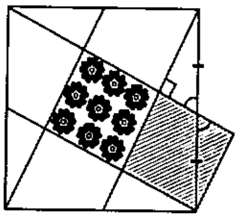
$$\Rightarrow (x+23)(x-20) = 0$$

$$\Rightarrow x = -23 < 0,\quad x = 20$$ ضلع کوچک‌تر زاویه‌ی قائمه

$$\Rightarrow x + 3 = 20 + 3 = 23$$ ضلع بزرگ‌تر زاویه‌ی قائمه

$$\Rightarrow BC = \sqrt{20^2 + 23^2} = \sqrt{929}$$ اندازه‌ی وتر

۹. چهار ذوزنقه با هم و چهار مثلث با یکدیگر هم‌نهشت‌اند و اگر یک ذوزنقه و یک مثلث را کنار هم قرار دهیم، یک مربع حاصل می‌شود. یعنی مجموع مساحت هر ذوزنقه و هر مثلث، مساوی مساحت مربع ایجاد شده برای درخت‌کاری است. بنابراین، مربع بزرگ به پنج مربع کوچک و مساوی تقسیم شده است. یعنی مساحت هر مربع کوچک، با یک‌پنجم مساحت



مربع بزرگ مساوی است. پس مساحت قسمت درخت‌کاری شده مساوی $\frac{1}{5} \times 20^2 = \frac{1}{5} \times 400 = 80$ است. مساحت قسمت چمن‌کاری شده نیز مساوی $320 = 400 - 80$ است. از آن‌جا، هزینه‌ی چمن‌کاری برابر است با:

$320 \times 3000 = 960000$ تومان

۱۰. الف) داریم:

$$\frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{4} \Rightarrow \frac{a}{2} = \frac{-b}{-3} = \frac{c}{4} \Rightarrow \frac{a-b+c}{2-3+4} = \frac{a}{2}$$

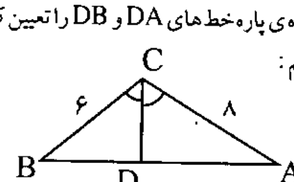
$$\Rightarrow \frac{a-b+c}{3} = \frac{a}{2}$$

ب) واسطه‌ی هندسی بین $\sqrt{2}$ و $3\sqrt{2}$ را x می‌نامیم. داریم:

$$x^2 = 3\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 6 \Rightarrow x = \sqrt{6}$$

هندسه‌ی (۲)

۱. ضلع‌های مثلث را $AB = 12$، $BC = 6$ و $AC = 8$ می‌گیریم. بزرگ‌ترین زاویه‌ی مثلث، زاویه‌ای است که روبه‌روی بزرگ‌ترین ضلع مثلث، یعنی در این شکل، زاویه‌ی $\hat{C}$ است. بنابراین، نیم‌ساز این زاویه را رسم می‌کنیم و CD می‌نامیم. می‌خواهیم اندازه‌ی پاره‌خط‌های DA و DB را تعیین کنیم. داریم:



$$\frac{DA}{DB} = \frac{AC}{BC} \Rightarrow \frac{DA}{DB} = \frac{8}{6} \Rightarrow \frac{DA}{DA+DB} = \frac{8}{6+8} \Rightarrow \frac{DA}{AB} = \frac{8}{14}$$

$$\Rightarrow \frac{DA}{12} = \frac{8}{14} \Rightarrow DA = \frac{12 \times 8}{14} = \frac{48}{7} \Rightarrow DB = AB - DA$$

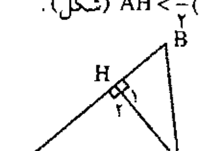
$$\Rightarrow DB = 12 - \frac{48}{7} = \frac{36}{7}$$

۲. بنا به ویژگی نیم‌ساز زاویه‌های درونی مثلث داریم:

$$\frac{DC}{DA} = \frac{BC}{AB} \Rightarrow \frac{2x+4}{15} = \frac{3x+10}{25} \Rightarrow 50x + 100 = 45x + 150$$

$$\Rightarrow 5x = 50 \Rightarrow x = 10$$

۳. مثلث ABC را در نظر می‌گیریم و یکی از ارتفاع‌های این مثلث، مثلاً ارتفاع AH را رسم می‌کنیم. می‌خواهیم ثابت کنیم که $AH < \frac{1}{2}(AB + AC)$ (شکل).



در مثلث‌های قائم‌الزاویه‌ی AHB و AHC $(\hat{H}_1 = \hat{H}_2 = 90°)$ داریم:

$$AH < AB \qquad (1)$$

$$AH < AC \qquad (2)$$

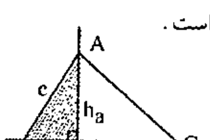
$$(1) + (2) \Rightarrow 2AH < AB + AC \Rightarrow$$
$$AH < \frac{1}{2}(AB + AC)$$

و حکم ثابت است.

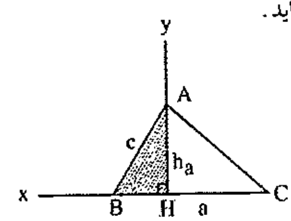
۴. بنا به نامساوی مثلثی باید داشته باشیم:

$$|23 - 17| < x - 1 < 23 + 17 \Rightarrow$$
$$6 < x - 1 < 40 \Rightarrow 7 < x < 41$$

۵. الف) فرض می‌کنیم مسئله حل شده و مثلث ABC جواب آن است. ارتفاع AH از این مثلث را رسم می‌کنیم. چون $AB = c$، $AH = h_a$ و $\hat{H} = 90°$ است، پس مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABH به حالت وتر و یک ضلع قابل رسم است.

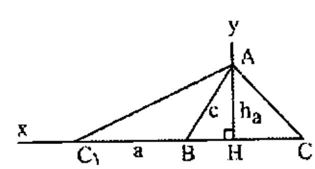


از طرف دیگر، طول پاره‌خط $BC = a$ نیز مشخص است. بنابراین، برای رسم مثلث ABC، نخست مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABH را با معلوم بودن وتر $AB = c$ و ضلع $AH = h_a$ رسم می‌کنیم (زاویه‌ی $x\hat{H}y = 90^\circ$ را رسم می‌کنیم. روی Hy پاره‌خط $HA = h_a$ را جدا می‌کنیم تا رأس A به‌دست آید.

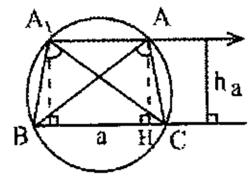


به مرکز A و به شعاع C کمانی رسم می‌کنیم تا Hx را در نقطه‌ی B قطع کند). اکنون $BC = a$ را روی خط Hx مشخص می‌کنیم تا رأس C به دست آید. از C به A وصل می‌کنیم. مثلث ABC به دست می‌آید.

نکته: پاره‌خط $BC = a$ را در دو طرف رأس B روی خط BH می‌توان جدا کرد که دو جواب مسئله، یکی مثلث ABC با زاویه‌های حاده و دیگری مثلث ABC_1 با زاویه‌ی منفرجه‌ی $A\hat{B}C$ است. اگر مسئله شرطی برای نوع مثلث قرار نداده باشد، هر دو جواب قابل قبول هستند.

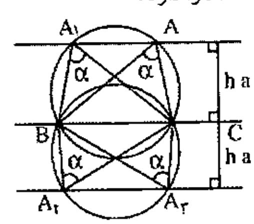


ب) مسئله را حل شده و مثلث ABC با معلومات $BC = a$، $\hat{A} = \alpha$ و $AH = h_a$ را جواب مسئله می‌گیریم. چون $C\hat{A}B = \alpha$ معلوم و پاره‌خط BC، $BC = a$ نیز معلوم است، پس یک مکان هندسی رأس A کمان درخور زاویه‌ی $\hat{A} = \alpha$ روبه‌روی پاره‌خط معلوم $BC = a$ است. از طرف دیگر، چون $AH = h_a$ مقدار معلومی است، پس یک مکان هندسی دیگر رأس A، دو خط موازی BC و به فاصله‌ی $AH = h_a$ از آن هستند. پس برای رسم مثلث ABC، نخست پاره‌خط $BC = a$ را رسم می‌کنیم. آن‌گاه کمان درخور زاویه‌ی $\hat{A} = \alpha$ روبه‌روی این پاره‌خط را رسم می‌کنیم.



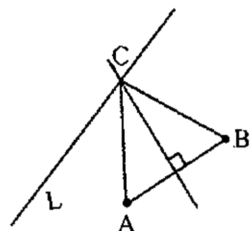
سپس خطی موازی BC و به فاصله‌ی $AH = h_a$ از آن را که در طرف کمان درخور واقع است، رسم می‌کنیم. نقطه‌ی برخورد این خط و کمان درخور رأس A از مثلث ABC است. از A به B و C وصل می‌کنیم. مثلث ABC رسم می‌شود.

نکته‌ی ۱. با رسم کمان درخور زاویه‌ی $\hat{A} = \alpha$ در دو طرف پاره‌خط BC، و رسم دو خط موازی BC و به فاصله‌ی $AH = h_a$ از BC، چهار مثلث جواب مسئله به‌دست می‌آید (ABC، A_1BC، A_2BC و A_3BC) که هم‌نهشت هستند. پس مسئله درواقع یک جواب متمایز ABC را دارد.

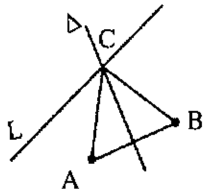


نکته‌ی ۲. شرط جواب مسئله آن است که خطی که به موازات BC و به فاصله‌ی $AH = h_a$ از BC رسم می‌شود، کمان درخور زاویه‌ی $\hat{A} = \alpha$ روبه‌رو به پاره‌خط $BC = a$ را قطع کند. اگر این خط، کمان درخور را در دو نقطه‌ی A و A_1 قطع کند، دو مثلث هم‌نهشت ABC و A_1BC جواب مسئله‌اند و اگر این خط مماس بر کمان درخور باشد، نقطه‌ی تماس A رأس مثلث متساوی‌الساقین ABC جواب مسئله است. اگر این خط مکان هندسی، کمان درخور را قطع نکند، مسئله جواب ندارد.

۶. مسئله را حل شده و مثلث متساوی‌الساقین ABC$(CA = CB)$ را جواب مسئله فرض می‌کنیم. چون $CA = CB$ است، پس رأس C روی عمودمنصف پاره‌خط AB قرار دارد. از طرف دیگر، رأس C روی خط L است. پس این نقطه، محل برخورد عمودمنصف پاره‌خط AB با خط L است. بنابراین، برای حل مسئله، از A به B وصل و عمودمنصف پاره‌خط AB را رسم می‌کنیم. آن را Δ می‌نامیم. نقطه‌ی برخورد Δ و L، رأس C از مثلث متساوی‌الساقین ABC$(CA = CB)$ جواب مسئله است.

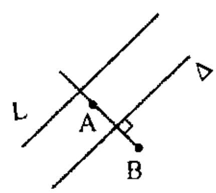


بحث. اگر عمودمنصف پاره‌خط AB یعنی خط Δ، خط L را تنها در یک نقطه مانند C قطع کند، مسئله تنها یک جواب دارد (شکل الف).



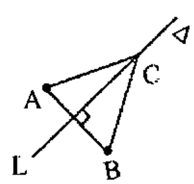
(الف)

۲. اگر خط Δ موازی خط L باشد، مسئله جواب ندارد و این در صورتی است که AB بر L عمود باشد (شکل ب).



(ب)

۳. اگر خط Δ بر خط L منطبق شود، مسئله بی‌شمار جواب دارد، زیرا از هر نقطه‌ی L به A و B وصل کنیم، مثلث ABC جواب مسئله است (شکل پ).

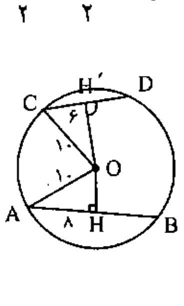


(پ)

۷. فرض می‌کنیم وترها $AB = 16Cm$ و $CD = 12Cm$ باشند. از نقطه‌ی O مرکز دایره، عمودهای OH و OH′ را به‌ترتیب بر AB و CD رسم و از O به A و C نیز وصل می‌کنیم. با توجه به این‌که قطر عمود بر هر وتر عمودمنصف آن وتر است، پس

$$AH = \frac{AB}{2} = \frac{16}{2} = 8Cm$$

$$CH' = \frac{CD}{2} = \frac{12}{2} = 6Cm$$

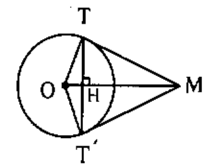


از آن‌جا با توجه به این‌که $OA = OC = 10$ است، در مثلث‌های قائم‌الزاویه‌ی AOH و COH' $(\hat{H} = \hat{H}' = 90^\circ)$ داریم:

$$OH = \sqrt{OA^2 - AH^2} = \sqrt{10^2 - 8^2} = \sqrt{36} = 6cm$$

$$OH' = \sqrt{OC^2 - CH'^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = \sqrt{64} = 8cm$$

$$\Rightarrow \frac{OH}{OH'} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$



۸. از O به T و T′ وصل می‌کنیم. در مثلث قائم‌الزاویه‌ی OMT $(\hat{T} = 90^\circ)$ داریم:

$$OT^2 + MT^2 = OM^2 \Rightarrow 225 + MT^2 = 625$$

$$\Rightarrow MT^2 = 400 \Rightarrow MT = 20$$

$$OT^2 = OH.OM \Rightarrow 225 = OH.25 \Rightarrow OH = 9$$

$$O\overset{\Delta}{T}H: OH^2 + TH^2 = OT^2 \Rightarrow 81 + TH^2 = 225 \Rightarrow TH = 12$$

$$TT' = 2TH = 2 \times 12 = 24$$

۹. می‌دانیم که مماس‌های رسم شده از یک نقطه بر دایره، با هم مساوی‌اند. پس داریم:

$$AM = AQ = 2x+1,\ BN = BM = 10,$$

$$CN = CP = 4x+1,\ DP = DQ = 10$$

$$\Rightarrow \text{محیط چهار ضلعی} = 2(AQ + BM + CN + DP)$$

$$\Rightarrow 2 \times 52 = 2(2x+1+10+4x+1+10) \Rightarrow 6x + 22 = 52$$

$$\Rightarrow 6x = 30 \Rightarrow x = 5$$

۱۰. داریم:

الف) $x = \hat{A} = 70^\circ,\ \widehat{CD} = 140^\circ,\ \widehat{BC} + \widehat{CD} = 180^\circ,$

$$\widehat{BC} + 140^\circ = 180^\circ \Rightarrow \widehat{BC} = 40^\circ \Rightarrow y = \frac{\widehat{BC}}{2} = 20^\circ$$

$$\hat{M} = 180^\circ - (30^\circ + 70^\circ) = 80^\circ,\ \hat{M} = \frac{\widehat{BC} + z}{2}$$

$$\Rightarrow 80^\circ = \frac{40^\circ + z}{2} \Rightarrow z = 120^\circ$$

ب) $z = \widehat{BC} = B\hat{O}C = 80^\circ,\ x = \frac{\widehat{BC}}{2} = \frac{80^\circ}{2} = 40^\circ,$

$$y = 360^\circ - (120^\circ + 80^\circ) = 160^\circ$$

جبر و احتمال

۱. الف) $n = 1:\ \frac{1}{2^1} = \frac{2^2 - 1 - 2}{2^1} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

(فرض استقرا) $n = k:\ \frac{1}{2^1} + \frac{2}{2^2} + \ldots + \frac{k}{2^k} = \frac{2^{k+1} - k - 2}{2^k}$

(حکم استقرا) $n = k+1:\ \underbrace{\frac{1}{2^1} + \frac{2}{2^2} + \ldots + \frac{k}{2^k}}_{\frac{2^{k+1}-k-2}{2^k}} + \frac{k+1}{2^{k+1}}$

$$= \frac{2^{k+2} - (k+1) - 2}{2^{k+1}}$$

$$\frac{2^{k+1} - k - 2}{2^k} + \frac{k+1}{2^{k+1}} = \frac{2(2^{k+1} - k - 2) + k + 1}{2^{k+1}}$$

$$= \frac{2^{k+2} - 2k - 4 + k + 1}{2^{k+1}} = \frac{2^{k+2} - (k+1) - 2}{2^{k+1}}$$

ب) $n = 1:\ \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} > 1 \Rightarrow \frac{13}{12} > 1$

فرض: $n = k:\ \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \frac{1}{k+3} + \ldots + \frac{1}{3k+1} > 1$

حکم: $n = k+1:\ \frac{1}{k+2} + \frac{1}{k+3} + \ldots + \frac{1}{3k+1} + \frac{1}{3k+2}$

$$+ \frac{1}{3k+3} + \frac{1}{3k+4} > 1$$

برای اثبات حکم، ابتدا عبارت $\frac{1}{3k+2} + \frac{1}{3k+3} + \frac{1}{3k+4}$ را به دو طرف فرض اضافه می‌کنیم:

$$\frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \frac{1}{k+3} + \ldots + \frac{1}{3k+1} + \frac{1}{3k+2} + \frac{1}{3k+3}$$

$$+ \frac{1}{3k+4} > 1 + \frac{1}{3k+2} + \frac{1}{3k+3} + \frac{1}{3k+4}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{k+2} + \frac{1}{k+3} + \frac{1}{k+4} + \ldots + \frac{1}{3k+4} > 1 + \frac{1}{3k+2}$$

$$+ \frac{1}{3k+3} + \frac{1}{3k+4} - \frac{1}{k+1}$$

از مقایسه‌ی این حکم با حکم استقرا نتیجه می‌شود که برای اثبات حکم کافی است ثابت کنیم:

$$1 + \frac{1}{3k+2} + \frac{1}{3k+3} + \frac{1}{3k+4} - \frac{1}{k+1} \geq 1$$

و یا این‌که:

$$\frac{1}{3k+2} + \frac{1}{3k+4} \geq \frac{1}{k+1} - \frac{1}{3k+3} = \frac{1}{k+1} - \frac{1}{3(k+1)}$$

$$= \frac{2}{3(k+1)}$$

و به کمک روش بازگشتی نتیجه می‌شود:

$$\frac{6k+6}{(3k+2)(3k+4)} \geq \frac{2}{3(k+1)} \Rightarrow \frac{6(k+1)}{9k^2 + 18k + 8} \geq \frac{2}{3(k+1)}$$

$$\Rightarrow 9(k+1)^2 \geq 9k^2 + 18k + 8$$

$$\Rightarrow 9k^2 + 18k + 9 \geq 9k^2 + 18k + 8 \Rightarrow 9 \geq 8$$

نامساوی آخر درست است و همه‌ی مراحل نیز بازگشت‌پذیرند. در نتیجه حکم استقرا ثابت می‌شود:

ج) $n = 1:\ 3^1 + 4 + 5 = 12 = 4r \qquad (r = 1)$

فرض: $n = k:\ 3^{2k-1} + 4k + 5 = 4r$

حکم: $n = k+1:\ 3^{2k+1} + 4(k+1) + 5 = 4r'$

دو طرف فرض را در ۹ ضرب می‌کنیم:

$$3^2(3^{2k-1} + 4k + 5) = 36r \Rightarrow 3^{2k+1} + 36k + 45 = 36r$$

$$\Rightarrow 3^{2k+1} + 4(k+1) + 5 = 36r - 32k - 36$$
$$= 4(\underbrace{9r - 8k - 9}_{r'}) = 4r'$$

۲.

$$a = 5k + 3 \Rightarrow a^3 = (5k+3)^3 = 125k^3 + 225k^2 + 135k + 27$$
$$= 5(\underbrace{25k^3 + 45k^2 + 27k + 5}_{k'}) + 2 = 5k' + 2$$

بنابراین a^3 در تقسیم بر ۵ باقی‌مانده‌ی ۲ دارد.

۳. $(a^2+1)(b^2+1) \geq 4ab \Leftrightarrow a^2b^2 + a^2 + b^2 + 1 \geq 4ab$

$$\Leftrightarrow (a^2b^2 - 2ab + 1) + (a^2 + b^2 - 2ab) \geq 0$$
$$\Leftrightarrow (ab-1)^2 + (a-b)^2 \geq 0$$

نابرابری آخر درست است، زیرا مربع‌های کامل نامنفی‌اند و مجموع آن‌ها نیز همواره بزرگ‌تر یا مساوی صفر است. همه‌ی مراحل نیز برگشت‌پذیرند.

۴. برای اثبات از برهان خلف استفاده می‌کنیم. فرض کنیم $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}$ مخالف ۲ نباشد، بنابراین:

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a} = 2 \Rightarrow \frac{a^2+b^2}{ab} = 2 \Rightarrow a^2 + b^2 = 2ab \Rightarrow$$
$$a^2 + b^2 - 2ab = 0 \Rightarrow (a-b)^2 = 0 \Rightarrow a - b = 0 \Rightarrow a = b$$

این نتیجه با فرض مسئله $(a \neq b)$ مغایرت دارد.

۵. اثبات به کمک برهان خلف: فرض کنیم $\sqrt[3]{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$ عددی گویا باشد:

$$\sqrt[3]{\sqrt{5}-\sqrt{2}} \in Q \Rightarrow \sqrt[3]{\sqrt{5}-\sqrt{2}} = \frac{a}{b},\ a,b \in Z,\ b \neq 0,\ a \neq 0$$
$$\Rightarrow \sqrt{5}-\sqrt{2} = \frac{a^3}{b^3} \Rightarrow \sqrt{5} = \sqrt{2} + \frac{a^3}{b^3} \Rightarrow$$
$$5 = \left(\sqrt{2} + \frac{a^3}{b^3}\right)^2 = 2 + \frac{a^6}{b^6} + \frac{2\sqrt{2}a^3}{b^3}$$
$$\Rightarrow \frac{2\sqrt{2}a^3}{b^3} = 3 - \frac{a^6}{b^6} = \frac{3b^6 - a^6}{b^6}$$
$$\Rightarrow \sqrt{2} = \frac{3b^6 - a^6}{2a^3b^3} = \frac{a'}{b'}$$
$$a', b' \in Z,\ b' \neq 0 \Rightarrow \sqrt{2} \in Q$$

نتیجه‌ی آخر مخالف فرض گنگ بودن $\sqrt{2}$ است.

۶. کارمندان در دو جنس زن و مرد هستند و در سه بخش گوناگون کار می‌کنند و سه نوع مدرک تحصیلی دارند. بنابراین، طبق اصل ضرب $(2\times3\times3 = 18)$ هجده نوع کارمند (از نظر جنس و نوع کار و مدرک تحصیلی) وجود دارد. وقتی نوزده کارمند داشته باشیم، طبق اصل لانه کبوتری، دو تای آن‌ها باید از یک نوع باشند. یعنی جنسیت و بخش کاری و مدرک تحصیلی یکسان دارند.

۷. معادله‌ی درجه دومی می‌نویسیم که ریشه‌های آن $1 \pm \sqrt{3}$ باشند:

$$S = 1+\sqrt{3}+1-\sqrt{3} = 2,\quad P = (1+\sqrt{3})(1-\sqrt{3}) = 1-3 = -2$$
$$\Rightarrow x^2 - Sx + p = 0 \Rightarrow x^2 - 2x - 2 = 0$$
$$A = \left\{x \middle| x^2 - 2x - 2 = 0\right\}$$

۸.

$$\frac{6}{x-4} + 1 < 0 \Rightarrow \frac{x+2}{x-4} < 0 \Rightarrow -2 < x < 4 \Rightarrow$$
$$x = -1, 0, 1, 2, 3 \Rightarrow B = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$$

حسابان

۱.

$$|[x]| - 1 \neq 0 \Rightarrow |[x]| \neq 1 \Rightarrow \begin{cases}[x] = 1 \\ [x] = -1\end{cases} \text{یا} \Rightarrow \begin{cases}1 \leq x < 2 \\ -1 \leq x < 0\end{cases}$$
$$\Rightarrow D_f = \mathbb{R} - ([-1, 0) \cup [1, 2))$$

۲.

$$x_1x_2 = \frac{c}{a} = 12 \quad \text{و} \quad x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -p$$

می‌دانیم: $(x_1+x_2)^2 = (x_1-x_2)^2 + 4x_1x_2$

درنتیجه: $(-p)^2 = 1^2 + (4\times12) = 49 \Rightarrow p = \pm7$

۳. می دانیم $1 \in D_f$ و $f(-1) = -3-k$ و $f(1) = 3-k$

چون f فرد است، پس: $f(1) = -f(-1)$.

$$3 - k = -(-3-k) \Rightarrow \boxed{k = 0}$$

۴. فرض کنیم: $x_1 \leq x_2$ ، در این صورت:

$$f(x_1) - f(x_2) = \frac{x_1^3 + 2x_1}{1+x_1^2} - \frac{x_2^3 + 2x_2}{1+x_2^2}$$
$$= \frac{(x_1^3+2x_1)(1+x_2^2) - (x_2^3+2x_2)(1+x_1^2)}{(1+x_1^2)(1+x_2^2)}$$
$$= \frac{x_1^3 + x_1^3x_2^2 + 2x_1 + 2x_1x_2^2 - x_2^3 - x_2^3x_1^2 - 2x_2 - 2x_2x_1^2}{(1+x_1^2)(1+x_2^2)}$$
$$= \frac{(x_1^3 - x_2^3) + x_1^2x_2^2(x_1 - x_2) + 2(x_1 - x_2) - 2x_1x_2(x_1 - x_2)}{(1+x_1^2)(1+x_2^2)}$$
$$= \frac{(x_1 - x_2)(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 + x_1^2x_2^2 + 2 - 2x_1x_2)}{(1+x_1^2)(1+x_2^2)}$$
$$= \frac{(x_1 - x_2)(x_1^2x_2^2 + x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2 + 2)}{(1+x_1^2)(1+x_2^2)} \leq 0$$

توجه کنید که عبارت $(x_1x_2)^2 - (x_1x_2) + 2$ همواره مثبت است. بنابراین تابع f صعودی است.

۵. می‌توانیم بنویسیم:

$$1+\sin\alpha+\cos\alpha=(1+\cos\alpha)+\sin\alpha$$
$$=2\cos^2\frac{\alpha}{2}+2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$$
$$=2\cos\frac{\alpha}{2}(\cos\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\alpha}{2})$$
$$=2\cos\frac{\alpha}{2}(\cos\frac{\alpha}{2}+\cos(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}))$$
$$=4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\pi}{4}\cos(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2})$$
$$=2\sqrt{2}\cos\frac{\alpha}{2}\cos(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2})$$

۶. الف)

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3+x^2-2}{\sin(x-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{(x^3-1)+(x^2-1)}{\sin(x-1)}$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2+x+1+x+1)}{\sin(x-1)}$$
$$=(\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)}{\sin(x-1)})(\lim_{x\to 1}(x^2+2x+2))$$
$$=1\times 5=5$$

ب)

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{\tan x}{\sqrt[3]{(1-\cos x)^2}}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\tan x}{\sqrt[3]{4\sin^4\frac{x}{2}}}$$
$$=\lim_{x\to 0^-}\frac{\tan x}{\sin\frac{x}{2}\sqrt[3]{4\sin\frac{x}{2}}}$$
$$=\lim_{x\to 0^-}\frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}\cos x\sqrt[3]{4\sin\frac{x}{2}}}$$
$$=\lim_{x\to 0^-}\frac{2\cos\frac{x}{2}}{\cos x\sqrt[3]{4\sin\frac{x}{2}}}=-\infty$$

۷. با توجه به این که:

$$\lim_{x\to 1}f(x)=\lim_{x\to -1}f(x)=+\infty$$

پس خط‌های $x=1$ و $x=-1$ مجانب‌های قائم نمودار f هستند.

اما:

$$\lim_{x\to\pm\infty}f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{|x|\sqrt{\left|1-\frac{1}{x^2}\right|}}=+\infty$$

بنابراین، نمودار f مجانب افقی ندارد.

۸. می‌دانیم که:

$$0\le\left|f(x)-\frac{1}{2}\right|\le\left|x-\frac{1}{2}\right|$$

چون:

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}}\left|x-\frac{1}{2}\right|=0$$

بنابر قضیه‌ی فشردگی:

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}}\left|f(x)-\frac{1}{2}\right|=0$$

در نتیجه:

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}}(f(x)-\frac{1}{2})=0$$

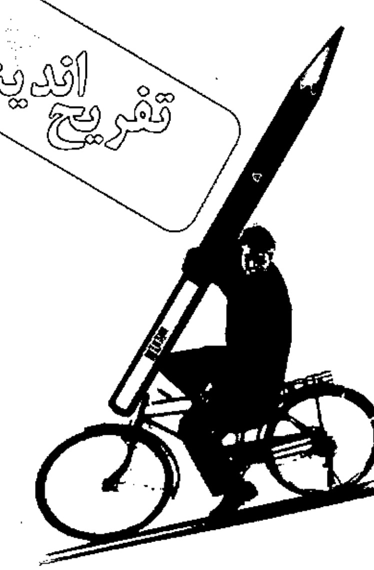
یعنی:

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}}f(x)=\frac{1}{2}=f(\frac{1}{2})$$

پس f در نقطه‌ی $\frac{1}{2}$ پیوسته است.

تفریح اندیشه

تقسیم زیرکانه



سه نفر به نام‌های A، B و C به سراغ زیرکی می‌آیند و از او می‌پرسند؛ از ریاضیات چه میدانی؟

او می‌گوید: در این هنر سرآمد روزگارم.

A چهار هزار تومان به زیرک می‌دهد که بین آن‌ها تقسیم کند.

او دو هزار تومان به B و دو هزار تومان به C می‌دهد و می‌گوید، آقای A باید صبر کند تا پول دیگری به دستم برسد و فعلاً برای او پولی ندارم.

A سخت عصبانی می‌شود و می‌گوید: این چه حسابی است؟

زیرک می‌گوید: از نظر من کاملاً صحیح است، چون مجموعه‌های $\{A,B,C\}$ دامنه و مجموعه‌ی $\{0,2\}$ برد تابع زیر است.

$f(B)=f(C)=2$ و $f(A)=0$

و این به درستی یک تابع است.

ابوالعباس فضل بن حاتم نیریزی

ریاضی‌دان مسلمان و منجم ایرانی (نیمه‌ی دوم سده‌ی سوم و اوایل سده‌ی چهارم)

اهل نیریز فارس و یکی از افاضل ریاضی‌دانان و منجمان دوره‌ی اسلامی و به قول **ابن ندیم**، در علم نجوم و به‌ویژه در علم هیئت انگشت‌نما بود. مترجمان لاتینی او را **اناریتیوس**[1] می‌نامیدند. وی در نیمه‌ی دوم سده‌ی سوم و احیاناً در اوایل سده‌ی چهارم فعالیت علمی داشت و معاصر با **المعتضد**، خلیفه‌ی عباسی[2] بود و برخی از تألیفات خود را به‌نام وی و یا وزرای وی نوشته است. مثلاً رساله‌ی «فی احداث الجو» را به نام المعتضد و کتاب «فی معرفة آلات یعرف بها ابعاد الاشیاء» را به نام یکی از وزرای او تألیف کرده است.

متأسفانه از زندگی نیریزی اطلاعی در دست نیست، جز آن‌چه جسته و گریخته در آثار ریاضی‌دانان دیگر درباره‌ی تألیفات وی دیده می‌شود. اما مسلم است که آثارش همواره مورد مراجعه و اعتماد ریاضی‌دانان و منجمان بزرگ بوده است. محققان اروپایی وفات نیریزی[3] را در حدود سال ۳۱۰ دانسته‌اند.[4]

بیرونی در چندین موضع از «قانون مسعودی»، «آثار الباقیه» و «افراد المقال فی امر الظلال»، از نیریزی نام برده و مسائل و مطالبی از وی نقل کرده و به آرای او استناد نموده است.

عمر خیام نیز در چند موضع از رساله‌ی «مصادرات» خود از نیریزی یاد کرده است[5] و **نصیرالدین طوسی** در کتاب «شکل القطاع»، استدلالی از قول نیریزی نقل کرده است.

کمال الدین فارسی، در کتاب «تنقیح المناظر» نوشته است که در زمان بعضی از خلفا (ظاهراً المعتضد)، قوس قزحی دیده شد که طبقه‌ی سیاهی در آن نمودار بود. این امر خلیفه و اطرافیان او را به وحشت انداخت. پس به ابوالعباس فضل بن حاتم نیریزی، شارح «مجسطی» رجوع کردند و او علت امر را بیان کرد.

سارتن نوشته است که نیریزی اصطلاح «ظل معکوس»[6] را که معادل با اصطلاح «تانژانت» است، به عنوان یک خط مثلثاتی مستقل به‌کار برده است (امّا پیش از وی، حبش حاسب نیز این اصطلاح را به‌کار برده بود). او رساله‌ی «اسطرلاب کروی» تألیف نیریزی را اثری استادانه و بهترین کتابی معرفی کرده است که مسلمانان درباره‌ی اسطرلاب نوشته‌اند.

تفسیری که نیریزی بر کتاب مجسطی **بطلمیوس** نوشته، بهترین تفسیرهای آن کتاب دانسته شده است، تا آن‌جا که گاهی نیریزی را به‌طور مطلق «شارح مجسطی» خوانده‌اند؛ با وجود آن‌که عده‌ای دیگر نیز بر مجسطی بطلمیوس شرح و تفسیر نوشته‌اند. وقتی بدون قید نام از «شارح مجسطی» سخن به‌میان می‌آید، معلوم است که مقصود نیریزی است.

شرحی که نیریزی بر کتاب اصول اقلیدس نوشته است نیز از مهم‌ترین و مشهورترین شرح‌های آن کتاب است که به زبان لاتینی ترجمه شده و مورد استفاده و توجه مورخان ریاضی است.

آثار ریاضی موجود نیریزی

۱. شرح کتاب اصول اقلیدس

این شرح را نیریزی بر ترجمه‌ی اصول اقلیدس توسط **حجاج بن یوسف بن مطر** نوشته است و از نظر تاریخ ریاضیات دوره‌ی اسلامی و یونانی حائز اهمیت است. زیرا در آن قسمت‌هایی از آثار ایرن **(هرون) اسکندرانی**[6] و **سنبلیقیوس**[7] و **اغانیس**[8] نقل شده است.

۲. رساله فی (بیان) المصادرة المشهوره لاقلیدس

یک نسخه از این رساله در کتاب‌خانه‌ی «مدرسه عالی شهید مطهری» (سپهسالار قبلی)، موجود است.

سوتر نوشته است که امکان دارد این رساله بخشی از کتاب شرح نیریزی بر اصول اقلیدس باشد.

زیرنویس ....

1. Anaritius

۲. از ۲۷۹ تا ۲۸۹ خلافت کرد.

۳. در بعضی نسخه‌های آثارش، نسبت وی را به غلط «تبریزی» نوشته‌اند.

۴. سوتر و به استناد قول او سارتن و بروگلمان.

۵. همایی: خیامی‌نامه، ج۱، ص۵۸.

6. umbraversa

۶. Heron of Alexandria ریاضی‌دان اسکندرانی که در حدود نیمه‌ی دوم سده‌ی اول میلادی می‌زیسته است.

۷. Simplicios فیلسوف یونانی از قرن ششم میلادی که شرحی بر مقاله‌ی اول اصول اقلیدس نوشته است.

منبع: زندگی‌نامه‌ی ریاضیدانان دوره‌ی اسلامی / ابوالقاسم قربانی / دفتر نشر دانشگاهی


دهه‌ی فجر مبارک باد

رشد

برهان ۶۵

مجله‌ی ریاضی

دوره‌ی متوسطه

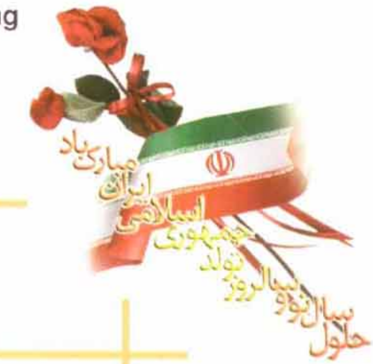
ISSN:1735-4951

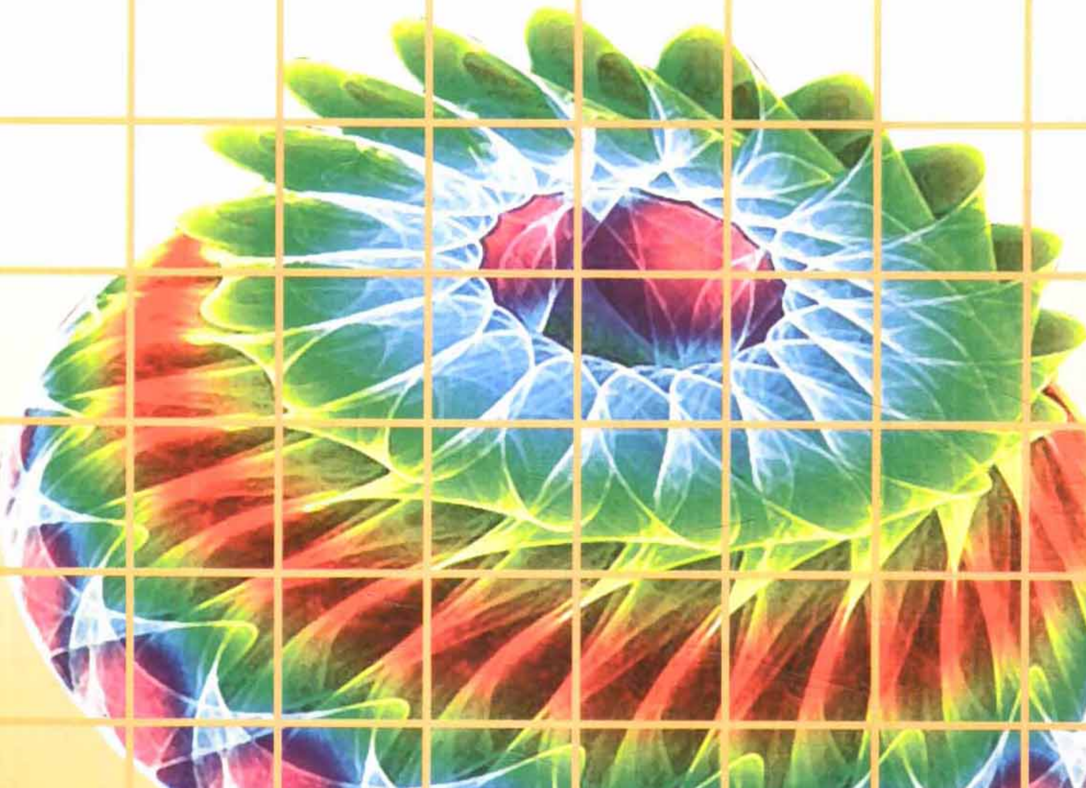
وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی
دفتر انتشارات کمک آموزشی

دوره‌ی نوزدهم / بهار ۱۳۸۹ / شماره‌ی ۳ / بها ۴۵۰۰ ریال / ۶۴ صفحه

فصلنامه‌ی آموزشی، تحلیلی و اطلاع رسانی

www.roshdmag





اعمال جالب ریاضی

به این سه عمل جالب ریاضی خوب توجه کنید که چه قدر جالب و در عین حال تعجب‌آور:

$\sqrt{۱۱۸۸۱} = ۱۱۸ - ۸ - ۱$

$۹۵:۵ = ۹ + ۵ + ۵$

$\sqrt{۱۹۳۶} = -۱ + ۹ + ۳۶$

جهت یابی با استفاده از سایه شاخص

در سطح کاملاً افقی دایره‌ای رسم کرده و چوب یا میله را (در اصطلاح شاخص گفته می‌شود) در مرکز دایره و به‌طور کاملاً قائم نصب می‌کنیم. (شعاع دایره باید در حدود طول شاخص باشد) یک مرتبه قبل از ظهر و مرتبه‌ای دیگر بعد از ظهر سایه‌ی نوک شاخص درست بر محیط دایره واقع می‌شود، این دو نقطه را **A** و **B** می‌نامیم سپس نیمساز زاویه‌ی مرکزی مقابل به کمان **AB** رسم می‌شود که امتداد شمال و جنوب محل است.

سرگرمی هندسی

مستطیلی داریم با ابعاد ۱۳×۵

مساحت مستطیل ۶۵ مترمربع است. $۱۳ \times ۵ = \boxed{۶۵}$

حال شکل فوق را تقسیم کردیم به دو مثلث مساوی و دو ذوزنقه مساوی

مساحت هر مثلث $۳ \times \frac{۸}{۲} = ۱۲$

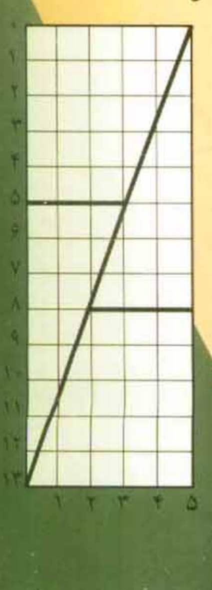
مجموع مساحت دو مثلث: $۱۲ \times ۲ = \boxed{۲۴}$

مساحت هر ذوزنقه: $(۳ + ۵) \times \frac{۵}{۲} = ۲۰$

مجموع مساحت هر ذوزنقه $۲۰ \times ۲ = \boxed{۴۰}$

مساحت کل: $۲۴ + ۴۰ = ۶۴$

یک مترمربع کم آوردیم چرا؟



بسم الله الرحمن الرحیم

رشد برهان ۶۵
متوسطه
مجله‌ی ریاضی

دوره‌ی آموزش متوسطه
فصلنامه‌ی آموزشی، تحلیلی و اطلاع رسانی

وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی
دفتر انتشارات کمک آموزشی

دوره‌ی نوزدهم /شماره‌ی ۳ / بهار ۱۳۸۹

- مدیر مسئول: محمد ناصری ◆ سردبیر: حمیدرضا امیری
- مدیر داخلی: میرشهرام صدر ◆ طراح گرافیک: شاهرخ خرمغانی
- هیئت تحریریه: حمیدرضا امیری، محمد هاشم رستمی، احمد قندهاری، میرشهرام صدر، هوشنگ شرقی، سید محمدرضا هاشمی موسوی، غلامرضا یاسی‌پور و با تشکر از همکاری ارزنده‌ی استاد پرویز شهریاری ◆ ویراستار ادبی: کبری محمودی
- پایگاه اینترنتی www.roshd mag.ir
- رایانامه: Borhanm@roshdmag.ir
- پیام‌گیر نشریات رشد: ۰۲۱-۸۸۳۰۱۴۸۲
- نشانی دفتر مجلّه: تهران، صندوق پستی ۱۵۸۷۵/۶۵۸۵
- تلفن دفتر مجله: ۰۲۱-۸۸۳۰۵۸۶۲
- تلفن امور مشترکین: ۰۲۱-۷۷۳۳۶۶۵۵_۷۷۳۳۶۶۵۶
- شمارگان: ۱۰۰۰۰ نسخه
- چاپ: شرکت افست (سهامی عام)

رشد برهان متوسطه، تمامی دبیران محترم و دانش‌آموزان عزیز را در زمینه‌های زیر به همکاری دعوت می کند:

- نگارش مقاله‌های کمک درسی (شرح و بسط و رفع مشکلات مبحث درسی کتاب‌های ریاضی دوره‌ی متوسطه و پیش‌دانشگاهی)
- طرح مسائل کلیدی به همراه حل آن‌ها (برای دانش‌آموزان)
- طرح مسائل مسابقه‌ای به همراه حل آن‌ها (برای دانش‌آموزان)
- طرح معماهای ریاضی
- نگارش یا ترجمه‌ی مقاله‌های عمومی ریاضی (مانند تاریخ ریاضیات، زندگینامه‌ی علمی و اجتماعی ریاضیدانان، نکته‌های تازه و لطیف ریاضیات، آموزش ریاضیات، آموزش کامپیوتر و ...)

رشد برهان متوسطه هر سه ماه، یکبار منتشر می شود.

حرف اول

امام علی (ع) به نقل از پیامبر اکرم (ص) می‌فرماید: «کسی که علم را برای خدا طلب کند، به هیچ بخشی از آن نرسد مگر تواضع‌اش بیشتر، و فروتنی‌اش در میان مردم زیادتر و خداترسی‌اش افزون‌تر و جهد و کوشش او در دین بیشتر شود، و این است آن کسی که از علم و دانایی برخوردار است. پس [تا می‌توانید بیشتر] بیاموزد» [کنزالعمال، ج ۱۰، حدیث ۲۹۳۸۴].

به راستی شما طلب علم و دانش‌آموزی را به چه منظوری و برای چه هدفی دنبال می‌کنید؟ آیا علم را برای علم یا برای عالم شدن یا برای کسب موقعیت‌های اجتماعی، یا به دلیلِ علاقه‌ی خود به یادگیری، یا برای خدمت به جامعه و افتخار و اعتبار کشور یا... می‌آموزید؟

همان‌طور که در حدیث گهرباری که در آغاز از پیامبر اکرم(ص) و به نقل از ولّی و وصّی برحقشان امیرالمؤمنین امام علی (ع) بیان شد، علم‌آموزی و طلب علم اگر برای خدا باشد، بهترین و زیباترین فایده‌ها را به دنبال خواهد داشت. البته وقتی تعلم برای رضای خدا باشد، روشن است که در سایه‌ی آن به راحتی به هر هدف مورد عنایت و تأیید حضرت حق، هم‌چون استقلال و رهایی از وابستگی‌های علمی و تکنولوژیک و صنعتی و کسب سربلندی و افتخار برای جامعه اسلامی و خدمت به مردم و... نیز می‌توان دست یافت.

از طرف دیگر، با الهام از راهنمایی‌های معصومین (علیهم السلام) درمی‌یابیم که طلب علم امری واجب است. امام علی (ع) می‌فرمایند: «بر شما باد طلب علم، زیرا طلب علم واجب است،...» [بحارالانوار، ج ۱: ۱۸۳]. اما آیا هر علمی مفید است و طلب آن را می‌توان واجب شمرد؟ کدام علم ره‌گشا و نجات‌بخش است؟ پاسخ این پرسش‌ها را نیز در کلام امام علی (ع) جست‌وجو می‌کنیم. ایشان می‌فرمایند: «بهترین علم آن علمی است که به وسیله‌ی آن راه رشد و هدایت را اصلاح کنی، و بدترین علم، علمی است که توسط آن آخرت خود را تباه کنی» [غررالحکم، فصل ۲۹، حدیث ۷۵].

سؤال دیگر آن است که فایده‌ی این علم ـ همان که مولا علی(ع) آن را بهترین علم نامیدند ـ چیست؟ ایشان می‌فرمایند: «نتیجه و فایده‌ی علم، نیکوکاری است» [غررالحکم، حرف غ].

یعنی ثمره‌ی درخت علم، عمل نیک و صالح است و این درخت به ثمر نمی‌رسد، جز با زحمت و شکیبایی در راه کسب علم و رسیدن به اهداف والای آن که در این راستا نیز امام متقیان علی (ع) می‌فرمایند: «ای جوینده‌ی علم، عالم و دانشمند حقیقی دارای سه نشانه است: دانایی، بردباری و سکوتِ بجا و به مورد» [الحیاة، ج ۲: ۳۱۰].

اِن‌شاءالله، با تمسک به روایات و راهنمایی‌هایی معصومین (علیهم السلام)، بتوانیم در زمره‌ی جویندگان و عاملین واقعی علم و دانش باشیم و از فواید و آثار آن بهره‌مند شویم.

سردبیر

پرویز شهریاری

معرفی ریاضی دانان ایرانی

محمد فرزند عیسی ماهانی

ابوعبدالله محمد، فرزند عیسی ماهانی، از مردم ماهان کرمان است. او به تقریب در سال ۲۱۰ هجری در ماهان کرمان زاده شد و در سال ۲۶۷ هجری از دنیا رفت. او در بغداد می‌زیست و دانشمندی بود در زمینه‌ی عدد اخترشناسی زبردست و مهندس. **ابوالحسن فرزند سعید**، مشهور به «ابن یونس» در «زیج کبیر حاکمی» رصدهایی را نام برده که ماهانی از ۲۳۹ تا ۲۵۲ هجری آن را انجام داده است.



به ظاهر، **حکیم عمرخیام** به کتاب یا کتاب‌های ماهانی دست‌رسی داشته است. زیرا به معادله‌ی $x^3 + a = cx^2$ اشاره می‌کند که بین ریاضی‌دانان به معادله‌ی ماهانی مشهور است.

ماهانی کتابی دارد که در آن، مقاله‌ی دوم کتاب ارشمیدس را تفسیر کرده است. این مقاله درباره‌ی «کره و استوانه» است که ماهانی هشت مسئله از نه مسئله‌ی آن را حل کرده و مسئله‌ای که حل نکرده است، می گوید: «کره را به وسیله‌ی صفحه‌ای چنان تقسیم کنید که دو حجم آن به نسبت عدد معلومی باشد.»

او کتابی در شرح مقاله‌ی اقلیدس نوشته که به اعتقاد **سوتر**، همان «رسالة فی الشکل النسبه» است که در کتاب‌خانه‌ی استانبول موجود است. کتابی دیگر درباره‌ی اقلیدس دارد که بخشی از آن در کتاب‌خانه ی ملی پاریس موجود است. اصلاح کتاب سنة لائوس که به ظاهر خیام آن را در اختیار داشته است.

فضل فرزند حاتم نیریزی

ابوالعباس فضل، فرزند حاتم نیریزی، اهل نیریز فارس بود و به لاتینی

او را «آناریوس» می‌نامند. او در نیمه‌ی دوم سده‌ی سوم و نیمه‌ی اول سده‌ی چهارم هجری کار می‌کرد و با **معتضد**، خلیفه‌ی عباسی، هم‌زمان بود. **بیرونی** در قانون مسعودی، یکی از زیج‌های نیریزی را به نام معتضد نامیده است. حسنّ فرزند علی، معروف به کمال‌الدین فارسی که خود ریاضی‌دان بوده است، می‌گوید: در زمان معتضد، قوس و قزحی عجیب دیده شد. این موضوع، خلیفه و اطرافیان او را نگران کرده بود. پس به فضل پسر حاتم نیریزی که خود شرحی بر مجسطی نوشته بود، مراجعه کردند و او علت این مسئله را توضیح داد.

سارتون می‌نویسد، نیریزی ظل معکوس را که هم‌ارز تانژانت است، به کار برده است.

فضل حاتم نیریزی توضیحی بر اصول اقلیدس نوشته است و در آن از نوشته‌های **هرون اسکندرانی** بهره گرفته است. ده مقاله‌ی اول این شرح را جرار دکرمونی در سده‌ی دوازدهم میلادی، به لاتینی ترجمه کرده که در سال ۱۸۹۹ چاپ شده است.

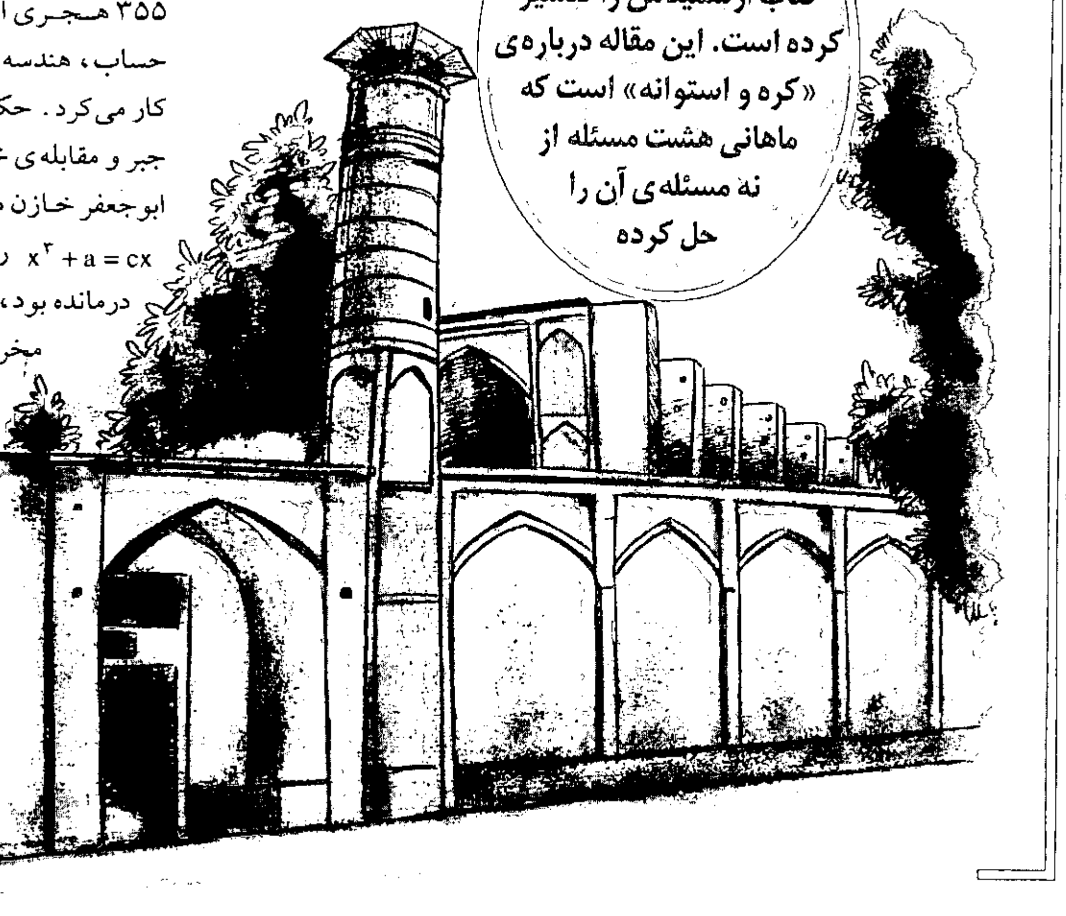
هم‌چنین نیریزی کتابی دارد درباره رساله‌ی اقلیدس که نسخه‌ی خطی آن در کتاب‌خانه‌ی مدرسه‌ی عالی شهید مطهری (سپهسالار) موجود است. با وجودی که بسیاری کسان از جمله ابن‌ندیم، قفطی و بیرونی از این کتاب یاد کرده‌اند، امروز در دسترس ما نیست. هم‌چنین نیریزی زیج‌هایی داشته است که ابوریحان بیرونی مسئله‌هایی از آن‌ها آورده است، ولی خود زیج‌ها را در اختیار نداریم. نیریزی کتابی هم درباره‌ی استرلاب کروی داشته است که یک نسخه‌ی خطی آن در اسکوریال موجود است. مسئله‌ای در تعیین سمت قبله دارد که یک نسخه‌ی خطی آن در کتاب‌خانه‌ی ملی پاریس موجود است. یک کتاب هم درباره‌ی «ظاهرات فلک» نوشته که **نصیر توسی** آن را تحریر کرده است.

جعفر محمد
فرزند حسین خراسانی خازن

محمد فرزند حسین خراسانی خازن، استاد در ریاضیات و اخترشناسی، در نیمه‌ی اول سده‌ی چهارم هجری در خراسان متولد شد. در آخر عمر در ری می‌زیست و در سال ۳۵۵ هجری از دنیا رفت. او در حساب، هندسه، جبر و رصد ستارگان کار می‌کرد. حکیم عمرخیام (در کتاب جبر و مقابله‌ی خود) نوشته است، که ابوجعفر خازن معادله‌ی درجه سوم $x^3 + a = cx$ را که ماهانی در حل آن درمانده بود، به کمک مقطع‌های مخروطی حل کرد.

ابوجعفر خازن،

ماهانی کتابی دارد که در آن، مقاله‌ی دوم کتاب ارشمیدس را تفسیر کرده است. این مقاله درباره‌ی «کره و استوانه» است که ماهانی هشت مسئله از نه مسئله‌ی آن را حل کرده



تفسیری بر مقاله‌ی اقلیدس دارد که یک نسخه‌ی خطی آن در کتاب‌خانه‌ی دانشکده‌ی ادبیات دانشگاه تهران موجود است. کتابی هم درباره‌ی زیج داشته است که قفطی درباره‌ی آن می گوید: «و آن جدیدترین و جالب‌ترین کتابی است که در آن فن نوشته شده است». اصل زیج از بین رفته، ولی دو فصل مختصر از آن باقی‌مانده است.

ابوریحان بیرونی در کتاب «قانون مسعودی» از شرحی که ابوجعفر خازن بر کتاب مجسطی نوشته، گفت‌وگو کرده است. ولی خود کتاب در دست‌رس نیست. هم‌چنین ابوریحان بیرونی در «قانون مسعودی» خود از کتابی «درباره‌ی بعدهای جرم‌ها» صحبت کرده، ولی خود کتاب از بین رفته است.

امروزه بسیاری کتاب‌هایی که و بیرونی، نصیر توسی، ابن ندیم و قفطی گفته‌اند مربوط به ابوجعفر خازن بوده است، در دست‌رس نیستند.

عبدالرحمن فرزند عمر مشهور به صوفی

ابوالحسن عبدالرحمان فرزند عمر مشهور به صوفی رازی، اخترشناس و از فسای فارس بود. در سال ۲۹۱ هجری در شهر ری متولد شد و در سال ۳۷۶ هجری مرد. بنابه نوشته‌ی خودش، در سال ۳۳۷ هجری در اصفهان، نزد **محمد** فرزند **حسین** مشهور به **ابن عبید**، وزیر آل‌بویه، به سر می‌برد. او در «صورالکواکب» خود نوشته است: «من در صحبت استاد ابوالفضل در اصفهان بودم. مردی نزدیک من آمد از اهل آن خطه...».



او در سال ۳۴۹ هجری در دربار عضدالدوله‌ی دیلمی در اصفهان بود. در سال ۳۵۰ هجری در شیراز رصدی انجام داد. او در صورالکواکب می‌نویسد: «تا آن که خدای تعالی مرا به خدمت ملک جلیل عضدالدوله ابوشجاع ... مشرف گردانید، دیدم که ذکر احوال کواکب بسیار می‌کرد...».

ابوریحان بیرونی بارها از عبدالرحمان صوفی یاد کرده است و در «قانون مسعودی» نوشته است: قدرهای ستارگان ... از «صورالکواکب» ابوالحسین صوفی نقل و ثبت کردم...»

حکیم عمر خیام نوشته است که ابوجعفر خازن، معادله‌ی درجه سوم را که ماهانی در حل آن درمانده بود، به کمک مقطع‌های مخروطی حل کرد

نسخه‌های خطی و چاپی بسیاری از «صورالکواکب» موجودند. مهم‌ترین ترجمه از نصیر توسی است که درسال ۶۴۷ هجری، به زبان فارسی برگرداند و عکس آن که در سال ۱۳۴۸ خورشیدی آماده شده، در تهران، به‌وسیله‌ی بنیاد فرهنگ ایران چاپ شده است. عبدالرحمن صوفی کتابی دارد در ۴۰۲ فصل درباره‌ی استرلاب که در استانبول موجود است. کتابی هم درباره‌ی استرلاب در چهل و شش فصل از صوفی شناخته شده است که نسخه‌ای از آن در دانشگاه تهران موجود است. درباره‌ی مقدمه‌ای بر اخترشناسی نیز کتابی نوشته که در ۵ مقاله و ۶۴ فصل تنظیم شده است و نسخه‌ی خطی آن در استانبول نگه‌داری می‌شود.

○ دکتر احمد شرف‌الدین

نگرش انتقادی دربارهٔ‌ی دو واژه‌ی ریاضی

چکیده

در سطرهای آینده، دو واژه‌ی ریاضی را با نگرش انتقادی مطرح و به‌جای آن دو واژه، برابرهایی را پیشنهاد می‌کنم که آن‌ها را مناسب‌تر می‌دانم. در برابر واژه‌ی «ذوزنقه» واژه‌ی «چانه‌دار» و در برابر دو عبارت «تصویر گنج‌نگاشتی» و «گنج‌کاری»، اصطلاح «تصویر جسم‌نما» را که پیش‌تر به کار می‌رفت، پیشنهاد می‌کنم. در هر دو مورد توضیح داده‌ام. در شماره‌ی ۵۹ پاییز ۱۳۸۷ مجله‌ی برهان، دو عبارت «انتگرال معین» و «انتگرال نامعین» را با توضیح کافی مورد انتقاد قرار داده بودم و به‌جای آن‌ها «انتگرال مرزدار» و «انتگرال بی‌مرز» را پیشنهاد کردم.

تصویر جسم‌نما

چند سالی است در برخی کتاب‌های هندسه که به زبان فارسی نوشته شده است، در برابر عبارت انگلیسی «Stereographic Projection» یا عبارت فرانسوی «Projection Stereographique» ترکیب فارسی «تصویر گنج‌نگاری» و «تصویر گنج‌نگاشتی» را به‌کار می‌برند. پیش‌تر، درفارسی، در برابر اصطلاح خارجی یاد شده، عبارت «تصویر جسم‌نما» رابه‌کار می‌بردند.

از نظر نویسنده‌ی این مقاله، دو اصطلاح تازه‌ای که یاد شد، مناسب نیستند. اصطلاح مناسب همان «تصویر جسم‌نما» است در این باره توضیح می‌دهم:

در کلمه‌ی Stereographic، بخش Stereo از کلمه‌ی یونانی Stereos به معنی «جسم» است. کلمه‌ی graphein نیز یونانی به معنی «توصیف، نگاشتن» است. واژه‌ی Stereography به معنی نگاشتن اجسام روی صفحه است.

کلمه‌ی «گنج» که در دو عبارت «گنج‌نگاشتی» و «گنج‌کاری» آمده، به معنی حجم است. حجم یک جسم، یک عدد است. حجم را نمی‌توان نگاشت، بلکه آن جسم است که می‌توان نگاشت. با توجه به این توضیح و با توجه به شرح مربوط به یک تبدیل هندسی که یک شکل واقع بر یک کره را روی یک صفحه می‌نگارد، می‌توان دریافت که در عبارت‌های «تصویر گنج‌نگاشتی» و «تصویر گنج‌کاری»، برابرهای مناسبی برای «Stereographic Projection» نیستند و عبارت «تصویر جسم‌نما» مناسب است.

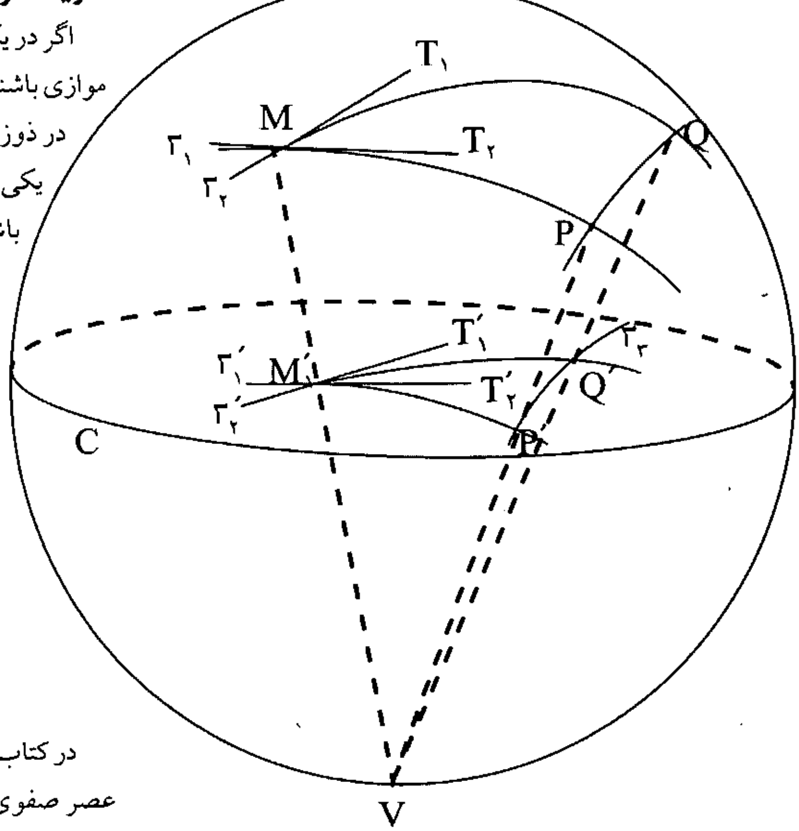
کلمه‌ی «جسم»، در زبان فارسی کاملاً متداول و مأنوس است، لذا روا نیست که کلمه‌ی جسم را چون فارسی نیست، به‌کار نبریم و به‌جای آن از کلمه‌ی گنج که معادل کلمه‌ی جسم نیست استفاده کنیم.

تصویر جسم‌نما چیست؟

تصویر جسم‌نما از تبدیل‌های مهم هندسه است. این تصویر، در تهیه‌ی نقشه‌ی جغرافیایی اهمیت شایانی دارد. تصویر جسم‌نما به‌وسیله‌ی هیپارک، ستاره‌شناس یونان باستان (سده‌ی دوم پیش از میلاد)، برای ترسیم نقشه‌ی جغرافیا ابداع شد. سپس در طی تاریخ، بعضی ریاضی‌دان‌ها در زمینه‌ی آن کار کردند.

تعریف تصویر جسم‌نما

کره‌ی Σ و یک دایره‌ی عظیمه‌ی آن C و نقطه‌ی V یکی از دو قطب این دایره‌ی عظیمه را در نظر می‌گیریم. بنا به تعریف، تصویر جسم‌نمای نقطه‌ی M از سطح Σ عبارت است از نقطه‌ی M' محل بر خط VM با صفحه‌ی دایره‌ی عظیمه‌ی C (شکل صفحه‌ی بعد). تصویر جسم‌نمای یک منحنی Γ واقع بر سطح کره Σ عبارت است از منحنی Γ' واقع بر صفحه‌ی دایره‌ی عظیمه‌ی C، به‌طوری که هر نقطه Γ' تصویر نقطه‌ای از Γ است.



خاصیت مهم تصویر جسم‌نما ....

دو منحنی دل‌خواه Γ_1 و Γ_2 را که بر سطح کره‌ی Σ قرار دارند و از نقطه‌ی M می‌گذرند، در نظر می‌گیریم. تصویرهای جسم‌نمای این دو منحنی را به ترتیب Γ'_1 و Γ'_2 می‌نامیم. خطوط مماس بر دو منحنی Γ_1 و Γ_2 در نقطه‌ی M را به ترتیب $M\Gamma_1$ و $M\Gamma_2$ هم‌چنین خطوط مماس بر دو منحنی Γ'_1 و Γ'_2 در نقطه‌ی 'M را به ترتیب $M'\Gamma'_1$ و $M'\Gamma'_2$ می‌نامیم. ثابت شده است که:

اندازه‌ی زاویه‌ی $T'_1M'T'_2$ = اندازه‌ی زاویه‌ی T_1MT_2

مطلب چنین بیان می‌شود: **در تصویر جسم‌نما، زاویه‌ها محفوظ می‌مانند.**

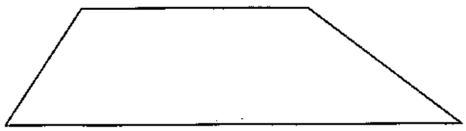
این خاصیت بسیار مهم و در تهیه‌ی نوعی از نقشه‌های جغرافیایی مورد توجه است.

چانه‌دار (= ذوزنقه) ....

نام یکی از شکل‌های هندسی «ذوزنقه» است. برای این شکل نام «چانه‌دار» را پیشنهاد می‌کنم. درباره‌ی این نام‌گذاری توضیح می‌دهم:

تعریف ذوزنقه ....

اگر در یک چهارضلعی گوژ (محدّب) تنها دو ضلع روبه‌رو موازی باشند، آن چهارضلعی را «ذوزنقه» می‌نامند (شکل ۱). در ذوزنقه، دو ضلع غیرموازی را دو ساق می‌نامند. اگر یکی از ساق‌های ذوزنقه بر دو ضلع موازی آن عمود باشد، آن را ذوزنقه‌ی قائم می‌نامند (شکل ۲).



۱



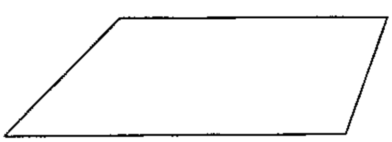
۲

در کتاب «عیون‌الحساب» اثر **محمدباقر یزدی**، ریاضی‌دان عصر صفوی، شکل ۱ ذوزنقتین و شکل ۲ ذوزنقه‌ی مفرده نوشته شده است.

چون کلمه‌های ذوزنقه و ذوزنقیتن هر دو ثقیل‌اند، در جست‌وجوی نام ساده‌ای برای شکل موردبحث برآمدم، حدس می‌زدم که چون در کاشی‌کاری و قالی‌بافی، شکل یاد شده به‌کار می‌آید و از طرفی اهل این حرفه‌ها، در کار خود نام‌های فارسی ساده‌ای را به‌کار می‌برند، به احتمال زیاد و باید، برای ذوزنقه نام ساده‌ای داشته باشند. از این‌رو، درکتاب‌های کاشی‌کاری و قالی‌بافی به مطالعه پرداختیم. در کتاب‌های کاشی‌کاری به نام «دوسرپخ» برخورد کردم که برابر «ذوزنقه» است. این نام را مناسب یافتم و با اندکی تلاش، در ذهن خود نقش‌های زیر را ساخته‌ام:

واژه‌ی «چانه‌دار» به‌جای «ذوزنقتین»؛ واژه‌ی «دوچانه» به جای «دوسرپخ» یعنی «ذوزنقه»؛ واژه‌ی «تک‌چانه‌ی قائم» به‌جای «ذوزنقه‌ی قائم».

تبصره. شکل ۲ را «تک‌چانه» نامیده‌ام، زیرا شکل ۳ هم دارای یک چانه است. از این‌رو شکل ۲ را تک‌چانه‌ی قائم نامیده‌ام.



۳

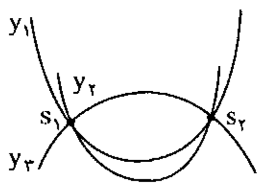
احمد قندهاری

منحنی پوش

نقطه‌ی ثابت

بعضی از منحنی‌های به معادله‌ی پارامتری، به ازای مقادیر متفاوت پارامتر، از نقطه یا نقاط مشخصی می‌گذرند. چون مختصات این نقاط به پارامتر بستگی ندارد، آن‌ها را نقاط ثابت گویند.

S_1 و S_2 نقاط ثابت‌اند.



طرز تعیین مختصات نقاط ثابت

روش اول: دو مقدارِ متفاوت به پارامتر نسبت می‌دهیم. معادله‌های دو منحنی حاصل را با هم تقاطع می‌دهیم. از حل آن‌ها، مختصات نقاط ثابت به دست می‌آید.

روش دوم: معادله‌ی منحنی را نسبت به پارامتر مرتب می‌نویسیم و آن را متحد با صفر قرار می‌دهیم. از حل روابط حاصل، مختصات نقاط ثابت به دست می‌آید.

مثال ۱. به دو طریق، مختصات نقاط ثابت دسته‌ی منحنی به معادله‌ی $y = mx^2 - (m+2)x + 1$ را بیابید.

حل:

روش اول:

$$m = 0 \Rightarrow y = -2x + 1$$

$$m = 1 \Rightarrow y = x^2 - 3x + 1$$

$$\Rightarrow x^2 - 3x + 1 = -2x + 1 \Rightarrow x^2 - x = 0 \Rightarrow x(x-1) = 0$$

$$\Rightarrow x = 0,\ x = 1;\quad x = 0 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow S_1(0,1)$$

$$x = 1 \Rightarrow y = -2 + 1 \Rightarrow y = -1 \Rightarrow S_2(1,-1)$$

نقاط S_1 و S_2 نقاط ثابت دسته‌ی منحنی فوق هستند.

روش دوم:

$$y = mx^2 - (m+2)x + 1$$

$$y = mx^2 - mx + 2x + 1 \Rightarrow (x^2 - x)m - (y + 2x - 1) \equiv 0$$

$$\begin{cases} x^2 - x = 0 \\ y + 2x - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(x-1) = 0 \\ y = -2x + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x = 0,\ 1 \\ y = 1,\ -1 \end{matrix}$$

نقاط ثابت $\Rightarrow S_1(0,1),\ S_2(1,-1)$

مثال ۲. نشان دهید دسته‌ی منحنی به معادله‌ی $y = mx^3 - 2x - mx + 4$ به ازای مقادیر متفاوت m از سه نقطه‌ی ثابت می‌گذرند.

حل:

$$y = mx^3 - 2x - mx + 4 \Rightarrow (x^3 - x)m - (y + 2x - 4) \equiv 0$$

$$\begin{cases} x^3 - x = 0 \\ y + 2x - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow x(x^2 - 1) = 0 \Rightarrow x = 0,\ x = 1,\ x = -1$$

$$x = 0 \Rightarrow y - 4 = 0 \Rightarrow y = 4 \Rightarrow S_1(0,4)$$

$$x = 1 \Rightarrow y - 2 = 0 \Rightarrow y = 2 \Rightarrow S_2(1,2)$$

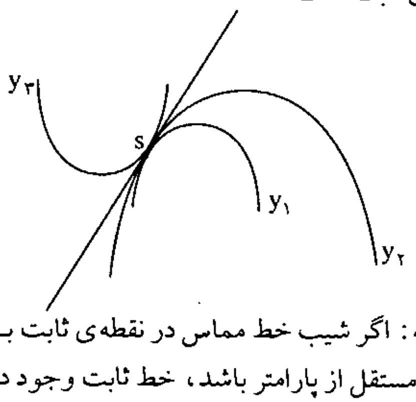
$$x = -1 \Rightarrow y - 6 = 0 \Rightarrow y = 6 \Rightarrow S_3(-1,6)$$

S_1، S_2 و S_3 سه نقطه‌ی ثابت دسته‌ی منحنی فوق هستند.

خط ثابت

بعضی از منحنی‌های به معادله‌ی پارامتری، به ازای مقادیر متفاوت پارامتر، از نقطه‌ی ثابتی می‌گذرند و در این نقطه‌ی ثابت هم بر خط ثابتی مماس‌اند.

به عبارت دیگر، خط ثابت، خط مماس بر دسته‌ی منحنی در نقطه‌ی ثابت است.



توجه: اگر شیب خط مماس در نقطه‌ی ثابت بر دسته‌ی منحنی، مستقل از پارامتر باشد، خط ثابت وجود دارد.

مثال ۳. معادله‌ی خط ثابت دسته‌ی منحنی به معادله‌ی $y = a(x-1)^2 + 2x - 3$ را بنویسید.

حل: ابتدا مختصات نقطه‌ی ثابت دسته منحنی را پیدا می‌کنیم.

$$y = a(x-1)^2 + 2x - 3 \Rightarrow a(x-1)^2 - (y - 2x + 3) \equiv 0$$

نقطه‌ی ثابت:

$$\begin{cases}(x-1)^2 = 0\\ y - 2x + 3 = 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x = 1\\ y - 2 + 3 = 0\end{cases} \Rightarrow y = -1 \Rightarrow S(1,-1)$$

$$y'_x = 2a(x-1) + 2 \Rightarrow m_{\text{مماس}} = y'_{x=1} = 2a(0) + 2 \Rightarrow m = 2$$

چون شیب خط مماس، مستقل از پارامتر (a) است، پس خط ثابت وجود دارد.

حال معادله‌ی خط ثابت را می‌نویسیم

$$y - y_s = m(x - x_s)$$

معادله‌ی خط ثابت چنین است:

$$y + 1 = 2(x-1) \Rightarrow y = 2x - 3$$

این خط بر دسته‌ی منحنی بالا در نقطه‌ی $S(1,-1)$ مماس است.

مثال ۴. دسته‌ی منحنی به معادله‌ی $y = a(x^2-4)^2 + x^2$ به ازای مقادیر متفاوت a بر دو خط ثابت مماس‌اند. معادله‌های آن‌ها را بیابید.

حل: ابتدا مختصات نقاط ثابت را به دست می‌آوریم.

$$y = a(x^2-4)^2 + x^2 \Rightarrow a(x^2-4)^2 + (x^2 - y) \equiv 0$$

$$\begin{cases}x^2 - 4 = 0\\ x^2 - y = 0\end{cases} \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$$

نقاط ثابت

$$x = 2 \Rightarrow y = x^2 \Rightarrow y = 4 \Rightarrow S_1(2,4)$$
$$x = -2 \Rightarrow y = x^2 \Rightarrow y = 4 \Rightarrow S_2(-2,4)$$

$$y = a(x^2-4)^2 + x^2 \Rightarrow y'_x = 4ax(x^2-4) + 2x$$

$$x = 2 \Rightarrow m_{1\,\text{مماس}} = y'_{x=2} = 8a(0) + 4 = 4$$

$$x = -2 \Rightarrow m_{2\,\text{مماس}} = y'_{x=-2} = -8a(0) - 4 = -4$$

$$S_1(2,4),\ \ m_1 = 4$$
$$y - y_{S_1} = m_1(x - x_{S_1})$$
$$y - 4 = 4(x-2)$$

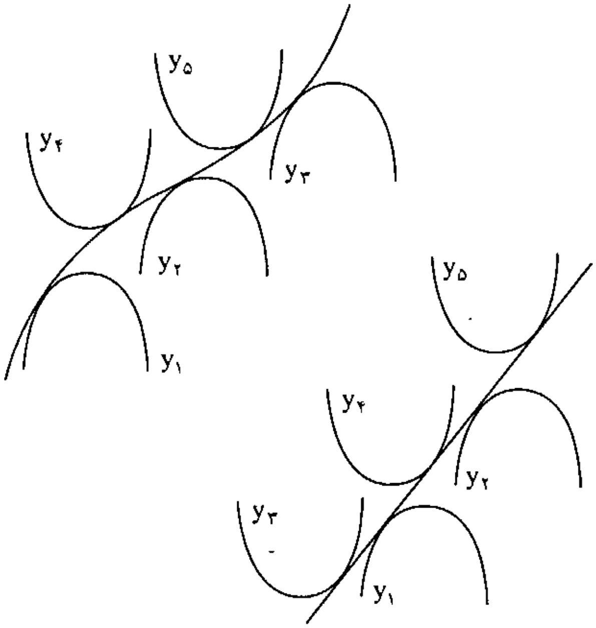
معادله‌ی یک خط ثابت $\boxed{y = 4x - 4}$

$$S_2(-2,4),\ \ m_2 = -4$$
$$y - y_{S_2} = m_2(x - x_{S_2})$$
$$y - 4 = -4(x+2)$$

معادله‌ی خط ثابت دیگر $\boxed{y = -4x - 4}$

پوش یا لفّاف ....

بعضی از تابع‌های به معادله‌ی پارامتری، به ازای مقادیر متفاوت پارامتر، بر خط یا بر منحنی ثابتی مماس‌اند. این خط یا منحنی را پوش یا لفّاف دسته‌ی منحنی اصلی گویند.



برای تعیین معادله‌ی پوش یا لفّاف، از معادله‌ی منحنی نسبت به پارامتر مشتق می‌گیریم (x و y عدد ثابت فرض می‌شوند). سپس بین رابطه‌ی مشتق و معادله‌ی تابع، پارامتر را حذف می‌کنیم.

مثال ۵. معادله‌ی منحنی پوش دسته‌ی منحنی به معادله‌ی $y = 2m^2x - 4mx^2 + 4$ را بیابید.

حل: از معادله‌ی منحنی نسبت به m مشتق می‌گیریم (x و y مقادیر ثابت‌اند).

$$0 = 4mx - 4x^2 \Rightarrow m = x$$

در معادله‌ی دسته‌ی منحنی، به جای m، x قرار می‌دهیم.

$$y = 2m^2x - 4mx^2 + 4,\ \ m = x$$

معادله‌ی منحنی پوش یا لفّاف

$$y = 2x^3 - 4x^3 + 4 \Rightarrow y = -2x^3 + 4$$

مثال ۶. معادله‌ی پوش دسته‌ی خط به معادله‌ی $y = 2mx - m^2 + 1$ را بیابید.

حل:

$$0 = 2x - 2m \Rightarrow m = x$$

$$y = 2mx - m^2 + 1,\ \ m = x$$

معادله‌ی منحنی پوش دسته‌ی خط

$$y = 2x^2 - x^2 + 1 \Rightarrow y = x^2 + 1$$

□

○ ترجمه: غلامرضا یاسی پور



عدد e



e چون با تنها رقیبش یعنی π مقایسه شود، در انجمن ریاضی، تازه‌واردی بیش نیست. در حالی که π با عظمت‌تر است و تاریخی با شکوه‌تر دارد که به دوران بابلی‌ها باز می‌گردد، e وزن چندانی در زمینه‌های تاریخی ندارد. ثابت e، نوجوانی، سرزنده، چالاک و در حال بالیدن است و هرجا «رشد» مطرح باشد، همیشه حضور دارد. عامل رشد، چه در مورد جمعیت باشد و چه در مورد سرمایه و پول، و چه در مورد سایر کمیت‌های فیزیکی، بدون استثنا با عدد e سروکار دارد.

e عددی است که مقدار تقریبی‌اش ۲/۷۱۸۲۸ است. بنابراین، چرا این همه خاص است. زیرا این عدد، عددی نیست که به تصادف انتخاب شده باشد، بلکه یکی از بزرگ‌ترین ثابت‌های ریاضی است. این عدد، زمانی در اوایل قرن هفدهم ظاهر شد که چندین ریاضی‌دان، انرژی خود را صرف شفاف کردن مفهوم لگاریتم می‌کردند، یعنی اختراع درخشانی که تبدیل ضرب اعداد بزرگ به جمع را مجاز می‌کرد.

ماجرای e، در واقع با نوعی e- تجارت قرن هفدهمی آغاز می‌شود. ژاکوب برنولی[1] یکی از برنولی‌های سرشناس سوئیسی به‌شمار می‌رود. خانواده‌ای که تجارتشان، به‌دست دادن سلسله‌ای از ریاضی‌دان‌ها به دنیا بود. ژاکوب به سال ۱۶۸۳ با مسئله‌ی بهره‌ی مرکب[2] به کار پرداخت.

پول، پول، پول. فرض کنید سرمایه‌ای ۱ پوندی (موسوم به سرمایه‌ی «اولیه») را با دوره‌ای سالانه به مضاربه گذاشته‌ایم، با نرخ بسیار بالای ۱۰۰ درصد درآمد (ارزش افزوده‌ی به‌دست آمده) در نظر گرفته‌ایم. البته، به ندرت نرخ ۱۰۰ درصد را برای پولمان به‌دست می‌آوریم، اما این رقم، برای مقصودی که داریم مناسب است و می‌توانیم در مورد درآمدهای واقعی، از قبیل ۶ درصد و ۷ درصد نیز آن را به کار ببریم. به همین ترتیب، اگر سرمایه‌های اولیه‌ی بزرگ‌تری، از قبیل ۱۰۰۰۰ پوند داشته باشیم، می‌توانیم همه را در ۱۰۰۰۰ ضرب کنیم.

به این ترتیب، در پایان سال، با درآمدی ۱۰۰ درصد، سرمایه و مقدار درآمد به‌دست آمده را داریم که در این حالت، آن نیز ۱ پوند است. بنابراین، مبلغ سخاوت آمیز ۲ پوند را خواهیم داشت. اکنون فرض می‌کنیم، نرخ درآمد حاصله به ۵۰ درصد نصف شود. اما هر شش ماه یک‌بار، به‌طور جداگانه به‌کار رود. در این صورت، به ازای نیم سال اول، سودی برابر ۵۰ پنی به‌دست می‌آوریم و سرمایه‌ی اولیه‌مان در پایان نیم‌سال اول، به ۱/۵۰ پوند رشد کرده است. بنابراین، در پایان یک سال، این مبلغ به اضافه‌ی ۷۵ پنی سود آن را به دست خواهیم آورد. به این ترتیب، ۱ پوندمان در پایان سال اول به ۲/۲۵ پوند نموّ کرده است! با ترکیب سود هر نیم سال ۲۵ پنی دیگر به‌دست می‌آوریم. البته این مبلغ زیاد به نظر نمی‌رسد، اما در صورتی که برای سرمایه‌گذاری ۱۰۰۰۰ پوند داشتیم، به جای ۲۰۰۰ پوند ۲۲۵۰ پوند به‌دست می‌آوریم. به این ترتیب، با سود مرکّب، هر نیم‌سال، ۲۵۰ پوند اضافی حاصل می‌کنیم.

اما در صورتی که بهره‌ی مرکب در هر نیم‌سال، به این معنی باشد که از مضاربه‌ی پس‌اندازمان سود می‌بریم، بانک نیز به همین ترتیب، از هر مبلغی که به آن بدهکاریم، بهره‌مند می‌شود. پس باید احتیاط کنیم! اکنون فرض می‌کنیم، سال را به چهار ربع تقسیم کرده باشیم و ۲۵ درصد در مورد هر ربع به‌کار رود. با انجام محاسبه‌ای مشابه، در می‌یابیم که یک پوندمان به ۲/۴۴۱۴۱ پوند رشد کرده است. به این ترتیب، پولمان در حال رشد کردن است و با ۱۰/۰۰۰ پوندمان، در

صورتی که بتوانیم سال را تقسیم کنیم و نرخ‌های سود ارزش افزوده‌ی با درصد کمتر را در مورد فاصله‌های زمانی کوچک‌تر به‌کاربیریم، کارمان سودمند به‌نظر می‌رسد.

اما آیا پولمان بی‌محدودیت افزایش می‌یابد و ما را میلیونر می‌کند؟ در صورتی که همان‌گونه که در جدول نشان داده‌ایم، سالمان را هم‌چنان به واحدهای کوچک‌تر و کوچک‌تر تقسیم کنیم، «فرایند حدّی» آورده شده، نشان می‌دهد که به نظر می‌رسد مبلغ مورد نظر به عددی ثابت متمرکز می‌شود. البته، تنها دوره‌ی مرکّب واقعی، دوره‌ی یک روزه است (و این همان کاری است که بانک‌ها انجام می‌دهند). به این ترتیب، پیام ریاضی در این مورد، این است که این حد، که ریاضی‌دان‌ها آن را e می‌نامند، مقداری است که یک پوند، در صورتی که سود مرکب به‌طور دائم در نظر گرفته شود، به آن رشد می‌کند.

امّا آیا این موضوع، خوب است یا بد؟ پاسخ را می‌دانید: اگر پس‌انداز کرده‌اید، «آری»؛ و اگر وام گرفته‌اید، «خیر». پاسخ این پرسش به عـ آموزش[3] برمی‌گردد.

مجموع حاصل	ترکیب قرض هر...
۲٫۰۰۰۰۰ پوند	سال
۲٫۲۵۰۰۰ پوند	نیم‌سال
۲٫۴۴۴۱ پوند	ربع سال
۲٫۶۱۳۰۴ پوند	ماه
۲٫۶۹۲۶۰ پوند	هفته
۲٫۷۱۴۵۷ پوند	روز
۲٫۷۱۸۱۳ پوند	ساعت
۲٫۷۱۸۲۸ پوند	دقیقه
۲٫۷۱۸۲۸ پوند	ثانیه

مقدار دقیق e. e نیز مانند π عددی گنگ است و بنابراین، چون در مورد π، مقدار دقیق آن را نمی‌دانیم، مقدار e تا ۲۰ رقم ده‌دهی برابر است با:

۲٫۷۱۸۲۸۱۸۲۸۴۵۹۰۴۵۲۳۵۳۶...

تنها با استفاده از کسرها، بهترین تقریب به مقدار e، در صورتی که بالا و پایین کسر به اعداد دو رقمی محدود باشند، کسر $\frac{۸۷}{۳۲}$ است. شگفت‌آور است که هرگاه بالا و پایین کسر به اعداد سه‌رقمی محدود باشد، بهترین کسر $\frac{۸۷۸}{۳۲۳}$ است. کسر اخیر نوعی بسط مقلوب مستوی[4] کسر اول است. ریاضیات عادت دارد که این شگفتی‌های کوچک را ارائه دهد. یکی از بسط به سری‌های معروف e، توسط مورد زیر داده شده است:

$$e = ۱ + \frac{۱}{۱} + \frac{۱}{۲\times۱} + \frac{۱}{۳\times۲\times۱} + \frac{۱}{۴\times۳\times۲\times۱} + \frac{۱}{۵\times۴\times۳\times۲\times۱} + \cdots$$

در مورد این سری، نمادنویسی فاکتوریل[5] که از علامت تعجب استفاده می‌کند، سودمند است. در این نمادنویسی، برای نمونه، $۱\times۲\times۳\times۴\times۵=۵!$. با به‌کار بردن این نمادنویسی، e صورت آشناتر زیر را اختیار می‌کند:

$$e = ۱ + \frac{۱}{۱} + \frac{۱}{۲!} + \frac{۱}{۳!} + \frac{۱}{۴!} + \frac{۱}{۵!} + \cdots$$

بنابراین، به تحقیق به‌نظر می‌رسد، عدد e الگویی دارد. در ویژگی‌های ریاضی‌اش نیز آشکار می‌شود که از π «متقارن»‌تر است.

در صورتی که مایل به یادآوردن چند رقم اولیه‌ی e باشید، می‌توانید جمله‌ای بسازید که در آن، تعداد حروف هر کلمه، یکی از ارقام اولیه‌ی بسط e را نشان دهد. و این کاری است که در مورد π نیز انجام دادیم.

عامل رشد، چه در مورد جمعیت باشد و چه در مورد سرمایه و پول، و چه در مورد سایر کمیت‌های فیزیکی، بدون استثنا با عدد e سروکار دارد

این موضوع که e گنگ است (یعنی کسر نیست) در سال ۱۷۳۷، توسط **لئونهارد اویلر**[6] به اثبات رسید. به سال ۱۸۴۰، ژوزف **لیوویل**[7]، ریاضی‌دان فرانسوی، نشان داد که e جواب هیچ معادله‌ی درجه دومی نیست و به سال ۱۸۷۳، هم‌وطنش شارل هرمیت[8] در یکی از آثار راهگشایش، به اثبات رساند که e متعالی[9] است (یعنی نمی‌تواند جواب هیچ معادله‌ی جبری باشد). آن‌چه در این مورد اهمیت داشت، روشی بود که هرمیت به کار برده بود. نه سال بعد، فردیناند فون لیندمان[10] با اقتباس از روش هرمیت، ثابت کرد که π نیز متعالی است؛ موضوعی که از منظر بالاتری برخوردار بود.

البته، به یک پرسش پاسخ داده شد، اما پرسش‌های تازه‌ای ظاهر شدند. آیا e به توان e نیز متعالی است؟ این پرسش، پرسش غریبی است، زیرا چگونه ممکن است غیر از این باشد؟ با این همه، هنوز به محکمی به اثبات نرسیده و بنا به استانداردهای مؤکّد ریاضی، باید هم‌چنان به عنوان یک حدس رده‌بندی شود. ریاضی‌دان‌ها اندک‌اندک به سوی اثبات این موضوع رفته‌اند، اما تنها این را اثبات کرده‌اند که غیر ممکن است هم e و هم e به توان e^2، هر دو متعالی باشند؛ نزدیک، اما نه به‌قدر کافی نزدیک.

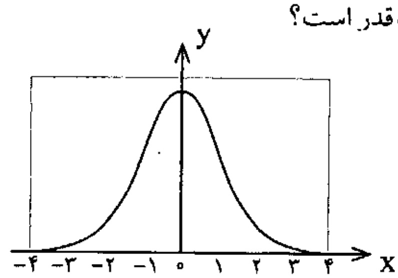
ارتباط‌های بین π و e نیز مسحورکننده است. مقادیر e^{π}

و π^e نزدیک به هم‌اند، اما به سادگی (بدون محاسبه‌ی مقادیرشان) نشان داده شده است که $e^\pi > \pi^e$. در این مورد، اگر تقلب کنید و به ماشین حسابتان نگاهی بیندازید، خواهید دید که این مقادیر تقریبی عبارت‌اند از: $e^\pi = ۲۳/۱۴۰۶۹$ و $\pi^e = ۲۳/۴۵۹۱۶$.

عدد e^π به عنوان ثابت **گلفاند**[۱۱] (به‌نام الکساندر گلفاند[۱۲] ریاضی‌دان روسی) شناخته می‌شود و ثابت شده که متعالی است. اما در مورد π^e مطالب بسیار کمتری می‌دانیم. گنگ بودن این عدد هنوز به اثبات نرسیده است؛ البته اگر گنگ باشد.

آیا e دارای اهمیت است؟ محل اصلی یافتگاه e، هنگام رشد و نموّ است. مثال‌های آن در مورد رشد اقتصادی و رشد جمعیت هستند. مرتبط با این بحث، خم‌های وابسته به e هستند که در مدل فروپاشی رادیواکتیو به‌کار رفته‌اند.

عدد e در مسائل نامرتبط با رشد نیز رخ می‌دهد. پیِر مونت‌مور[۱۳] مسئله‌ای احتمالی را در قرن هجدهم تحقیق کرد که از آن زمان به بعد، به گونه‌ای وسیع بررسی شده است. این مسئله به صورت ساده، گروهی از اشخاص‌اند که به رستورانی می‌روند و پس از صرف ناهار، کلاه‌هایشان را به تصادف بر می‌دارند. احتمال این‌که هیچ یک از آن‌ها کلاه خودش را بر ندارد، چه‌قدر است؟



می‌توان نشان داد که این احتمال برابر $\frac{1}{e}$ (در حدود ۳۷درصد) است. بنابراین، احتمال این‌که دست‌کم یکی از این اشخاص کلاه خودش را بردارد $1-\frac{1}{e}$ (۶۳ درصد) است.

این کاربرد در نظریه‌ی احتمال[۱۴] یکی از موارد بسیار به‌شمار می‌رود. توزیع پواسون[۱۵] که با پیشامدهای نادر سروکار دارد، موردی دیگر است. این مثال‌ها نمونه‌های اولیه‌اند، اما به هیچ‌وجه، از مرحله پرت نیستند: جیمز استرلینگ[۱۶] در مورد مقدار فاکتوریل $n!$ تقریبی قابل ملاحظه شامل e (و π) به‌دست آورد. در آمار، «خم ناقوسی»[۱۷] و آشنای توزیع نرمال[۱۸] شامل e است و در مهندسی، خم کابل پل معلّق، به e وابسته است. این فهرست بی‌پایان است.

یک اتحاد حیرت‌انگیز. جایزه‌ی قابل توجه‌ترین فرمول تمام ریاضیات، از آن e است. چون به اعداد مشهور ریاضیات بیندیشیم، به ۰، ۱، π، e و عدد موهومی[۱۹] $i = \sqrt{-1}$ فکر می‌کنیم. اما چگونه می‌شود که $e^{i\pi} + 1 = 0$ باشد؟ اما هست! و این دستاورد از آن اویلر است.

شاید اهمیت حقیقی e در رمزی نهفته باشد که توسط آن، نسل‌های ریاضی‌دان‌ها را مجذوب خود کرده است. در هر حال، e اجتناب‌ناپذیر است. اما چرا نویسنده‌ای چون رایت[۲۰] باید همّ خود را صرف نوشتن داستانی بدون (حرف) e کند. به احتمال قوی، وی نام مستعاری نیز داشته است. اما گدسبی[۲۱] وی دقیقاً به همین کار پرداخته است. گرچه تصور این مطلب سخت است که ریاضی‌دانی به نوشتن کتابی بدون e دست زند، یا قادر به این کار باشد.

تاریخچه

۱۶۱۸ میلادی: جان نپر، در ارتباط با لگاریتم، با ثابت e مواجه شد.

۱۷۲۷ میلادی: اویلر نماد e را در ارتباط با نظریه‌ی لگاریتم‌ها به‌کار برد. این عدد گاهی عدد اویلر نامیده می‌شود.

۱۷۴۸ میلادی: اویلر e را تا ۲۳ رقم محاسبه کرد. وی اعتبار کشف فرمول مشهور $e^{i\pi} + 1 = 0$ را در حوالی این تاریخ به‌دست آورد.

۱۸۷۳ میلادی: هرمیت ثابت کرد e عددی متعالی است.

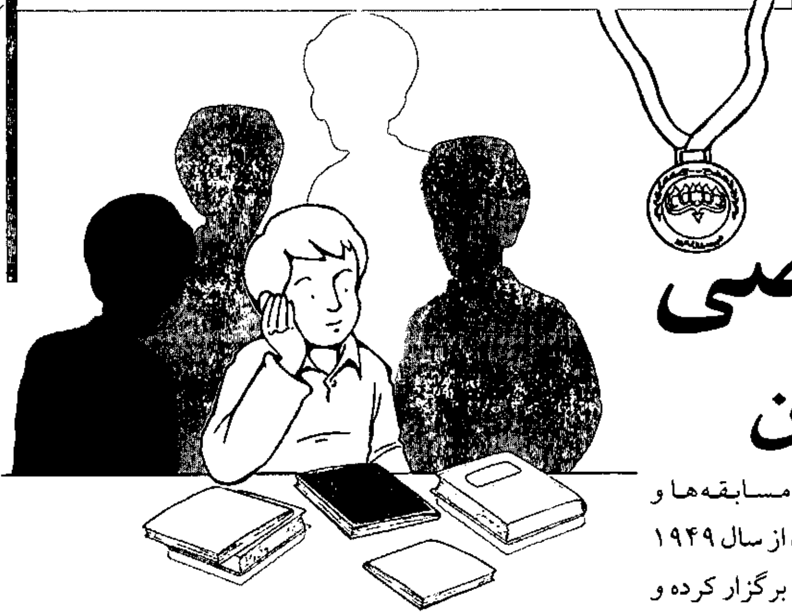
۲۰۰۷ میلادی: e تا مرتبه‌ی 10^{11} رقم محاسبه شد.

پی‌نوشت

1. Jacob Bernoulli
2. Compound interest
3. e-learning
4. palindromic
5. factorial notation
6. Leonhard Euler
7. Joseph Liouville
8. Charles Hermite
9. transcendental
10. Ferdinand von Lindemann
11. Gelfond's constant
12. Aleksandr Gelfond
13. Pierre Montmort
14. Probability theory
15. Poisson distribution
16. James Stirling
17. bell curve
18. normal distribution
19. imaginary number
20. E.V. Wright
21. Gadsby

● هوشنگ شرقی

مسائل مسابقات ریاضی در کشورهای مختلف جهان



المپیاد ریاضی در کشور لهستان

کشور لهستان سابقه‌ای دیرینه در برگزاری مسابقه‌ها و المپیادهای ریاضی دارد. انجمن ریاضی لهستان از سال ۱۹۴۹ به این سو، هر ساله المپیاد ریاضی این کشور را برگزار کرده و شکل برگزاری آن در سال‌های گوناگون تغییراتی داشته است. امروزه این آزمون در سه مرحله برگزار می‌شود: مرحله‌ی اول که به صورت غیابی برگزار می‌شود، سه ماه طول می‌کشد. در طی هر ماه، دانش‌آموزان باید ۴ مسئله را که به آن‌ها داده می‌شود، حل کنند. در مرحله‌ی دوم که حضوری است و شَبیه مسابقات ریاضی بیشتر کشورها و از جمله ایران است، در طی دو روز، هر روز سه مسئله با ۴ ساعت وقت برای حل، در اختیار دانش‌آموزان قرار می‌گیرد. در مرحله‌ی نهایی نیز، دانش‌آموزان منتخب سراسر کشور به پایتخت می‌آیند و مسابقه‌ای شبیه مرحله‌ی دوم، بین همه‌ی آن‌ها برگزار می‌شود تا برگزیدگان نهایی، برای اعزام به المپیاد بین‌المللی ریاضی انتخاب شوند.

در کشور لهستان، مجلات ریاضی خوبی هم منتشر می‌شوند، از جمله مجله‌ی «ریاضیات»[1] که از سال ۱۹۴۸ منتشر می‌شود و نمونه‌ی مسائل المپیادها و راه‌حل‌های آن‌ها را نیز ارائه می‌دهد. کشور لهستان در المپیادهای بین‌المللی نیز حضور خوبی داشته است. از نخستین المپیاد بین‌المللی ریاضی در سال ۱۹۵۹، در آن شرکت داشته و در سال‌های ۱۹۶۰ و ۱۹۷۲ میزبان این مسابقات بوده است. هم‌چنین، تاکنون پنج بار مقام چهارم این مسابقات را به دست آورده و تقریباً همواره جزو بیست کشور نخست این رقابت‌ها بوده است. در این جا، نمونه سؤالات مرحله‌ی نهایی (روز اول) المپیاد ریاضی این کشور در سال ۱۹۸۶ را همراه با راه‌حل آن‌ها ملاحظه می‌کنید. سطح مسائل نسبتاً خوب است.

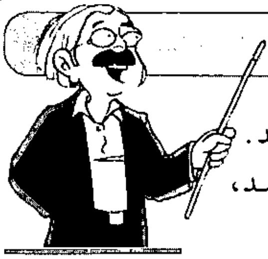
مسائل

۱. مطلوب است همه‌ی مقدارهای $n \in \mathbb{N}$، که برای هر کدام از آن‌ها، چند جمله‌ای درجه‌ی n با ضریب‌های حقیقی وجود داشته باشد، به نحوی که نابرابری $f(x) \geq f'(x)$ برای هر مقدار $x \in \mathbb{R}$ برقرار باشد.

۲. $2n$ نفر $(n > 1)$ در مسابقه‌ی شطرنج شرکت کرده‌اند. در ضمن، هر دو نفر از آن‌ها، بیش از یک دور با هم بازی نمی‌کنند. ثابت کنید با این شرایط، برگزاری تمامی مسابقه‌ها در حالتی که هیچ سه بازیکنی سه بار بین خود بازی نکرده باشند، تنها وقتی ممکن است که تعداد همه‌ی دورهای بازی مسابقه از n^2 تجاوز نکند.

۳. AK، BL و CM را ارتفاع‌های مثلث ABC و نقطه‌ی N را وسط ضلع AC می‌گیریم. ثابت کنید چهار نقطه‌ی K، L، M و N روی محیط یک دایره واقع‌اند.

حل مسائل



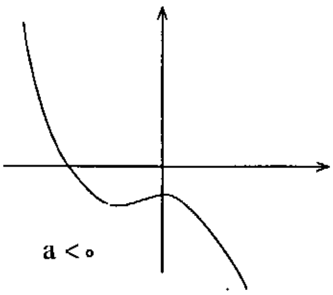
۱. به پیش قضیه‌ی نسبتاً بدیهی زیر توجه می‌کنیم:

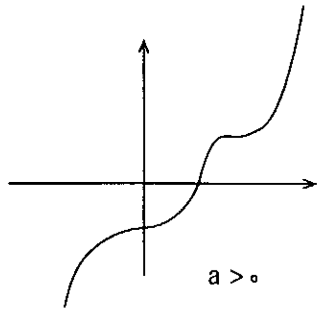
قضیه: هیچ تابع چند جمله‌ای از درجه‌ی فرد وجود ندارد که به ازای جمیع مقادیر x، مقدارهای آن همواره مثبت (یا منفی) باشد و همواره برای هر عدد زوج n، چند جمله‌ای از درجه‌ی n وجود دارد که به ازای جمیع مقادیر x، مقدارهای آن همواره مثبت (یا منفی باشد).

درستی این قضیه با توجه به حد توابع چند جمله‌ای در ±∞ و در واقع نمودار آن‌ها واضح است. در تابع چند جمله‌ای p(x) از درجه‌ی n که n عددی طبیعی و فرد است، در صورتی‌که بزرگ‌ترین درجه‌ی p(x) را ax^n بگیریم، اگر $a > 0$ آن‌گاه

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} p(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} ax^n = \pm\infty$ و اگر $a < 0$ ، $\lim\limits_{x\to\pm\infty} p(x) = \lim\limits_{\pm\infty} ax^n = \pm\infty$

پس نمودار این تابع از ناحیه‌ی سوم شروع و به ناحیه‌ی اول ختم می‌شود ($a > 0$) و یا این‌که از ناحیه‌ی دوم شروع و به ناحیه‌ی چهارم ختم می‌شود ($a < 0$).





بنابراین نمودار این تابع، همواره محور xها را حداقل در یک نقطه قطع می‌کند. این قضیه، هم ارز با نتیجه‌ی مستقیم زیر است:

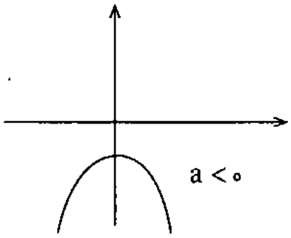
هر معادله‌ی چند جمله‌ای از درجه‌ی فرد، همواره حداقل یک ریشه‌ی حقیقی دارد.

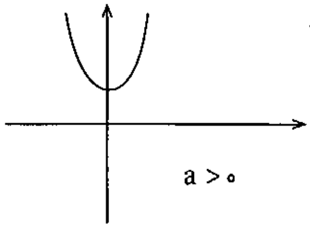
بنابراین، در این حالت ممکن نیست که نمودار تابع p، به تمامی بالا (یا پایین) محور xها باشد و لذا مقادیر p نمی‌توانند همگی مثبت (یا منفی) باشند. برعکس، در حالتی که n زوج باشد، داریم:

$$a > 0 \Rightarrow \lim_{x\to\pm\infty} p(x) = \lim_{x\to\pm\infty} ax^n = +\infty$$

$$a < 0 \Rightarrow \lim_{x\to\pm\infty} p(x) = \lim_{x\to\pm\infty} ax^n = -\infty$$

پس در این حالت، ممکن است (تأکید می‌کنیم که ممکن است و همواره چنین نیست) تمام نمودار تابع، بالا (یا پایین) محور xها باشد. بخصوص به نمودار تابع با ضابطه‌ی $p(x) = ax^{2k} + b$ توجه کنید:





پس مقادیر p(x) در این حالت می‌تواند همواره مثبت (یا منفی) باشد. اکنون به مسئله‌ی خودمان برمی‌گردیم. بدیهی است، اگر f(x) از درجه‌ی n باشد، $f'(x)$ از درجه‌ی $n-1$ و $p(x) = f(x) - f'(x)$ نیز از درجه‌ی n است. پس اگر n زوج باشد، p(x) می‌تواند همواره مثبت باشد و در نتیجه $f(x) \geq f'(x)$. ولی اگر n فرد باشد، p(x) نمی‌تواند همواره مثبت باشد و لذا هیچ تابع f(x) نمی‌توان یافت که به ازای همه‌ی مقادیر x، $f(x) \geq f'(x)$ باشد. بنابراین، مجموعه‌ی مقادیر n، مجموعه‌ی عددهای زوج است.

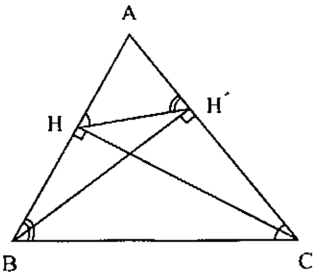
۲. از استقرای ریاضی استفاده می‌کنیم. به ازای $n = 1$ حکم مسئله درست است (چرا؟). فرض می‌کنیم برای $n = k$ حکم درست باشد و ثابت می‌کنیم برای $n = k + 1$ نیز درست است. دو نفر مانند A و B را در نظر بگیرید که با هم

بازی کرده باشند. $2k$ نفر دیگر، غیر از این دو وجود دارند، زیرا تعداد کل افراد $2(k+1)$ است. بین آن $2k$ نفر، حداکثر k^2 بازی انجام شده است (فرض استقراء). حال اگر هر کدام از آن‌ها با A یا B بازی کنند، $2k$ بازی دیگر نیز انجام شده است (بدیهی است که طبق فرض مسئله، ممکن نیست هیچ یک از آن‌ها با هر دوی A و B بازی کرده باشند، زیرا در این صورت، یک سه تایی درست می‌شود که دوبه‌دو با هم بازی کرده‌اند و این خلاف فرض است که می‌گوید هیچ سه نفری سه بار بین خود بازی نکرده‌اند). حال خود A و B نیز یک بازی کرده‌اند. پس در مجموع، حداکثر $k^2+2k+1=(k+1)^2$ بازی انجام شده است.

۳. ابتدا به قضیه‌ی معروف زیر اشاره می‌کنیم: هرگاه ارتفاع‌های CH و BH′ از مثلث ABC را رسم کنیم، زوایای مثلث AHH′ با زوایای مثلث ABC برابرند. اثبات به

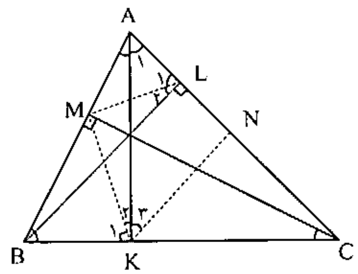


روش‌های گوناگون انجام‌پذیر است. مثلاً توجه می‌کنیم که چون H و H′ دو زاویه‌ی قائمه روبه‌رو به BC هستند، پس چهارضلعی HH′CB محاطی است و در نتیجه: $A\hat{H}'H + H\hat{H}'C = 180°$ و چون $H\hat{H}'C + \hat{B} = 180°$ پس: $\hat{B} = A\hat{H}'H$ و به همین ترتیب: $\hat{C} = A\hat{H}H'$



در واقع، مثلث‌های AHH′ و ABC متشابه‌اند. حال با توجه به این موضوع، در شکل مربوط به مسئله داریم: $\hat{K}_1 = \hat{A}$ و $\hat{L}_1 = \hat{B}$ هم‌چنین می‌دانیم که در مثلث قائم‌الزاویه، میانه‌ی وارد بر وتر، نصف وتر است. پس $KN = AN = NC$ و در نتیجه: $\hat{A}_1 = \hat{K}_3$

حال می‌توان نوشت:



$$\hat{K}_2 + \hat{K}_1 = 90° \Rightarrow \hat{K}_2 + \hat{A} = 90° \Rightarrow \hat{K}_2 + 180° - \hat{B} - \hat{C} = 90°$$
$$\Rightarrow \hat{K}_2 = \hat{B} + \hat{C} - 90°\ ,\ \hat{B} = \hat{L}_1\ ,\ \hat{C} = 90° - \hat{A}_1$$
$$\Rightarrow \hat{K}_2 = \hat{L}_1 + 90° - \hat{A}_1 - 90° \Rightarrow \hat{K}_2 + \hat{A}_1 = \hat{L}_1\ ,\ \hat{A}_1 = \hat{K}_3$$
$$\Rightarrow \hat{K}_2 + \hat{K}_3 = \hat{L}_1\ ,\ \hat{L}_1 + M\hat{L}C = 180°$$
$$\Rightarrow \hat{K}_2 + \hat{K}_3 + M\hat{L}C = 180° \Rightarrow M\hat{K}N + M\hat{L}C = 180°$$

بنابراین، مجموع زوایای مقابل در چهارضلعی MKNL مساوی $180°$ و این چهارضلعی محاطی است. در نتیجه، نقاط M، K، N و L روی محیط یک دایره واقع‌اند.

پی‌نوشت ....

1. Matematyka

حمید رضا امیری

نمایش اعداد صحیح در مبناهای مختلف



ما همواره در محاسبات روزمره و علمی و مهندسی، از اعداد در مبنای ده (مبنای اعشاری) استفاده می‌کنیم. مبنای ده نمایشی است برای اعداد صحیح و به‌خصوص اعداد طبیعی که در آن اعداد را ده تا ده تا دسته‌بندی می‌کند. مثلاً وقتی می‌نویسیم ۱۳۸۸، منظورمان ۸ یکی و ۸ بسته‌ی ده‌تایی و ۳ بسته‌ی ۱۰۰ تایی (هر بسته‌ی ۱۰۰ تایی، ۱۰ بسته‌ی ۱۰ تایی است) و ۱ بسته‌ی هزارتایی که هر هزار تا ۱۰ بسته‌ی ۱۰۰ تایی است.

اعداد را می‌توان در مبناهای غیر از ۱۰ نیز نمایش داد. مبناهایی چون ۲ یا ۸ یا ۱۲. مبنای ۲ (مبنای دو دویی) در رایانه کاربرد دارد و مبنای ۱۲، مبنای شمارش ایرانیان باستان بوده است و آثار استفاده از آن هنوز هم مشاهده می‌شود (تقسیم نیم روز به ۱۲ ساعت یا سال به ۱۲ ماه و یا استفاده از مقیاس‌های اندازه‌گیری هم چون «دو جین» به معنی ۱۲ تا از این نمونه‌اند.)

در این بخش، می‌خواهیم با استفاده از قضیه‌ی تقسیم نشان دهیم، هر عدد طبیعی را می‌توان در مبنای عدد طبیعی $b > ۱$ نمایش داد و حتی اعمال جمع و ضرب را در مبناهای غیر از ۱۰ یاد گرفت و انجام داد. ابتدا به بیان قضیه‌ای می‌پردازیم که با استفاده از قضیه‌ی تقسیم نشان می‌دهد، هر عدد طبیعی مانند nرا می‌توان در مبنای هر عدد طبیعی مانند $b > ۱$ نمایش داد.

قضیه: اگر b عددی طبیعی و بزرگ‌تر از یک باشد، هر عدد طبیعی مانند n را می‌توان به شکل منحصر به فردی، به صورت زیر نمایش داد:

$$n = r_k b^k + r_{k-1} b^{k-1} + \dots + r_۲ b^۲ + r_۱ b + r_۰$$

در رابطه‌ی فوق، kعددی صحیح و نامنفی است و برای هر $i = ۰, ۱, ۲, \dots, k$، همواره $۰ \le r_i \le b - ۱$ و $r_k \ne ۰$.

(اثبات این قضیه، براساس استفاده از قضیه‌ی تقسیم، در کتاب درسی آمده است).

برای این‌که قضیه را بهتر درک کنیم، چند مثال می‌آوریم:

مثال ۱. عدد n رقمی $A = \overline{a_{n-۱} a_{n-۲} \cdots a_۲ a_۱ a_۰}$ را می‌توان در مبنای ۱۰ به صورت زیر نمایش داد:

$$A = ۱۰^{n-۱} a_{n-۱} + ۱۰^{n-۲} a_{n-۲} + \cdots + ۱۰^۲ a_۲ + ۱۰ a_۱ + a_۰$$

توجه دارید که خط بالای ارقام یا حروف به معنی این است که حروف زیر خط، هر کدام یک رقم در مبنای مزبورند و اگر مبنای عدد نوشته نشود، آن را ۱۰ در نظر می‌گیرند. هم‌چنین دقت دارید که برای نمایش یک عدد n رقمی در مبنایی چون b، طبق قضیه‌ی قبل، باید اولین عدد از سمت چپ در $b^{n-۱}$ ضرب و به ترتیب از توان b یک واحد کم شود.

مثال ۲. عدد $A = (۵۱۳۲۴)_۶$ را در مبنای ۶ باز کنید.

$$A = ۵ \times ۶^۴ + ۱ \times ۶^۳ + ۳ \times ۶^۲ + ۲ \times ۶^۱ + ۴$$

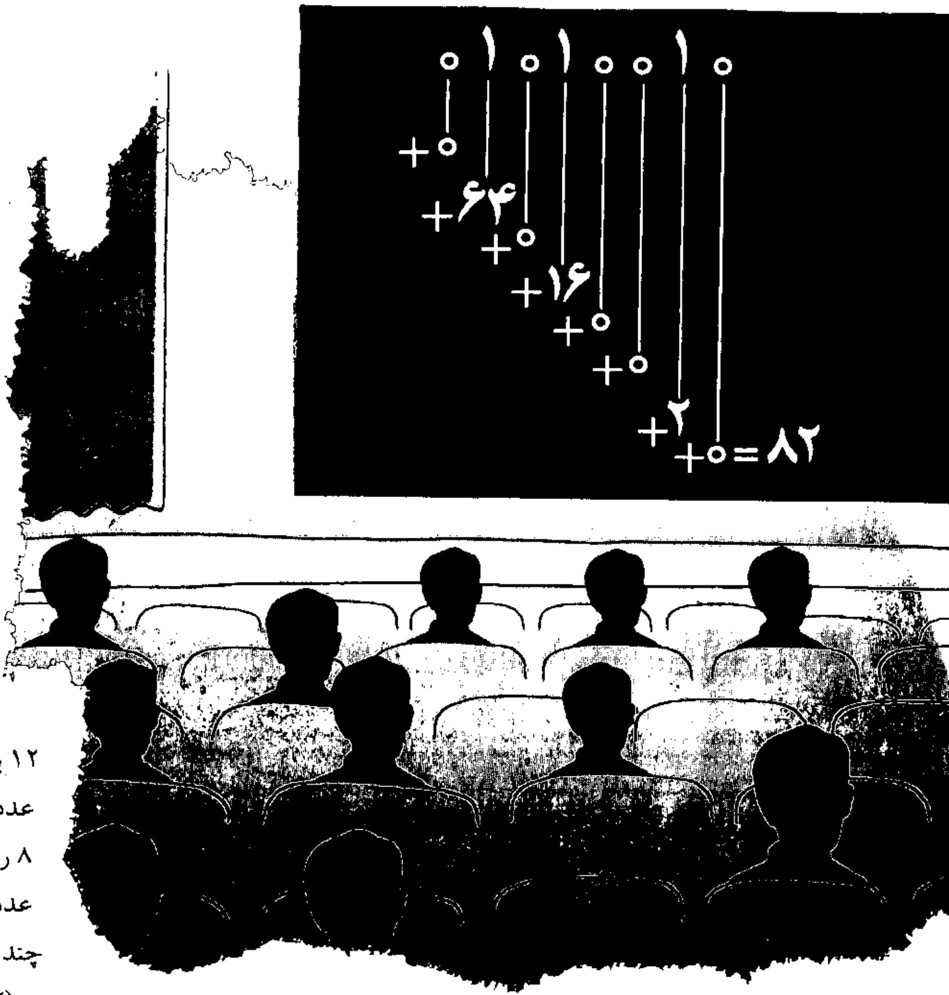
توجه داشته باشید که وقتی عددی، مثلاً $A = (۳۱۲)_۵$ که در مبنای ۵ به شکل یک دوتایی و یک بسته‌ی ۵ تایی و سه بسته‌ی ۲۵ تایی دسته‌بندی شده است، در مبنای خودش باز شود و این دسته‌بندی‌های پنج‌تایی باز و روی هم شمارش شوند، عددی در مبنای ۱۰ به‌دست می‌آید. یعنی:

«برای این‌که عددی در مبنای $b > ۱$ را به مبنای ۱۰ ببریم، کافی است آن را در مبنای خودش، یعنی b باز کنیم. مجموع اعداد حاصل عددی است در مبنای ۱۰».

برای مثال، می‌خواهیم عدد $A = (۳۱۲)_۵$ را به مبنای ۱۰ ببریم:

$$(۳۱۲)_۵ = ۳ \times ۵^۲ + ۱ \times ۵ + ۲ = ۷۵ + ۵ + ۲ = ۸۲$$

حال این سؤال پیش می‌آید که اگر بخواهیم عدد ۸۲ را با



استفاده از قضیه ی قبل در مبنای ۵ بنویسیم، این عمل چگونه انجام می‌شود؟

واضح است که باید عدد ۸۲ را ۵ تا ۵ تا دسته‌بندی کنیم. برای این منظور، باید با استفاده از قضیه‌ی تقسیم، عدد ۸۲ را با تقسیمات متوالی به دسته‌های ۵ تایی و ۲۵ تایی و ۱۲۵ تایی و ... تقسیم کنیم.

۸۲ | ۵
۸۰   ۱۶ | ۵
②   ۱۵   ۳ | ۵
①   ۰   ۰
③

$۸۲ = (۳۱۲)_۵$

در واقع، اگر ۸۲ را با استفاده از قضیه‌ی تقسیم که در بالا انجام شد، بازنویسی کنیم، خواهیم داشت:

$$۸۲ = ۵ \times ۱۶ + ۲ = ۵ \times (۳ \times ۵ + ۱) + ۲$$
$$= ۳ \times ۵^۲ + ۱ \times ۵ + ۲$$

که عبارت $(۳ \times ۵^۲ + ۱ \times ۵ + ۲)$ همان باز شده‌ی عدد $(۳۱۲)_۵$ در مبنای ۵ است.

سؤال دیگر این است که اگر مبنای شمارش بزرگ‌تر از ۱۰ باشد، ارقام چگونه نوشته و خوانده می‌شوند. مثلاً در مبنای ۱۶ عدد ۱۲ یا ۱۳ رقم محسوب می‌شود. بنابراین عدد $(۱۲۸۶۴۱۱۳)_{۱۶}$ را می‌توان عددی ۸ رقمی خواند (یک رقم یک رقم) و یا عددی ۵ رقمی. البته عدد ۵ رقمی هم به چند صورت خوانده می‌شود: $(۳-۱۱-۴-۶-۸-۱۲)_{۱۶}$ و یا $(۱۳-۱-۴-۶-۸-۱۲)_{۱۶}$. بنابراین، برای این که این اشکال ایجاد نشود، طبق قرارداد، حرف a را ۱۰، حرف b را ۱۱، حرف c را ۱۲ و ... در نظر می‌گیریم. برای مثال، عدد $(\overline{۱a۲c})_{۱۳}$ به صورت زیر به مبنای ۱۰ برده می‌شود:

$$(\overline{۱a۲c})_{۱۳} = ۱ \times ۱۳^۳ + ۱۰ \times ۱۳^۲ + ۲ \times ۱۳ + ۱۲$$

قبل از طرح و حل مسائلی در زمینه‌ی عددنویسی در مبناهای مختلف، می‌خواهیم اعمال جمع و ضرب در مبناهای غیر از ۱۰ را نیز یاد بگیریم. البته برای مثال، اگر بخواهیم دو عدد ۷۸ و ۹۶ را با هم جمع کنیم، ابتدا یکان‌های آن دو را با هم جمع و عدد حاصل یعنی ۱۴ را بر مبنای خودشان یعنی ۱۰ تقسیم می‌کنیم و خارج قسمت را که یک باشد، به مکان بالاتر می‌بریم و باقی‌مانده‌ی تقسیم ۱۴ بر مبنا، یعنی ۴ را نگه می‌داریم. همین عمل را در مکان‌های دیگر تکرار می‌کنیم. $(۱ + (۷ + ۹))$ را بر ۱۰ تقسیم می‌کنیم و باقی‌مانده را که ۷ باشد، نگه می‌داریم و خارج قسمت را به مکان بالاتر می‌فرستیم و ...)

در مبناهای غیر از ۱۰ نیز به‌صورت روبه‌رو عمل می‌کنیم:

$$\begin{array}{cccc} & 1 & \overset{1}{7} & 8 \\ + & 0 & 9 & 6 \\ \hline & 1 & 7 & 4 \end{array}$$

یعنی در هر مکان، برای جمع دو رقم، ابتدا آن‌ها را جمع و حاصل جمع را بر مبنای خودشان تقسیم می‌کنیم. باقی‌مانده را در همان مکان نگه می‌داریم و خارج قسمت را به مکان بعدی می‌بریم و ...

مثلاً می‌خواهیم دو عدد $(64)_7$ و $(54)_7$ را با هم جمع کنیم. ابتدا رقم اول از راست هر یک را با هم جمع $(10 = 6 + 4)$ و حاصل را بر ۷ تقسیم می‌کنیم. $(10 = 1\times7 + 3)$ باقی‌مانده را نگه می‌داریم، خارج قسمت یعنی ۱ را به مکان دوم می‌فرستیم و آن را با مجموع ارقام مکان دوم، جمع می‌کنیم. حاصل را بر ۷ تقسیم می‌کنیم و باقی‌مانده را نگه می‌داریم و خارج قسمت را به مکان بعدی می‌بریم.

$$\begin{array}{cc|cc} & 1 & \overset{1}{6} & 6 \\ + & 0 & 5 & 4 \\ \hline & (1 & 5 & 3)_7 \end{array} \qquad \begin{cases} 6+4=10=1\times7+③ \\ (6+5)+1=12=1\times7+⑤ \ \text{باقی‌مانده} \\ 0+1=① \ \text{خارج قسمت} \end{cases}$$

$$\begin{array}{cc|ccc} & 1 & (\overset{1}{5} & \overset{1}{6} & 7)_8 \\ + & 0 & (7 & 7 & 4)_8 \\ \hline & 1 & (5 & 6 & 3)_7 \end{array} \qquad \begin{cases} 7+4=11=1\times8+③ \\ (6+7)+1=14=1\times8+⑥ \\ (5+7)+1=13=1\times8+⑤ \\ 0+1=① \end{cases}$$

برای ضرب دو عدد در مبنای غیر از ۱۰ نیز به همین صورت عمل می‌کنیم:

$$\begin{array}{cc|c} & \overset{5}{\underset{2}{}} & \overset{5}{\underset{3}{}} \\ & & (56)_8 \\ & 1 & (74)_8 \\ \times & 2 & 70 \\ & 50 & 20 \\ \hline & (53 & 10) \end{array} \qquad \begin{cases} 4\times6=24=3\times8+0 \\ 4\times5+3=23=2\times8+7 \\ 7\times6=42=5\times8+2 \\ 7\times5+5=40=5\times8+0 \end{cases}$$

$$7+2=9=1\times8+①$$

نکته‌ی جالب .... !

به نظر شما آیا در مبنای غیر از ۱۰، ممیز معنی دارد و چگونه باید اعداد دارای ممیّز را تعریف کرد؟ بله درست است. ممیّز در اعداد با مبنای غیر از ۱۰ معنی دارد و درست مثل تعریف ممیّز در مبنای ۱۰ است. برای مثال، به بسط عدد ۱۳۸۸/۱۲ توجه کنید:

$$1388/12 = 1\times10^3 + 3\times10^2 + 8\times10^1 + 8\times10^0 + 1\times10^{-1} + 2\times10^{-2}$$

حال می‌خواهیم عدد $(4123/123)_6$ را در مبنای خودش بسط دهیم:

$$(4123/123)_6 = 4\times6^3 + 1\times6^2 + 2\times6^1 + 3\times6^0 + 1\times6^{-1} + 2\times6^{-2} + 3\times6^{-3}$$

در واقع، در این عدد رقم‌های ۱ بعد از ممیّز، $\frac{1}{6}$ و ۲ ؟ یعنی $\frac{2}{36}$ و ۳ یعنی $\frac{3}{216}$ تعریف می‌شوند.

مسائل حل شده ....

مسئله‌ی ۱. با فرض این‌که $(ab)_5 + (ba)_4 = 33$، عدد $(\overline{aba})_6$ را در مبنای ۱۰ به‌دست آورید.

حل:

$$(ab)_5 + (ab)_4 = 33 \Rightarrow 5a + b + 4b + a = 33 \Rightarrow 6a + 5b = 33$$

و چون $1 \le a \le 3$ و $1 \le b \le 3$ (در مبنای ۴ حداکثر رقم به‌کار رفته ۳ است)، لذا باید $a = b = 3$ باشد. در این صورت داریم:

$$(\overline{aba})_6 = (333)_6 = 3\times6^2 + 3\times6 + 3 = 129$$

مسئله‌ی ۲. اگر $(213)_x = (134)_{x+1}$، در این صورت $(111)_x$ را بیابید.

حل: ابتدا x را می‌یابیم (توجه داریم که باید $x \ge 4$ باشد).

$$(213)_x = (134)_{x+1} \Rightarrow 2x^2 + x + 3 = (x+1)^2 + 3\times(x+1) + 4$$
$$\Rightarrow 2x^2 + x + 3 = x^2 + 2x + 1 + 3x + 3 + 4 \Rightarrow x^2 - 4x - 5 = 0$$
$$\Rightarrow (x-5)(x+1) = 0 \Rightarrow x = 5$$
$$\Rightarrow (111)_5 = 1\times5^2 + 1\times5 + 5 = 35$$

مسئله‌ی ۳. اگر عدد دو رقمی $(ab)_7$ با عدد $(ba)_9$ برابر باشد، این عدد را در مبنای ۱۰ نمایش دهید.

حل: چون $(ab)_7$، پس $1 \le a \le 6$ و $1 \le b \le 6$ (a و b نمی‌توانند صفر باشند، به دلیل این‌که در $(ab)_7$، رقم a در سمت چپ و در $(ba)_9$ رقم b در سمت چپ قرار گرفته است و صفر سمت چپ خوانده نمی‌شود).

$$(ab)_7 = (ba)_9 \Rightarrow 7a + b = 9b + a \Rightarrow 6a = 8b \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{8}{6}$$

چون $a \ne 8$ پس باید قرار دهیم: $\frac{a}{b} = \frac{4}{3}$ که در نتیجه $a = 4$ و $b = 3$.

بنابراین داریم:

$$(ab)_7 = 4\times7 + 3 = 31$$
$$(ba)_9 = 3\times9 + 4 = 31$$

مسئله‌ی ۴. مطلوب است:

الف) تعداد اعداد ۴ رقمی در مبنای ۵

ب) بزرگ‌ترین عدد ۴ رقمی در مبنای ۵ (با تکرار ارقام و بدون تکرار ارقام)

ج) کوچک‌ترین عدد ۴ رقمی در مبنای ۵ (با تکرار ارقام و بدون تکرار ارقام)

حل: در مبنای ۵، می‌توان از ارقام ۰، ۱، ۲، ۳، ۴ استفاده کرد که در سمت چپ رقم صفر قرار نمی‌گیرد. پس برای انتخاب رقم در سمت چپ، ۴ انتخاب داریم.

و در جایگاه‌های بعدی، هر کدام ۵ (البته اگر تکرار ارقام مجاز باشد).

الف) $\rightarrow 4\times5\times5\times5=500$

ب) بزرگ‌ترین عدد ۴ رقمی $\rightarrow (4444)_5$ (با تکرار ارقام)

بزرگ‌ترین عدد ۴ رقمی $\rightarrow (4321)_5$ (بدون تکرار ارقام)

ج) کوچک‌ترین عدد ۴ رقمی $\rightarrow (1023)_5$ (بدون تکرار ارقام)

کوچک‌ترین عدد ۴ رقمی $\rightarrow (1000)_5$ (با تکرار ارقام)

مسئله‌ی ۵. اگر نمایش عدد $(145)_x$ در مبنای ۱۰ عدد ۱۰۱ باشد، مقدار x را بیابید.

حل: $(145)_x=101 \Rightarrow 1\times x^2+4\times x+5=101$

$\Rightarrow x^2+4x-96=0 \Rightarrow x=8$

مسئله‌ی ۶. ثابت کنید اگر عدد $\overline{a5}\times\overline{b5}$ به ۲۵ ختم شود، آن‌گاه $(a+b)=2k$.

اثبات:

$\overline{a5}\times\overline{ba}=(10a+5)\times(10b+5)=100ab+50(a+b)+25$

برای این‌که عدد فوق به ۲۵ ختم شود، باید (a+b) زوج باشد تا حاصل $100ab+50(a+b)$ به دو صفر ختم شود.

در قسمت آخر می‌خواهیم عدد A را از مبنای غیر از ۱۰ به مبنای غیر از ۱۰ ببریم. برای این کار، راه معمول این است که ابتدا عدد A را از مبنای مثلاً b به مبنای ۱۰ و سپس عدد حاصل در مبنای ۱۰ را با تقسیمات متوالی به مبنای c ببریم.

مثال: می‌خواهیم عدد $(213)_5$ را در مبنای ۷ نمایش دهیم. به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$(213)_5=2\times5^2+1\times5+3=58$

58 | 7 → 8 (باقیمانده ②)؛ 8 | 7 → ① ①

$58=(112)_7$

$(213)_5=(112)_7$

نکته‌ی جالب

هرگاه بخواهیم عددی را از مبنای b به مبنای b^k ببریم، در این صورت به ترتیب هر k رقم از راست در مبنای b، یک رقم از راست در مبنای b^k است و برعکس، هر ۱ رقم از سمت راست، در یک عدد در مبنای b^k، k رقم از سمت راست در همان عدد در مبنای b است.

مثال: عدد $A=(1021121)_3$ مفروض است. این عدد را در مبنای ۹ نمایش دهید. چون $9=3^2$، پس هر دو رقم در عدد A، یک رقم این عدد در مبنای ۹ است.

$(21)_3=2\times3+1=7\ ,\ (11)_3=1\times3+1=4\ ,\ (02)_3=2$

$(1)_3=1\Rightarrow(1021121)_3=(1247)_9$

مثال: عدد $A=(210123)_4$ مفروض است. این عدد را در مبنای ۲ بنویسید.

حل:

روش اول: با توجه به نکته‌ی قبل، هر یک رقم از عدد A، دو رقم از عدد B (عدد مورد نظر) در مبنای ۲ است. برای به دست آوردن هر دو رقم B، کافی است یک رقم نظیر در A را به مبنای ۲ ببریم (با تقسیمات متوالی).

$(3)=(11)_2 \rightarrow$ 3 | 2 → ① ①

$2=(10)_2\ ,\ 1=(01)_2\ ,\ 0=(00)_2\ ,\ 1=(01)_2\ ,\ 2=(10)_2$

$\Rightarrow A=(210123)_4=(100100011011)_2=B$

روش دوم: عدد A را در مبنای خودش یعنی ۴ بسط می‌دهیم و بر حسب توان‌های ۲ مرتب می‌کنیم و ارقام بزرگ‌تر از ۱ را در مبنای ۲ می‌نویسیم:

$$\begin{aligned}A&=2\times4^5+1\times4^4+0\times4^3+1\times4^2+2\times4^1+3\\&=2\times2^{10}+1\times2^8+0\times2^6+1\times2^4+2\times2^2+3\\&=(1\times2+0)\times2^{10}+1\times2^8+0\times2^6+1\times2^4+(1\times2+0)\times2^2+(1\times2+1)\\&=1\times2^{11}+0\times2^{10}+1\times2^8+0\times2^6+1\times2^4+1\times2^3+0\times2^2+1\times2+1\\&=(100100011011)_2=B\end{aligned}$$

مثال: عددی در مبنای ۳ به صورت $A=(211121121)_3$ نوشته شده است. رقم وسط این عدد در مبنای ۲۷ را بیابید.

حل: چون $27=3^3$، هر سه رقم در این عدد، یک رقم در عدد در مبنای ۲۷ است، اگر سه رقم سه رقم جدا کنیم، سه رقم دوم، رقم وسط آن عدد خواهد بود.

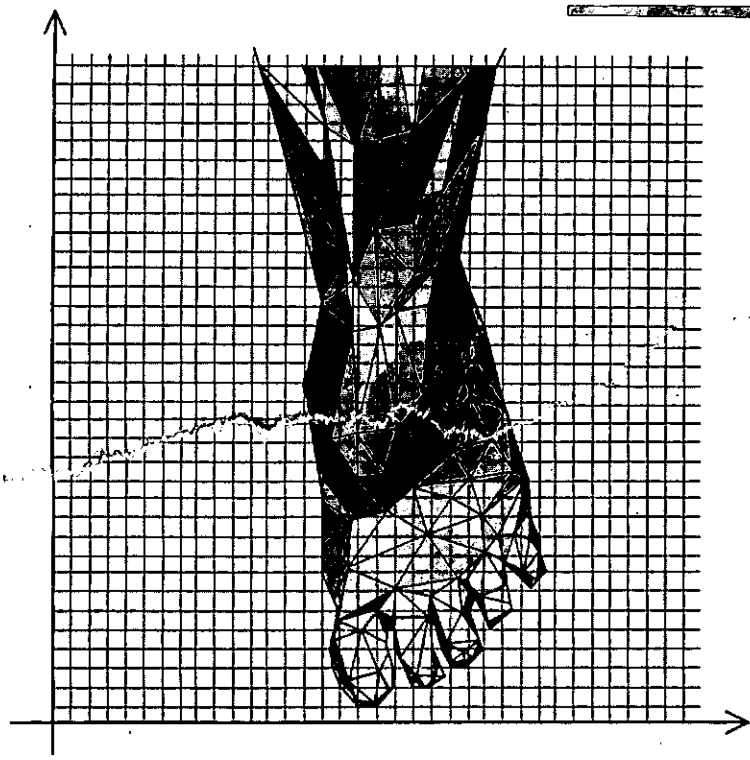
$(121)_3=1\times3^2+2\times3+1=16$ رقم وسط

$(211)_3=2\times3^2+1\times3+1=\underset{\text{رقم سمت چپ}}{22}\ ,\ (121)_3=\underset{\text{رقم سمت راست}}{16}$

$\Rightarrow A=(22-16-16)_{27}$

● محمد هاشم رستمی

۱۰



رویکرد هندسی جبری ـ مختصاتی در آموزش هندسه

اشاره

یکی از مهم‌ترین پیوندها و اتصال‌ها در همه‌ی ریاضیات، اتصال و پیوند بین هندسه و جبر است.

از استانداردهای موضوعی NCTM

در این شماره نیز اتصال و پیوند را در فضای سه بعدی بررسی می‌کنیم.

نکته‌ی مهم: ضمن بررسی رویکرد هندسی، رویکرد جبری ـ مختصاتی در آموزش هندسه، برخی از راهبردهای مهم برای حل مسئله‌های هندسه مانند «تحدید یا کوچک‌تر کردن مسئله، مسئله را حل شده فرض کردن، به کارگیری مسئله‌های خویشاوند برای حل یک مسئله، چگونگی به کارگیری مکان‌های هندسی و استفاده از روش‌های متفاوت حل یک مسئله» را مطرح می کنیم تا دانش آموزان به دیدگاه‌های جدیدی برای حل مسئله‌های هندسه دست یابند. در ضمن لازم است گفته شود، مسئله هایی را که با دو رویکرد هندسی و رویکرد جبری ـ مختصاتی حل می کنیم، کلیدی هستند و از کتاب های درسی هندسه‌ی (۱) و هندسه‌ی (۲) انتخاب شده‌اند تا دانش آموزان بتوانند مسأله‌های دیگر این کتاب‌ها، هم‌چنین مسأله‌های دیگر از کتاب های هندسه را با استفاده از این دو رویکرد، به راحتی حل کنند.

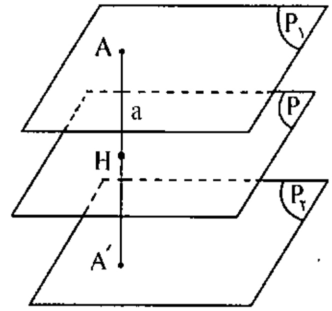
مسئله‌ی ۱۲. ثابت کنید برای هر عدد $a > 0$، مکان هندسی نقطه هایی از فضا که از یک صفحه مانند P، به فاصله‌ی a قرار دارد، دو صفحه‌ی موازی P است که در دو طرف این صفحه قرار دارند و فاصله‌ی هر کدام با P برابر a است.

حل:

الف) روش هندسی

صفحه‌ی P را در نظر می‌گیریم. از نقطه‌ای دل‌خواه مانند H واقع بر P، خط L را عمود بر صفحه‌ی P رسم می‌کنیم.

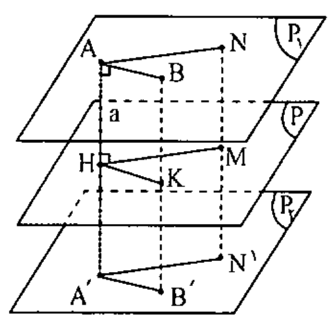
روی این خط دو پاره خط $HA = HA' = a$ را جدا می کنیم. از A صفحه‌ی P_1 و از A' صفحه‌ی P_2 را موازی صفحه‌ی P رسم می کنیم. می‌دانیم که از هر نقطه‌ی داده شده



مانند A یا A'، تنها یک صفحه به موازات صفحه‌ی مفروض می‌توان رسم کرد. پس دو صفحه‌ی P_1 و P_2 منحصر به فرد هستند.

برای این که ثابت کنیم صفحه‌های P_1 و P_2 مکان هندسی مورد نظر هستند، باید ثابت کنیم که:

الف) هر نقطه واقع بر یکی از این دو صفحه، از صفحه‌ی P به فاصله‌ی a قرار دارد.



ب) هر نقطه‌ای که از صفحه‌ی P به فاصله‌ی a قرار دارد، روی صفحه‌ی P_1 یا روی صفحه‌ی P_2 واقع است.

برای اثبات، یکی از این دو صفحه، مثلاً صفحه‌ی P_1 را در نظر می گیریم. روی این صفحه نقطه‌ی دل‌خواه B را اختیار می کنیم و از این نقطه، عمود BK را بر صفحه‌ی P فرود می‌آوریم. فصل مشترک صفحه‌ی AHKB با دو صفحه‌ی موازی P و P_1، خط‌های AB و HK هستند که با هم موازی‌اند. یعنی چهار ضلعی AHKB متوازی‌الاضلاع است، اما به دلیل این که $\hat{H} = \hat{K} = 90°$ است، این چهار ضلعی مستطیل است. یعنی BK=AH=a

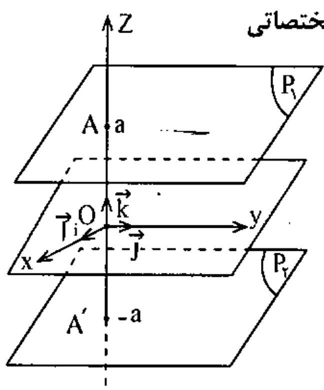
برای اثبات این مطلب، از این ویژگی نیز می‌توان استفاده کرد که پاره‌خط‌های موازی بین دو صفحه‌ی موازی، با هم برابرند. در این مسئله AH =BK است، اما به دلیل عمود بودن BK بر P، پاره‌خط BK فاصله‌ی نقطه‌ی دل‌خواه B متعلق به صفحه‌ی P_1 از صفحه‌ی P است.

پس حکم الف همواره برقرار است.

برای اثبات قسمت ب، نقطه‌ی دل‌خواهی مانند M را روی صفحه‌ی P اختیار می‌کنیم. از این نقطه، خطی مانند D عمود بر P رسم می‌کنیم. روی این خط و در طرف صفحه‌ی P_1، پاره خط MN =a را جدا می‌کنیم. از N به A وصل می‌کنیم.

چهار ضلعی ANMH به دلیل موازی بودن دو ضلع AH و MN که دو خط عمود بر یک صفحه‌اند و به دلیل مساوی بودن (زیرا AH=MN=a) متوازی الاضلاع و در واقع مستطیل است. پس AN موازی HM است، اما HM در صفحه‌ی P و $A \in P_1$ واقع است. پس خط AN که از A موازی HM رسم شده است، به تمامی در صفحه‌ی P_1 قرار می‌گیرد (بنا به مطالب کتاب درسی). در نتیجه، N روی صفحه‌ی P_1 قرار دارد. پس حکم ب مسئله نیز برقرار است. بنابراین، صفحه‌ی P_1 یک مکان هندسی نقطه‌هایی است که از P به فاصله‌ی a قرار دارند. هم‌چنین ویژگی برای صفحه‌ی P_2 نیز برقرار است. پس حکم مسئله درست است.

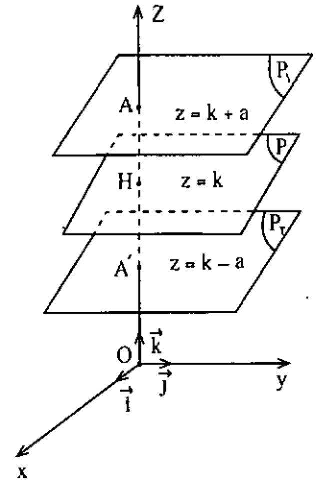
ب) حل با روش جبری ـ مختصاتی



دستگاه مختصات قائم o - xyz در فضا را چنان اختیار می‌کنیم که P، صفحه‌ی xoy باشد. در این صورت، معادله‌ی صفحه‌ی P به صورت $z = 0$ است. معادله‌ی صفحه‌هایی که موازی صفحه‌ی P و به فاصله‌ی $a > 0$ از این صفحه قرار دارند، به صورت $P_1: z = a$ و $P_2: z = -a$ است. بدیهی است، هر نقطه‌ی واقع در یکی از این دو صفحه، به فاصله‌ی a از صفحه‌ی P قرار دارد و هر نقطه‌ای که از صفحه‌ی P به فاصله‌ی a واقع است، در یکی از صفحه‌های P_1 یا P_2 قرار دارد.

نکته۱. معادله‌ی هر خم در هر دستگاه مختصات، رابطه‌ای است که بین مختصات هر نقطه از آن خم در آن دستگاه مختصات برقرار است. به قسمی که مختصات هر نقطه از آن خم، در آن معادله صدق کند و هر نقطه‌ای که مختصاتش در آن معادله صدق کند، روی آن خم قرار داشته باشد.

نکته۲. اگر دستگاه مختصات قائم در فضا را چنان اختیار کنیم که صفحه‌ی P با یکی از صفحه‌های مختصات، مثلاً با صفحه‌ی xoy موازی باشد، معادله‌ای به صورت z=k پیدا خواهد کرد. در این صورت، صفحه‌های P_1 و P_2 به معادله‌های z=k+a و z=k-a خواهند بود.



نکته۳. اگر دستگاه مختصات قائم O-xyz در فضا را چنان اختیار کنیم که صفحه‌ی P با هیچ یک از صفحه‌های مختصات موازی نباشد، صفحه‌ی P به معادله‌ی $P:\ a_1'x+b_1'y+c_1'z+d_1=0$ خواهد بود. در این صورت، اگر M=(x,y,z) یک نقطه از مکان هندسی مورد نظر، یعنی نقطه‌ای باشد که از صفحه‌ی P به فاصله‌ی معلوم a قرار دارد، خواهیم داشت:

$$a=\frac{|a_1x+b_1y+c_1z+d_1|}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}}$$

$$\Rightarrow |a_1x+b_1y+c_1z+d_1|=a\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}$$

$$P_1:\ a_1x+b_1y+c_1z+d_1-a\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}=0 \quad (1)$$

$$P_2:\ a_1x+b_1y+c_1z+d_1+a\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}=0 \quad (2)$$

به‌طوری که دیده می‌شود، P_1 و P_2 دو صفحه‌اند که با صفحه‌ی P موازی‌اند، زیرا معادله‌های (۱) و (۲)، دو معادله‌ی درجه‌ی اول نسبت به x، y و z هستند و بردار قائم این صفحه‌ها نیز یکی است. $\vec{N}_p=\vec{N}_{p_1}=\vec{N}_{p_2}=(a_1,b_1,c_1)$. پس حکم مسئله درست است.

اینک به چند مثال توجه کنید:

مثال۱. معادله‌ی مکان هندسی نقطه‌ای را بیابید که از صفحه‌ی $P:\ z=0$ به فاصله‌ی ۴ قرار دارد.

حل: صفحه‌ی P منطبق بر صفحه‌ی xoy است. پس صفحه‌های جواب مسئله $P_1: z=4$ و $P_2: z=-4$ است. با استفاده از دستور کلی فاصله‌ی نقطه از صفحه نیز می‌توان معادله‌ی صفحه‌های P_1 و P_2 را به دست آورد. زیرا اگر M=(x,y,z) یک نقطه از مکان هندسی مورد نظر، یعنی نقطه‌ای باشد که از صفحه‌ی P به فاصله‌ی ۴ قرار دارد، خواهیم داشت:

$$4=\frac{|z|}{\sqrt{0+0+1}}\Rightarrow 4=\frac{|z|}{1}\Rightarrow |z|=4\Rightarrow$$

$$P_1:\ z=4\ ,\ P_2:\ z=-4$$

مثال۲. ثابت کنید مکان هندسی نقطه‌ای که از صفحه‌ی $P:\ 2x+y-2z+3=0$ به فاصله‌ی ۷ قرار دارد، دو صفحه‌ی موازی P در دو طرف آن و هر یک به فاصله‌ی ۷ از صفحه‌ی P است.

حل: فرض می‌کنیم M=(x,y,z) یک نقطه از مکان هندسی مورد نظر، یعنی نقطه‌ای باشد که از صفحه‌ی P به فاصله‌ی ۷ واقع است. در این صورت داریم:

$$7=\frac{|2x+y-2z+3|}{\sqrt{4+1+4}=3}\Rightarrow |2x+y-2z+3|=21$$

$$\Rightarrow P_1:\ 2x+y-2z+3=21\Rightarrow P_1:\ 2x+y-2z-18=0$$

$$P_2:\ 2x+y-2z+3=-21\Rightarrow P_2:\ 2x+y-2z+24=0$$

به‌طوری که دیده می‌شود P_1 و P_2 دو صفحه‌اند که با صفحه‌ی P موازی‌اند، زیرا بردار نرمال آن‌ها $\vec{V}=(2,1,-2)$ است. به سادگی می‌توان ثابت کرد که این دو صفحه، در دو طرف صفحه‌ی P واقع‌اند، زیرا اگر معادله‌ی صفحه‌ی P را به صورت $p(x,y)=2x+y-2z+3=0$ بگیریم، برای دو نقطه‌ی $M_1\in P_1$ و $M_2\in P_2$ باید $P(M_1)$ و $P(M_2)$ مختلف‌العلامت باشند. بررسی می‌کنیم:

$$M_1=(0,0,-9)\in P_1$$
$$\Rightarrow P(M_1)=P(0,0,-9)=0+0+18+3=21>0$$

$$M_2=(0,0,12)\in P_2$$
$$\Rightarrow P(M_2)=P(0,0,12)=0+0+-24+3=-21<0$$

پس، دو صفحه‌ی P_1 و P_2 در دو طرف صفحه‌ی P قرار دارند.

مثال۳. نقطه‌ای روی خط $\Delta:\frac{x}{2}=\frac{y}{-1}=\frac{z+2}{3}$ بیابید که از صفحه‌ی P به معادله‌ی $P(x,y)=x+2y+2z-5=0$ به فاصله‌ی ۵ باشد.

حل: می‌دانیم مکان هندسی نقطه‌ای که از صفحه‌ی P به فاصله‌ی ۵ قرار دارد، دو صفحه موازی P به فاصله‌ی ۵ از آن است (بنابر مسئله‌ی ۱۲). بنابراین، معادله‌ی این دو صفحه را به دست می‌آوریم و نقطه‌های برخورد خط Δ با این دو

صفحه را که دو نقطه‌ی جواب مسئله (در صورت وجود جواب) هستند، به‌دست می‌آوریم. داریم:

$$P:\ x+2y+2z-5=0\ ,\ M=(x,y,z)\in \text{مکان هندسی مورد نظر}$$

$$\Rightarrow 5=\frac{|x+2y+2z-5|}{\sqrt{1+4+4}}=|x+2y+2z-5|=15$$

$$\Rightarrow P_1:\ x+2y+2z-5=15\Rightarrow P_1:\ x+2y+2z-20=0$$
$$P_2:\ x+2y+2z-5=-15\Rightarrow P_2:\ x+2y+2z+10=0$$

$$\begin{matrix}\Delta: \\ P_1:\end{matrix}\begin{cases}\frac{x}{2}=\frac{y}{-1}=\frac{z+2}{3}=t\\ x+2y+2z-20=0\end{cases}$$

$$\Rightarrow x=2t\ ,\ y=-t\ ,\ z=3t-2$$
$$\Rightarrow 2t-2t+6t-4-20=0$$
$$\Rightarrow t=4\Rightarrow M_1=(8,-4,10)$$

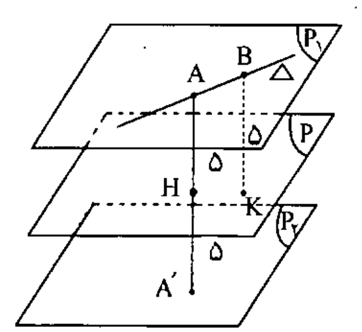
$$\begin{matrix}\Delta: \\ P_2:\end{matrix}\begin{cases}\frac{x}{2}=\frac{y}{-1}=\frac{z+2}{3}=t\\ x+2y+2z+10=0\end{cases}$$

$$\Rightarrow x=2t\ ,\ y=-t\ ,\ z=3t-2$$
$$\Rightarrow 2t-2t+6t-4+10=0$$
$$\Rightarrow t=-1\Rightarrow M_2=(-2,1,-5)$$

نکته‌ی مهم: برای بحث در وجود جواب برای مسئله، باید به این نکته توجه کنیم که خط Δ نسبت به صفحه‌های P_1 و P_2 چه وضعی دارد؟ یکی از سه حالت زیر می‌تواند پیش آید:

الف) خط Δ غیرموازی با صفحه‌های P_1 و P_2 باشد. در این صورت، Δ هر یک از صفحه‌های P_1 و P_2 را در یک نقطه قطع می‌کند. بنابراین، ۲ نقطه‌ی جواب مسئله وجود دارد.

ب) خط Δ موازی صفحه‌های P_1 و P_2 باشد و روی هیچ یک از این دو صفحه قرار نداشته باشد. در



این صورت، مسئله جواب ندارد. یعنی هیچ نقطه‌ای روی Δ نمی‌توان یافت که از صفحه‌ی P به فاصله‌ی ۵ (عدد داده شده) باشد.

پ) خط Δ روی یکی از صفحه‌های P_1 یا P_2 قرار گیرد. در این صورت، مسئله بی‌شمار جواب دارد. زیرا در این حالت هر نقطه‌ای واقع بر خط Δ، از صفحه‌ی P به فاصله‌ی ۵ واقع است. زیرا این نقطه روی صفحه‌ی P_1 یا صفحه‌ی P_2 است.

شما می‌توانید مسئله‌هایی با این ویژگی برای حالت‌های ب و پ طرح و حل کنید.

مثال ۴. مکان هندسی نقطه‌ای از صفحه‌ی $\Gamma: 2x-y-2z+1=0$ را تعیین کنید که از صفحه‌ی $P:\ 7x+24y-25=0$ به فاصله‌ی ۴ قرار دارد.

حل: فصل مشترک صفحه‌ی (Γ) با صفحه‌های P_1 و P_2 که مکان هندسی نقطه‌هایی هستند که از صفحه‌ی P به فاصله‌ی ۴ قرار دارند، جواب مسئله است. به بیان دیگر، مکان هندسی نقطه‌هایی که از صفحه‌ی P به فاصله‌ی ۴ واقع‌اند، دو صفحه‌ی P_1 و P_2 موازی صفحه‌ی P و در دو طرف آن و به فاصله‌ی ۴ از آن است (بنا به مسئله ۱۲). پس معادله‌ی این دو صفحه را می‌نویسیم و فصل مشترک هر یک از این دو صفحه با صفحه‌ی (Γ) را به‌دست می‌آوریم (در صورت وجود) داریم:

$$P:\ 7x+24y-25=0\quad M=(x,y,z)\in \text{مکان هندسی داده شده}$$

$$\Rightarrow 4=\frac{|7x+24y-25|}{\sqrt{49+576}}\Rightarrow |7x+24y-25|=100$$

$$P:\ 7x+24y-125=0$$

$$P_2:\ 7x+24y+75=0$$

$$\begin{matrix}P_1: \\ \Gamma:\end{matrix}\begin{cases}7x+24y-125=0\\ 2x-2y-z+1=0\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}7x+24y-125=0\\ 24x-24y-12z+12=0\end{cases}$$

$$\Rightarrow 31x-12z-113=0\Rightarrow x=\frac{z+\frac{113}{12}}{\frac{31}{12}}\quad (1)$$

$$7x+24y-125=0\Rightarrow x=\frac{y-\frac{125}{24}}{-\frac{7}{24}}\quad (2)$$

$$(1),(2) \Rightarrow L_1:\ x = \frac{y-\frac{125}{24}}{-\frac{7}{24}} = \frac{z+\frac{113}{12}}{\frac{31}{12}}$$

یا :

$$\frac{x}{24} = \frac{y-\frac{125}{24}}{-7} = \frac{z+\frac{113}{12}}{62}$$

$$P_2: \begin{cases} 7x+24y+75=0 \\ \Gamma:\ 2x-2y-z+1=0 \end{cases}$$

$$(P_2)+12(\Gamma)=0 \Rightarrow 31x-12z+87=0$$

$$\Rightarrow x = \frac{z-\frac{29}{4}}{\frac{31}{12}} \quad \text{و} \quad x = \frac{y+\frac{25}{8}}{\frac{7}{-24}}$$

$$\Rightarrow L_2:\ x = \frac{y+\frac{25}{8}}{-\frac{7}{24}} = \frac{z-\frac{29}{4}}{\frac{31}{12}}$$

یا :

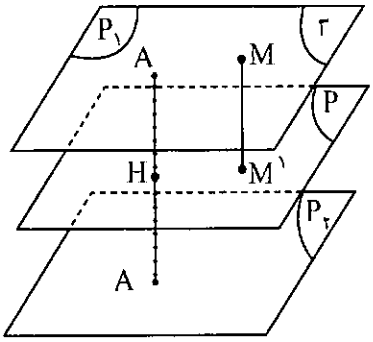
$$\Rightarrow L_2:\ \frac{x}{24} = \frac{y+\frac{25}{8}}{-7} = \frac{z-\frac{29}{4}}{62}$$

به‌طوری که دیده می‌شود، دو خط L_1 و L_2 جواب مسئله‌اند.

بحث وجود جواب برای مسئله، همانند مثال قبلی است؛ با این تفاوت که اگر در این مثال، وضع صفحه‌های P_1 و P_2 با صفحه‌ی (Γ) را بررسی کنیم، سه حالت پیش می‌آید:

الف) اگر صفحه‌های P_1 و P_2 با صفحه‌های Γ موازی نباشند (همانند مثال حل شده)، دو خط راست مانند L_1 و L_2 جواب مسئله‌اند؛ زیرا صفحه‌ی Γ با صفحه‌ی P_1 در فصل مشترک L_1 و با صفحه‌ی P_2 در فصل مشترک L_2 متقاطع است.

ب) اگر صفحه‌ی (Γ) با صفحه‌های P_1 و P_2 موازی باشد (هیچ نقطه‌ی مشترکی با این دو صفحه نداشته باشد)، مسئله جواب ندارد. یعنی هیچ نقطه‌ای روی صفحه‌ی Γ نمی‌توان یافت که از صفحه‌ی P به فاصله‌ی ۴ باشد.



پ) اگر صفحه‌ی Γ بر یکی از صفحه‌های P_1 یا P_2 منطبق باشد، مسئله بی‌شمار جواب دارد، زیرا در این حالت، هر خط از صفحه‌ی Γ چون روی صفحه‌ی P_1 یا روی صفحه‌ی P_2 واقع است، از صفحه‌ی P به فاصله‌ی ۴ قرار دارد.

> **نکته‌ی مهم:** همان‌طور که می‌بینید، مسئله‌ی ۱۲ به عنوان مسئله‌ای کلیدی، برای حل مسئله‌های زیادی کاربرد دارد. یک نمونه‌ی دیگر از کاربرد این مسئله را در زیر می‌آوریم. شما خودتان مسئله‌های دیگری طرح کنید که برای حل آن‌ها از مسئله‌ی ۱۲ استفاده شود.

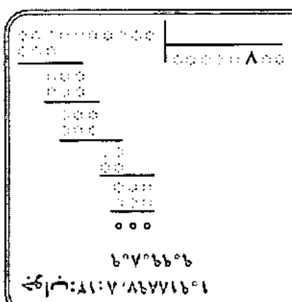
مثال۵. دو نقطه‌ی $A=(1,-1,2)$ و $B=(0,1,1)$ و صفحه‌ی P به معادله‌ی زیر داده شده‌اند. مجموعه‌ی نقطه‌هایی از فضا را بیابید که از صفحه‌ی P به فاصله‌ی ۶ و از دو نقطه‌ی A و B به یک فاصله باشند.

$$P: x+y-3z+5=0$$

حل: صفحه‌ی عمود منصف پاره‌خط AB را Q می‌نامیم و معادله‌ی آن را می‌نویسیم، زیرا مکان هندسی نقطه‌ای از فضا که از دو نقطه‌ی ثابت A و B به یک فاصله است، صفحه‌ی عمود منصف پاره‌خط AB است. سپس معادله‌ی مکان هندسی نقطه‌هایی از فضا را که از صفحه‌ی P به فاصله‌ی معلوم ۶ هستند، به دست می‌آوریم (بنابر مسئله‌ی ۱۲). می‌دانیم که این مکان هندسی، دو صفحه‌ی P_1 و P_2 موازی P و به فاصله‌ی ۶ از صفحه‌ی P است. آن‌گاه فصل مشترک صفحه‌ی Q با صفحه‌های P_1 و P_2 را به‌دست می‌آوریم. محاسبات را خودتان انجام دهید و درباره‌ی وجود جواب برای مسئله نیز بحث کنید.

یک عمل تقسیم جالب





سعی کنید این عمل تقسیم را حل کرده و اعداد واقعی را در محل‌های مربوطه قرار دهید.

از جالب بودن این عمل اینکه هیچ اطلاعی از اعداد مقسوم علیه نداریم و از خارج قسمت فقط یک عدد ۸ را داریم و ازمقسوم هم هیچ عددی معلوم نیست.

با کمی صبر و حوصله حتماً موفق خواهید شد.

● میرشهرام صدر

برای دانش‌آموزان سال دوم **۲**

تابع چندجمله‌ای

اشاره

در شماره‌ی قبل به معرفی چندجمله‌ای و تابع چندجمله‌ای پرداختیم، در این شماره رسم توابع چندجمله‌ای را از طریق انتقال منحنی‌ها بررسی می‌کنیم.

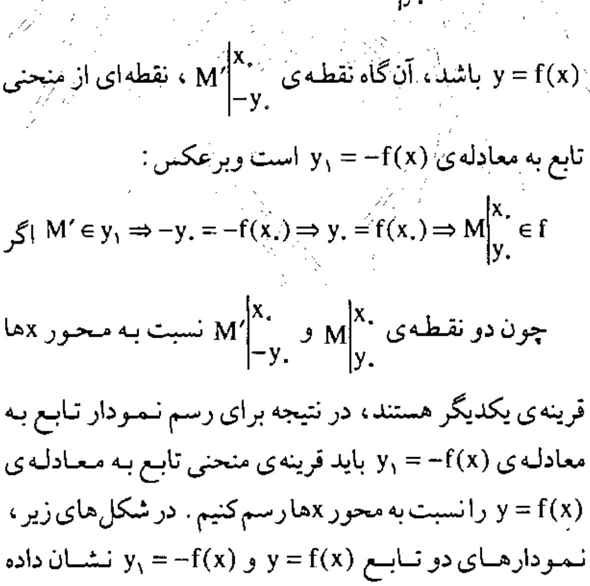
تغییرات و انتقال منحنی‌ها ....

۱. رسم نمودار تابع به معادله‌ی $y_1 = -f(x)$

اگر نقطه‌ی $M\begin{vmatrix}x_0\\y_0\end{vmatrix}$، نقطه‌ای از منحنی تابع به معادله‌ی $y = f(x)$ باشد، آن‌گاه نقطه‌ی $M'\begin{vmatrix}x_0\\-y_0\end{vmatrix}$، نقطه‌ای از منحنی تابع به معادله‌ی $y_1 = -f(x)$ است وبرعکس:

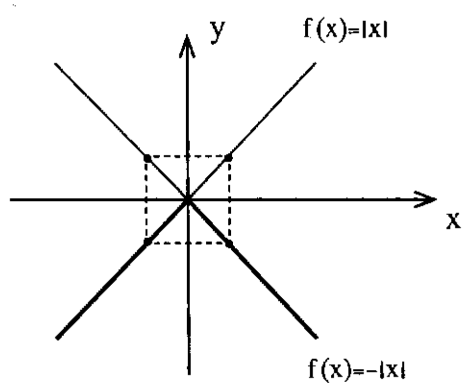
$$\text{اگر } M' \in y_1 \Rightarrow -y_0 = -f(x_0) \Rightarrow y_0 = f(x_0) \Rightarrow M\begin{vmatrix}x_0\\y_0\end{vmatrix} \in f$$

چون دو نقطه‌ی $M\begin{vmatrix}x_0\\y_0\end{vmatrix}$ و $M'\begin{vmatrix}x_0\\-y_0\end{vmatrix}$ نسبت به محور xها قرینه‌ی یکدیگر هستند، در نتیجه برای رسم نمودار تابع به معادله‌ی $y_1 = -f(x)$ باید قرینه‌ی منحنی تابع به معادله‌ی $y = f(x)$ را نسبت به محور xها رسم کنیم. در شکل‌های زیر، نمودارهای دو تابع $y = f(x)$ و $y_1 = -f(x)$ نشان داده شده‌اند.



مثال: نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x) = -|x|$ را رسم کنید.

حل: برای رسم نمودار این تابع، کافی است قرینه‌ی نمودار تابع قدر مطلق را نسبت به محور xها رسم کنیم.

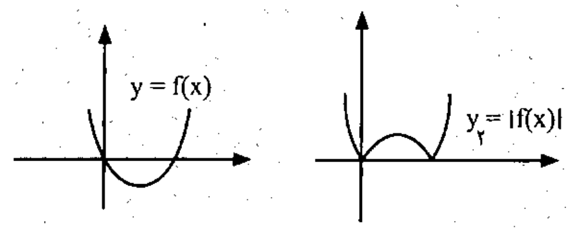


نمودار $f(x) = -|x|$، زاویه‌ی قائمه‌ای است که رأس آن بر مبدأ قرار دارد و دو ضلع آن، نیم‌سازهای ربع‌های سوم و چهارم محورهای مختصات هستند.

۲. رسم تابع به معادله‌ی $y_2 = |f(x)|$

اگر نقطه‌ی $M'\begin{vmatrix}x_0\\y_0\end{vmatrix}$ روی منحنی تابع به معادله‌ی $y = f(x)$ باشد، آن‌گاه نقطه‌ی $M'\begin{vmatrix}x_0\\|y_0|\end{vmatrix}$ روی منحنی تابع به معادله‌ی $y_2 = |f(x)|$ قرار دارد.

چنان‌چه منحنی تابع f به معادله‌ی $y = f(x)$ تماماً بالا یا روی محور xها باشد، آن‌گاه نمودار تابع به معادله‌ی $y_2 = |f(x)|$ نیز همان نمودار تابع f است. و اگر قسمتی یا تمام منحنی تابع f در زیر محور xها باشد، برای رسم تابع به معادله‌ی $y_2 = |f(x)|$ باید قرینه‌ی این قسمت از منحنی را نسبت به محور xها رسم کنیم.

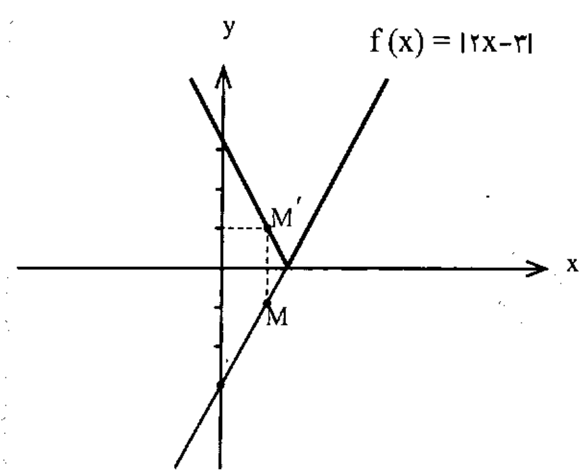


مثال: نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x)=|2x-3|$ را رسم کنید.

حل: ابتدا نمودار خط به معادله‌ی $f(x)=2x-3$ را رسم می‌کنیم. سپس قرینه‌ی قسمتی از خط را که زیر محور xها قرار دارد، نسبت به محور xها به دست می‌آوریم.

$f(x)=2x-3$;

x	۰	۱
y	−۳	−۱



۳. رسم تابع به معادله‌ی $y_3=f(x-a)$

اگر نقطه‌ی $M\begin{vmatrix}x_0\\y_0\end{vmatrix}$ روی منحنی تابع به معادله‌ی $y=f(x)$ باشد، آن‌گاه نقطه‌ی $M'\begin{vmatrix}x_0+a\\y_0\end{vmatrix}$ روی منحنی تابع به معادله‌ی $y_3=f(x-a)$ قرار دارد و برعکس:

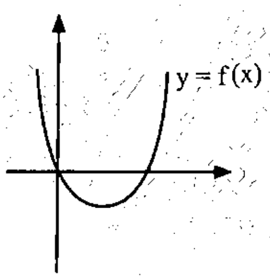
اگر $M'\begin{vmatrix}x_0+a\\y_0\end{vmatrix}\in y_3 \Rightarrow y_0=f(x_0+a-a)$

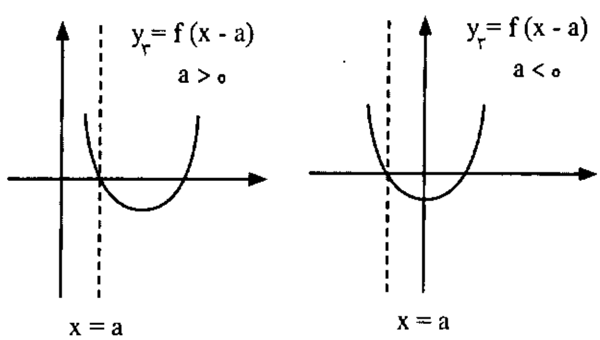
$\Rightarrow y_0=f(x_0)\Rightarrow M\begin{vmatrix}x_0\\y_0\end{vmatrix}\in f$

پس می‌توان گفت، هر نقطه به طول x_0 واقع بر منحنی تابع f (بدون تغییر عرض) در منحنی به معادله‌ی $y_3=f(x-a)$ به نقطه‌ای به طول (x_0+a) تبدیل می‌شود.

بنابراین، برای رسم تابع به معادله‌ی $y_3=f(x-a)$ کافی است کلیه‌ی نقاط منحنی تابع f را به اندازه‌ی $x=a$ در راستای محور xها تغییر مکان دهیم.

اگر $a>0$، آن‌گاه هر نقطه از منحنی تابع f به اندازه‌ی $x=a$ به سمت راست محور xها انتقال می‌یابد و اگر $a<0$، آن‌گاه هر نقطه از منحنی تابع f به اندازه‌ی $x=a$ به سمت چپ محور xها انتقال می‌یابد.





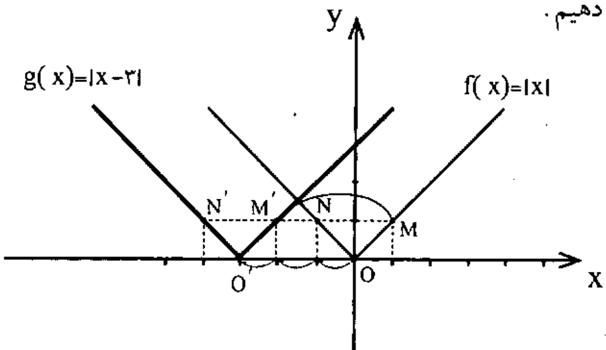
مثال: با کمک نمودار $f(x)=|x|$ نمودار تابع‌های زیر را رسم کنید.

۱) $g(x)=|x+3|$

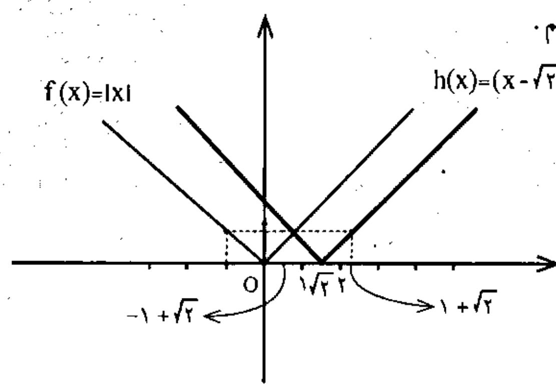
۲) $h(x)=|x-\sqrt{2}|$

حل:

۱. برای رسم نمودار $g(x)$ کافی است نمودار تابع قدرمطلق را به اندازه‌ی سه واحد به سمت چپ محور xها انتقال دهیم.



۲ . برای رسم نمودار h(x) کافی است نمودار تابع قدر مطلق را به اندازه‌ی $\sqrt{۲}$ واحد به سمت راست محور xها انتقال دهیم.



۴. رسم تابع به معادله‌ی $y_۴ = b + f(x)$

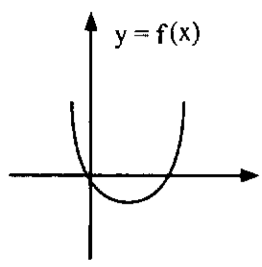
اگر نقطه‌ی $M\Big|{x_\circ \atop y_\circ}$ روی منحنی تابع به معادله‌ی $y = f(x)$ باشد، آن‌گاه نقطه‌ی $M'\Big|{x_\circ \atop b+y_\circ}$ روی منحنی تابع به معادله‌ی $y_۴ = b + f(x)$ قرار دارد و برعکس:

$$\text{اگر } M'\Big|{x_\circ \atop b+y_\circ} \in y_۴ \Rightarrow b + y_\circ = b + f(x_\circ)$$

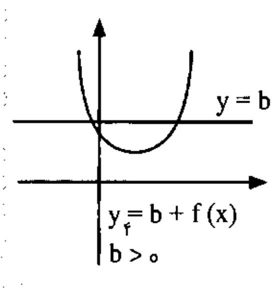
$$\Rightarrow y_\circ = f(x_\circ) \Rightarrow M\Big|{x_\circ \atop y_\circ} \in f$$

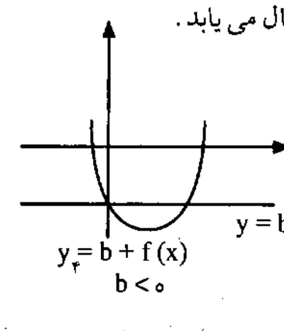
پس هر نقطه به عرض $y_\circ$ واقع بر منحنی تابع f (بدون تغییر طول) در منحنی به معادله‌ی $y_۴ = b + f(x)$، به عرض $b + y_\circ$ تبدیل می‌شود.

در نتیجه، برای رسم تابع به معادله‌ی $y_۴ = b + f(x)$ کافی است کلیه‌ی نقاط منحنی تابع f را به اندازه‌ی y=b در راستای محور yها تغییر مکان دهیم.



اگر $b > \circ$، آن‌گاه هر نقطه از منحنی تابع f به اندازه‌ی y=b به طرف بالای محور yها انتقال می‌یابد و اگر $b < \circ$، آن‌گاه هر نقطه از منحنی تابع f به اندازه‌ی y=b به طرف پایین محور yها انتقال می یابد.





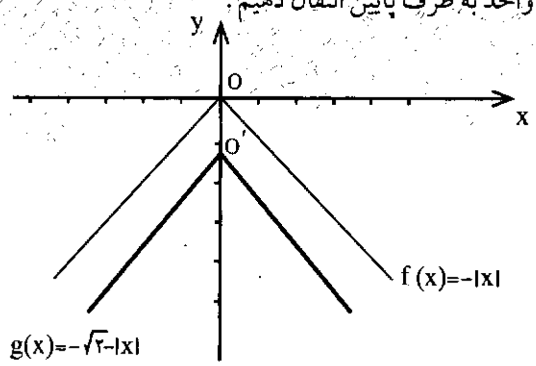
مثال: با استفاده از نمودار $f(x) = -|x|$، نمودار تابع‌های زیر را رسم کنید.

۱) $g(x) = -\sqrt{۲} - |x|$

۲) $h(x) = \left|۲ - |x|\right|$

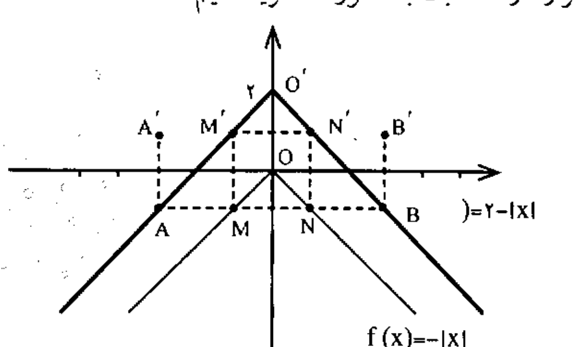
حل:

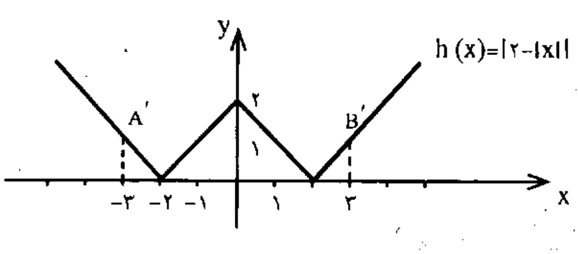
۱ . برای رسم نمودار g(x) کافی است نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x) = -|x|$ را در راستای محور yها به اندازه‌ی $\sqrt{۲}$ واحد به طرف پایین انتقال دهیم.



با توجه به نمودار تابع g(x) ملاحظه می‌کنیم که $Rg = \left[-\infty, -\sqrt{۲}\right]$

۲ . برای رسم نمودار h(x)، ابتدا نمودار تابع با ضابطه‌ی $h_۱(x) = ۲ - |x|$ را رسم می‌کنیم. برای این کار کافی است نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x) = -|x|$ را در راستای محور yها به اندازه‌ی دو واحد به طرف بالا انتقال دهیم، سپس برای رسم h(x) باید قسمت‌هایی از نمودار $h_۱(x)$ را که زیر محور xها قرار دارد، نسبت به محور xها قرینه کنیم.





برای این که قرینه ی قسمتی از نمودار زیر محور xها را برای تابع $h_1(x)$ پیدا کنیم، دو نقطه مانند A,B روی آن در نظر گرفتیم سپس قرینه ی آن ها را نسبت به محور xها A' و B' نامیدیم و برای رسم نمودار تابع $h(x)$، از دو نقطه ی A' و B' استفاده کردیم.

۵. رسم تابع به معادله ی $y_5 = b + f(x-a)$

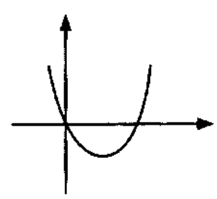
در حقیقت، رسم این تابع ترکیبی از رسم دو تابع به معادلات $y_3 = f(x-a)$ و $y_4 = b + f(x)$ است.

اگر نقطه ی $M\begin{vmatrix} x_. \\ y_. \end{vmatrix}$ روی منحنی تابع f باشد، آن گاه نقطه ی $M'\begin{vmatrix} x_. + a \\ y_. + b \end{vmatrix}$ روی منحنی تابع به معادله ی $y_5 = b + f(x-a)$ واقع است و برعکس:

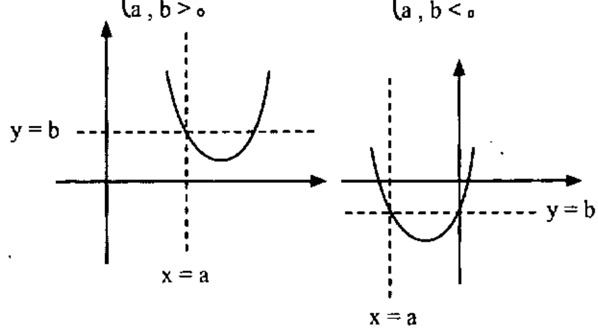
$$\text{اگر } M'\begin{vmatrix} x_. + a \\ y_. + b \end{vmatrix} \in y_5 \Rightarrow y_. + b = b + f(x_. + a - a)$$

$$\Rightarrow y_. = f(x_.) \Rightarrow M\begin{vmatrix} x_. \\ y_. \end{vmatrix} \underset{y=f(x)}{\in} f$$

بنابراین، برای رسم نمودار این معادله کافی است، هر نقطه از منحنی تابع f را به اندازه ی a در راستای محور xها و به اندازه ی b در راستای محور yها انتقال دهیم.



$\begin{cases} y = b + f(x-a) \\ a, b > 0 \end{cases}$ $\begin{cases} y = b + f(x-a) \\ a, b < 0 \end{cases}$



مثال: با توجه به نمودار توابع $y = |x|$ و $y = x^2$، نمودار توابع زیر را رسم و سپس دامنه و برد هر کدام را محاسبه کنید.

۱) $f(x) = |x-3| + 2$

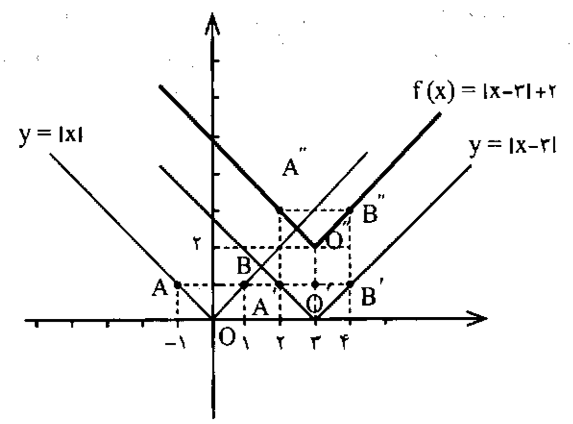
۲) $g(x) = 3 + (x - \frac{3}{2})^2$

حل:

۱. برای رسم نمودار $f(x)$، ابتدا نمودار تابع قدر مطلق را رسم می کنیم. سپس در مرحله ی اول این نمودار را در راستای محور xها به اندازه ی سه واحد به طرف راست منتقل می کنیم. در مرحله ی دوم، نمودار به دست آمده را در راستای محور yها به اندازه ی دو واحد به طرف بالا انتقال می دهیم.

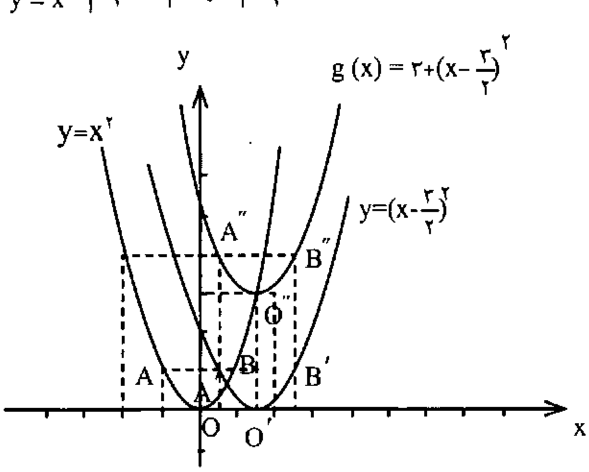
با توجه به نمودار تابع ملاحظه می کنیم:

$D_f = \mathbb{R}\ ,\ R_f = [2, +\infty)$



۲. برای رسم نمودار تابع $g(x)$، ابتدا نمودار سهمی $y = x^2$ را رسم می کنیم. سپس در مرحله ی اول، این نمودار را در راستای محور xها به اندازه ی $\frac{3}{2}$ واحد به طرف راست و در مرحله ی دوم نمودار به دست آمده را در راستای محور yها به اندازه ی ۳ واحد به طرف بالا انتقال می دهیم.

x	-2	-1	0	1	2
$y = x^2$	4	1	0	1	4



با توجه به نمودار تابع ملاحظه می‌کنیم که:

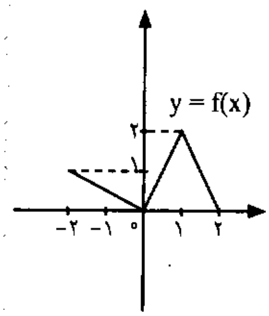
$D_g = \mathbb{R}\ ,\ R_g = [۳, +\infty)$

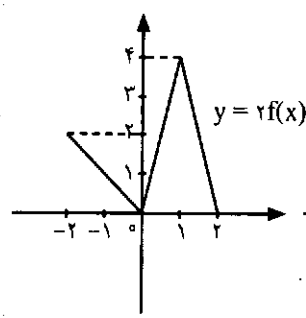
۶. رسم نمودار تابع به معادله‌ی $y_۶ = kf(x)$

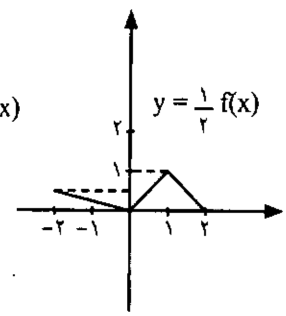
اگر نقطه‌ی $M\begin{vmatrix} x_۰ \\ y_۰ \end{vmatrix}$ روی منحنی تابع به معادله‌ی $y = f(x)$ باشد، آن‌گاه نقطه‌ی $M'\begin{vmatrix} x_۰ \\ ky_۰ \end{vmatrix}$ روی منحنی تابع به معادله‌ی $y_۶ = kf(x)$ است و برعکس:

اگر $M'\begin{vmatrix} x_۰ \\ ky_۰ \end{vmatrix} \in y_۶ \Rightarrow ky_۰ = kf(x_۰) \Rightarrow y_۰ = f(x_۰) \Rightarrow M\begin{vmatrix} x_۰ \\ y_۰ \end{vmatrix} \in f$

پس برای رسم تابع به معادله‌ی $y_۶ = kf(x)$ باید عرض هر نقطه از منحنی تابع f را (با حفظ طول آن) در عدد k ضرب کنیم.







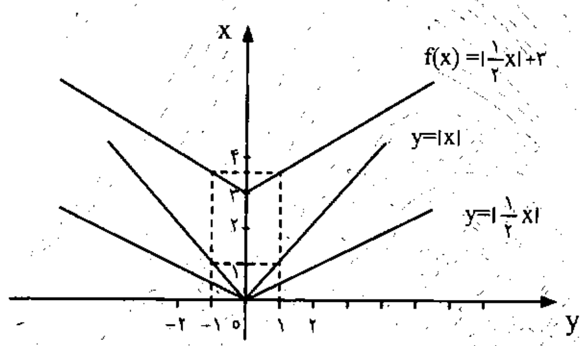
مثال: نمودار توابع زیر را رسم کنید.

(۱) $f(x) = \left|\frac{۱}{۲}x\right| + ۳$

(۲) $g(x) = ۲(x-۱)^۲ + ۳$

حل:

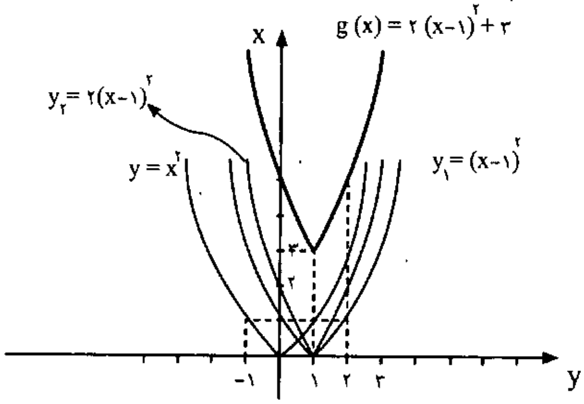
۱. برای رسم نمودار $f(x)$، در مرحله‌ی اول نمودار تابع با ضابطه‌ی $y = |x|$ را رسم می‌کنیم. در مرحله‌ی دوم عرض هر نقطه روی نمودار $f(x)$ را در $\frac{۱}{۲}$ ضرب می‌کنیم تا نمودار تابع با ضابطه‌ی $y_۱ = \frac{۱}{۲}|x|$ به دست آید. در مرحله‌ی سوم، عرض هر نقطه روی نمودار $y_۱$ را در راستای محور yها به اندازه‌ی سه واحد به طرف بالا انتقال می‌دهیم تا نمودار $f(x)$ به دست آید.



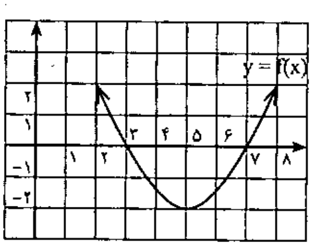
با توجه به نمودار تابع $f(x)$ داریم:

$D_f = \mathbb{R}\ ,\ R_f = [۳, +\infty)$

۲. برای رسم نمودار $g(x)$، در مرحله‌ی اول نمودار سهمی $y = x^۲$ را رسم می‌کنیم. در مرحله‌ی دوم، سهمی را به اندازه‌ی یک واحد به سمت راست محور xها انتقال می‌دهیم تا نمودار تابع با ضابطه‌ی $y_۱ = (x-۱)^۲$ به دست آید. در مرحله‌ی سوم، عرض هر نقطه روی نمودار $y_۱$ را دو برابر می‌کنیم تا نمودار تابع با ضابطه‌ی $y_۲ = ۲(x-۱)^۲$ به دست آید. در مرحله‌ی چهارم، ، عرض هر نقطه روی نمودار $y_۲$ را در راستای محور yها به اندازه‌ی ۳ واحد به طرف بالا انتقال می‌دهیم تا نمودار $g(x)$ به دست آید.



مثال: از روی نمودار زیر، معادله‌ی تابع $f(x)$ را بنویسید.



حل:

مرحله‌ی اول:

$y_۱ = x^۲$

مرحله‌ی دوم:

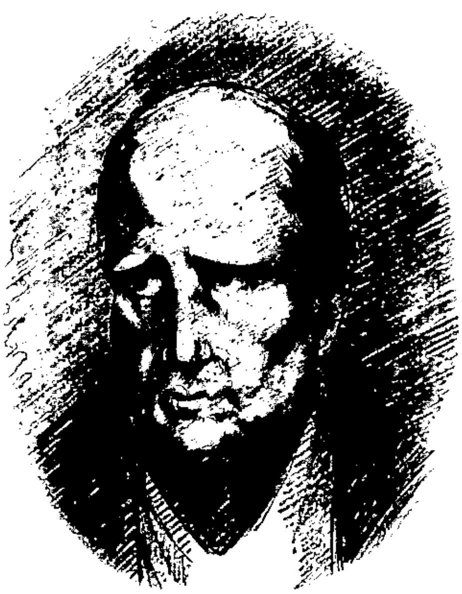
$y_۲ = (x-۵)^۲$

مرحله‌ی سوم:

$y_۳ = \frac{۱}{۲}(x-۵)^۲$

مرحله‌ی چهارم:

$f(x) = \frac{۱}{۲}(x-۵)^۲ - ۲$



● احسان یارمحمدی

تابع رونسکی

اشاره

جوزف ماریا هوئن رونسکی[1] فیلسوف مسیحی دان اهل لهستان (۲۳ آگوست ۱۷۷۸ تا ۸ آگوست ۱۸۵۳)، کسی که روی رشته‌های زیادی از دانش، نه فقط مانند فیلسوف، بلکه مانند ریاضی‌دان، فیزیک‌دان، حقوق‌دان و اقتصاددان کار کرد، ابداع کننده‌ی تابع رونسکی است که برای حل معادلات دیفرانسیل کاربرد دارد. از آن‌جا که طی عملیات محاسبه‌ی تابع رونسکی با مفاهیم و نکاتی پیرامون مشتق‌گیری و تعیین دترمینان‌ها مواجه هستیم، لذا مطالعه‌ی این مقاله به دانش‌پژوهان دوره‌ی پیش‌دانشگاهی توصیه می‌شود.

برای n تابع حقیقی $f_1(x), f_2(x), f_n(x)$ که هر یک از آن‌ها در بازه‌ی I، $n-1$ بار مشتق‌پذیر[2] هستند، تابع رونسکی شامل آن‌ها به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$W(f_1,f_2,f_3,\dots,f_n)(x)=\begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \cdots & f_n(x) \\ f'_1(x) & f'_2(x) & \cdots & f'_n(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1^{(n-1)}(x) & f_2^{(n-1)}(x) & \cdots & f_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

مثال ۱. تابع رونسکی برای دو تابع $3\sin(2x)$ و $4\sin(2x)$ کدام یک از گزینه‌های زیر است؟

۱. صفر ۲. $\sin^2(x)+\cos^2(x)$ ۳. $\dfrac{1}{\sin(x).\cos(x)}$ ۴. $3\sin(x)-4\sin^3(x)$

پاسخ: گزینه‌ی ۱، چون:

$$W(3\sin(2x),4\sin(2x))=\begin{vmatrix} 3\sin(2x) & 4\sin(2x) \\ \dfrac{d(3\sin(2x))}{dx} & \dfrac{d(4\sin(2x))}{dx} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} 3\sin(2x) & 4\sin(2x) \\ 6\cos(2x) & 8\cos(2x) \end{vmatrix}$$

$$=3\sin(2x)\times 8\cos(2x)-4\sin(2x)\times 6\cos(2x)=0$$

مثال ۲. معادله‌ی خطی که در نقطه‌ای به طول $W(e^x,e^{-x})$، متعلق به خط $y-2x-3=0$ بر همین خط عمود باشد، کدام گزینه است؟ (W نشان‌دهنده‌ی تابع رونسکی است.)

۱. $y=\frac{1}{2}x+2$ ۲. $y=-\frac{1}{2}+2$ ۳. $y=\frac{1}{2}x-2$ ۴. $y=-\frac{1}{2}x-2$

پاسخ: گزینه‌ی ۴، چون:

$$W(e^x,e^{-x})=\begin{vmatrix} e^x & e^{-x} \\ e^x & -e^{-x}\end{vmatrix}=e^x\times(-e^{-x})-e^{-x}\times e^x=-1-1=-2$$

$$y-2x-3=0\Rightarrow y=2x+3\xrightarrow{x=-2}y=2(-2)+3=-1\Rightarrow A=\begin{bmatrix}-2\\-1\end{bmatrix}$$

اکنون باید معادله‌ی خطی را بنویسیم که از نقطه‌ی $A=\begin{bmatrix}-2\\-1\end{bmatrix}$ عبور کند و بر خط $y-2x-3=0$ عمود باشد. در ضمن، شیب خط مطلوب برابر $m=-\frac{1}{2}$ است.

بنابراین:

$$y-y_0=m(x-x_0)\Rightarrow y-(-1)=-\frac{1}{2}(x-(-2))$$

$$\Rightarrow y=-\frac{1}{2}-2$$

مثال۳. حاصل $W(x^2,-2x^2,3x^3)$ کدام یک از گزینه‌های زیر است؟

۱. x ‏ ۲. $x-1$ ‏ ۳. صفر ‏ ۴. $x+1$

پاسخ: گزینه‌ی ۳. چون:

$$W(x^2,-2x^2,3x^3)=\begin{vmatrix} x^2 & -2x^2 & 3x^3 \\ 2x & -4x & 9x^2 \\ 2 & -4 & 18x\end{vmatrix}=x^2\begin{vmatrix}-4x & 9x^2\\ -4 & 18x\end{vmatrix}-(-2x^2)\begin{vmatrix}2x & 9x^2\\ 2 & 18x\end{vmatrix}+3x^3\begin{vmatrix}2x & -4x\\ 2 & -4\end{vmatrix}$$

$$=x^2(-36x^2)-(-2x^2)(18x^2)+3x^3(0)=0$$

تمرین: حاصل هریک از موارد زیر را به‌دست آورید.

۱. $W(e^x,xe^x)$، پاسخ: e^{2x}

۲. $W(1,\sin(2x),\cos(2x))$، پاسخ: -8

۳. $W(\sin(x),\cos(x),2\sin(x)-\cos(x))$، پاسخ: صفر

۴. $W(x^2,x^3,x^4)$، پاسخ: $2x^6$

۵. $W(x^{-2},x^2,2-3x)$، پاسخ: $36x^{-2}-32x^{-3}$

۶. $W(x^3,x^3+x,2x^3-7x)$، پاسخ: $42x$

۷. $W(x,x-3,2x+5)$، پاسخ: صفر

۸. $W(7e^{-3x},4e^{-3x})$، پاسخ: صفر

پی‌نوشت ....

1. Jozef Maria Hoene-Wronski
2. Differentiable

منابع ....

۱. معادلات دیفرانسیل و کاربرد آن‌ها. جرج ف سیمونز، ترجمه‌ی علی‌اکبر بابایی و ابوالقاسم میامئی. انتشارات مرکز نشر دانشگاهی. ۱۳۷۷ش.

۲. نگرشی بر معادلات دیفرانسیل معمولی. راینشتاین، آلبرت. ترجمه‌ی سعید فاریابی و محمد جلوداری ممقانی. انتشارات علمی و فنی. ۱۳۷۲ش.

سید محمدرضا هاشمی موسوی

معادله‌های سیاله پارامتری

اشاره

در بخش پیشین، به روش حل متداول معادله‌های سیاله پرداختیم. در این بخش سعی بر این است که حل معادله‌های سیاله‌ی پارامتری را بررسی کنیم و هم‌چنین روش حل معادله‌های سیاله چندمتغیره ی خطی را ارائه دهیم. در آخر، به حل و بحث این گونه معادله‌های سیاله به کمک هم‌نهشتی می‌پردازیم.

حل و بحث معادله‌های سیاله‌ی پارامتری

مثال: اگر معادله‌ی زیر، در مجموعه‌ی اعداد صحیح (Z) دارای جواب باشد، مقدارهای مورد قبول برای m را تعیین کنید.

$18x + my = 12$

حل: با توجه به $(12, 18) = 6$، اگر مقدار m مضربی از ۶ باشد، معادله به صورت زیر ساده می‌شود:

$m = 6k : 18x + 6ky = 12 ;\ 3x + ky = 2$

معادله‌ی فوق وقتی دارای جواب است که $(3,k) = 1$ و یا $(3,k) = d|2$. بدیهی است که $d = 1$ و در نتیجه همه‌ی مقادیر k که در شرط $(3,k) = 1$ صدق می‌کنند، جواب مسئله خواهند بود. در حالت کلی، اگر $(18, m)|12$، معادله جواب دارد.

مثال: در معادله‌ی زیر، مقدار n را بر حسب m چنان تعیین کنید که معادله همواره دارای جواب باشد.

$mx + ny = 1$

حل: می‌دانیم، معادله‌ی فوق وقتی دارای جواب است که $(m,n) = 1$. واضح است که اگر m و n دو عدد متوالی باشند، شرط اخیر برقرار است. بنابراین، اگر $n = m - 1$ یا $n = m + 1$ در نظر گرفته شود، معادله همیشه دارای جواب است:

$mx + (m-1)y = 1$

(یا)

$mx + (m+1)y = 1$

بررسی معادله‌های سیاله‌ی دارای محدودیت

مثال: به چند طریق می‌توان ۱۰۰ تومان را توسط سکه‌های ۲ و ۵ تومانی خُرد کرد، به نحوی که از هر دو نوع سکه استفاده شود.

حل: در واقع باید تعداد جواب‌های طبیعی معادله‌ی زیر را تعیین کنیم:

$5x + 2y = 100$

ابتدا جواب عمومی معادله را در مجموعه اعداد صحیح به‌دست می‌آوریم.

$y = 0, x = 20; (5,2) = 1, \begin{cases} x = 20 + 2k \\ y = 0 - 5k \end{cases}$ یا

$(20 - 2k > 0, k < 10)$

$\begin{cases} x = 20 - 2k \\ y = 5k \end{cases} ; k \in \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$

مسئله دارای ۹ جواب است. بنابراین، به ۹ طریق می‌توان عمل خُرد کردن را انجام داد.

مثال: کوچک‌ترین عدد مثبت m را چنان بیابید که معادله‌ی زیر جواب داشته باشد:

$1001x + 91y = 6370 + (m^2 - 1)^{1387}$

حل: چون $(1001, 91) = 91$، پس معادله وقتی جواب دارد که اگر و تنها اگر ۹۱ عبارت $6370 + (m^2 - 1)^{1387}$ را بشمارد.

با توجه به تجزیه‌ی عدد ۶۳۷۰:

$$۶۳۷۰=۲\times۵\times۷^۲\times۱۳=۷۰\times۹۱$$

واضح است که $m=۱$، کوچک‌ترین عدد مثبتی است که به ازای آن، معادله دارای جواب است.

مثال: با فرض این‌که $(a,b)=۱$ و $c\leq ab$، آیا این گفته درست است که معادله‌ی $ax+by=c$ جواب مثبت ندارد؟

حل: خیر، زیرا در معادله‌ی $۸x+۹y=۶۰$ شرایط $(۸,۹)=۱$ و $۶۰<۸\times۹=۷۲$ برقرار است، ولی معادله دارای جواب مثبت $x=۳$ و $y=۴$ است.

مثال: معادله‌ی زیر به ازای چه مقادیری از m دارای جواب است؟

$$(۱۰m+۴)x+(۱۸m+۷)y=۴$$

حل:

$$(۱۰m+۴,۱۸m+۷)=d\in \mathbb{N}\ ;\ \begin{cases}d|(۱۰m+۴)\\ d|(۱۸m+۷)\end{cases};$$

$$\begin{cases}d|۹(۱۰m+۴)\\ d|۵(۱۸m+۷)\end{cases};\ d|(۹۰m+۳۶)-(۹۰m+۳۵)=۱$$

$$;d=۱$$

چون به ازای هر مقدار m داریم:

$$(۱۰m+۴,۱۸m+۷)=۱ ،$$

پس، معادله به ازای هر m صحیح دارای جواب است.

تبصره: وقتی یکی از ضریب‌های دو مجهول برابر واحد باشد، به سادگی می‌توان معادله‌ی سیاله را حل کرد. برای مثال، اگر ضریب x برابر واحد باشد:

$$a=۱:\quad x+by=c$$

کافی است برای حل معادله، x را برحسب y محاسبه کنیم:

$$x=c-by$$

به ازای هر $y=k$ صحیح، مقداری صحیح برای x به دست می‌آید: $x=c-bk$

مثال: معادله‌ی $(m^۲+۱)x+(m^۴-۱)y=m^۳+m$ را حل کنید.

حل: دو طرف معادله را بر ضریب x تقسیم می‌کنیم:

$$(m^۲+۱)x+(m^۲-۱)(m^۲+۱)y$$
$$=m(m^۲+۱);x+(m^۲-۱)y=m;$$
$$x=m-(m^۲-۱)y\ ,\ y=k\ :\ x=m-(m^۲-۱)k$$

به ازای هر $m,k\in Z$، برای y و x مقداری صحیح به دست می‌آید.

تبصره: برای تعیین جواب‌های مثبت معادله‌ی $ax+by=c$ کافی است $x=\alpha+bt$ و $y=\beta-at$ را مثبت در نظر بگیریم و در واقع جواب $\begin{cases}\alpha+bt>۰\\ \beta-at>۰\end{cases}$ را بیابیم.

مثال: جواب‌های مثبت معادله‌ی $۶x-۱۰y=۲۲$ را بیابید.

حل: ابتدا معادله را به ۲ ساده می‌کنیم: $۳x-۵y=۱۱$

$$x=\frac{۵y+۱۱}{۳}=\frac{۶y-y+۱۲-۱}{۳}$$
$$=۲y+۴-\frac{y+۱}{۳}\ ;\ \frac{y+۱}{۳}=t$$
$$y=۳t-۱\ ;\ x=۲(۳t-۱)+۴-t=۵t+۲$$

برای تعیین جواب‌های مثبت باید $x>۰$ و $y>۰$. پس کافی است $۳t-۱>۰$ و $۵t+۲>۰$ یا $t>\frac{۱}{۳}$ و $t>\frac{-۲}{۵}$ که به دست می‌آید $t>\frac{۱}{۳}$. در واقع، اگر t را مقادیر صحیح بزرگ‌تر از $\frac{۱}{۳}$ اختیار کنیم، به بی‌نهایت زوج جواب مثبت می‌رسیم.

..... معادله‌های سیاله‌ی درجه اول چند مجهولی .....

می‌دانیم معادله‌های سیاله‌ی درجه‌ی اول، به صورت عمومی زیر ظاهر می‌شوند:

$$ax+by+cz+...=d \qquad (۱)$$

پارامترهای مفروض a، b، c، ... و d جایگزین عددهای گویا و x، y، z و ... مجهول‌های معادله محسوب می‌شوند.

در صورتی که $d\neq۰$ و a و دیگر پارامترها صفر باشند، معادله‌ی ۱ به معادله‌ای یک‌مجهولی تحویل می‌شود که در واقع $ax=d$ از نوع معادله‌ی سیاله نیست و به سادگی حل و بحث می‌شود. بنابراین، معادله‌ی ۱ را در حالتی در نظر می‌گیریم که حداقل دو پارامتر دل‌خواه غیر صفر و d نیز اعدادی گویا باشند.

برای نشان دادن روش حل معادله‌ی ۱ و آشنایی با مسئله‌هایی که به این گونه معادله‌ها تحویل می‌شوند، چند مثال

متنوع می‌آوریم.

مثال: عددی در مبنای ۱۲ به صورت $(\overline{abc})_{12}$ و در مبنای مجهولی به‌صورت $(\overline{abc0})_x$ نوشته شده است. a، b، c و مبنای مجهولی را بیابید.

حل: اگر برابری مفروض را بسط دهیم، به برابری زیر خواهیم رسید:

$$ax^3+bx^2+cx^1+(0)x^0=12^2a+12b+c$$

معادله را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$(x^3-144)a+(x^2-12)b+(x-1)c=0 \qquad (1)$$

چون a، b و c اعدادی طبیعی هستند، بنابراین، از برابری ۱ می‌توان نتیجه گرفت که x نمی‌توانند از ۵ بزرگ‌تر باشد؛ زیرا طرف اول برابری ۱ مثبت می‌شود که مجموع سه مقدار مثبت صفر نمی‌شود. هم‌چنین، x نمی‌تواند کوچک‌تر از ۵ باشد. زیرا برای x = ۴ به‌دست می‌آید:

$$-80a+4b+3c=0 \qquad (2)$$

چون مبنا x = ۴ است، پس b و c از ۴ کوچک‌ترند. در این صورت، اگر b و c بزرگ‌ترین رقم ممکن و a کوچک‌ترین رقم ممکن (a = ۱) باشد (a ≠ ۰، زیرا رقم سمت چپ است)، باز هم مقدار سمت چپ برابری ۲ منفی و غیر صفر خواهد شد. پس: x = ۵.

$$x=5: \quad -19a+13b+4c=0 \qquad (3)$$

در این‌جا، با یک معادله‌ی سیاله‌ی درجه‌ی اول سه‌مجهولی روبه‌رو هستیم؛ با شرایط:

(۴) (a، b و c اعداد مثبت) $a\neq 0 \;,\; a,b,c<5$

چون ضریب c کوچک‌تر است، آن را برحسب دو مجهول دیگر به‌دست می‌آوریم:

$$c=\frac{19a-13b}{4}=5a-3b-\frac{a+b}{4}$$

چون $\frac{a+b}{4}$ عددی صحیح است، پس a + b مضربی از ۴ خواهد بود. با توجه به شرایط ۴، پنج حالت پیش خواهد آمد:

a	۴	۴	۳	۲	۱
b	۰	۴	۱	۲	۳
c	۱۹	۶	۱۱	۳	-۵

با توجه به شرایط مسئله، واضح است که فقط جواب‌های a = ۲، b = ۲ و c = ۳ صدق می‌کنند.

مثال: جواب‌های صحیح و مثبت معادله‌ی زیر را به‌دست آورید:

$$7x+22y+52z=246$$

حل: با فرض x = 2t که یک فرض مسلّم است:

$$x=2t \;;\; 7(2t)+22y+52z=246$$
$$7t+11y+26z=123$$

بزرگ‌ترین ضریب ۲۶ است و اگر به t و y مقادیر حداقل t = y = ۱ را اختصاص دهیم:

$$7+11+26z\le 123 \;;\; z\le 4\frac{1}{26}$$

بنابراین، مقادیر طبیعی ۱، ۲، ۳ و ۴ را برای z امتحان می‌کنیم:

$$z=1: \quad 7t+11y+26=123 \;;\; 7t+11y=97$$

برای این معادله، جواب صحیح و مثبت t = ۶ و y = ۵ به دست می‌آید.

$$z=2: \quad 7t+11y+52=123 \;;\; 7t+11y=71$$

برای این معادله، جواب صحیح و مثبت t = ۷ و y = ۲ به‌دست می‌آید.

برای حالت‌های z = ۳ و z = ۴، جواب صحیح و مثبت وجود ندارد.

بنابراین، معادله‌ی اصلی دارای دو جواب خصوصی با شرایط صحیح و مثبت بودن است:

$$(x_1,y_1,z_1)=(12,5,1)$$
$$(x_2,y_2,z_2)=(14,2,2)$$

یک معادله با سه مجهول

تبصره‌ی ۱: اگر $\alpha,\beta,\gamma\in Z$ یک جواب خصوصی معادله‌ای عمومی با ضرایب $a,b,c,d\in Z$ باشد:

$$ax+by+cz=d$$

جواب‌های دیگر معادله به‌صورت زیر خواهند بود $(k,s,t\in Z)$:

$$x=\alpha+bk-cs \;,\; y=\beta+ct-ak \;,\; z=\gamma+as-bt$$

یک معادله با چهار مجهول

تبصره‌ی ۲: اگر $\alpha,\beta,\gamma,\delta\in Z$ یک جواب خصوصی معادله‌ای با ضرایب صحیح باشد:

$$ax+by+cz+dt=e$$

جواب‌های دیگر معادله به‌صورت زیر خواهند بود: $(m,n,p,q,k,s\in Z)$

$$x=\alpha+bk-cp-dn$$
$$y=\beta+cm-dq-ak$$
$$z=\gamma+ds+ap-bm$$
$$t=\gamma+an+bq-cs$$

دو معادله با دو مجهول

تبصره‌ی ۳: اگر $ax+by+c=0$ و $a'x+b'y+c'=0$ و x عددی صحیح باشد، ثابت می‌شود که y نیز عددی صحیح است، به جز وقتی که b و b' هر دو بر $(ab'-a'b)$ بخش‌پذیر باشند؛ زیرا:

$$a(bc')+b(ca')+c(ab')=0$$

و هم‌چنین:

$$a'(bc')+b'(ca')+c'(ab')=0$$

توجه: اگر $ax+by+cz=d$ و $a'x+b'y+c'z=d'$ باشند، همواره از حذف یکی از مجهول‌ها بین این دو معادله، به یک معادله‌ی دومجهولی می‌رسیم.

مثال: همه‌ی جواب‌های صحیح و مثبت دستگاه معادله‌های زیر را بیابید:

$$6x-6y+9z-21=0\ ;\ 8x-14y-6z+38=0$$

معادله‌ی اول را به ۳ و معادله‌ی دوم را به ۲ ساده می‌کنیم:

$$2x-2y+3z=7\ ;\ 4x-7y-3z=-19$$

باحذف یکی از مجهول‌ها مثل z، خواهیم داشت:

$$6x-9y=-12$$

معادله را به ۳ ساده می‌کنیم:

$$2x-3y=-4$$

یک جواب خصوصی معادله $x=1$ و $y=2$ است.
بنابراین، جواب عمومی معادله چنین است:

$$x=3k-2\ ,\ y=2k\quad (k\in Z)$$

با جایگزین کردن مقدارهای x و y در یکی از معادله‌های دستگاه، خواهیم داشت:

$$2(3k-2)-2(2k)+3z=7\ ;\ 2k+3z=11$$

با توجه به یک جواب خصوصی این معادله، یعنی $k=1$ و $z=3$، جواب‌های عمومی و صحیح آن چنین است:

$$k=4-3n\ ;\ z=1+2n$$

$$x=3k-2=3(4-3n)-2=10-9n\ ,$$
$$y=2k=2(4-3n)=8-6n$$

تنها به ازای $n_1=0$ و $n_2=1$ جواب‌های صحیح و مثبت $(1,2,3)$ و $(10,8,1)$ حاصل می‌شوند. بنابراین، دستگاه بالا فقط دو جواب صحیح و مثبت دارد.

دو معادله با سه مجهول

تبصره‌ی ۴: اگر $\alpha,\beta,\gamma,\delta\in Z$ یک جواب خصوصی معادله‌های دستگاه زیر باشد:

$$ax+by+cz=d \quad \text{و} \quad a'x+b'y+c'z=d'$$

جواب‌های دیگر معادله‌های دستگاه (جواب‌های عمومی صحیح) به ترتیب زیر به‌دست می‌آیند:

$$\begin{cases}ax+by+cz=d\\ a\alpha+b\beta+c\gamma=d\end{cases},\quad \begin{cases}a'x+b'y+c'z=d'\\ a'\alpha+b'\beta+c'\gamma=d'\end{cases}$$

از تفاضل معادله‌های دستگاه، به دستگاه زیر می‌رسیم:

$$\begin{cases}a(x-\alpha)+b(y-\beta)+c(z-\gamma)=0\\ a'(x-\alpha)+b'(y-\beta)+c'(z-\gamma)=0\end{cases}$$

اگر از دستگاه بالا، یک‌بار $(z-\gamma)$ و بار دیگر $(y-\beta)$ و در آخرین‌بار $(x-\alpha)$ را حذف کنیم، به برابری‌های زیر می‌رسیم:

$$\frac{(x-\alpha)}{bc'-b'c}=\frac{(y-\beta)}{ca'-ac'}=\frac{(z-\gamma)}{ab'-ba'}$$

در صورتی که مقدار مشترک برابری‌های بالا را به $\frac{m}{n}$ نمایش دهیم (که در آن $m,n\in Z$ اعداد صحیحی هستند که انتخاب خواهند شد)، خواهیم داشت:

$$x-\alpha=\frac{m}{n}(bc'-b'c)\ ,y-\beta=\frac{m}{n}(ca'-ac')\ ,$$
$$z-\gamma=\frac{m}{n}(ab'-ba')\ ,$$

بنابراین، x، y و z به ازای جمیع مقادیر m، فقط وقتی عدد صحیح هستند که n یک فاکتور مشترک عبارت‌های $(bc'-b'c)$، $(ca'-ac')$ و $(ab'-ba')$ باشد.

چون هر فاکتور مشترک از این اعداد، یک فاکتور از بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک است، از آن‌جا، تمام جواب‌های صحیح از برابری‌های زیر به‌دست می‌آید:

$$\frac{x-\alpha}{bc'-b'c}=\frac{y-\beta}{ca'-ac'}=\frac{z-\gamma}{ab'-ba'}=\frac{m}{k}$$

در برابری‌های بالا، k بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک مخرج کسرهاست. اگر داشته باشیم:

$$bc'-b'c=0:\ x=\alpha\ ,\frac{y-\beta}{ca'-ac'}=\frac{z-\gamma}{ab'-ba'}$$

به سادگی جواب‌های عمومی صحیح معادله به دست می‌آیند:

$$x=\alpha\ ,\frac{y-\beta}{ca'-ac'}=\frac{z-\gamma}{ab'-ba'}=\frac{m}{s}$$

در برابری‌های بالا، s بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک $ab'-ba'$ و $ca'-ac'$ است.

یک معادله با k مجهول که یکی از ضریب‌های مجهول آن واحد است

تبصره‌ی ۵: در معادله‌ای با k مجهول:

$$a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3+\ldots+a_kx_k=a_{k+1}$$

در صورتی که یکی از ضریب‌های مجهول‌ها برابر واحد باشد، معادله به سادگی قابل حل است. برای مثال، اگر $a_1=1$، معادله با k پارامتر دل‌خواه در مجموعه اعداد صحیح قابل حل است:

$$a_1=1:\ x_1++a_2x_2+a_3x_3+\ldots+a_kx_k=a_{k+1}$$

برای حل معادله، کافی است برای x_2، x_3، ...و x_k، مقادیر صحیح دل‌خواه اختیار و x_1 را برحسب مقادیر جدید محاسبه کنیم $(m_1,m_2,\ldots,m_{k-1}\in Z)$:

$$x_2=m_1,x_3=m_2,x_4=m_3,\ldots,x_k=m_{k-1};$$

$$x_1=a_{k+1}-a_2m_1-a_3m_2-a_4m_3-\ldots-a_km_{k-1}$$

توجه: در برخی معادله‌ها، از تفاضل یا جمع آن‌ها می‌توان مضرب یکی از مجهول‌ها را واحد کرد و معادله را به سادگی حل نمود.

حل معادله‌های سیاله‌ی چند متغیره به کمک هم‌نهشتی

برای حل معادله‌های سیاله‌ی خطی چندمجهولی به صورت عمومی زیر:

$$ax+by+cz+\ldots+\lambda z=d$$

ابتدا شرایط جواب و محدودیت‌های x، y، z و... را تعیین می‌کنیم. سپس با مقادیر متفاوت متغیرها و توجه به محدودیت‌ها، به معادله‌های جدید تقلیل یافته می‌رسیم و معادله‌های جدید دومتغیره‌ی نهایی را به کمک هم‌نهشتی حل می‌کنیم.

مثال: جواب‌های صحیح و مثبت معادله‌ی سیاله‌ی زیر را به کمک هم‌نهشتی حل کنید.

$$14x+22y+52z=260$$

حل: ابتدا معادله را به ۲ ساده می‌کنیم:

$$7x+11y+26z=130$$

می‌بینیم، بزرگ‌ترین ضریب مجهول‌ها، ضریب z است. بنابراین، اگر x و y کم‌ترین مقدار را داشته باشند، محدودیت z معین می‌شود:

$$x=1,y=1:\ 7+11+26z\leq 130\ ;\ z\leq 4$$

پس می‌توان نوشت:

$$z_1=1:\ 7x_1+11y_1=104\ ;$$
$$7x_1\overset{11}{\equiv}104\ ;\ 7x_1\overset{11}{\equiv}5\ ;$$

$$x_1=7,y_1=5$$

به همین ترتیب:

$$z_2=2:\ 7x_2+11y_2=78\ ;$$
$$7x_2\overset{11}{\equiv}78\ ;\ 7x_2\overset{11}{\equiv}5\ ;$$
$$x_2=8,y_2=2$$

(معادله به ازای $z_3=3$ و $z_4=4$، جواب صحیح ندارد).

معادله به ازای $z_1=1$ و $z_2=2$ دارای دو دسته جواب خصوصی $(7,5,1)$ و $(8,2,2)$ است که می‌توان با استفاده از این جواب‌های اختصاصی و با توجه به آن‌چه ارائه شد، جواب‌های عمومی معادله را نوشت.

● غلامرضا یاسی‌پور

۱۶ با راهیان المپیادهای ریاضی



تناوبی بودن

تناوبی بودن در ریاضیات نقش مهمی ایفا می‌کند. به همین علت، در این بخش بعضی مسائل شامل آن را آورده‌ایم. مثال نخست نشان می‌دهد، چگونه تناوبی یا دوره‌ای بودن می‌تواند اثبات کوتاهی برای اتحاد «هرمیت» (Hermite) در مورد بزرگ‌ترین تابع صحیح

$$\lfloor x\rfloor+\left\lfloor x+\frac{1}{n}\right\rfloor+\dots+\left\lfloor x+\frac{n-1}{n}\right\rfloor=\lfloor nx\rfloor$$

به ازای جمیع $x\in R$ و $n\in Z$، به دست دهد.

اثبات مورد نظر چنین است: تابع $f:R\to N$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$f(x)=\lfloor x\rfloor+\left\lfloor x+\frac{1}{n}\right\rfloor+\dots+\left\lfloor x+\frac{n-1}{n}\right\rfloor-\lfloor nx\rfloor$$

به سادگی بررسی می‌شود که به ازای $x\in[0,\frac{1}{n})$، $f(x)=0$ و نیز:

$$f(x+\frac{1}{n})=\left\lfloor x+\frac{1}{n}\right\rfloor+\dots+\left\lfloor x+\frac{n-1}{n}\right\rfloor+\left\lfloor x+\frac{n}{n}\right\rfloor$$
$$-\lfloor nx+1\rfloor=f(x)$$

در نتیجه، f با دوره‌ی تناوب $\frac{1}{n}$، تناوبی است. این موضوع نشان می‌دهد که f با صفر متحد است و اتحاد به اثبات می‌رسد.

در مثال دوم، به محاسبه‌ی مجموع ضرایب دو جمله‌ای می‌پردازیم.

مجموع زیر را محاسبه کنید:

$$\binom{n}{0}-\binom{n-1}{1}+\binom{n-2}{2}-\binom{n-3}{3}+\dots$$

مجموع مورد نظر را با S_n نمایش می‌دهیم. در این صورت:

$$S_n-S_{n-1}+S_{n-2}=\binom{n}{0}-\binom{n-1}{1}+\binom{n-2}{2}-\binom{n-3}{3}+\dots$$
$$-\binom{n-1}{0}+\binom{n-2}{1}-\binom{n-3}{2}+\binom{n-4}{3}-\dots$$
$$+\binom{n-2}{0}-\binom{n-3}{1}+\binom{n-4}{2}-\binom{n-5}{3}+\dots$$

از آن‌جا که $\binom{n}{0}=\binom{n-1}{0}$، جمله‌های اول S_n و S_{n-1} حذف می‌شوند. اگر جمله‌ی kام S_n را با جمله‌ی kام S_{n-1} و جمله‌ی $(k-1)$ام S_{k-2} دسته‌بندی کنیم، عبارت

$$(-1)^{k-1}\left(\binom{n}{k}-\binom{n-1}{k}-\binom{n-1}{k-1}\right)$$

را به دست می‌آوریم که با توجه به فرمول بازگشتی ضرایب دو جمله‌ای، برابر صفر است. از آن‌جا که جمیع جمله‌ها حذف می‌شوند، نتیجه می‌گیریم:

$$S_n-S_{n-1}+S_{n-2}=0$$

عبارت $S_{n-1}-S_{n-2}+S_{n-3}=0$ را به این تساوی اضافه می‌کنیم و $S_n=-S_{n-3}$ را به دست می‌آوریم که نشان می‌دهد

S_n، با دوره‌ی تناوب ۶، تناوبی است.

بنابراین، کافی است S_n را به ازای $n=1,2,3,4,5,6$ محاسبه کنیم، چرا که سایر مقادیر با دوره‌ی ۶ تکرار می‌شوند. در این صورت به دست می‌آوریم:

$$S_{6n+1}=S_1=1,\ S_{6n+2}=S_2=0,\ S_{6n+3}=S_3=-1,$$
$$S_{6n+4}=S_4=-1,\ S_{6n+5}=S_5=0,\ S_{6n}=S_6=1$$

در ادامه، مسائل بیشتری در رابطه با تناوبی بودن به دست می‌دهیم.

۱. فرض می‌کنیم $f:R\to R-\{3\}$ تابعی با این ویژگی باشد که $\omega>0$ ی چنان وجود داشته باشد که به ازای هر $x\in R$، داشته باشیم: $f(x+\omega)=\frac{f(x)-5}{f(x)-3}$ ثابت کنید f دوره‌ای است.

۲. فرض می‌کنیم $f:R\to R$ تابعی باشد که در موارد الف و ب صدق می‌کند. ثابت کنید f دوره‌ای است.

الف) به ازای هر $x,y\in R$.

$$f(x+y)+f(x-y)=2f(x)f(y)$$

ب) x_0 ی با $f(x_0)=-1$ موجود است.

۳. اگر $f:R\to R$ یک به یک نباشد و تابع $g:R\times R\to R$ ی چنان موجود باشد که به ازای هر $x,y\in R$، داشته باشیم: $f(x+y)=g(f(x),y)$ نشان دهید f دوره‌ای است.

۴. فرض می‌کنیم $f:R\to R$، به ازای هر $x\in R$ و ثابت aای، در زیر صدق می‌کند:

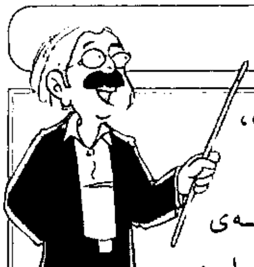
$$f(x+a)=\frac{1}{2}+\sqrt{f(x)-f(x)^2}$$

الف) ثابت کنید f دوره‌ای است.

ب) در حالت $a=1$، مثالی از چنین تابعی به دست دهید.

۵. دنباله‌ی $\{a_n\}_n$، با $0<a_0<a_0+a_1<1$ و به ازای $n\ge 1$، $a_{n+1}+\frac{a_n-1}{a_{n-1}}=0$ مفروض است. ثابت کنید اعداد حقیقی bای چنان موجودند که به ازای هر n، $|a_n|\le b$.

حل مسائل



۱. انتظار می‌رود دوره‌ی تناوب مورد نظر، با ω مرتبط باشد. بنابراین، ایده‌ی مناسب، تکرار رابطه‌ی مفروض است. ابتدا توجه می‌کنیم که $f(x)=2$ مستلزم $f(x+\omega)=3$ است. اما ۳ در برد f نیست. بنابراین، ۲ نیز در این برد واقع نیست. به همین ترتیب، نشان می‌دهیم که f هیچ‌گاه مقدار ۱ را اختیار نمی‌کند. متوالیاً حاصل می‌کنیم:

$$f(x+2\omega)=\frac{f(x+\omega)-5}{f(x+\omega)-3}=\frac{2f(x)-5}{f(x)-2}$$

$$f(x+3\omega)=\frac{2f(x+\omega)-5}{f(x+\omega)-2}=\frac{3f(x)-5}{f(x)-1}$$

$$f(x+4\omega)=\frac{f(x+\omega)-5}{f(x+\omega)-1}=f(x)$$

در نتیجه، دوره‌ی تناوب تابع، 4ω است.

(Gazeta Matematică (Mathematics Gazette, Bucharest), proposed by T.Andreescu)

۲. با قرار دادن $x=y=0$، به دست می‌آوریم:

$$f(0)^2=f(0)$$

بنابراین، $f(0)$ برابر ۰ یا ۱ است. اگر $f(0)=0$، آن‌گاه با قرار دادن $x=x_0$ و $y=0$، رابطه‌ی $-1=f(x_0)=0.f(x_0)=0$ را به دست می‌آوریم که نمی‌تواند رخ دهد. به این ترتیب، $f(0)=1$.

به ازای $x=y=x_0$، رابطه‌ی $f(2x_0)=1$ را به دست می‌آوریم. این رابطه مطرح می‌کند که ممکن است $2x_0$ دوره‌ی تناوبی برابر f باشد و نشان می‌دهیم که در واقع چنین است.

به جای x، $x+2x_0$ و به جای y، $x-2x_0$ را قرار می‌دهیم و حاصل می‌کنیم:

$$f(2x)+f(4x_0)=2f(x+2x_0)f(x-2x_0)$$

از آن‌جا که داریم:

$$f(2x)=2f^2(x)-1$$

و

$$f(4x_0)=2f^2(x_0)-1=1$$

رابطه‌ی فوق به صورت

$$f(x+2x_0)f(x-2x_0)=f(x)^2$$

در می‌آید. به همین ترتیب، به ازای x دل‌خواه و $y=2x_0$، به دست می‌آوریم:

$$f(x+2x_0)+f(x-2x_0)=2f(x)$$

از آن‌جا که مجموع و حاصل‌ضرب دو عدد، آن دو را به طور

کامل معین می‌کند، داریم:

$$f(x-2x_0)=f(x+2x_0)=f(x)$$

بنابراین، f دارای دوره‌ی تناوب $2x_0$ است.

(M.Martin)

۳. از آن‌جا که f یک به یک نیست، دو عدد متمایز α و β با $f(\alpha)=f(\beta)$ موجود است. طبیعی است که انتظار داشته باشیم $\beta-\alpha$ دوره‌ی تناوب f باشد. با قرار دادن α و سپس β به جای x، رابطه‌ی زیر را حاصل می‌کنیم:

$$f(\alpha+y)=g(f(\alpha),y)=g(f(\beta),y)=f(\beta+y)$$

این رابطه، به ازای $y=z-\alpha$، مستلزم

$$f(z)=f(z+\beta-\alpha)$$

به ازای جمیع مقادیر $z\in \mathbb{R}$ است.

(Gazeta Matematică (Mathematics Gazette, Bucharest), proposed by D.M. Bătinetu)

۴. الف) مانند مسئله‌ی ۱، انتظار داریم دوره‌ی تناوب، با a مرتبط باشد. با تکرار رابطه، از صورت مسئله داریم:

$$f(x+2a)=\frac{1}{2}+\sqrt{f(x+a)-f(x+a)^2}$$

$$=\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}+\sqrt{f(x)-f(x)^2}-\frac{1}{4}-\sqrt{f(x)-f(x)^2}-(f(x)-f(x)^2)}$$

$$=\frac{1}{2}+\sqrt{(\frac{1}{2}-f(x))^2}=\frac{1}{2}+\left|f(x)-\frac{1}{2}\right|$$

رابطه‌ی معرّف نشان می‌دهد، به ازای هر مقدار x، $f(x)\geq\frac{1}{2}$. در نتیجه، محاسبه‌ی فوق به ازای جمیع مقادیر x، مستلزم $f(x+2a)=f(x)$ است، که اثبات می‌کند f دوره‌ای یا متناوب است.

ب) مثالی از چنین تابعی عبارت است از:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & 2n\leq x<2n+1\\ 1, & 2n+1\leq x<2n+2\end{cases}$$

که در آن $n\in Z$.

(دهمین المپیاد بین‌المللی ریاضی، ۱۹۶۸)

۵. موارد زیر را محاسبه می‌کنیم:

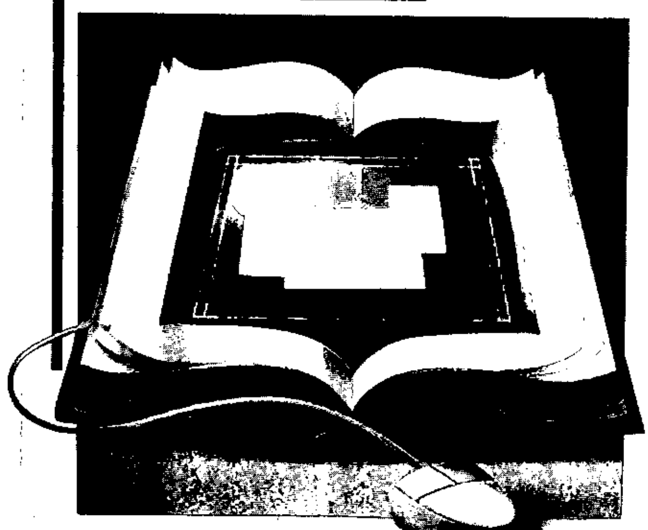
$$a_2=\frac{1-a_1}{a_0},\ a_3=\frac{a_0+a_1-1}{a_0a_1},\ a_4=\frac{1-a_0}{a_1},\ a_5=a_0,\ a_6=a_1$$

دنباله، دوره‌ای و در نتیجه کران‌دار است.

(T.Andreescu)

● احسان یارمحمدی

معرفی سایت‌های ریاضی جهان



عنوان سایت: Cut-the-Knot

نشانی سایت: http://www.Cut-the-Knot.org

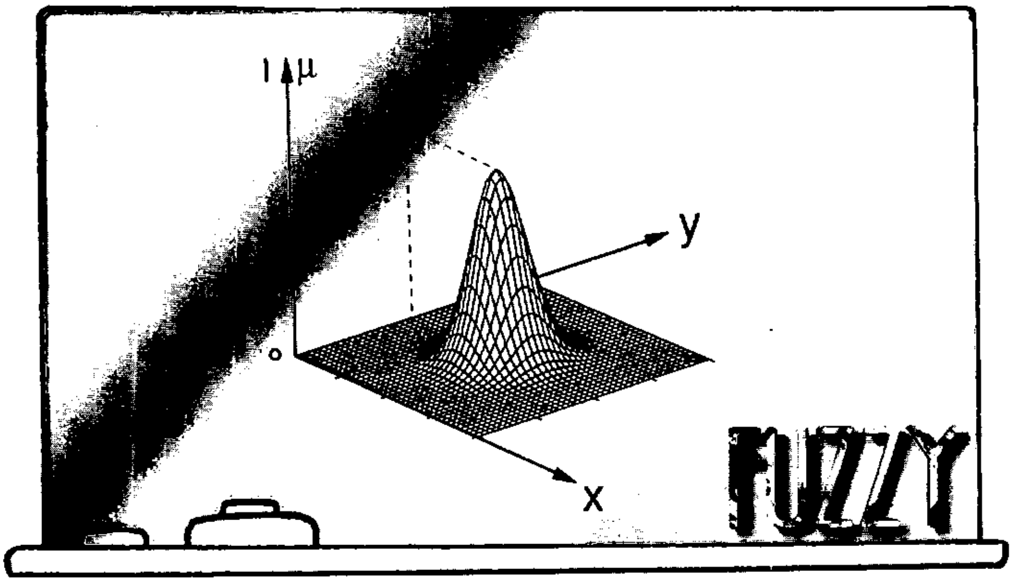
این سایت دربر گیرنده مجموعه‌ای از مطالب گوناگون و معماهای ریاضی برای دانش‌آموزان، معلمان و والدینی است که موضوعات سرگرم کننده و جالب توجه ریاضیات را دنبال می‌کنند.

عنوان‌های اصلی این سایت در زیر آمده است که هر یک از این عنوان‌ها، خود شامل زیر عنوان‌های متنوع و متعددی می‌باشد.

- حساب (Arithmetic)
- جبر (Algebra)
- هندسه (Geometry)
- بازی‌ها و معماهای ریاضی (Math Games & Puzzles)
- خطاهای ادراکی دیداری (Visual Illusions)
- سری‌های شگفت‌آور (Eye Opener Series)
- علوم اجتماعی (Social Sciences)
- منطق (Logic)
- احتمال (Probability)
- جادوی ریاضی کامپیوتری (Computer Math Magic)
- دستگاه قیاسی (دستگاه آنالوگ) (Analog Devices)
- حساب دیفرانسیل و انتگرال (Calculus)
- ترکیبات (Combinatorics)
- بازی‌های ترکیباتی (Combinatorical Games)
- گوناگون (Miscellaneous)

○ دکتر محمدعلی فریبرزی عراقی
عضو هیئت علمی دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکزی

۷

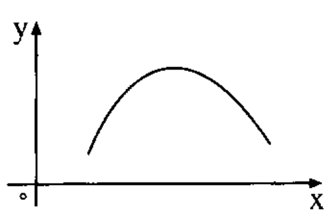


آشنایی با نظریه‌ی مجموعه‌های فازی

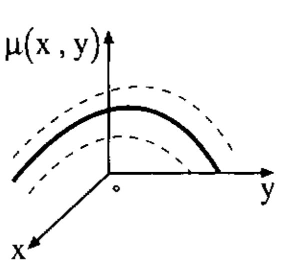
مقدمه

در درس جبر و احتمال سال سوم ریاضی، دانش‌آموزان با مفهوم رابطه و انواع آن آشنا می‌شوند. رابطه به عنوان زیر مجموعه‌ای از حاصل‌ضرب دکارتی دو مجموعه تعریف می‌شود و به دنبال آن، خواص رابطه‌ها برای خواننده توضیح داده می‌شود. اهمیت رابطه‌ها پس از معرفی مفهوم تابع بیشتر می‌شود. کاربردهایی که رابطه‌ها در مباحثی چون نظریه‌ی گراف دارند، این مبحث ریاضی را قابل توجه و مهم نموده است. در ریاضیات فازی نیز مفهوم رابطه‌ی فازی به طور دقیق تعریف و روی آن بحث شده است. ممکن است به ویژه برای خوانندگانی که مفهوم رابطه را در حالت قطعی می‌دانند، این سؤال مطرح شود که در حالت فازی، مفهوم رابطه و انواع آن چگونه تعریف و توصیف می‌شود. اکنون به این موضوع خواهیم پرداخت.

می‌دانیم یک رابطه‌ی قطعی روی R به معنای یک زیرمجموعه از R^2 است که شامل زوج‌های مرتبی چون (x,y) است. در حالت فازی، هر رابطه، زیر مجموعه‌ای از $R^2 \times [0,1]$ است که شامل سه‌تایی‌های مرتبی به صورت $((x,y), \mu(x,y))$ می‌شود که مؤلفه‌ی $\mu(x,y)$ درجه‌ی عضویت زوج مرتب (x,y) را به رابطه‌ی فازی مشخص می‌کند. اشکال ۱ و ۲، توصیفی از رابطه‌ی قطعی و رابطه‌ی فازی را مشخص می‌کنند. نمودار هر رابطه در حالت قطعی، روی صفحه‌ی R^2 قابل نمایش است و نقاط روی این نمودار، بیانگر اعضای رابطه هستند. در حالی که نمودار تابع عضویت هر رابطه فازی، روی فضای R^3 قابل نمایش است و به منزله‌ی یک کوه فرضی است که نقاط روی قله همان نقاطی هستند که



شکل ۱ نمونه‌ای از یک رابطه‌ی قطعی



شکل ۲ نمونه‌ای از یک رابطه‌ی فازی

در حالت قطعی در رابطه تعلق دارند و به عبارتی، دارای درجه‌ی عضویت ۱ هستند و همان‌طوری که از قله‌ی این کوه، از دو طرف به سمت دامنه حرکت کنیم، سایر اعضای این رابطه‌ی فازی با درجه‌های عضویت کمتر از یک مشخص شوند. می‌توانی چنین توصیف کرد که اگر این کوه فرضی که بیانگر نمودار تابع عضویت رابطه‌ی فازی است، برش داده شود، برش مربوط به قله، همان ۱ـ برش این رابطه‌ی فازی و سایر برش‌ها همان α- برش‌های $(۰ \le \alpha < ۱)$ این رابطه‌ی فازی را مشخص می‌کنند. (شکل ۳)

توجه می‌کنیم که در حالت قطعی، رابطه‌ی چون R روی $X \times Y$ به صورت کاملاً واضح تعریف می‌شود، طوری که زوج‌های مرتب موجود در R، دقیقاً دارای ویژگی موردنظر هستند. مثلاً اگر $X = \{۱,۲,۵\}$ و $Y = \{۲,۳,۵,۷\}$ و رابطه‌ی R به صورت «x کوچک‌تر از y است» روی $X \times Y$ تعریف شود، آن‌گاه:

$$R = \{(۱,۲),(۱,۳),(۱,۵),(۱,۷),(۲,۳),(۲,۵),(۲,۷),(۵,۷)\}$$

حال اگر رابطه‌ی R به صورت «x کوچک‌تر از y است» روی $X \times Y$ تعریف شود، دیگر نمی‌توان به طور واضح مشخص کرد که مثلاً (۷و۵) در این رابطه قرار دارد یا خیر. در این حالت، R یک رابطه‌ی فازی است و باید این ابهام را به صورت معرفی درجه‌ی عضویت برای هر یک از زوج‌های مرتب موجود در $X \times Y$ بیان کرد.

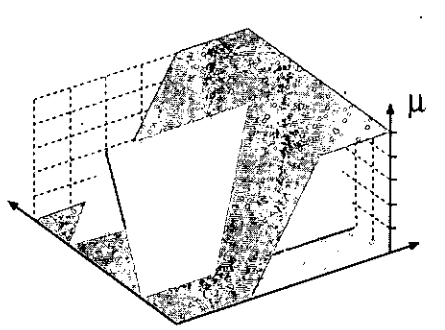
رابطه‌های فازی ابتدا توسط پروفسور زاده[۱] و به دنبال آن توسط کفمن[۲] و روزنفلد[۳] مطرح شدند و مورد مطالعه قرار گرفتند. در این قسمت، به معرفی مفهوم رابطه‌ی فازی در حالت دو تایی و انواع مهم آن می‌پردازیم.

تعریف: فرض کنیم X و Y دو زیر مجموعه‌ی قطعی از اعداد حقیقی باشند که آن‌ها را به عنوان مجموعه‌های مرجع در نظر می‌گیریم. در این صورت، مجموعه‌ی زیر، رابطه‌ی فازی روی $X \times Y$ نامیده می‌شود:

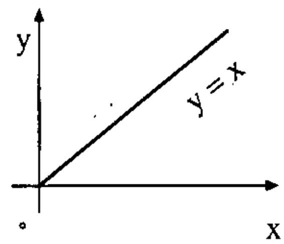
$$\tilde{R} = \left\{((x,y),\mu_{\tilde{R}}(x,y)) \middle| (x,y) \in X \times Y\right\}$$

برای مثال، اگر X و Y را همان مجموعه‌های مرجع مثال بالا در نظر بگیریم، رابطه‌ی فازی «x خیلی کوچک‌تر از y است» را می‌توان به صورت زیر معرفی کرد:

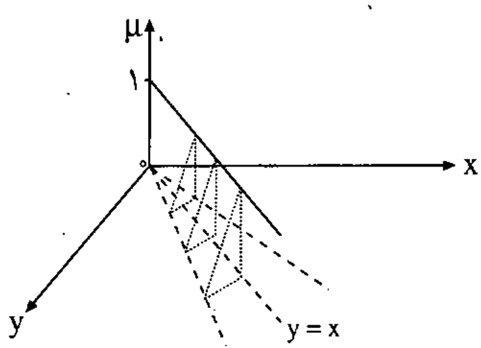
$$\tilde{R} = \{((۱,۲),۰/۱),((۱,۳),۰/۳),((۱,۵),۰/۶)), ((۱,۷),۱),((۲,۳),۰/۱), ((۲,۵),۰/۴),((۲,۷),۰/۸),((۵,۷),۰/۳)\}$$



شکل ۳ نمونه‌ای از یک رابطه‌ی فازی با چند α ـ برش آن



شکل ۴ نمایشی از رابطه‌ی قطعی y برابر x است.



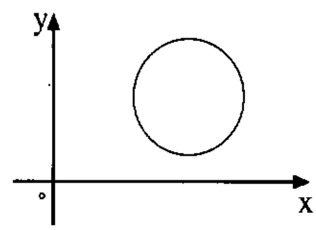
شکل ۵ نمایشی از رابطه‌ی فازی y در حدود x است.

همان‌طور که ملاحظه می‌شود، درجه‌ی عضویت را برای زوج‌های مرتبی نظیر (۲ , ۱) مقدار کمتر و برای زوج مرتبی چون (۷ , ۱) که نسبت به بقیه‌ی زوج‌های مرتب بیشترین عضویت را دارند، مقدار ۱ در نظر گرفته‌ایم.

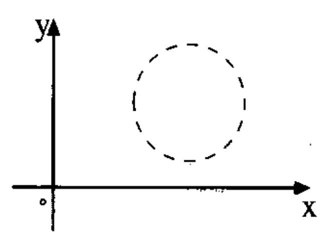
وقتی می‌گوییم «x برابر y است»، «x کوچک‌تر از y است» یا «مجموع x و y کمتر از ۳ است»، روابطی قطعی روی $R^۲$ مطرح کرده‌ایم ولی وقتی می‌گوییم «x در حدود y است»، «x کمی از y کوچک‌تر است» یا «مجموع x و y تقریباً ۳ است.» روابطی فازی را روی $R^۲$ مطرح کرده‌ایم که تابع عضویت این نوع روابط فازی، نموداریدر فضای سه بعدی را خواهند داشت که بعد سوم آن بیانگر مقادیر درجه‌های عضویت است. اشکال ۴ و ۵ رابطه‌ی قطعی «y برابر x است» و رابطه‌ی فازی «y در حدود x است» را مقایسه می‌کنند.

حال رابطه‌ی قطعی «مجموع مربعات x و y برابر ۴ است»

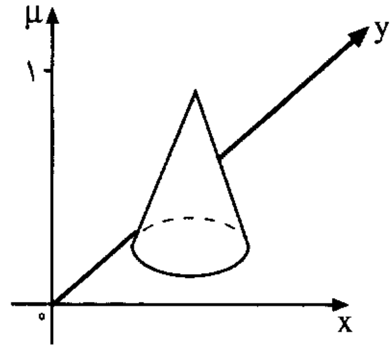
را روی R^2 در نظر می‌گیریم. می‌دانیم که نمودار این رابطه دایره‌ای به مرکز مبدأ مختصات و شعاع $r=2$ است. در این حالت، به‌طور قطع می‌توان گفت که مثلاً زوج مرتب (۰،۲) در این رابطه قرار دارد. حال اگر رابطه را به صورت «مجموع مربعات x و y تقریباً برابر ۴ است» بیان کنیم، رابطه‌ی فازی را عنوان کرده‌ایم. در حالت قطعی، زوج مرتب (۱ , ۱/۵) به رابطه تعلق نداشت، ولی در حالت فازی می‌توان گفت، زوج مرتب (۱ , ۱/۵) با درجه عضویت مثلاً ۰/۴ به رابطه تعلق دارد، چرا که مجموع مربعات مؤلفه‌ها ۳/۲۵ می‌شود، یا مثلاً زوج مرتب (۱ , ۱/۷) با درجه عضویت ۰/۷ به این رابطه تعلق دارد، چرا که مجموع مربعات مولفه‌ها ۳/۸۹ است و به ۴ نزدیک‌تر است. در واقع، در حالت فازی، یک مرز مبهم برای معرفی رابطه مطرح می‌شود که به دلیل همین ابهام، باید با نظیر کردن درجه‌ی عضویت، میزان تعلق یک زوج مرتب به رابطه را



شکل ۶ یک مرز معین در یک رابطه‌ی قطعی



شکل ۷ یک مرز مبهم در یک رابطه‌ی فازی



شکل ۸ نمونه‌ای از یک رابطه‌ی فازی در $X \times Y$

مشخص کرد. به شکل‌های زیر توجه کنید:

حال به مثال دیگری توجه کنید. فرض کنیم $X=Y=R$ و رابطه‌ی فازی $\tilde{R}$ به صورت « x به‌طور قابل ملاحظه‌ای بزرگ‌تر از y است»، تعریف شود. تابع عضویت R را به شکل زیر در نظر می‌گیریم:

$$\mu_{\tilde{R}}(x,y)=\begin{cases} 0 & x \le y \\ \dfrac{1}{1+\dfrac{1}{(y-x)^2}} & x > y \end{cases}$$

ملاحظه می‌کنیم، در ضابطه‌ی بالا، هرچه x از y دورتر شود، مخرج کسر $\frac{1}{(y-x)^2}$ بزرگ‌تر و لذا کسر کوچک‌تر می‌شود؛ به‌طوری که وقتی x بسیار بسیار از y بزرگ‌تر باشد، کسر $\frac{1}{1+(y-x)^2}$ تقریباً یک می‌شود. در هر حال، $\mu_{\tilde{R}}(x,y)$ مقداری بین ۰ و ۱ است و برای $x \le y$ نیز صفر تعریف شده است. با این تعریف، زوج مرتب (۱ , ۱۱) با درجه عضویت $\frac{1}{1/01} \approx 0/99$ به $\tilde{R}$ تعلق دارد و زوج مرتب (۱ , ۱۰۱) با درجه عضویت $\frac{1}{1/0001} \approx 0/9999$ به $\tilde{R}$ تعلق دارد. هم‌چنین، می‌توان ضابطه‌ی تابع عضویت $\tilde{R}$ را به این صورت نیز تعریف کرد:

$$\mu_{\tilde{R}}(x,y)=\begin{cases} 0 & x \le y \\ \dfrac{x-y}{10y} & y < x \le 11y \\ 1 & x > 11y \end{cases}$$

این رابطه به گونه‌ای تعریف شده که اگر در زوج مرتب (x,y)، مقدار x از یازده برابر y بزرگ‌تر شود و مقدار درجه عضویت ۱ باشد، در واقع میزان قابل ملاحظه‌ای بزرگ‌تر، روی این که مؤلفه اول بیش از ۱۱ برابر مولفه دوم باشد، منظور شده است. به این ترتیب، مثلاً زوج مرتب (۲ , ۲۳) با درجه عضویت ۱ به این مجموعه تعلق دارد و زوج مرتب (۳ , ۲۴) با درجه عضویت $\frac{24-3}{10\times 3} = 0/7$ به $\tilde{R}$ تعلق دارد. فکر و سعی کنید ضابطه‌های دیگری مشابه با این ضابطه‌ها برای توصیف این رابطه‌ی فازی پیشنهاد دهید.

به‌منظور نمایش یک رابطه‌ی فازی، می‌توان از یک جدول یا ماتریس نیز استفاده کرد. این نوع نمایش برای حالتی استفاده می‌شود که X و Y متناهی باشند. فرض کنید $X=\{1,2,3\}$ و $Y=\{1,3,5,10\}$ و $\tilde{R}$ به صورت «y خیلی به x نزدیک است»،

در نظر گرفته شود. در این صورت، هر یک از نمایش‌های زیر برای معرفی $\tilde{R}$ مطرح می‌شود:

نمایش ماتریسی $\tilde{R}$

$$\begin{array}{c|cccc} & ۱ & ۳ & ۵ & ۱۰ \\ \hline ۱ & ۱ & ۰/۸ & ۰/۴ & ۰ \\ ۲ & ۰/۹ & ۰/۹ & ۰/۷ & ۰ \\ ۳ & ۰/۸ & ۱ & ۰/۸ & ۰/۱ \end{array}$$

نمایش جدولی $\tilde{R}$

	۱	۳	۵	۱۰
۱	۱	۰/۸	۰/۴	۰
۲	۰/۹	۰/۹	۰/۷	۰
۳	۰/۸	۱	۰/۸	۰/۱

مقادیر داخل جدول، همان درجه‌های عضویت زوج مرتب (x,y) هستند. در این حالت، برای زوج مرتبی نظیر (۳ , ۳) درجه عضویت ۱ و برای زوج مرتبی چون (۱۰ , ۱) که مؤلفه‌ها خیلی دور از یکدیگرند، درجه عضویت ۰ منظور شده است.

به این ترتیب، رابطه‌ی $\tilde{R}$ در این مثال، به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\tilde{R}=\{((۱,۱),۱),((۱,۳),(۰/۸)),((۱,۵),۰/۴),((۲,۱),(۰/۹)),((۲,۳),۰/۹),((۲,۵),۰/۷),((۳,۱),۰/۸),((۳,۳),۱),((۳,۵),۰/۸),((۳,۱۰),۰/۱)\}$$

تعریف: فرض کنیم $\tilde{R}_1$ و $\tilde{R}_2$ دو رابطه‌ی فازی در $X\times Y$ باشند. اجتماع و اشتراک این دو رابطه به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\tilde{R}_1\cup\tilde{R}_2=\left\{((x,y),\mu_{\tilde{R}_1\cup\tilde{R}_2}(x,y))\middle|(x,y)\in X\times Y\right\}$$

$$\tilde{R}_1\cap\tilde{R}_2=\left\{((x,y),\mu_{\tilde{R}_1\cap\tilde{R}_2}(x,y))\middle|(x,y)\in X\times Y\right\}$$

که

$$\mu_{\tilde{R}_1\cup\tilde{R}_2}(x,y)=\max\left\{\mu_{\tilde{R}_1}(x,y),\mu_{\tilde{R}_2}(x,y)\right\}$$

$$\mu_{\tilde{R}_1\cap\tilde{R}_2}(x,y)=\min\left\{\mu_{\tilde{R}_1}(x,y),\mu_{\tilde{R}_2}(x,y)\right\}$$

مثال: دو رابطه‌ی فازی $\tilde{R}_1$ و $\tilde{R}_2$ روی $X\times Y$ که $X=\{x_1,x_2,x_3\}$ و $Y=\{y_1,y_2,y_3,y_4\}$، به صورت زیر تعریف شده‌اند:

	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	۱	۰/۶	۰/۷	۰
x_2	۱	۰	۰/۲	۰/۸
x_3	۰/۳	۱	۰/۵	۰/۳

$\tilde{R}_2$

	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	۰/۳	۰/۱	۰/۵	۰
x_2	۰/۷	۱	۰/۲	۱
x_3	۰/۵	۰	۰/۲	۰/۱

$\tilde{R}_1$

در این صورت، مطابق تعاریف اجتماع و اشتراک دو رابطه‌ی فازی، با در نظر گرفتن ماکزیمم و می‌نیمم درجات عضویت متناظر یکدیگر خواهیم داشت:

	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	۰/۳	۰/۱	۰/۵	۰
x_2	۰/۷	۰	۰/۲	۰/۸
x_3	۰/۳	۰	۰/۲	۰/۱

$\tilde{R}_1\cap\tilde{R}_2$

	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	۱	۰/۶	۰/۷	۰
x_2	۱	۱	۰/۲	۱
x_3	۰/۵	۰	۰/۵	۰/۳

$\tilde{R}_1\cup\tilde{R}_2$

تعریف: گیریم $\tilde{R}_1$ رابطه‌ی فازی در $X\times Y$ و $\tilde{R}_2$ رابطه‌ای فازی در $Y\times Z$ باشد، ترکیب max – min این دو رابطه‌ی فازی، به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\tilde{R}_1\,O\,\tilde{R}_2=\left\{\left[(x,z),\mu_{\tilde{R}_1 O\tilde{R}_2}(x,z)\right]\middle|(x,z)\in X\times Z\right\}$$

با درجه‌ی عضویت

$$\mu_{\tilde{R}_1 O\tilde{R}_2}(x,z)=\max_y\left\{\min\left\{\mu_{\tilde{R}_1}(x,y),\mu_{\tilde{R}_2}(y,z)\right\}\right\}$$

که $x\in X$، $y\in Y$ و $z\in Z$.

مثال: دو رابطه‌ی فازی زیر به ترتیب روی $X\times Y$ و $Y\times Z$ تعریف شده‌اند که $X=\{x_1,x_2,x_3\}$ و $Y=\{y_1,y_2,y_3,y_4,y_5\}$ و $Z=\{z_1,z_2,z_3,z_4\}$.

	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5
x_1	۰/۱	۰/۲	۰	۱	۰/۷
x_2	۰/۳	۰/۵	۰	۰/۲	۱
x_3	۰/۸	۰	۱	۰/۴	۰۳

$\tilde{R}_1$

	z_1	z_2	z_3	z_4
y_1	۰/۹	۰	۰/۳	۰/۴
y_2	۰/۲	۱	۰/۸	۰
y_3	۰/۸	۰	۰/۷	۱
y_4	۰/۴	۰/۲	۰/۳	۰
y_5	۰	۱	۰	۰/۸

$\tilde{R}_2$

بنابراین، $\tilde{R}_1\,O\,\tilde{R}_2$ به صورت زیر به‌دست می‌آید:

	z_1	z_2	z_3	z_4
x_1	۰/۴	۰/۷	۰/۳	۰/۷
x_2	۰/۳	۱	۰/۵	۰/۸
x_3	۰/۸	۰/۳	۰/۷	۱

$\tilde{R}_1\,O\,\tilde{R}_2$

مثلاً عضو (x_1,z_1) را در نظر می‌گیریم و می‌خواهیم درجه‌ی عضویت آن را در $\tilde{R}_1 O \tilde{R}_2$ بیابیم. مطابق تعریف، ابتدا بین درجات عضویت $\mu_{\tilde{R}_1}(x,y)$ و $\mu_{\tilde{R}_2}(y,z)$ که $y \in \{y_1,\cdots,y_5\}$ می‌نیمم می‌کنیم. بنابراین:

$$\min\left\{\mu_{\tilde{R}_1}(x_1,y_1),\mu_{\tilde{R}_2}(y_1,z_1)\right\} = \min\{۰/۱,۰/۹\} = ۰/۱$$

$$\min\left\{\mu_{\tilde{R}_1}(x_1,y_2),\mu_{\tilde{R}_2}(y_2,z_1)\right\} = \min\{۰/۲,۰/۲\} = ۰/۲$$

$$\min\left\{\mu_{\tilde{R}_1}(x_1,y_3),\mu_{\tilde{R}_2}(y_3,z_1)\right\} = \min\{۰,۰/۸\} = ۰$$

$$\min\left\{\mu_{\tilde{R}_1}(x_1,y_4),\mu_{\tilde{R}_2}(y_4,z_1)\right\} = \min\{۱,۰/۴\} = ۰/۱$$

$$\min\left\{\mu_{\tilde{R}_1}(x_1,y_5),\mu_{\tilde{R}_2}(y_5,z_1)\right\} = \min\{۰/۷,۰\} = ۰$$

حال بین مقادیر حاصل، ماکزیمم را به‌عنوان درجه‌ی عضویت در نظر می‌گیریم. لذا:

$$\mu_{\tilde{R}_1 O \tilde{R}_2}(x_1,z_1) = ۰/۴$$

به همین ترتیب، سایر درجات عضویت مشخص می‌شوند.

نکته: ترکیب max–min دارای خاصیت شرکت‌پذیری است، یعنی:

$$(\tilde{R}_1 O \tilde{R}_2) O \tilde{R}_3 = \tilde{R}_1 O (\tilde{R}_2 O \tilde{R}_3)$$

ولی در حالت کلی، ترکیبُ max–min خاصیت جابه‌جایی ندارد $(\tilde{R}_1 O \tilde{R}_2 \neq \tilde{R}_2 O \tilde{R}_1)$.

تعریف: گیریم $\tilde{R}$ رابطه‌ی فازی در $X \times X$ باشد. در این صورت:

الف) $\tilde{R}'$ انعکاسی (بازتابی) است، در صورتی که:

$$\forall x \in X, \mu_{\tilde{R}}(x,x) = ۱$$

ب) $\tilde{R}$ متقارن است، در صورتی که:

$$\forall x,y \in X, \tilde{R}(x,y) = \tilde{R}(y,x)$$

و به عبارت دیگر:

$$\mu_{\tilde{R}}(x,y) = \mu_{\tilde{R}}(y,x)$$

ج) $\tilde{R}$ پادمتقارن است، در صورتی که: برای $x,y \in X$ که $x \neq y$، یا $\mu_{\tilde{R}}(x,y) \neq \mu_{\tilde{R}}(y,x)$ یا $\mu_{\tilde{R}}(x,y) = \mu_{\tilde{R}}(y,x) = ۰$.

د) $\tilde{R}$ را کاملاً پادمتقارن گوییم، هرگاه برای x و $y \in X$ که $x \neq y$، در صورتی که $\mu_{\tilde{R}}(x,y) > ۰$، آن‌گاه $\mu_{\tilde{R}}(y,x) = ۰$.

می‌توان گفت که اگر رابطه‌ی فازی کاملاً پادمتقارن باشد، حتماً پادمتقارن نیز هست. ولی یک رابطه‌ی فازی پادمتقارن، لزوماً کاملاً پادمتقارن نیست.

د) $\tilde{R}$ تعدی (ترایایی) است، در صورتی که $\tilde{R}_1 O \tilde{R}_2 \subseteq R$ و به عبارت دیگر:

$$\mu_{\tilde{R} O \tilde{R}}(x,y) \leq \mu_{\tilde{R}}(x,y)$$

که $(x,y) \in X \times X$.

مثال: رابطه‌ی فازی مقابل را در مجموعه‌ی $X \times X$ که $X = \{x_1,x_2,x_3,x_4\}$ است، در نظر بگیرید. رابطه‌ی $\tilde{R}$ بازتابی نیست، زیرا $\mu_{\tilde{R}}(x_1,x_1) \neq ۱$.

در واقع، رابطه زمانی بازتابی است که اعضای موجود روی قطر اصلی ماتریس، همگی یک باشند.

$\tilde{R} =$

	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	۰/۴	۰	۰/۷	۰
x_2	۰	۱	۰/۹	۰/۶
x_3	۰/۸	۰/۴	۰/۷	۰/۴
x_4	۰	۰/۱	۰	۰

رابطه‌ی $\tilde{R}$ تقارنی نیست، زیرا مثلاً $\mu_{\tilde{R}}(x_1,x_3) = ۰/۷$، ولی $\mu_{\tilde{R}}(x_3,x_1) = ۰/۸$. در واقع رابطه‌ی $\tilde{R}$ زمانی تقارنی است که ماتریس متناظر آن متقارن باشد، یعنی درایه‌های متناظر در بالا و پایین قطر اصلی دوبه‌دو برابر باشند. رابطه‌ی $\tilde{R}$ پادمتقارن است، ولی کاملاً پادمتقارن نیست، زیرا

$\mu(x_1,x_2)=۰$ و $\mu(x_2,x_1)=۰$. در واقع، رابطه‌ی $\tilde{R}$ زمانی پادمتقارن است که درایه‌های عمومی a_{ij} و a_{ji} از ماتریس متناظر $\tilde{R}$ یا مختلف یا هر دو صفر باشند، ولی در حالت کاملاً پادمتقارن یکی از این دو درایه باید مثبت و دیگری باید صفر باشد.

مثال دیگری برای بررسی تعدی‌بودن یک رابطه‌ی فازی در نظر می‌گیریم. فرض کنیم $\tilde{R}$ در $X\times X$ به‌صورت زیر تعریف شود:

$$\tilde{R}=\begin{array}{c} \\ x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4\end{array}\\ \begin{bmatrix} ۰/۲ & ۱ & ۰/۴ & ۰/۴\\ ۰ & ۰/۶ & ۰/۳ & ۰\\ ۰ & ۱ & ۰/۳ & ۰\\ ۰/۱ & ۱ & ۱ & ۰/۱\end{bmatrix}\end{array}$$

در این‌صورت، $\tilde{R}O\tilde{R}$ مطابق تعریف max – min ترکیب رابطه‌ی فازی، به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\tilde{R}O\tilde{R}=\begin{array}{c} \\ x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4\end{array}\\ \begin{bmatrix} ۰/۲ & ۰/۶ & ۰/۴ & ۰/۲\\ ۰ & ۰/۶ & ۰/۳ & ۰\\ ۰ & ۰/۶ & ۰/۳ & ۰\\ ۰/۱ & ۱ & ۰/۳ & ۰/۱\end{bmatrix}\end{array}$$

ملاحظه می‌کنیم، چون هر یک از درایه‌های موجود در ماتریس $\tilde{R}O\tilde{R}$ یا بیشتر از درایه‌ی متناظر آن در ماتریس $\tilde{R}$ است. لذا $\tilde{R}$ یک رابطه‌ی تعدی است.

نکته‌ی ۱. اگر $\tilde{R}$ بازتابی و تعدی باشد، آن‌گاه $\tilde{R}O\tilde{R}=\tilde{R}$.

نکته‌ی ۲. اگر $\tilde{R}_1$ و $\tilde{R}_2$ دو رابطه‌ی تعدی باشند، $\tilde{R}_1O\tilde{R}_2=\tilde{R}_2O\tilde{R}_1$، آن‌گاه $\tilde{R}_1O\tilde{R}_2$ نیز تعدی است.

تعریف: رابطه‌ی فازی $\tilde{R}$ را در $X\times X$ هم‌ارزی گوییم، هرگاه بازتابی، تقارنی و تعدی باشد. مثال زیر، نمونه‌ای از یک رابطه‌ی فازی هم‌ارزی است که $X=\{x_1,x_2,\dots,x_6\}$. خواص مذکور را در این رابطه می‌توانید بررسی کنید.

$\tilde{R}=$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1	۱	۰/۲	۱	۰/۶	۰/۲	۰/۶
x_2	۰/۲	۱	۰/۲	۰/۲	۰/۸	۰/۲
x_3	۱	۰/۲	۱	۰/۶	۰/۲	۰/۶
x_4	۰/۶	۰/۲	۰/۶	۱	۰/۲	۰/۸
x_5	۰/۲	۰/۸	۰/۲	۰/۲	۱	۰/۲
x_6	۰/۶	۰/۲	۰/۶	۰/۸	۰/۲	۱

تعریف: رابطه‌ی فازی $\tilde{R}$ در $X\times Y$ را ترتیب فازی گوییم، هرگاه بازتابی، پادتقارنی و تعدی باشد آن را رابطه‌ی ترتیب فازی کامل گوییم، هرگاه این رابطه انعکاسی، کاملاً پادمتقارنی و تعدی باشد.

حال بررسی کنید، آیا رابطه‌ی فازی مقابل یک رابطه‌ی ترتیب فازی است یا ترتیب فازی کامل یا هیچ‌کدام؟

$$\tilde{R}=\begin{bmatrix} ۱ & ۰/۴ & ۰/۸ & ۰/۷\\ ۰ & ۱ & ۰ & ۰/۲\\ ۰ & ۰/۶ & ۱ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۰/۳ & ۱\end{bmatrix}.$$

تعریف: منظور از وارون رابطه‌ی فازی $\tilde{R}$ که آن را با $\tilde{R}^{-1}$ نمایش می‌دهیم، رابطه‌ای است فازی که تابع عضویت آن به صورت زیر تعریف می‌شود: $\mu_{\tilde{R}^{-1}}(x,y)=\mu_{\tilde{R}}(y,x)$. به عبارت دیگر، ماتریس متناظر $\tilde{R}^{-1}$ ترانهاده‌ی ماتریس متناظر $\tilde{R}$ است.

مثال: در جداول زیر، روابط $\tilde{R}$ و $\tilde{R}^{-1}$ را ملاحظه می‌کنید.

$$\tilde{R}=\begin{bmatrix} ۱ & ۰/۷ & ۰/۳\\ ۰/۸ & ۰/۴ & ۰/۶\\ ۰ & ۰/۱ & ۰/۵\end{bmatrix}\Rightarrow \tilde{R}^{-1}=\begin{bmatrix} ۱ & ۰/۸ & ۰\\ ۰/۷ & ۰/۴ & ۰/۱\\ ۰/۳ & ۰/۶ & ۰/۵\end{bmatrix}$$

تعریف: رابطه‌های همانی، مرجع و صفر به صورت‌های زیر تعریف می‌شوند:

$$\mu_I(x,y)=\begin{cases}۱ & x=y\\ ۰ & x\neq y\end{cases}\qquad \text{(رابطه‌ی همانی)}$$

(رابطه‌ی صفر) $\mu_z(x,y)=۰$ و (رابطه‌ی مرجع)

$\mu_U(x,y)=1$ که در آن‌ها $x \in X$ و $y \in Y$. ماتریس‌های زیر، نمونه‌هایی از ماتریس‌های معرف این روابط هستند:

$$I=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix},\ U=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{bmatrix},\ Z=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

توجه می‌کنیم، این روابط همگی قطعی هستند و حالت‌های خاص یک رابطه‌ی فازی محسوب می‌شوند که در آن، مقادیر درجه‌های عضویت فقط ۰ یا ۱ است.

تعریف: متمم رابطه‌ی فازی $\tilde{R}$ که آن را با $\tilde{R}^c$ نمایش می‌دهیم، رابطه‌ای فازی است که تابع عضویت آن به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mu_{\tilde{R}^c}(x,y)=1-\mu_{\tilde{R}}(x,y)$$

مثال: جداول زیر یک رابطه‌ی فازی و متمم آن‌را نمایش می‌دهد.

$$\tilde{R}=\begin{bmatrix}0/2&0/5&0/8\\0/4&1&0\\0/8&0/2&1\end{bmatrix}\Rightarrow \tilde{R}^c=\begin{bmatrix}0/8&0/5&0/2\\0/6&0&1\\0/2&0/8&0\end{bmatrix}$$

برخی از خواص وارون و متمم رابطه‌ی فازی در زیر مطرح شده‌اند:

۱. $(\tilde{R}_1\cup\tilde{R}_2)^{-1}=\tilde{R}_1^{-1}\cup\tilde{R}_2^{-1}$

و $(\tilde{R}_1\cap\tilde{R}_2)^{-1}=\tilde{R}_1^{-1}\cap\tilde{R}_2^{-1}$

۲. $(\tilde{R}^c)^c=\tilde{R}$ و $(\tilde{R}^{-1})^{-1}=\tilde{R}$

۳. $(\tilde{R}_1\cap\tilde{R}_2)^c=\tilde{R}_1^c\cup\tilde{R}_2^c$ و

$(\tilde{R}_1\cup\tilde{R}_2)^c=\tilde{R}_1^c\cap\tilde{R}_2^c$ (قوانین دمورگان)

۴. $(\tilde{R}^{-1})^c=(\tilde{R}^c)^{-1}$

۵. $\tilde{R}_1\subseteq\tilde{R}_2\Rightarrow\tilde{R}_1^{-1}\subseteq\tilde{R}_2^{-1}$

یک مثال راحت برای توجیه مفهوم یک رابطه‌ی فازی را در زیر مطرح می‌کنیم:

فرض کنید: {انبه، انگور، پرتقال، هندوانه، خیار}=X و {سنگین، گرد، دراز}=Y، رابطه‌ی فازی $\tilde{R}$ را به صورت «x تقریباً y است» در $X\times Y$ در نظر می‌گیریم. جدول زیر، نمونه‌ای از این رابطه‌ی فازی را بیان می‌کند. برای هر کدام از میوه‌های موجود در X، هر چه قدر خاصیت موجود در Y را بیشتر دارا باشند، در جدول عددی نزدیک‌تر به ۱ و هر مقدار کمتر این خاصیت‌ها را دارا باشند، عددی نزدیک به صفر را به عنوان درجه‌ی عضویت آن زوج مرتب در نظر می‌گیریم.

$\tilde{R}=$

	انبه	انگور	پرتقال	هندوانه	خیار
دراز	۰/۱	۰	۰	۰	۱
گرد	۰/۳	۰/۹	۱	۰/۹	۰
سنگین	۰/۴	۰	۰/۲	۱	۰/۱

تمرین ۱. فرض کنید {رشت، قم، تهران}=X و {کرج، اراک، بندرانزلی}=Y و $\tilde{R}$ رابطه‌ای فازی در $X\times Y$ به صورت «x تقریباً به y نزدیک است» باشد. (از نظر مسافت)، با استفاده از رسم یک جدول، این رابطه‌ی فازی را توصیف کنید.

تمرین ۲. فرض کنید $\tilde{R}=\begin{bmatrix}1&0/7&0/5\\0/8&0/2&0/4\\0/1&0/5&0/9\end{bmatrix}$ و $\tilde{S}=\begin{bmatrix}0/3&0/1&0/8\\0/9&0/7&0/5\\1&0/2&0/3\end{bmatrix}$، مطلوب است $\tilde{R}^{-1}$، $\tilde{S}^{-1}$، $\tilde{R}^c$، $\tilde{R}\cup\tilde{S}$، $(\tilde{R}\cup\tilde{S})^{-1}$ و $\tilde{R}^{-1}\cup\tilde{S}^{-1}$. هم‌چنین صحت قانون دمورگان به صورت $(\tilde{R}\cap\tilde{S})^c=\tilde{R}^c\cup\tilde{S}^c$ را تحقیق کنید.

پی‌نوشت

1. Zadeh 2. Koufmann 3. Rosenfeld

منابع

۱. مقدمه‌ای بر منطق فازی. کازو تاناکا. ترجمه‌ی دکتر علی وحیدیان کامیاد و دکتر حمیدرضا طارقیان. دانشگاه فردوسی مشهد. چاپ اول. ۱۳۸۱.

2. Fuzzy Set theory and its applications, 3rd edition, H.J. Zimmermann, Kluwer Academic Publishers, USA, 1996.

مسائل برای حل

● میرشهرام صدر

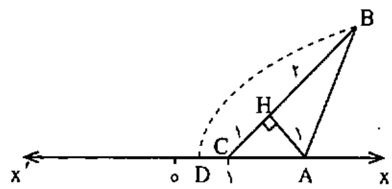
ریاضی سال اول

۱. بین $2\sqrt{2}$ و $\frac{4}{3}$ دو عدد گویا به‌دست آورید.

۲. مقدار عبارت زیر را محاسبه کنید:

$$A = 3\left|\sqrt{5}-1\right| + \left|3\sqrt{5}-9\right|$$

۳. در شکل زیر، اگر به مرکز A و شعاع AB کمانی بزنیم تا محور را در نقطه‌ی D قطع کند، D نمایش چه عددی است؟



۴. درستی رابطه‌ی زیر را با رسم یک شکل هندسی نشان دهید:

$$(a+2+b)(x+3) = 3a+3b+ax+bx+2x+6$$

۵. هر یک از مجموعه‌های زیر را با نوشتن عضوهایش مشخص کنید:

الف) $A = \left\{\sqrt{4n-1} \,\middle|\, n \in Z, -2 \le n \le 2\right\}$

ب) $B = \left\{x \,\middle|\, x \in N, \frac{2-x}{x-4} > -1\right\}$

۶. اگر $\{(x-y), (3x+3y)\} = \{6\}$، در این صورت حاصل $\frac{xy+1}{x+yx}$ را بیابید.

۷. حاصل عبارت‌های زیر را محاسبه کنید.

الف) $A = (1+2^{3})^{-1} + (1+2^{-3})^{-1}$

ب) $B = \frac{2^{50}+2^{49}+2^{48}}{2^{47}}$

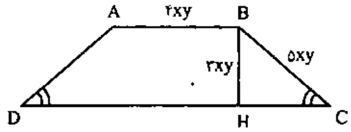
۸. اگر $2a^{25} = a^{50}$، در این صورت مقدار a^{100} را بیابید $(a \neq 0)$.

۹. مجموع تعداد زیر مجموعه‌های دو مجموعه‌ی n عضوی و $(n+2)$ عضوی برابر با ۱۶۰ است، مقدار n را محاسبه کنید.

۱۰. ابتدا مخرج کسر زیر را ساده و سپس گویا کنید.

$$A = \frac{1}{2\sqrt{18}-\sqrt{50}-2\sqrt{8}}$$

۱۱. محیط و مساحت شکل زیر را بیابید. $(\angle D = \angle C)$



۱۲. حاصل عبارت‌های زیر را به کمک اتحادها بیابید:

الف) $A = \left[2a(2a+x^{2})+x^{4}\right](4a^{2}+x^{4}-2ax^{2})$

ب) $B = (9a^{2}-6ab+b^{2})(9a^{2}+3ab+b^{2})^{2}$

۱۳. اگر $a+b=5$ و $ab=3$، مقدار عددی $a^{3}+b^{3}$ را محاسبه کنید.

۱۴. چند جمله‌ای‌های زیر را تجزیه کنید.

الف) $A = x^{2}-y^{2}-4+4y$

ب) $B = x^{3}-3x+2$

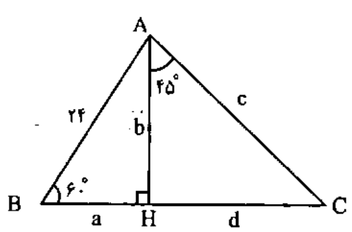
۱۵. مقدار a را طوری تعیین کنید که فاصله‌ی نقطه‌ی $A(2a+1\ ,\ a-2)$ از مبدأ مختصات برابر با $\sqrt{10}$ باشد.

۱۶. معادله‌ی خطی را بنویسید که از محل تلاقی دو خط به معادله‌های زیر بگذرد و بر خطی که از دو نقطه‌ی $A(2,1)$ و $B(2,3)$ می‌گذرد، عمود باشد.

$d_1: y = x+2$

$d_2 = y = 2x-1$

۱۷. در شکل زیر، مقدار اجزای مجهول a، b، c و d را به‌دست آورید.



۱۸. کسر $I = \frac{(x+\frac{1}{y})^{m}(x-\frac{1}{y})^{n}}{(y+\frac{1}{x})^{m}(y-\frac{1}{x})^{n}}$ را ساده کنید.

۱۹. در اتاقی مستطیل شکل به ابعاد ۶ در ۷ متر، می‌خواهیم قالیچه‌ای به ابعاد ۳ در ۴ را پهن کنیم، به طوری که فاصله‌ی لبه‌ی قالی تا دیوار از هر طرف برابر باشد. فاصله‌ی قالی تا دیوار در هر طرف چه قدر است؟

۲۰. در جریان حفاری زمین در سال ۱۹۸۴، دانشمندان زمین‌شناس روسیه به این نتیجه رسیدند که درجه‌ی حرارت در x کیلومتری زیر سطح زمین، از رابطه‌ی زیر به‌دست می‌آید:

$$T = 25(x-3)+30\ ;\ 3 \le x \le 15$$

در این رابطه، T درجه‌ی حرارت برحسب سانتی‌گراد است. مشخص کنید، در چه محدوده‌ای از عمق زمین، درجه‌ی حرارت بین $200^{\circ}C$ تا $300^{\circ}C$ تغییر می‌کند.

● هوشنگ شرقی

ریاضیات سال دوم

۱. جمله‌ی عمومی دنباله‌ی حسابی را مشخص کنید که مجموع جملات سوم و پنجم آن مساوی ۱۶ و جمله‌ی ششم آن دوبرابر جمله‌ی چهارم آن باشد.

۲. t را طوری به‌دست آورید که سه جمله‌ی $3t$ ، $t+2$ و $t-1$ جملات متوالی یک دنباله‌ی هندسی باشند.

۳. دنباله‌ی $a_n = \frac{2n+1}{4n-1}$ مفروض است. اولاً پنج جمله‌ی نخست این دنباله را بنویسید، ثانیاً نشان دهید جملات این دنباله به عدد $\frac{1}{2}$ نزدیک می‌شوند.

۴. مقدارهای زیر را به‌دست آورید:

الف) $\left[(\sqrt{5})^{3-\sqrt{2}}\right]^{3+\sqrt{2}}$

ب) $(\sqrt{5}-2)^{\sqrt{3}+\sqrt{2}}.(\sqrt{5}+2)^{\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}}$

۵. a و b را طوری به‌دست آورید که رابطه‌ی f در زیر، یک تابع وارون‌پذیر باشد. سپس f^{-1} را مشخص و نمودار f و f^{-1} را در یک دستگاه مختصات رسم کنید.

$$f = \{(1, a+b), (1, 3), (2, a-b), (-3, -1), (a-b, -1)\}$$

۶. معادله‌ی تابع خطی f را تعیین کنید که $f(2)=1$ و $f(3)=-1$ باشد.

۷. دامنه‌ی تعریف توابع f و g در زیر را مشخص کنید. سپس مقادیر $f(g(-1))$ و $g(f(\frac{1}{2}))$ را به‌دست آورید.

$$f(x) = \frac{2x+1}{4x-1} \quad \text{و} \quad g(x) = \frac{2}{\sqrt{-x+3}}$$

۸. ابتدا نمودار تابع با ضابطه $f(x)=\sqrt{x}$ را و سپس از روی آن، نمودارهای توابع $y=1-\sqrt{x}$ و $y=\sqrt{x+1}-1$ را رسم کنید.

۹. دامنه‌ی تعریف تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\sqrt{\frac{(x-2)(3-x)}{(x+2)}}$ را به‌دست آورید.

۱۰. نمودار تابع با ضابطه‌ی $y=2^{-x}-1$ را رسم کنید.

۱۱. جمعیت شهری کوچک، اکنون ۱۰۰۰۰۰ نفر است. اگر این جمعیت با نرخ رشد ۲ درصد افزایش یابد، چهار سال بعد، جمعیت شهر تقریباً چند نفر است؟

۱۲. ثابت کنید برای هر سه عدد حقیقی و مثبت a ، b و c و $c \neq 1$ داریم:

$$\log_c^{\frac{a}{b}} = \log_c^a - \log_c^b$$

۱۳. معادله‌ی زیر را حل کنید:

$$\log_x^{x+1} + \log_x^{x+2} - \log_x^6 = 1$$

۱۴. نمودار تابع f با ضابطه‌ی $f(x)=2\sin 2x-1$ را در یک دوره‌ی تناوب آن رسم کنید.

۱۵. زمینی مثلثی شکل داریم که طول‌های دو ضلع آن ۱۰۰ متر و ۲۰۰ متر است و زاویه‌ی بین این دو ضلع نیز $60°$ است. اولاً طول سومین ضلع این مثلث را به‌دست آورید. ثانیاً مساحت زمین را محاسبه کنید.

۱۶. ماتریس $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 1 & 3\end{bmatrix}$ مفروض است. ماتریس دو در دوی B را طوری بیابید که داشته باشیم:

$$A^2 + B = A^{-1}$$

۱۷. با حروف کلمه‌ی «پوند» چند کلمه‌ی بدون نقطه می‌توان نوشت؟ (کلمه از حداقل دو حرف درست شده است.)

۱۸. می‌خواهیم از بین ۶ مادر و ۸ پدر دانش‌آموزان یک مدرسه، شش نفر را به عضویت انجمن اولیا و مربیان مدرسه در آوریم. این کار به چند طریق ممکن است، اگر در انجمن:

الف) تعداد زن‌ها و مردها برابر باشد.

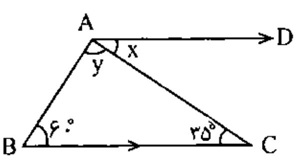
ب) مردها اکثریت داشته باشند.

● محمدهاشم رستمی

هندسه‌ی ۱

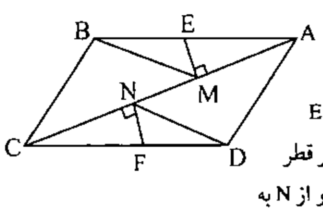
۱. حدود m را چنان تعیین کنید که ۱۷ ، $2m-1$ و ۲۵ اندازه‌های ضلع‌های یک مثلث باشند.

۲. اندازه‌های x و y را در شکل داده شده تعیین کنید (پیکان‌های هم‌جهت خط‌های موازی را نشان می‌دهند).



۳. تعداد قطرهای یک ۲۷ ضلعی از تعداد ضلع‌های آن چه‌قدر بیشتر است؟

۴. متوازی‌الاضلاع ABCD را داریم. E وسط ضلع AB و F وسط ضلع CD است. از E عمود EM و از F عمود FN را بر قطر AC رسم می‌کنیم. از M به B و از N به D وصل می‌کنیم. ثابت کنید:

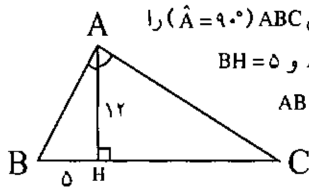


الف) دو مثلث AME و CNF هم‌نهشت‌اند.

ب) MB=ND

۵. ارتفاع مثلثی سه برابر قاعده‌ی نظیر آن است. اگر مساحت این مثلث ۲۹۴ واحد سطح باشد، اندازه‌ی این ارتفاع و قاعده‌ی نظیرش را بیابید.

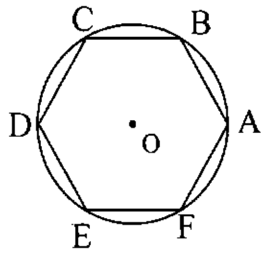
۶. ارتفاع AH از مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABC ($\hat{A}=90^\circ$) را رسم کرده‌ایم. اگر AH = ۱۲ و BH = ۵ باشد، طول وتر BC، ضلع‌های AB و AC و مساحت مثلث را تعیین کنید.



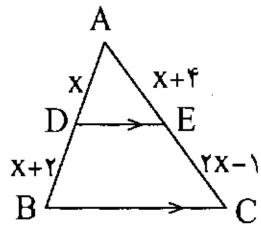
۷. در دایره‌ای به شعاع ۱۶، یک شش‌ضلعی منتظم محاط شده است (شکل روبه‌رو).

الف) اندازه‌ی ضلع این شش‌ضلعی منتظم را بیابید.

ب) اندازه‌ی مساحت این شش‌ضلعی منتظم را تعیین کنید.



۸. اندازه‌ی x را با توجه به شکل داده شده تعیین کنید. پیکان‌های هم‌جهت خط‌های موازی را نشان می‌دهند.

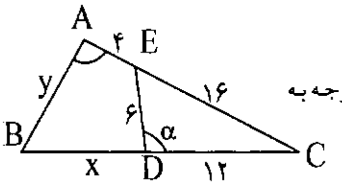


۹. ضلع‌های یک مثلث ۶، ۱۲ و ۲۰ و محیط مثلث متشابه با آن ۱۱۴ است.

الف) اندازه‌ی ضلع‌های مثلث اخیر را تعیین کنید.

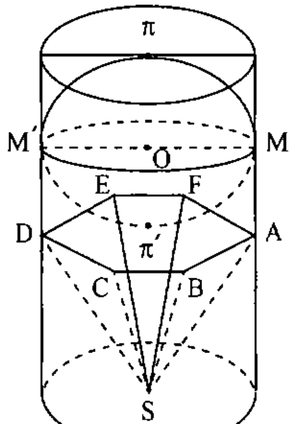
ب) نسبت مساحت‌های این دو مثلث را تعیین کنید.

۱۰. اندازه‌های x و y را با توجه به شکل داده شده تعیین کنید.



۱۱. ابعاد مکعبی ۲k، ۳k و ۵k است. حجم این مکعب مستطیل، ۲۴ برابر حجم مکعبی به قطر $6\sqrt{3}$ است. طول قطر مکعب مستطیل را بیابید.

۱۲. استوانه‌ای به شعاع قاعده‌ی ۱۲ و ارتفاع ۴۲ داده شده است. هرم منتظم شش پهلویی به ارتفاع ۱۸ در این استوانه چنان محاط است که رأسش (s) روی مرکز قاعده‌ی استوانه و قاعده‌اش موازی قاعده‌ی استوانه است. کره‌ای به مرکز o نیز در این استوانه چنان محاط است که در نقطه‌ی T' با مرکز قاعده‌ی هرم و در نقطه‌ی T با مرکز قاعده‌ی دیگر هرم و بر استوانه در طول یک دایره‌ی عظیمه مماس است. (شکل روبه‌رو). مطلوب است:



الف) محاسبه‌ی حجم هرم؛

ب) محاسبه‌ی حجم کره؛

پ) حجم فضای خالی درون استوانه؛

ت) در این مسأله، اگر ارتفاع استوانه عددی غیر از ۴۲ باشد، چه وضعی پیش می‌آید؟

● مجتبی رفیعی

حسابان

۱. توابع f و g با ضابطه‌های $f(x)=x^2$ و $g(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$ مفروض‌اند. fog و gof را محاسبه و سپس درست یا نادرست بودن gof=fog را نتیجه‌گیری کنید.

۲. اگر $f(x)=\log(x+\sqrt{x^2-1})$ باشد، نشان دهید: $f(2x^2-1)=2f(x)$

۳. اگر f تابعی یک به یک و f^{-1} معکوس آن باشد، ضابطه‌ی معکوس تابع $g(x)=2-3f(4+5x)$ را به‌دست آورید.

۴. زوج و یا فرد بودن تابع f با ضابطه‌ی $f(x)=\log(\sqrt{x^2+1}-x)$ را بررسی کنید.

۵. حاصل حدهای زیر را به‌دست آورید.

الف) $\lim\limits_{x\to-1}\frac{3x^2+2x-1}{x^3+x+2}$

ب) $\lim\limits_{x\to1^-}\frac{x^2-1}{1-\sqrt{x}}$

ج) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x+\sqrt{3}}{\sqrt{x^2+x}}$

۶. معادله‌های مجانب‌های قائم و افقی $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$ را به‌دست آورید.

۷. مقادیر a و b را طوری تعیین کنید که تابع

$$f(x)=\begin{cases}[x-1]+2a & x<3\\ x+b-1 & x=3\\ \sqrt{x^2-2x+1} & x>3\end{cases}$$

در $x_0=3$ پیوسته باشد.

۸. الف) مشتق توابع زیر را حساب کنید (ساده کردن مشتق الزامی نیست).

$f(x)=\sqrt[3]{x^2-5x}\ \sin(3x)$ $\quad g(x)=\mathrm{Arcsin}(5x)-\tan(\frac{1}{x})$

ب) اگر $f'(x)=\sqrt{x^2+1}$ باشد، مشتق تابع $y=f(5x^2-x)$ را نسبت به x تعیین کنید.

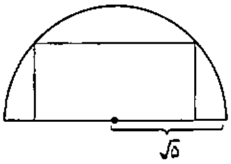
۹. اگر منحنی تابع به معادله‌ی $y=ax+b+\frac{2x^2}{x-4}$ به تابع هموگرافیک تبدیل شود و مرکز تقارن منحنی روی خط به معادله‌ی $y=2x$ باشد، مقادیر a و b را بیابید.

۱۰. تابع $y=ax^3+bx^2+cx+d$ مفروض است. ضرایب a، b، c و d را

چنان بیابید که $M(1,2)$ نقطه‌ی ماکزیمم تابع باشد و نقطه‌ی عطف منحنی بر مبدأ مختصات منطبق باشد.

۱۱. مشتق‌پذیری تابع f با ضابطه‌ی $f(x)=\sqrt{x^2(x+1)}$ را در $x=0$ بررسی کنید.

۱۲. نیم‌دایره‌ای به شعاع $\sqrt{5}$ مفروض است. مطابق شکل زیر، مستطیلی در آن محاط می‌کنیم. ابعاد مستطیل را چنان بیابید که محیط مستطیل ماکزیمم باشد.



۱۳. ابتدا نمودار تابع $f(x)=\begin{cases}2x & x\geq 0\\ 1-3x & x\leq 0\end{cases}$ را رسم کنید با استفاده از آن، حاصل $\int_{-1}^{1} f(x)dx$ را بیابید.

● فرخ فرشیان

جبر و احتمال

۱. با استفاده از اصل استقرای ریاضی ثابت کنید، برای هر عدد طبیعی n داریم:

$(2n)! = 2^n \times n! \times (1\times 3\times 5\times \ldots \times (2n-1))$

۲. کدام یک از عبارات زیر درست و کدام یک نادرست است. در صورت نادرست بودن، یک مثال نقض پیدا کنید.

الف) اگر α و β اعدادی گنگ باشد، α^β نیز عددی گنگ است.

ب) اگر a، b و c مضرب ۳ نباشند، $a^2+b^2+c^2$ بر ۳ بخش‌پذیر نیست.

۳. فرض کنیم a، 'a، b، 'b عددهایی گویا و x عددی گنگ باشد، درصورتی که $\frac{ax+b}{a'x+b'}$ عددی گویا باشد، با استفاده از استدلال استنتاجی ثابت کنید $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}$.

۴. با استدلال برهان خلف ثابت کنید که اگر $\sqrt{2}$ عددی گنگ باشد، $\sqrt{\sqrt{2}+1}$ نیز گنگ است.

۵. فرض کنیم $A=\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}$ ، $A\subset N$ ، $n\in N$ و حداقل ۵ عضو مجموعه‌ی A دارای رقم یکان برابر باشند. در این صورت، کمترین مقدار n را به‌دست آورید.

۶. اگر $n\in N$ ، $A_n=\{m\in Z \mid m\geq -n, 2^m\leq n\}$ باشند، اعضای مجموعه‌ی $(A_2\Delta A_1)\times A_3$ را به‌دست آورید.

۷. با استفاده از جبر مجموعه‌ها ثابت کنید:

$[A-(B\cup C)]\cup[A-(A\cap B)]=A-B$

۸. اگر $i\in\{1,2\}$ و $A_i=[-i,4-i]$ باشد، نمودار $A_2\times A_1$ را روی محورهای مختصات نمایش دهید.

۹. رابطه‌ی R روی R^2 به‌صورت زیر تعریف شده است:

$(a,b)R(c,d) \Leftrightarrow |a|+|b|=|c|+|d|$

الف) نشان دهید R یک رابطه‌ی هم‌ارزی است.

ب) کلاس هم‌ارزی $[(1,3)]$ را رسم کنید.

۱۰. یک سکه پرتاب می‌کنیم. اگر سکه رو بیاید، سکه‌ی دیگری پرتاب می‌کنیم و اگر سکه پشت بیاید، یک تاس پرتاب می‌کنیم. اگر عدد رو شده در تاس زوج باشد، باز یک سکه پرتاب می‌کنیم و اگر عدد رو شده در تاس فرد باشد، از کیسه‌ی محتوی یک مهره‌ی سفید، یک مهره‌ی سبز و دو مهره‌ی آبی، یک مهره بیرون می‌آوریم:

الف) فضای نمونه‌ای این تجربه‌ی تصادفی را بیابید.

ب) پیشامد A آن‌که مهره‌ی سبز بیاید؟

ج) پیشامد B آن‌که در پرتاب تاس عدد ۳ بیاید؟

د) پیشامد A-B ؟

۱۱. یک تاس به گونه‌ای ساخته شده است که احتمال آمدن هر عدد، با مربع آن عدد، متناسب است. این تاس را پرتاب می‌کنیم. احتمال این‌که عدد فرد بیاید، چند است؟

۱۲. وتری را به تصادف از درون دایره‌ای به شعاع ۱ انتخاب می‌کنیم، احتمال آن را بیابید که طول این وتر از $\sqrt{3}$ بیشتر باشد.

۱۳. اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشند، ثابت کنید:

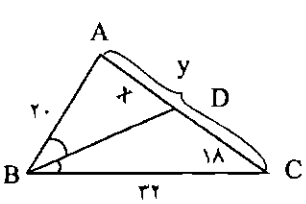
$P((A\cap B)')+P((A\cup B)')=P(A')+P(B')$

● محمدهاشم رستمی

هندسه‌ی ۲

۱. مستطیلی به ابعاد ۶ و ۸ داده شده است. نیم‌سازهای زاویه‌های درونی مستطیل را رسم می‌کنیم. ثابت کنید چهارضلعی حاصل از برخورد این نیم‌سازها یک مربع است. اندازه‌ی مساحت این مربع را به دست آورید. آیا رابطه‌ای بین مساحت این مربع و ضلع‌های مستطیل وجود دارد؟

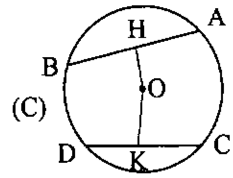
۲. در شکل، BD نیم‌ساز زاویه‌ی درونی B از مثلث ABC است. اندازه‌های x و y تعیین کنید.



۳. در مثلث ABC، میانه‌ی AM را رسم کرده‌ایم. اگر $AB < AC$ باشد، ثابت کنید $A\hat{M}B < A\hat{M}C$.

۴. زاویه‌ی xoy و خط d در یک صفحه داده شده‌اند. نقطه‌ای از یک صفحه را بیابید که خط d به فاصله‌ی l و از دو ضلع زاویه به یک فاصله باشد.

۵. در شکل AB و CD دو وتر از دایره‌ی C(O,5) هستند. OH عمود بر AB و OK عمود بر CD است.



الف) اگر $OH = 3$ باشد، اندازه‌ی وتر AB را تعیین کنید.

ب) اگر $CK = 3$ باشد، اندازه‌ی OK و CD را تعیین کنید.

پ) دو وتر AB و CD را با هم مقایسه کنید. کدام بزرگ‌تر است؟ کدام به مرکز دایره نزدیک‌تر است؟ چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

۶. از نقطه‌ی M که به فاصله‌ی ۲۶ از مرکز دایره‌ی C(O,10) قرار دارد، دو مماس MT و MT′ را بر دایره رسم می‌کنیم. سپس TT′ ، OT و OT′ و OM را رسم می‌کنیم. اگر H نقطه‌ی برخورد OM و TT′ باشد، حساب کنید:

الف) اندازه‌ی مماس‌های MT و MT′ ؟

ب) اندازه‌ی وتر TT′ ؟

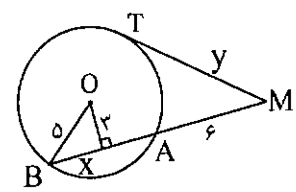
پ) اندازه‌ی پاره‌خط OH؟

۷. کمانی درخور زاویه‌ی ۱۲۰ درجه، مقابل به پاره‌خط AB و به طول ۸ رسم کرده‌ایم.

الف) اندازه‌ی شعاع دایره‌ای را که این کمان در خور بخشی از آن است، تعیین کنید.

ب) فاصله‌ی مرکز دایره از وتر AB را به دست آورید.

۸. اندازه‌ی x و y را با توجه به شکل داده شده به دست آورید. MT مماس بر دایره در نقطه‌ی T و نقطه‌ی O مرکز دایره است.



۹. دو دایره‌ی C(O,6) و C′(O′,8) با خط المرکزین $OO' = 20$ داده شده‌اند.

الف) وضع این دو دایره را نسبت به هم تعیین کنید.

ب) اندازه‌ی مماس مشترک برونی و درونی این دو دایره را در صورت وجود تعیین کنید.

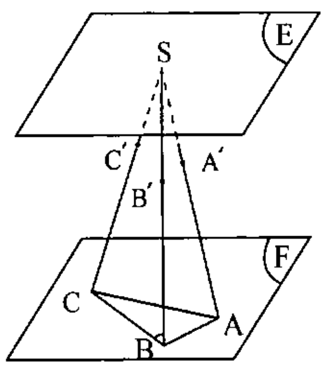
۱۰. نقطه‌های $A = (2,-4)$ ، $B = (-3,2)$ ، $C = (1,3)$ و $D = (6,-3)$ رأس‌های یک متوازی‌الاضلاع‌اند.

الف) ضابطه‌ی انتقالی را که رأس A را بر رأس C تصویر می‌کند، بنویسید.

ب) این متوازی‌الاضلاع و تصویرش را تحت انتقال بالا رسم کنید.

۱۱. تبدیل یافته‌ی خط $\Delta: 2x + 7y - 5 = 0$ تحت تبدیل $T(x,y) = (x+2, 2y-1)$ را تعیین کنید. آیا این تبدیل یافته با خط Δ موازی است؟

۱۲. دو صفحه‌ی موازی (E) و (F)، نقطه‌ی S روی صفحه‌ی E و مثلث ABC روی صفحه‌ی F داده شده‌اند. اگر نقطه‌های A′ ، B′ و C′ را به ترتیب روی SA ، SB و SC چنان بگیریم که این پاره‌خط را به نسبت $\frac{1}{3}$ از رأس S قطع کنند، ثابت کنید صفحه‌ی مثلث A′B′C′ با صفحه‌ی (F) موازی است.



۱۳. چهار نقطه‌ی A ، B ، C و D داده شده‌اند. مکان هندسی نقطه‌ای از فضا را بیابید که از چهار نقطه‌ی A ، B ، C و D به یک فاصله باشد.



کلیه اعداد از صفر تا ۹ هر کدام یک‌بار نوشته شده و جالب آن‌که این عددهای ده‌رقمی به کلیه اعداد از ۲ تا ۱۸ قابل قسمت هستند.

۴۸۷۶۳۹۱۵۲۰

۳۷۸۵۹۴۲۱۶۰

این عدد ۹ رقمی را خوب نگاه کنید عدد جالبی است.
در این عدد کلیه اعداد از یک تا ۹ هر کدام یک‌مرتبه آمده‌اند و خاصیت جالب دیگر این عدد آن است دو عدد اول آن به عدد ۲، سه عدد اول آن به عدد ۳، چهار عدد اول آن به عدد ۴، پنج عدد اول آن به عدد ۵ و بالاخره نه عدد کل آن به عدد ۹ قابل قسمت است.

۳۸۱۶۵۴۷۲۹

حل تشریحی مسائل

ریاضی
سال اول

۱. می‌دانیم که: $\sqrt{۲}\simeq ۱/۴=\frac{۱۴}{۱۰}=\frac{۷}{۵}$

بنابراین، بین $\frac{۴}{۳}$ و $\frac{۷}{۵}$ دو عدد گویا به دست می‌آوریم:

$$\frac{۴}{۳}=\frac{۴\times ۵}{۳\times ۵}=\frac{۲۰\times ۳}{۱۵\times ۳}=\frac{۶۰}{۴۵}$$

$$\frac{۷}{۵}=\frac{۷\times ۳}{۵\times ۳}=\frac{۲۱\times ۳}{۱۵\times ۳}=\frac{۶۳}{۴۵}$$

$$\frac{۶۰}{۴۵}<\frac{۶۱}{۴۵}<\frac{۶۲}{۴۵}<\frac{۶۳}{۴۵}$$

۲.

$$A=۳(\sqrt{۵}-۱)+(۹-۳\sqrt{۵})$$
$$=۳\sqrt{۵}-۳+۹-۳\sqrt{۵}=۶$$

۳.

$$A\overset{\triangle}{H}C: AC^۲=CH^۲+AH^۲$$
$$=۱^۲+۱^۲=۲$$
$$\Rightarrow AC=\sqrt{۲}$$
$$A\overset{\triangle}{H}B: AB^۲=AH^۲+HB^۲$$
$$=۱^۲+۲^۲=۵$$
$$\Rightarrow AB=\sqrt{۵}$$
$$\Rightarrow DA=AB=\sqrt{۵}$$

$$OD=OA-DA$$
$$=(OC+CA)-DA$$
$$=۱+\sqrt{۲}-\sqrt{۵}$$

۴.

	a	۲	b
x	ax	۲x	bx
۳	۳a	۶	۳b

۵. الف)

$n=-۲\Rightarrow\sqrt{۴n-۱}=\sqrt{-۹}$ غیرقابل قبول

$n=-۱\Rightarrow\sqrt{۴n-۱}=\sqrt{-۵}$ غیرقابل قبول

$n=۰\Rightarrow\sqrt{۴n-۱}=\sqrt{-۱}$ غیرقابل قبول

$n=۱\Rightarrow\sqrt{۴n-۱}=\sqrt{۳}$ قابل قبول

$n=۲\Rightarrow\sqrt{۴n-۱}=\sqrt{۷}$ قابل قبول

$$A=\{\sqrt{۳},\sqrt{۷}\}$$

ب)

$$\frac{۲-x}{x-۴}+۱>۰\Rightarrow\frac{۲-x+x-۴}{x-۴}>۰$$
$$\Rightarrow\frac{-۲}{x-۴}>۰\Rightarrow\frac{x-۴}{۲}>۰\Rightarrow x>۴$$
$$B=\{۵,۶,۷,...\}$$

۶.

$$\begin{cases}x-y=۶\\ ۲x+۳y=۶\end{cases}\Rightarrow x=۴, y=-۲$$
$$\frac{xy+۱}{x+yx}=\frac{(۴)(-۲)+۱}{۴+(-۲)(۴)}=\frac{-۸+۱}{۴-۸}=\frac{۷}{۴}$$

۷. الف)

$$A=(۱+۸)^{-۱}+(۱+\frac{۱}{۸})^{-۱}=۹^{-۱}+(\frac{۹}{۸})^{-۱}$$
$$=\frac{۱}{۹}+\frac{۸}{۹}=۱$$

ب)

$$B=\frac{۲^{۲۸}(۲^۲+۲+۱)}{۲^{۲۷}}=۱۴$$

۸.

$$a^{۵۰}=۲a^{۲۵}\Rightarrow\frac{a^{۵۰}}{a^{۲۵}}=۲\Rightarrow a^{۲۵}=۲$$
$$a^{۱۰۰}=(a^{۲۵})^۴=۲^۴=۱۶$$

۹.

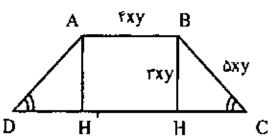
$$۲^n+۲^{n+۲}=۱۶۰\Rightarrow ۲^n(۱+۲^۲)=۱۶۰$$
$$\Rightarrow ۲^n=\frac{۱۶۰}{۵}=۳۲=۲^۵\Rightarrow n=۵$$

۱۰.

$$A=\frac{۱}{۲\sqrt{۳^۲\times ۲}-\sqrt{۵^۲\times ۲}-۲\sqrt{۲^۳}}$$
$$=\frac{۱}{۶\sqrt{۲}-۵\sqrt{۲}-۴\sqrt{۲}}=\frac{۱}{-۳\sqrt{۲}}\times\frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۲}}=\frac{\sqrt{۲}}{-۶}$$

۱۱.

$$B\overset{\triangle}{H}C: BC^۲=BH^۲+HC^۲$$
$$\Rightarrow(۵xy)^۲=(۳xy)^۲+HC^۲$$
$$\Rightarrow ۲۵x^۲y^۲=۹x^۲y^۲+HC^۲\Rightarrow HC=۴xy$$



$$\angle D=\angle C\Rightarrow\begin{cases}AD=BC=۵xy\\ DH'=HC=۴xy\\ H'H=AB=۴xy\end{cases}$$

محیط $=AB+BC+CD+DA$

$$=۴xy+۵xy+۱۲xy+۵xy=۲۶xy$$

مساحت $=\frac{(AB+CD)\times BH}{۲}$

$$=\frac{(۴xy+۱۲xy)\times ۳xy}{۲}=۲۴x^۲y^۲$$

۱۲. الف)

$$A=[(۴a^۲+x^۴)+۲ax^۲][(۴a^۲+x^۴)-۲ax^۲]$$
$$=(۴a^۲+x^۴)^۲-(۲ax^۲)^۲$$
$$=۱۶a^۴+۸a^۲x^۴+x^۸-۴a^۲x^۴=۱۶a^۴+۴a^۲x^۴+x^۸$$

ب)

$$B=(۳a-b)^۲(۹a^۲+۳ab+b^۲)^۲$$
$$=[(۳a-b)(۹a^۲+۳ab+b^۲)]^۲$$
$$=(۲۷a^۳-b^۳)^۲$$
$$=۷۲۹a^۶-۵۴a^۳b^۳-b^۶$$

۱۳.

$$(a+b)^۳=a^۳+b^۳+۳a^۲b+۳ab^۲$$
$$\Rightarrow a^۳+b^۳=(a+b)^۳-۳ab(a+b)$$
$$=(۵)^۳-۳(۳)(۵)=۸۰$$

۱۴. الف)

$$A = x^2 - (y^2 - 4y + 4)$$
$$= x^2 - (y-2)^2$$
$$= (x-(y-2))(x+(y-2))$$
$$= (x-y+2)(x+y-2)$$

ب)

$$B = x^3 - x - 2x + 2 = (x^3 - x) - 2(x-1)$$
$$= x(x^2-1) - 2(x-1)$$
$$= x(x-1)(x+1) - 2(x-1)$$
$$= (x-1)(x^2+x-2)$$

۱۵.

$$OA = \sqrt{(2a+1)^2 + (a-2)^2}$$
$$\Rightarrow \sqrt{10} = \sqrt{4a^2 + 4a + 1 + a^2 - 4a + 4}$$
$$\Rightarrow 10 = 5a^2 + 5 \Rightarrow a^2 = 1 \Rightarrow a = \pm 1$$

۱۶.

$$\begin{cases} y = x + 2 \\ y = 2x - 1 \end{cases} \Rightarrow x = 3, \ y = 5$$

$\Rightarrow M(3,5)$ محل تلاقی d_1 و d_2

$m_{AB} = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{3-1}{2-2}$ تعریف نشده

چون m_{AB} تعریف نشده است، پس خط AB موازی محور yهاست. در نتیجه، خطی که بر AB عمود است، موازی محور xها می‌شود که شیب $m = 0$ دارد. بنابراین داریم:

$$(y-5) = 0(x-3) \Rightarrow y = 5$$

۱۷.

$$\overset{\triangle}{ABH}: \sin 60^\circ = \frac{b}{24} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{b}{24}$$
$$\Rightarrow b = 12\sqrt{3}$$
$$\overset{\triangle}{ABH}: \cos 60^\circ = \frac{a}{24} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{a}{24} \Rightarrow a = 12$$

$$\overset{\triangle}{AHC}: \tan 45^\circ = \frac{d}{AH} \Rightarrow 1 = \frac{d}{12\sqrt{3}}$$
$$\Rightarrow d = 12\sqrt{3}$$
$$\overset{\triangle}{AHC}: \sin 45^\circ = \frac{d}{c} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{12\sqrt{3}}{c}$$
$$\Rightarrow c = 12\sqrt{6}$$

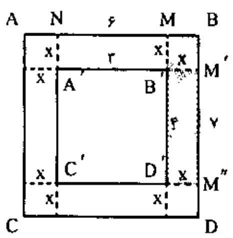
۱۸.

$$I = \frac{\dfrac{(xy+1)^m}{y^m} \times \dfrac{(xy-1)^n}{y^n}}{\dfrac{(xy+1)^m}{x^m} \times \dfrac{(xy-1)^n}{x^n}} = \frac{x^{n+m}}{y^{n+m}}$$

۱۹.

$$S_{ABCD} = S_{A'B'C'D'} + 4S_{MBM'B'} + 2S_{B'M'M''D'} + 2S_{NMB'A'}$$
$$42 = 12 + 4x^2 + 8x + 6x$$
$$\Rightarrow 4x^2 + 14x - 30 = 0$$

$$\Rightarrow 2x^2 + 7x - 15 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -5 & \text{غیر قابل قبول} \\ x = \dfrac{3}{2} & \text{قابل قبول} \end{cases}$$



۲۰.

$$200 < T < 300 \Rightarrow 200 < 25(x-3) + 30 < 300$$
$$\Rightarrow 200 < 25x - 45 < 300$$
$$\Rightarrow 245 < 25x < 345$$
$$\Rightarrow \frac{245}{25} < x < \frac{345}{25}$$
$$\Rightarrow 9/8 < x < 13/8$$

ریاضی سال دوم

۱.

$$a_3 = a_1 + 2d, \ a_5 = a_1 + 4d, \ a_6 = a_1 + 5d, \ a_4 = a_1 + 3d$$
$$\Rightarrow \begin{cases} a_3 + a_5 = 16 \\ a_6 = 2a_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a_1 + 6d = 16 \\ a_1 + 5d = 2(a_1 + 3d) \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} a_1 + 3d = 8 \\ a_1 + d = 0 \end{cases} \Rightarrow a_1 = -4, \ d = 4, \ a_n = a_1 + (n-1)d$$
$$\Rightarrow a_n = -4 + (n-1)4 \Rightarrow a_n = 4n - 8$$

۲.

$$(t+2)^2 = (t-1)(3t) \Rightarrow t^2 + 4t + 4 = 3t^2 - 3t$$
$$\Rightarrow 2t^2 - 7t - 4 = 0 \Rightarrow t = \frac{7 \pm \sqrt{49+32}}{4} = \frac{7 \pm 9}{4} \Rightarrow t = 4, -\frac{1}{2}$$

۳.

$$a_1 = 1, \ a_2 = \frac{5}{7}, \ a_3 = \frac{7}{11}, \ a_4 = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}, \ a_5 = \frac{11}{19}$$

$$1, \frac{5}{7}, \frac{7}{11}, \frac{3}{5}, \frac{11}{19}, \ldots$$

حال جملات این دنباله را از $\frac{1}{2}$ کم می‌کنیم و دنباله‌ی زیر را می‌سازیم:

$$\frac{1}{2} - 1, \ \frac{1}{2} - \frac{5}{7}, \ \frac{1}{2} - \frac{7}{11}, \ \frac{1}{2} - \frac{3}{5}, \ \frac{1}{2} - \frac{11}{19}, \ldots$$
$$\frac{-1}{2}, \ \frac{-3}{14}, \ \frac{-3}{22}, \ \frac{-1}{10}, \ \frac{-3}{38}, \ldots$$

چنان که می‌بینیم، جملات این دنباله (دنباله‌ی تفاضل‌ها) به تدریج زیاد و به صفر نزدیک می‌شوند. بنابراین، دنباله‌ی اصلی به $\frac{1}{2}$ نزدیک می‌شود.

۴. الف)

$$\left[(\sqrt{5})^{3-\sqrt{2}}\right]^{3+\sqrt{2}} = (\sqrt{5})^{(3-\sqrt{2})(3+\sqrt{2})} = (\sqrt{5})^{9-2}$$
$$= (\sqrt{5})^7 = \left[(\sqrt{5})^2\right]^3 . \sqrt{5} = 5^3 . \sqrt{5} = 125\sqrt{5}$$

ب) $\frac{۱}{\sqrt{۳}-\sqrt{۲}}=\frac{\sqrt{۳}+\sqrt{۲}}{(\sqrt{۳}-\sqrt{۲})(\sqrt{۳}+\sqrt{۲})}=\frac{\sqrt{۳}+\sqrt{۲}}{۳-۲}=\sqrt{۳}+\sqrt{۲}$

$$\Rightarrow(\sqrt{۵}-۲)^{\sqrt{۳}+\sqrt{۲}}.(\sqrt{۵}+۲)^{\frac{۱}{\sqrt{۳}-\sqrt{۲}}}$$

$$=(\sqrt{۵}-۲)^{\sqrt{۳}+\sqrt{۲}}.(\sqrt{۵}+۲)^{\sqrt{۳}+\sqrt{۲}}=\left[(\sqrt{۵}-۲)(\sqrt{۵}+۲)\right]^{\sqrt{۳}+\sqrt{۲}}$$

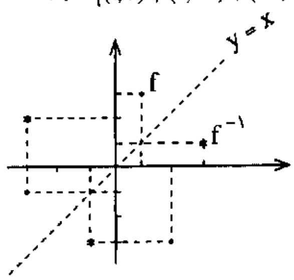
$$=(۵-۴)^{\sqrt{۳}+\sqrt{۲}}=(۱)^{\sqrt{۳}+\sqrt{۲}}=۱$$

.۵
$$\left.\begin{matrix}(۱,a+b)\in f\\(۱,۳)\in f\end{matrix}\right\}\Rightarrow a+b=۳$$

$$\left.\begin{matrix}(-۳,-۱)\in f\\(a-b,-۱)\in f\end{matrix}\right\}\Rightarrow a-b=-۳$$

$$\begin{cases}a+b=۳\\a-b=-۳\end{cases}\Rightarrow a=۰\ ,\ b=۳$$

$$\Rightarrow f=\{(۱,۳)\ ,\ (۲,-۳)\ ,\ (-۳,-۱)\}$$



$f^{-1}=\{(۳,۱)\ ,\ (-۳,۲)\ ,\ (-۱,-۳)\}$

.۶
$f(x)=ax+b$

$$\Rightarrow\begin{matrix}f(۲)=۲a+b=۱\\f(۳)=۳a+b=-۱\end{matrix}\Rightarrow\begin{cases}۲a+b=۱\\۳a+b=-۱\end{cases}$$

$$\Rightarrow a=-۲\ ,\ b=۵\quad f(x)=-۲x+۵$$

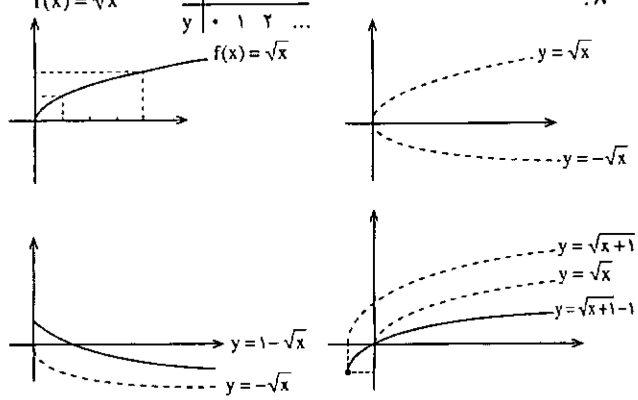
.۷
$$D_f=R-\left\{\frac{۱}{۴}\right\},D_g=(-\infty,۳)$$

$$g(-۱)=\frac{۲}{\sqrt{۱+۳}}=۱\Rightarrow f(g(-۱))=f(۱)=\frac{۳}{۳}=۱$$

$$f(\frac{۱}{۲})=\frac{۲}{۲-۱}=۲\Rightarrow g(f(\frac{۱}{۲}))=g(۲)=\frac{۲}{\sqrt{۱}}=۲$$

.۸
$f(x)=\sqrt{x}$

x	۰	۱	۴	...
y	۰	۱	۲	...



.۹
$$\frac{(x-۲)(۳-x)}{(x+۲)}\geq ۰$$

$x-۲=۰\Rightarrow x=۲$

$x+۲=۰\Rightarrow x=-۲$

$۳-x=۰\Rightarrow x=۳$

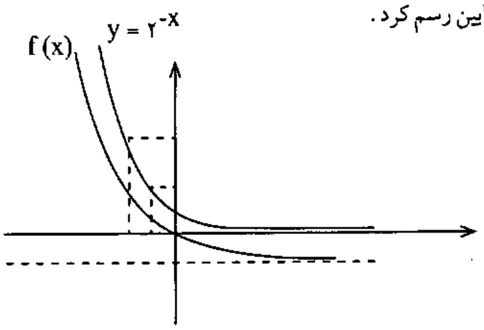
x	$-\infty$ … -۲	-۲ … ۲	۲ … ۳	۳ … $+\infty$
$x-۲$	−	−	+	+
$۳-x$	+	+	+	−
$x+۲$	−	+	+	+
p	+	−	+	−

$D_f=(-\infty,-۲)\cup[۲,۳]$

۱۰. ابتدا نمودار $y=۲^{-x}$ را رسم کنید.

x	...	−۲	−۱	۰	۱	۲	...
y		۴	۲	۱	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۴}$	

از روی نمودار $y=۲^{-x}$ می‌توان نمودار تابع اصلی را با یک واحد انتقال به پایین رسم کرد.



.۱۱
$$y=c(۱+r)^t\quad r=۰/۰۲,c=۱۰۰۰۰۰,t=۴$$

$$\Rightarrow y=۱۰۰۰۰۰\times(۱/۰۲)^۴\approx ۱۰۰۰۰۰\times ۱/۰۸۲۴۳\approx ۱۰۸۲۴۳$$

.۱۲
$$\log_c^a=x\Rightarrow a=c^x,\log_c^b=y\Rightarrow b=c^y$$

$$\Rightarrow\frac{a}{b}=\frac{c^x}{c^y}=c^{x-y}\Rightarrow x-y=\log_c^{\frac{a}{b}}\Rightarrow$$

$$\log_c^{\frac{a}{b}}=\log_c^a-\log_c^b$$

.۱۳
$$\log_x^{x+۱}+\log_x^{x+۲}-\log_x^۶=۱\Rightarrow$$

$$\log_x^{\frac{(x+۱)(x+۲)}{۶}}=۱\Rightarrow\frac{(x+۱)(x+۲)}{۶}=x\Rightarrow$$

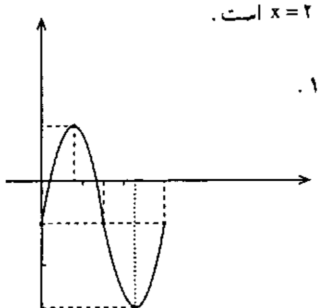
$$x^۲+۳x+۲=۶x\Rightarrow x^۲-۳x+۲=۰\Rightarrow(x-۱)(x-۲)=۰\Rightarrow$$

$x=۱$ یا $x=۲$

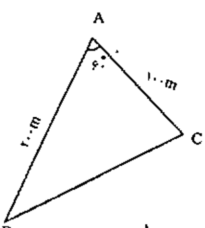
وچون xپایه‌ی لگاریتم است، بنابراین $x\neq۱$ و پاسخ قابل قبول تنها $x=۲$ است.

.۱۴
$$T=\frac{۲\pi}{۲}=\pi\Rightarrow x\in[۰,\pi]$$

x	۰	$\frac{\pi}{۴}$	$\frac{\pi}{۲}$	$\frac{۳\pi}{۴}$	π
y	−۱	۱	−۱	−۳	−۱



.۱۵



$$BC^۲=AB^۲+AC^۲-۲AB.AC.\cos\hat{A}$$

$$=۴۰۰۰۰+۱۰۰۰۰-۲\times۲۰۰\times۱۰۰\times\frac{۱}{۲}$$

$$=۳۰۰۰۰\Rightarrow BC=\sqrt{۳۰۰۰۰}=۱۰۰\sqrt{۳}$$

$$S_{ABC}=\frac{۱}{۲}AB.AC.SinA=\frac{۱}{۲}\times۲۰۰\times۱۰۰\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}=۵۰۰۰\sqrt{۳}$$

۱۶.
$$A^{-1}=\frac{1}{1\times3-2\times1}\begin{bmatrix}3&-2\\-1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&-2\\-1&1\end{bmatrix}$$
$$A^2=\begin{bmatrix}1&2\\1&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2\\1&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&8\\4&11\end{bmatrix}$$
$$B=A^{-1}-A^2=\begin{bmatrix}3&-2\\-1&1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}3&8\\4&11\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&-10\\-5&-10\end{bmatrix}$$

۱۷. توجه می‌کنیم که اگر ی به آخر برود، بدون نقطه است. پس می‌توانیم کلمه‌های سه حرفی بدون نقطه هم داشته باشیم. تعداد آن‌ها به کمک اصل ضرب به‌دست می‌آید:

$(2)(1)(1)=2$

تعداد کلمات دو حرفی بدون نقطه هم طبق اصل ضرب برابر است با $2\times1=2$. بنابراین، تعداد کل کلمات بدون نقطه برابر است با: $2+2=4$

۱۸. سه زن و سه مرد می‌خواهیم:

الف) $\binom{6}{3}\binom{8}{3}=20\times56=1120$

چهار مرد و دو زن یا پنج مرد و یک زن و یا شش مرد می‌خواهیم:

ب) $\binom{6}{2}\binom{8}{4}+\binom{6}{1}\binom{8}{5}+\binom{8}{6}=15\times70+6\times56+28$

$=1050+336+28=1414$

هندسه‌ی (۱)

۱. باید داشته باشیم:
$$25-17<2m-1<25+17$$
$$\Rightarrow 8<2m-1<42\Rightarrow 9<2m<43$$
$$\Rightarrow \frac{9}{2}<m<\frac{43}{2}$$

۲. داریم: $x=35^\circ,\ y=180^\circ-(60^\circ+35^\circ)=180^\circ-95^\circ=85^\circ$

۳. داریم:

تعداد قطرهای n ضلعی $=\frac{n(n-3)}{2}$ و $n=27$، تعداد قطرها $=\frac{27(27-3)}{2}$

جواب مسئله ۲۹۷=۲۷-۳۲۴ و ۳۴۲=تعداد قطرهای ۲۷ضلعی.

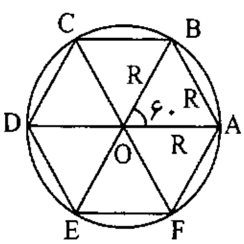
۴. الف) این دو مثلث قائم‌الزاویه به حالت برابری وتر و یک زاویه‌ی حاده هم‌نهشت‌اند، زیرا:
$$AB=CD\Rightarrow\frac{AB}{2}=\frac{CD}{2}$$
$$\Rightarrow CF=AE,\ E\hat{M}A=C\hat{N}F=90^\circ$$
$AD\parallel CD$ و AC قاطع $\Rightarrow E\hat{A}M=N\hat{C}F$

ب) دو مثلث AMB و CND به حالت (ض‌زض) هم‌نهشت‌اند، زیرا بنا به قسمت الف، از هم‌نهشتی دو مثلث AME و CFN نتیجه می‌شود که CN=AM است. از طرف دیگر، AB=CD است و دو زاویه‌ی $N\hat{C}D$ و $B\hat{A}C$ هم به دلیل موازی بودن دو خط AB و CD و مورب AC مساوی‌اند. در نتیجه، MB=ND است.

۵. ارتفاع مثلث را h می‌گیریم. قاعده‌ی نظیر آن $\frac{h}{3}$ خواهد بود. با توجه به دستور محاسبه‌ی مساحت مثلث داریم:
$$S=\frac{1}{2}\times a\times h_a\Rightarrow 294=\frac{1}{2}\times\frac{h}{3}\times h$$
$$\Rightarrow 1764=h^2$$
$\Rightarrow h=42$ و ارتفاع مثلث ۴۲ و $a=\frac{h}{3}=\frac{42}{3}=14$ ضلع نظیر ۱۴

۶. در مثلث‌های قائم‌الزاویه‌ی ABH و BAC داریم:
$$\Delta ABH: AB^2=AH^2+BH^2$$
$$=25+144=169\Rightarrow AB=13$$
$$AB^2=BH.BC$$
$$\Rightarrow 13^2=5\times BC\Rightarrow BC=\frac{169}{5}$$
$$AC^2+AB^2=BC^2$$
$$\Rightarrow AC^2+169=(\frac{169}{5})^2\Rightarrow AC=\frac{156}{5}$$
$S_{\text{مثلث}}=\frac{1}{2}AB\times AC=\frac{1}{2}\times13\times\frac{156}{5}=\frac{1014}{5}$ واحد سطح

۷. می‌دانیم که اندازه‌ی ضلع شش‌ضلعی منتظم محاط در یک دایره، مساوی شعاع دایره است. زیرا اگر از o مرکز دایره، به رأس‌های شش‌ضلعی منتظم وصل کنیم، ۶ مثلث متساوی‌الاضلاع تشکیل می‌شود.



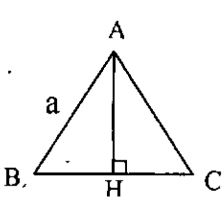
برای هر یک از مثلث‌ها، مثلاً مثلث AOB داریم:
$$OA=OB=R,$$
$A\hat{O}B=\frac{360^\circ}{6}=60^\circ\Rightarrow$ مثلث OAB متساوی‌الاضلاع است
$$\Rightarrow OA=OB=AB=R$$

بنابراین:

الف) اندازه‌ی ضلع شش‌ضلعی منتظم محاط در دایره‌ی به شعاع ۱۶، مساوی ۱۶ است.

ب) مساحت شش‌ضلعی منظم به ضلع a برابر است با:
$$S_{\text{شش‌ضلعی}}=6\times S_{OAB}=6\times\frac{1}{2}\times\frac{a^2\sqrt{3}}{4}=\frac{3a^2\sqrt{3}}{4}$$
$$\Rightarrow S_{\text{شش‌ضلعی}}=\frac{3\times16^2\times\sqrt{3}}{4}=192\sqrt{3}$$

نکته: مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع a برابر $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ است، زیرا اگر ارتفاع AH را رسم کنیم، چون AH عمود منصف ضلع BC است، پس $BH=\frac{a}{2}$ و از آن‌جا



در مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABH داریم:

$$AH^2 = \sqrt{AB^2 - BH^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \sqrt{\frac{3a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

از آن‌جا:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}\times a\times ha = \frac{1}{2}\times a\times\frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

۸. بنا به قضیه‌ی تالس در مثلث داریم:

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} \Rightarrow \frac{x}{x+2} = \frac{x+4}{2x-1}$$
$$\Rightarrow 2x^2 - x = x^2 + 6x + 8$$
$$\Rightarrow x^2 - 7x - 8 = 0 \Rightarrow x = 8, x = -1 < 0$$

۹. الف) می‌دانیم که نسبت محیط‌های دو مثلث با نسبت ضلع‌های دو مثلث با همان نسبت تشابه دو مثلث برابر است. پس اگر ضلع‌های مثلث خواسته شده را 'a'، b و 'c ضلع‌های مثلث داده شده را a، b و c بنامیم، داریم:

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = \frac{a+b+c}{a'+b'+c'} = \frac{2p}{2p'}$$
$$, 2p = a+b+c = 6+12+20 = 38$$
$$, 2p' = 114, \frac{6}{a'} = \frac{12}{b'} = \frac{20}{c'} = \frac{38}{114} = \frac{1}{3}$$
$$\Rightarrow a' = 18, b' = 36, c' = 60$$

ب) می‌دانیم که نسبت مساحت‌های دو مثلث متشابه مساوی مجذور نسبت تشابه دو مثلث است. پس داریم:

$$\frac{S}{S'} = (\frac{1}{3})^2 = \frac{1}{9}$$

۱۰. دو مثلث CDE و ABC متشابه‌اند، زیرا $\hat{A} = E\hat{D}C = \alpha$ و $\hat{C} = \hat{C}$ است پس داریم:

$$\frac{CE}{BC} = \frac{DE}{AB} = \frac{DC}{AC}, AC = 16+4 = 20,$$

$$\Rightarrow \frac{16}{x+12} = \frac{6}{y} = \frac{12}{20} \Rightarrow y = \frac{20\times 6}{12} = 10$$
$$, x+12 = \frac{16\times 20}{12} \Rightarrow x = \frac{44}{3}$$

۱۱. حجم مکعب را محاسبه می‌کنیم. اگر ضلع مکعب را a بگیریم، می‌دانیم که اندازه‌ی قطر آن $a\sqrt{3}$ است. پس داریم:

$a\sqrt{3} = 6\sqrt{3} \Rightarrow a = 6$ ضلع مکعب

$\Rightarrow$ حجم مکعب $= V = a^3 = 6^3 = 216$

از طرف دیگر، حجم مکعب‌مستطیل برابر است با:

مکعب مستطیل $V = 2k\times 3k\times 5k = 30k^3$

از آن‌جا، بنا به فرض مسئله داریم:

حجم مکعب $\times 240 =$ حجم مکعب مستطیل

$$\Rightarrow 30k^3 = 240\times 216$$
$$\Rightarrow k^3 = 1728 \Rightarrow k = \sqrt[3]{1728} = 12$$

$\Rightarrow 2k = 24, 3k = 36, 5k = 60$ ابعاد مکعب مستطیل

از آن‌جا داریم:

قطر مکعب مستطیل $= \sqrt{24^2+36^2+60^2} = 12\sqrt{38}$

۱۲. الف) می‌دانیم که ضلع شش‌ضلعی منتظم محاط در یک دایره، برابر شعاع آن دایره است. پس اندازه‌ی ضلع شش‌ضلعی منتظم قاعده‌ی هرم برابر شعاع قاعده‌ی استوانه یعنی ۱۲ است و مساحت شش‌ضلعی منتظم به ضلع ۱۲ برابر است با:

قاعده‌ی هرم $S = \frac{6a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}a^2}{2}$

$$= \frac{3\sqrt{3}\times 12^2}{2} = 216\sqrt{3}$$

از آن‌جا حجم هرم برابر است با:

ارتفاع هرم × مساحت قاعده × $\frac{1}{3}$ = حجم هرم

$\Rightarrow$ حجم هرم $= \frac{1}{3}\times 216\sqrt{3}\times 18 = 1296\sqrt{3}$

ب) شعاع این کره مساوی شعاع قاعده‌ی استوانه، یعنی $R = 12$ است. پس داریم:

حجم کره $= \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\times\pi\times 12^3 = 2304$ واحد حجم

پ) ابتدا باید حجم استوانه و سپس:

[(حجم کره + حجم هرم) − حجم استوانه] را به دست آوریم:

حجم استوانه = سطح قاعده × ارتفاع $\Rightarrow$ حجم استوانه $= \pi\times 12^2\times 42 = 3048\pi$

$\Rightarrow$ حجم فضای خالی موردنظر $= 3048\pi - (1296\sqrt{3} + 2304\pi)$

$\Rightarrow$ حجم فضای موردنظر $= 744\pi - 1296\sqrt{3}$

ت) ارتفاع هرم مساوی ۱۸ و قطر مکعب برابر ۲۴=۱۲×۲ است. از آن‌جا مجموع این دو مقدار ۴۲ = ۲۴ + ۱۸ است که درست مساوی ارتفاع استوانه است. پس شرط محاط بودن و مماس بودن در استوانه برقرار است. اگر ارتفاع استوانه بیشتر از ۴۲ باشد، کره نمی‌تواند بر قاعده‌ی دیگر استوانه مماس شود، بلکه فضایی خالی در این قسمت ایجاد می‌شود.

اگر شعاع استوانه کمتر از ۴۲ باشد، بخشی از کره بیرون از استوانه می‌ماند که محاسبه‌ی حجم باقی‌مانده‌ی استوانه به بررسی بیشتری نیاز دارد. از جمله باید دایره‌ی فصل مشترک کره با استوانه مشخص شود.

نکته: در دو حالت اخیر، در به‌کار بردن واژه‌های محاطی بودن، محیطی بودن درون و برون یک جسم، باید دقت لازم را به‌کار ببریم.

حسابان

۱.

$$fog(x)=f(g(x))=f(\frac{1}{\sqrt{x}})^2=\frac{1}{x}$$

$$gof(x)=g(f(x))=g(x^2)=\frac{1}{\sqrt{x^2}}=\frac{1}{|x|}$$

با توجه به ضابطه مشخص می‌شود، $gof(x)\neq fog(x)$ و از طرف دیگر، با توجه به دامنه‌ی تعریف دو تابع، چون:

$$D_{fog}=\left\{x\middle|x\in D_g, g(x)\in D_f\right\}=\left\{x\middle|x\in(0,+\infty),\frac{1}{\sqrt{x}}\in R\right\}=(0,+\infty)$$

$$D_{gof}=\left\{x\middle|x\in D_f, f(x)\in D_g\right\}=\left\{x\middle|x\in R, x^2\in(0,+\infty)\right\}=R-\{0\}$$

$gof(x)\neq fog(x)$ است.

۲.

$$f(x)=\log(x+\sqrt{x^2-1})$$

$$f(2x^2-1)=\log(2x^2-1+\sqrt{(2x^2-1)^2-1})$$

$$f(2x^2-1)=\log(x^2+x^2-1+\sqrt{(4x^4-4x^2+1-1)})$$

$$f(2x^2-1)=\log(x^2+x^2-1+\sqrt{4x^2(x^2-1)})$$

$$=\log(x+\sqrt{x^2-1})^2=2\log(x+\sqrt{x^2-1})=2f(x)$$

۳.

$$g(x)=2-3f(4+5x),\ \ g(x)=y\Rightarrow x=g^{-1}(y)$$

$$y=2-3f(4+5x)\Rightarrow f(4+5x)=\frac{2-y}{3}$$

$$\Rightarrow f^{-1}(\frac{2-y}{3})=4+5x\Rightarrow x=\frac{f^{-1}(\frac{2-y}{3})-4}{5}$$

$$g^{-1}(y)=\frac{f^{-1}(\frac{2-y}{3})-4}{5}\Rightarrow g^{-1}(x)=\frac{f^{-1}(\frac{2-y}{3})-4}{5}$$

۴. دامنه نسبت به مبدأ مختصات متقارن است، زیرا:

$$\sqrt{x^2+1}-x\geq 0\Rightarrow\sqrt{x^2+1}\geq x\Rightarrow D_f=R$$

$$f(-x)=\log(\sqrt{(-x)^2+1}-(-x))$$

$$=\log(\sqrt{x^2+1}+x)\times\frac{\sqrt{x^2+1}-x}{\sqrt{x^2+1}-x}$$

$$=\log\frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}-x}=\log\frac{1}{\sqrt{x^2+1}-x}$$

$$=\log(\sqrt{x^2+1}-x)^{-1}=-\log(\sqrt{x^2+1}-x)=-f(x)$$

پس تابع f(x) فرد است.

۵.

الف) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{(3x-1)(x+1)}{(x+1)(x^2-x+2)}=\lim\limits_{x\to -1}\frac{3x-1}{x^2-x+2}=\frac{-4}{2}=-2$

ب) $\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{x^2-1}{1-\sqrt{x}}\times\frac{1+\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{(x^2-1)(1+\sqrt{x})}{1-x}$

$$=\lim_{x\to 1^-}\frac{(x-1)(x+1)(1+\sqrt{x})}{-(x-1)}=\lim_{x\to 1^-}\frac{(x+1)(1+\sqrt{x})}{-1}=-4$$

ج) $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{x+\sqrt{3}}{\sqrt{x^2(1+\frac{1}{x})}}=\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{x(1+\frac{\sqrt{3}}{x})}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x}}}=\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{x(1+\frac{\sqrt{3}}{x})}{x\sqrt{1+\frac{1}{x}}}=1$

۶.

$$f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\quad D_f: x^2-1>0\to x^2>1\to\begin{cases}x>1\\x<-1\end{cases}$$

مجانب‌های قائم:

$$y\to\pm\infty:\ \sqrt{x^2-1}=0\to x^2-1=0\to x^2=1\to\begin{cases}D_1: x=1\\D_2: x=-1\end{cases}$$

$$x\to\pm\infty:\ y=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$$

مجانب‌های افقی:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{|x|}\begin{cases}y=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{|x|}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{x}=1\to D_3: y=1\\ y=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x}{|x|}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x}{-x}=-1\to D_4: y=-1\end{cases}$$

۷.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 3^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 3^+}\sqrt{x^2-2x+1}=2\\ \lim\limits_{x\to 3^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 3^-}([x-1]+2a)=1+2a\\ f(3)=3+b-1=b+2\end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}1+2a=2\Rightarrow a=\frac{1}{2}\\ b+2=2\Rightarrow b=0\end{cases}$$

۸.

الف) $f'(x)=\frac{2x-5}{3\sqrt[3]{(x^2-5x)^2}}.\sin(3x)+3\cos(3x).\sqrt[3]{x^2-5x}$

$$g'(x)=\frac{5}{\sqrt{1-(5x)^2}}-(-\frac{1}{x^2})(1+\tan^2(\frac{1}{x}))$$

ب) $y'=(10x-1)f'(5x^2-x)=(10x-1)\sqrt{(5x^2-x)^2+1}$

۹.

$$y=\frac{(a+2)x^2+x(-4a+b)-4b}{x-4}\to a+2=0\to a=-2$$

$$\begin{cases} x\to\pm\infty \Rightarrow y=\dfrac{-4a+b}{1}=8+b \\ y\to\pm\infty \Rightarrow x-4=0\to x=4 \end{cases} \Rightarrow \omega\left|\begin{matrix}4\\8+b\end{matrix}\right.$$

$$\Rightarrow 8+b=2\times 4\to b=0$$

.۱۰

$$M(1,2)\xrightarrow{\text{مختصات در تابع}} 2=a+b+c+d \quad (I)$$

$$y'=3ax^2+2bx+c\to 3a+2b+c=0 \quad (II)$$

$$y''=6ax+2b\to 6a(0)+2b=0\to b=0$$

$$O(0,0)\xrightarrow{\text{مختصات در تابع}} 0=0+0+0+d\to d=0$$

$$\xrightarrow[b=d=0\ \text{و به ازای}]{(I)\ ,\ (II)} \begin{cases} a+0+c+0=2 \\ 3a+2(0)+c=0 \end{cases} \Rightarrow a=-1,\ c=3$$

.۱۱

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-1}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2(x+1)}-0}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{|x|\sqrt{x+1}}{x}$$

$$f'(0^+)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x^2(x+1)}-0}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{|x|\sqrt{x+1}}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\sqrt{x+1}=1$$

$$f'(0^-)=\lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{x^2(x+1)}-0}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{|x|\sqrt{x+1}}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0^-}-\sqrt{x+1}=-1$$

بنابراین f در نقطه‌ی $x_0=1$ مشتق‌پذیر نیست.

.۱۲

$$x^2+y^2=5\Rightarrow y=\sqrt{5-x^2}$$

$$f(x)=\text{محیط}=2(2x+y)=2(2x+\sqrt{5-x^2})$$

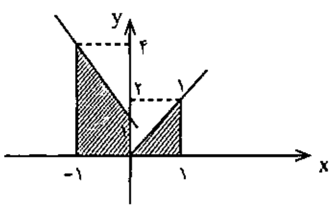
$$\Rightarrow f'(x)=2\left(2-\frac{2x}{2\sqrt{5-x^2}}\right)=0$$

$x=2,\ y=1$ ابعاد مستطیل ۱ و ۲ هستند

.۱۳

$$\int_{-1}^{1}f(x).dx=\int_{-1}^{0}f(x).dx+\int_{0}^{1}f(x).dx$$

$$S_{\text{ذوزنقه}}+S_{\text{مثلث}}=\frac{(1+4)\times 1}{2}+\frac{1\times 2}{2}=\frac{5}{2}+\frac{2}{2}=\frac{7}{2}$$



جبر و احتمال

.۱

$$(2n)!=2^n\times n!\times(1\times 3\times 5\times\ldots\times(2n-1))$$

$$n=1\to 2!=2^1\times 1!\times 1\ ✓$$

$$n=k\to (2k)!=2^k\times k!\times(1\times 3\times 5\times\ldots\times(2k-1))$$

$$n=k+1\to (2k+1)!=2^{k+1}\times(k+1)!(1\times 3\times 5\times\ldots\times(2k-1)(2k+1))$$

طرفین فرض را در $2(k+1)(2k+1)$ ضرب می‌کنیم. داریم:

$$2(k+1)(2k+1)(2k)!$$

$$=2(k+1)(2k+1)\times 2^k\times k!\times(1\times 3\times 5\times\ldots\times(2k-1))$$

$$(2k+2)(2k+1)(2k)!$$

$$=2^{k+1}\times(k+1)\times k!\times(1\times 3\times 5\times\ldots\times(2k-1)(2k+1))$$

$$(2k+2)!=2^{k+1}\times(k+1)!\times(1\times 3\times 5\times\ldots\times(2k+1))\ ✓$$

۲. الف) نادرست. مثال نقض:

$$\begin{matrix}\alpha=2^{\pi}\\ \beta=\dfrac{1}{\pi}\end{matrix}\to \alpha^{\beta}=(2^{\pi})^{\frac{1}{\pi}}=2\in Q$$

ب) نادرست. مثال نقض:

$$\left|\begin{matrix}a=1\\b=2\\c=4\end{matrix}\right.\quad a^2+b^2+c^2=1^2+2^2+4^2=21=3\times 7=3q$$

.۳

$$\frac{ax+b}{a'x+b'}=p\Rightarrow ax+b=pa'x+pb',\ p\in Q$$

$$\Rightarrow \underbrace{(a-pa')}_{\text{گویا}}\underbrace{x}_{\text{اصم}}+\underbrace{b-p'b}_{\text{گویا}}=0$$

$$\Rightarrow\begin{cases}a-pa'=0\\ b-pb'=0\end{cases}\Rightarrow\begin{matrix}pa'=a\\ pb'=b\end{matrix}\Rightarrow\begin{matrix}p=\dfrac{a}{a'}\\ p=\dfrac{b}{b'}\end{matrix}\Rightarrow\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}$$

۴. فرض کنیم $\sqrt{\sqrt{2}+1}$ گنگ نباشد (فرض خلف)، پس گویاست.

بنابراین داریم:

$$\sqrt{\sqrt{2}+1}=\frac{a}{b}\Rightarrow\sqrt{2}+1=\frac{a^2}{b^2}\Rightarrow\sqrt{2}=\frac{a^2}{b^2}-1$$

به تناقض رسیدیم، زیرا $1-\frac{a^2}{b^2}$ گویاست. پس فرض خلف باطل و در نتیجه $\sqrt{\sqrt{2}+1}$ گنگ است.

۵. رقم یکان هر عدد طبیعی یکی از اعضای مجموعه‌ی $\{0,1,2,\ldots,9\}$ خواهد بود. پس ده لانه داریم و هر یک از اعضای A را به عنوان یک کبوتر در نظر می‌گیریم که آن‌ها را بر عدد ۱۰ تقسیم می‌کنیم و باقی‌مانده‌ها را در لانه‌ی متناظر قرار می‌دهیم. می‌دانیم که حداقل ۵ عضو A، دارای رقم یکان برابر هستند. بنابراین:

$4\times 10+1=41$ کمترین مقدار n

۶.

$$A_1=\{m\in Z \mid m\ge -1,\ 2^m\le 1\}=\{-1,0\}$$

$$A_2=\{m\in Z \mid m\ge -2,\ 2^m\le 2\}=\{-2,-1,0,1\}$$

$$A_3=\{m\in Z \mid m\ge -3,\ 2^m\le 3\}=\{-3,-2,-1,0,1\}$$

$$A_2\Delta A_1=(A_2-A_1)\cup(A_1-A_2)=\{-2,1\}\cup\{\ \}=\{-2,1\}$$

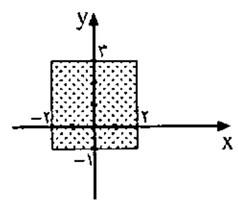
$$(A_2\Delta A_1)\times A_3=\{-2,1\}\times\{-3,-2,-1,0,1\}$$
$$=\{(-2,-3),(-2,-2),(-2,-1),(-2,0),(-2,1),$$
$$(1,-3),(1,-2),(1,-1),(1,0),(1,1)\}$$

۷.

$$[A-(B\cup C)]\cup[A-(A\cap B)]$$
$$=[A\cap(B\cup C)']\cup[A\cap(A\cap B)']$$
$$=A\cap[(B\cup C)'\cup(A\cap B)']=A\cap[(B'\cap C')\cup(A'\cup B')]$$
$$=A\cap[((B'\cap C')\cup B')\cup A']=A\cap[(B')\cup A']$$
$$=(A\cap B')\cup(A\cap A')=(A\cap B')\cup\phi=A-B$$

۸.

$$A_1=[-1,3]\quad A_2=[-2,2]\quad A_2\times A_1=\{(x,y)\mid -2\le x\le 2,\ -1\le y\le 3\}$$



۹.

(۱) $(a,b)R(a,b)\Rightarrow |a|+|b|=|a|+|b|$ ✓

پس R بازتابی است.

(۲) $(a,b)R(c,d)$
$\Rightarrow |a|+|b|=|c|+|d|\Rightarrow |c|+|d|=|a|+|b|\Rightarrow (c,d)R(a,b)$ ✓

پس R تقارنی است.

(۳) $\begin{cases}(a,b)R(c,d)\Rightarrow |a|+|b|=|c|+|d|\\(c,d)R(e,f)\Rightarrow |c|+|d|=|e|+|f|\end{cases}$

$\Rightarrow |a|+|b|=|e|+|f|\Rightarrow (a,b)R(e,f)\Rightarrow (c,d)R(a,b)$ ✓

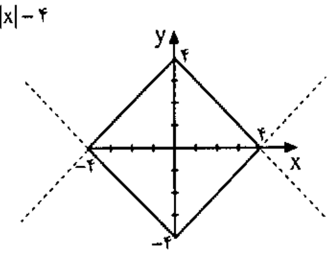
پس R تعدی است.

$$[(1,3)]=\{(x,y)\mid(x,y)R(1,3)\}=|x|+|y|=|1|+|3|$$

$$\Rightarrow |x|+|y|=4\Rightarrow |y|=-|x|+4$$

$y\ge 0\to y=-|x|+4$

$y<0\to y=|x|-4$



۱۰.

S={(ر و ر)، (پ و ر)، (پ و ۱ و w)، (پ و ۱ و g) و
(پ و ۱ و b_1)، (پ و ۱ و b_2)، (پ و ۲ و ر)، (پ و ۲ و پ) و
(پ و ۳ و w)، (پ و ۳ و g)، (پ و ۳ و b_1)، (پ و ۳ و b_2) و
(پ و ۴ و ر)، (پ و ۴ و پ)، (پ و ۵ و w)، (پ و ۵ و g) و
(پ و ۵ و b_1)، (پ و ۵ و b_2)، (پ و ۶ و ر)، (پ و ۶ و پ)}

A={(پ و ۱ و g)، (پ و ۳ و g)، (پ و ۵ و g)}

B={(پ و ۳ و w)، (پ و ۳ و b_1)، (پ و ۳ و b_2)، (پ و ۳ و g)}

A-B={(پ و ۱ و g)، (پ و ۵ و g)}

۱۱.

$P(1)=x\qquad P(2)=2^2x\qquad P(3)=9x$

$P(4)=16x\qquad P(5)=25x\qquad P(6)=36x$

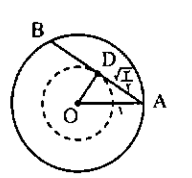
$$x+4x+9x+16x+25x+36x=1\to x=\frac{1}{91}$$

$$P(1)+P(3)+P(5)=\frac{1}{91}+\frac{9}{91}+\frac{25}{91}=\frac{35}{91}=\frac{5}{13}$$

۱۲. ابتدا دایره‌ای به مرکز o و به شعاع ۱ رسم می‌کنیم. مجموعه نقاط داخل این دایره، فضای نمونه‌ای است. پس $a(S)=\pi(1)^2=\pi$. اکنون در این دایره، وتری به اندازه‌ی $\sqrt{3}$ مانند AB رسم می‌کنیم و وسط آن را D می‌نامیم. در مثلث ODA داریم:

$$OD^2=OA^2-AD^2$$

$$OD^2=1-\frac{3}{4}=\frac{1}{4}\to OD=\frac{1}{2}$$



مکان هندسی وسط وترهایی که فاصله‌ی آن‌ها با مرکز دایره از $\frac{1}{2}$ کوچک‌تر باشد، پیشامد موردنظر است که پیشامد نقاط داخل دایره‌ای به مرکز o و شعاع $\frac{1}{2}$ است. بنابراین:

$$P(A)=\frac{a_A}{a_S}=\frac{\pi(\frac{1}{2})^2}{\pi(1)}=\frac{1}{4}$$

۱۳.

$$P(A'\cup B')+P(A'\cap B')=P(A')+P(B')-P(A'\cap B')$$
$$+P(A'\cap B')=P(A')+P(B')$$

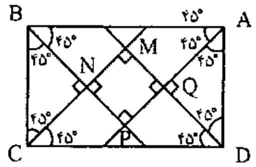
هندسه‌ی (۲)

۱ . مستطیل ABCD به ضلع‌های ۶ و ۸ را در نظر می‌گیریم . نیم‌سازهای زاویه‌های درونی این مستطیل را رسم می‌کنیم تا یکدیگر را در چهار نقطه‌ی P ، Q ، M و N قطع کنند . این چهارضلعی ، به دلیل قائمه‌بودن ۴ زاویه‌اش ، مستطیل است . زیرا در مورد هر یک از این زاویه‌ها ، مثلاً برای زاویه‌ی $C\hat{M}D$ داریم :

$$M\hat{C}D = M\hat{D}C = ۴۵^\circ \Rightarrow C\hat{M}D = ۱۸۰^\circ - (M\hat{C}D + M\hat{D}C)$$

$$= ۱۸۰^\circ - (۴۵ + ۴۵^\circ) \Rightarrow C\hat{M}P = ۱۸۰^\circ - ۹۰^\circ = ۹۰^\circ$$

به همین دلیل ثابت می‌شود که $\hat{N} = \hat{P} = \hat{Q} = ۹۰^\circ$ است . اکنون برای مربع‌بودن باید ثابت کنیم که دو ضلع مجاور این مستطیل برابرند ، یعنی مثلاً $MN = NQ$ است . با توجه به این که $AD = BC = ۶$ و $AB = CD = ۸$ است و مثلث‌های BNC ، APB ، CMD و AQD قائم‌الزاویه‌ی متساوی‌الساقین‌اند ، داریم :



$$AP = BP = CM = MD = AB \times \frac{\sqrt{۲}}{۲} = CD \times \frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

$$= ۸ \times \frac{\sqrt{۲}}{۲} = ۴\sqrt{۲}$$

$$BN = NC = AQ = QD = BC \times \frac{\sqrt{۲}}{۲} = AD \times \frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

$$= ۶ \times \frac{\sqrt{۲}}{۲} = ۳\sqrt{۲}$$

$$\Rightarrow MN = NP = PQ = QM = ۴\sqrt{۲} - ۳\sqrt{۲} = \sqrt{۲}$$

پس MNPQ مربعی به ضلع $\sqrt{۲}$ است . مساحت این مربع برابر است با :

$S_{MNPQ} = (\sqrt{۲})^۲ = ۲$ واحد سطح

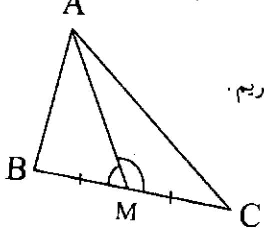
ضلع این مربع برابر است با $\sqrt{۲} = (۸ - ۶) \times \frac{\sqrt{۲}}{۲}$. پس مساحت آن در واقع $(۸ - ۶)^۲ \times (\frac{\sqrt{۲}}{۲})^۲$ است .

نکته : به طور کلی ثابت می‌شود که مربع حاصل از برخورد نیم‌سازهای زاویه‌های درونی مستطیلی به ضلع‌های a و b برابر $(b - a) \times \frac{\sqrt{۲}}{۲}$ است (با فرض $b > a$) . بنابراین مساحت مربع حاصل برابر است با : $\frac{۱}{۲}(b - a)^۲$.

۲ . بنا به ویژگی نیم‌ساز زاویه‌ی درونی مثلث داریم :

$$\frac{DA}{DC} = \frac{AB}{BC} \Rightarrow \frac{x}{۱۶} = \frac{۲۰}{۳۲} \Rightarrow x = \frac{۱۶ \times ۲۰}{۳۲} = ۱۰$$

از طرف دیگر ، $y = x + ۱۶$ است . پس $y = ۱۰ + ۱۶ = ۲۶$.



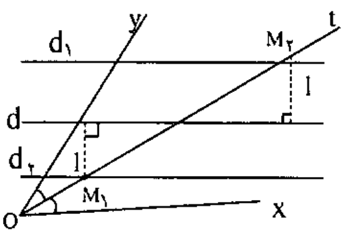
۳ . دو مثلث AMB و AMC را در نظر می‌گیریم .

داریم :

$AM = AM$ و $MB = MC$ و $AB < AC$

پس بنا به قضیه‌ی لولا $A\hat{M}B < A\hat{M}C$.

۴ . می‌دانیم مکان هندسی نقطه‌ای از صفحه که از خط d به فاصله‌ی معلوم l قرار دارد ، دو خط $d_۱$ و $d_۲$ موازی d و به فاصله‌ی l از آن است که در دو طرف d قرار دارند . این دو خط را رسم می‌کنیم .



از طرف دیگر ، مکان هندسی نقطه‌ای که از دو ضلع زاویه‌ی xoy به یک فاصله است ، نیم‌ساز این زاویه است . این نیم‌ساز را نیز رسم می‌کنیم و ot می‌نامیم . نقطه یا نقطه‌های برخورد $d_۱$ و $d_۲$ با نیم‌ساز ot جواب مسئله است و به تعداد نقطه‌های برخورد مسئله جواب دارد . این بدان معنی است که اگر نیم‌ساز ot با $d_۱$ یا $d_۲$ و یا در واقع با d موازی باشد ، مسئله جواب ندارد .

۵ . از O مرکز دایره به A و C وصل می‌کنیم . با توجه به این که قطر عمود بر هر وتر عمودمنصف آن وتر است ، داریم :

$$OA = R = ۵,\ OH = ۳ \Rightarrow OA^۲ = OH^۲ + AH^۲$$

$$\Rightarrow ۲۵ = ۹ + AH^۲$$

الف) $\Rightarrow AH^۲ = ۱۶ \Rightarrow AH = ۴ \Rightarrow AB = ۲AH = ۸$

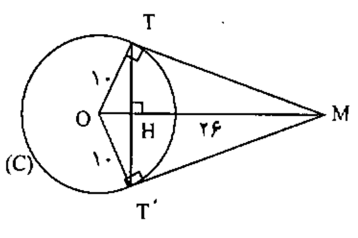
ب) $CK = KD = ۳ \Rightarrow CD = ۲CK = ۶$

$$OC^۲ = OK^۲ + KC^۲ \Rightarrow ۵^۲ = OK^۲ + ۳^۲ \Rightarrow OK^۲ = ۱۶$$

$$\Rightarrow OK = ۴$$

پ) $AB = ۸ > CD = ۶$. AB به مرکز دایره نزدیک‌تر است ، زیرا $OH = ۳ < OK = ۴$. نتیجه این است که در یک دایره ، از دو وتر نامساوی ، آن که بزرگ‌تر است ، به مرکز دایره نزدیک‌تر است .

۶ . با توجه به این که شعاع دایره برابر ۱۰ است ، پس $OT = OT' = ۱۰$.



از آن‌جا :

الف) در مثلث قائم‌الزاویه‌ی OMT ($\hat{T} = ۹۰^\circ$) داریم :

$$OT^۲ + MT^۲ = OM^۲ \Rightarrow ۱۰۰ + MT^۲ = ۶۷۶ \Rightarrow MT^۲ = ۵۷۶$$

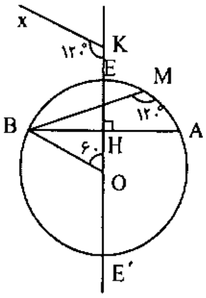
$$\Rightarrow MT = ۲۴ \Rightarrow MT' = MT = ۲۴$$

ب) OM عمودمنصف TT′ است . پس $TT' = ۲TH$ است . در مثلث قائم‌الزاویه‌ی OTM ، TH ارتفاع وارد بر وتر است . پس داریم : $OT = TM = OM.TH$. از آن‌جا :

$$۱۰ \times ۲۴ = ۲۶ \times TH \Rightarrow TH = \frac{۱۲۰}{۱۳} \Rightarrow TT' = ۲TH = \frac{۲۴۰}{۱۳}$$

پ) برای محاسبه‌ی OH داریم:

$$OT^{۲} = OH.OM \Rightarrow ۱۰۰ = OH.۲۶ \Rightarrow OH = \frac{۵۰}{۱۳}$$



۷. کمان در خور زاویه‌ی ۱۲۰ درجه‌ی روبه‌رو به پاره‌خط AB به طول ۸ را رسم می‌کنیم (شکل) زاویه‌ی $B\hat{O}H = ۶۰°$ و $BH = \frac{AB}{۲} = ۴$ است.

پس داریم:

الف) $\sin B\hat{O}H = \frac{BH}{OB} \Rightarrow \sin ۶۰° = \frac{۴}{R} \Rightarrow R = \frac{۴}{\frac{\sqrt{۳}}{۲}} = \frac{۸\sqrt{۳}}{۳}$

ب) در همان مثلث OBH داریم:

$$OB^{۲} = OH^{۲} + BH^{۲} \Rightarrow \frac{۶۴}{۳} = OH^{۲} + ۱۶ \Rightarrow OH^{۲} = \frac{۱۶}{۳}$$

$$\Rightarrow OH = \frac{۴}{\sqrt{۳}} = \frac{۴\sqrt{۳}}{۳}$$

نکته‌ی ۱. در مثلث قائم‌الزاویه‌ی BOH ($\hat{H} = ۹۰°$) زاویه‌ی $\hat{B} = ۳۰°$ است. پس ضلع مقابل به این زاویه نصف وتر است. یعنی داریم:

$$OH = \frac{OA}{۲} = \frac{\frac{۸\sqrt{۳}}{۳}}{۲} = \frac{۴\sqrt{۳}}{۳}$$

نکته‌ی ۲. برای حل این مسئله می‌توانیم از دستورهای مربوط به کمان در خور یک زاویه، طول پاره‌خط نظیر کمان درخور زاویه، شعاع دایره‌ای که کمان درخور بخشی از آن است و فاصله‌ی مرکز دایره از وتر داده شده، به طور مستقیم استفاده کنیم.

۸. می‌دانیم که قطر عمود بر وتر در هر دایره عمودمنصف آن وتر است. پس $AH = BH$ است. از طرف دیگر، در مثلث قائم‌الزاویه‌ی OBH داریم: $OB^{۲} = OH^{۲} + BH^{۲} \Rightarrow ۲۵ = ۹ + x^{۲} \Rightarrow x^{۲} = ۱۶ \Rightarrow x = ۴$

از آن‌جا: $AB = ۲BH = ۲ \times ۴ = ۸ \Rightarrow MB = MA + AB = ۶ + ۸ = ۱۴$

از طرف دیگر داریم:

$$MT^{۲} = MA.MB \Rightarrow y^{۲} = ۶ \times ۱۴ = ۸۴ \Rightarrow y = ۲\sqrt{۲۱}$$

۹. الف) دو دایره برون هم هستند. زیرا داریم:

$$R + R' = ۶ + ۸ = ۱۴ < OO' = d = ۲۰$$

پس هم مماس مشترک برونی دارند و هم مماس مشترک درونی.

ب) مماس مشترک برونی دو دایره را TT' و مماس مشترک درونی آن‌ها را $T_۱T'_۱$ می‌نامیم. داریم:

$$TT' = \sqrt{d^{۲} - (R - R')^{۲}} = \sqrt{۲۰^{۲} - (۶ - ۸)^{۲}} = \sqrt{۳۹۶} = ۶\sqrt{۱۱}$$

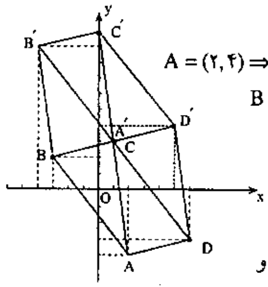
$$T_۱T'_۱ = \sqrt{d^{۲} - (R + R')^{۲}} = \sqrt{۲۰^{۲} - (۶ + ۸)^{۲}} = \sqrt{۴۰۰ - ۱۹۶} = \sqrt{۲۰۴} = ۲\sqrt{۵۱}$$

۱۰. الف) بردار انتقال $\overrightarrow{AC}$ است. پس داریم:

$$A = (۲, -۴),\ C = (۱, ۳) \Rightarrow \overrightarrow{AC} = (۱ - ۲, ۳ + ۴) = (-۱, ۷) = (h, k)$$

$$\Rightarrow T(x, y) = (x + h, y + k) \Rightarrow T(x, y) = (x - ۱, y + ۷)$$

ب) تصویر رأس‌های A، B، C و D را تحت انتقال بالا به‌دست می‌آوریم و به ترتیب A'، B'، C' و D' می‌نامیم. سپس متوازی‌الاضلاع ABCD و تصویرش متوازی‌الاضلاع $A'B'C'D'$ را رسم می‌کنیم. داریم:



$$A = (۲, ۴) \Rightarrow A' = T(۲, -۴) = (۲ - ۱, -۴ + ۷) = (۱, ۳)$$

$$B = (-۳, ۲) \Rightarrow B' = T(-۳, ۲) = (-۴, ۹)$$

$$C = (۱, ۳) \Rightarrow C' = T(۱, ۳) = (۰, ۱۰)$$

$$D = (۶, -۳) \Rightarrow D' = T(۶, -۳) = (۵, ۴)$$

۱۱. تبدیل یافته‌ی دو نقطه‌ی دل‌خواه A و B از خط Δ را به دست می‌آوریم و A' و B' می‌نامیم، آن‌گاه معادله‌ی خط $A'B'$ را می‌نویسیم. داریم:

$$\Delta: ۲x + ۷y - ۱۴ = ۰ \quad A = (۰, ۲) \in \Delta,\ B = (۷, ۰) \in \Delta$$

$$T(x, y) = (x + ۲, ۲y - ۱)$$

$$\Rightarrow A' = T(A) = T(۰, ۲) = (۰ + ۲, ۴ - ۱) = (۲, ۳)$$

$$\Rightarrow A' = (۲, ۳),$$

$$B' = T(B) = T(۷, ۰) = (۷ + ۲, ۰ - ۱) = (۹, -۱) \Rightarrow A' = (۹, -۱)$$

$$\Rightarrow A'B': y - ۳ = \frac{-۱ - ۳}{۹ - ۲}(x - ۲) \Rightarrow ۷y - ۲۱ = -۴x + ۸$$

$$\Rightarrow ۴x + ۷y - ۲۹ = ۰$$

$\Rightarrow \Delta': ۴x + ۷y - ۲۹ = ۰$ معادله‌ی تبدیل یافته‌ی خط Δ

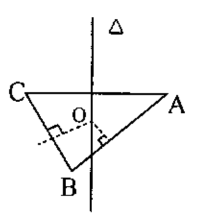
تبدیل یافته‌ی خط Δ با این خط موازی نیست. زیرا $\frac{m}{\Delta} = \frac{-۲}{۷}$ و $\frac{m}{\Delta'} = \frac{-۴}{۷}$ است که این دو مساوی نیستند. در ضمن، این دو خط عمود برهم نیز نیستند.

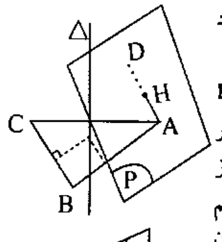
۱۲. سه نقطه‌ی A'، B' و C' را به هم وصل می‌کنیم. بنا به فرض مسئله داریم: $\frac{SA'}{SA} = \frac{SB'}{SB} = \frac{SC'}{SC} = \frac{۱}{۳}$

$$\Rightarrow AB \parallel A'B',\ BC \parallel B'C',\ AC \parallel A'C'$$

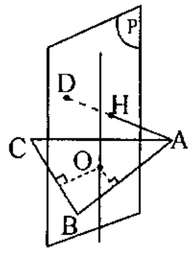
پس دو صفحه‌ی $A'B'C'$ و ABC (یا همان صفحه‌ی F) با هم موازی هستند.

۱۳. می‌دانیم مکان هندسی نقطه‌ای از فضا که از دو نقطه‌ی مفروض مانند A و B به یک فاصله است، صفحه‌ی عمودمنصف پاره‌خط و اصل بین آن دو نقطه است. با توجه به این‌که مکان هندسی نقطه‌ای که از فضا از سه نقطه‌ی A، B و C که در یک صفحه قرار دارند، خطی است که در نقطه‌ی برخورد عمودمنصف‌های ضلع‌های این مثلث یعنی نقطه‌ی O، بر صفحه‌ی مثلث ABC عمود است. این خط را Δ می‌نامیم.





اکنون نقطه‌ی D و یکی از سه نقطه‌ی A، B یا C را در نظر می‌گیریم. مثلاً نقطه‌ی A را اختیار می‌کنیم و مکان هندسی نقطه‌ای از فضا را که از دو نقطه‌ی A و D به یک فاصله است، رسم می‌کنیم و آن را صفحه‌ی P می‌نامیم. اکنون وضع صفحه‌ی P و خط Δ را بررسی می‌کنیم. اگر صفحه‌ی P خط Δ را در یک نقطه قطع کنند، تنها این نقطه جواب مسئله خواهد بود. در صورتی که صفحه‌ی P موازی خط Δ باشد، مسئله جواب ندارد و اگر خط Δ روی صفحه‌ی P قرار بگیرد، مکان هندسی خواسته شده، همان خط Δ است.



نکته: می‌توان با توجه به هم صفحه بودن یا هم صفحه نبودن چهار نقطه‌ی A، B، C و D وضع خط Δ و صفحه‌ی P را بررسی کرد.

● سید حسین اصولی



چند نکته درباره‌ی اعداد اول

رشد برهان متوسطه
دوره‌ی نوزدهم
شماره‌ی ۳
بهار ۱۳۸۹

جایگاه اعداد اول[۱]، ساختار، رموز و پراکندگی آن‌ها در میان اعداد طبیعی، از زمان اقلیدس تا کنون، اذهان بسیاری را به خود مشغول داشته است. در این دوره‌ی ۲۵۰۰ ساله، نظرات متفاوتی نیز ارائه شده‌اند و روش‌های جست‌وجو برای به‌دست آوردن اعداد اول، ابداع و تکامل یافته‌اند؛ از غربال‌گیری اعداد در فاصله‌های دل‌خواه از میان اعداد (با حذف اعداد زوج و مضرب‌های ۳) گرفته تا جدول‌های پیشرفته.

یکی از این غربال‌ها، جدولی است که س. پ. سوندار، دانشجوی ریاضی هندی، در سال ۱۹۴۴ به‌دست آورده است[۲]:

۴	۷	۱۰	۱۳	۱۶	...
۷	۱۲	۱۷	۲۲	۲۷	...
۱۰	۱۷	۲۴	۳۱	۳۸	...
۱۳	۲۲	۳۱	۴۰	۴۹	...
۱۶	۲۷	۳۸	۴۹	۶۰	...
...	...	...	...	...	...

غربال بالا از بی‌شمار تصاعد حسابی نامحدود تشکیل شده است که جمله‌ی اول آن‌ها، به‌ترتیب جمله‌های تصاعد اولیه است:

... و ۱۶ و ۱۳ و ۱۰ و ۷ و ۴

جایگاه اعداد اول[1]، ساختار، رموز و پراکندگی آن‌ها در میان اعداد طبیعی، از زمان اقلیدس تا کنون، اذهان بسیاری را به خود مشغول داشته است

قدر نسبت این تصاعدها به ترتیب عددهای فرد متوالی‌اند که از ۳ شروع شده باشند:

$$d_1 = 3\ ,\ d_2 = 5\ ,\ d_3 = 7\ ,\ d_4 = 9\ ,\ \dots$$

اگر عددی مثل N در این جدول وجود داشته باشد، عدد $2N + 1$ غیر اول است و اگر عدد N در این جدول وجود نداشته باشد، $2N + 1$ عددی اول است.

سؤال: چگونه می‌توان اول بودن یا نبودن $2N + 1$ را بر اساس جدول فوق ثابت کرد؟

جواب: با عنایت به این‌که اعداد فرد مثبت به‌صورت $2a + 1$ نوشته می‌شوند $(a \geq 0)$، در واقع هر کدام از اعداد جدول به‌صورت $[(2a + 1)n] + a$ هستند و داریم:

$$a, n \geq 1\ ;\ a, n \in N$$

حال اگر $[(2a + 1)n] + a$ به‌جای N در $2N + 1$ قرار گیرد، حاصل غیراول است و داریم:

$$2[[(2a + 1)n] + a] + 1 = 2[2an + n + a] + 1$$
$$= 4an + 2n + 2a + 1 = (2a + 1)(2n + 1)$$

ساختار واقعی اعداد اول از چیست؟

در میان اعداد طبیعی، مضرب‌های فرد عدد ۳ به‌صورت $6n + 3$ نوشته می‌شوند که حاصل جمع دو مضرب ۳ هستند و داریم:

$$6n + 3 = 3n + (3n + 3)\ ;\ n \in N\ ,\ n \geq 0$$

اگر $6n + 3$ را به‌صورت جمع دو عدد متوالی بنویسیم، خواهیم داشت:

$$6n + 3 = 3n + (3n + 3) = (3n + 1) + (3n + 2)$$

ملاحظه می‌شود، هیچ‌یک از دو عدد بالا، به تنهایی مضرب ۳ نیستند. این واقعیت نشان می‌دهد که اعداد اول (به‌جز ۳)، چون مضرب ۳ نیستند، نمی‌توانند به‌صورت $(3n + 1) + (3n + 2)$ نوشته شوند. بلکه به‌صورت مجموع دو عدد متوالی هستند که حتماً در یکی از آن‌ها مضرب ۳ است. پس خواهیم داشت:

$$P = 3n + (3n \pm 1) = 6n \pm 1$$
$$p \geq 5\ ,\ n \geq 1\ ,\ n \in N$$

به‌عبارت دیگر، هر عدد اولی (به‌جز ۳ و ۲) از مجموع یک مضرب ۳ با اولین عدد کوچک‌تر یا بزرگ‌تر از آن به‌دست می‌آید. n باید چگونه باشد تا حاصل $6n \pm 1$ اول شود؟ جایگاه واقعی اعداد اول کجاست؟

با توجه به این‌که $P = 6n \pm 1$، اگر دو عددی که در n فاصله از p و در دو طرف آن قرار دارند، در $6n \pm 1$ قرار گیرند، حاصل، غیراول و مضربی از p می‌شود.

چگونه تعیین می‌شود که حاصل $6n - 1$ غیر اول است یا حاصل $6n + 1$؟

الف) اگر $P = 6n - 1$ آن‌گاه، حاصل عبارت‌های زیر غیراول و مضربی از p خواهد بود:

$$1)\ [6(P + n)] - 1 = [6(6n - 1 + n)] - 1 = [6(7n - 1)] - 1 = 42n - 7$$
$$2)\ [6(P - n)] + 1 = [6(6n - 1 - n)] + 1 = [6(5n - 1)] + 1 = 30n - 5$$

ب) اگر $P = 6n + 1$ آن‌گاه، حاصل عبارت‌های زیر غیراول و مضربی از p خواهد بود:

$$3)\ [6(P + n)] + 1 = [6(6n + 1 + n)] + 1 = [6(7n + 1)] + 1 = 42n + 7$$
$$4)\ [6(P - n)] - 1 = [6(6n + 1 - n)] - 1 = [6(5n + 1)] - 1 = 30n + 5$$

با توجه به این‌که n برابر است با $\frac{P \pm 1}{6}$، چهار عبارت بالا را می‌توان در قالب عبارت زیر بیان کرد:

$$\left[6\left(Px \pm \frac{Py\pm 1}{6}\right)\right] \pm 1 \;;\quad x,y\geq 1 \;;\quad x,y\in N \quad 2,3\nmid xy$$

به‌طور کلی، حاصل ۱ − ۶n یا ۱ + ۶n زمانی غیراول می‌شود که عبارت مذکور به چهار حالت زیر باشد:

$$1)\ \left[6\left(Px + \frac{Py+1}{6}\right)\right]-1 \qquad 2)\ \left[6\left(Px - \frac{Py+1}{6}\right)\right]+1$$

$$3)\ \left[6\left(Px - \frac{Py-1}{6}\right)\right]-1 \qquad 4)\ \left[6\left(Px + \frac{Py-1}{6}\right)\right]+1$$

مثال۱. عبارت ۵۵ = ۱ + ۶n ، n چه خصوصیتی دارد که حاصل ۱ + ۶n غیراول است؟

حل: عدد ۹ حاصل $(11-\frac{11+1}{6})$ است و طبق رابطه‌ی ۳ داریم:

$$\left[6\left(Px - \frac{Py+1}{6}\right)\right]+1 = \left[6\left(11 - \frac{11+1}{6}\right)\right]+1$$

$$= (6\times 9)+1 = 5\times 11$$

مثال۲. چرا حاصل ۱ + ۶n و ۱ − ۶n به ازای ۲۰ = n ، هر دو غیر اول‌اند؟

حل:

الف) ۱۱۹ = ۱ − ۶n . طبق رابطه‌ی ۱ داریم:

$$\left[6\left(Px + \frac{Py+1}{6}\right)\right]-1 = \left[6\left(17 + \frac{17+1}{6}\right)\right]-1$$

$$= (6\times 20)-1 = 7\times 17$$

ب) ۱۲۱ = ۱ + ۶n . طبق رابطه‌ی ۲ داریم:

$$\left[6\left(Px - \frac{Py+1}{6}\right)\right]+1 = \left[6\left(11\times 2 - \frac{11+1}{6}\right)\right]+1$$

$$= \left[6(22-2)\right]+1 = (6\times 20)+1 = 11\times 11$$

ـ در طول چندین قرن، ریاضی‌دانان تصور می‌کردند که اعداد اول باید رابطه‌ی عجیب و دشواری داشته باشند. در حالی که آن‌چه ذکر شد، نشان می‌دهد حاصل ۱ − ۶n یا ۱ + ۶n در اصل اول است، مگر این که n به صورت $(Px \pm \frac{Py\pm 1}{6})$ باشد که ضرایب y و x، یک عدد اول مشترک باشد. اعداد اول، با جایگاه مشخص و ثابت و بر اساس نظم و منطق، در میان اعداد طبیعی واقع‌اند. این جایگاه ناملموس و نامرئی است و تنها با بیان روابط اشاره شده قابل درک و فهم است. سؤال اساسی این است که یافتن nهایی که فقط به تولید اعداد اول منجر شوند، چه‌قدر اهمیت دارد؟

با عنایت به مطالب ارائه شده، می‌توان رابطه‌هایی را برای یافتن اعداد بیان کرد:

رابطه‌ی اول:

$$P = 2n+1 : n \neq 2an + n + aa, n \geq 1 \quad a,n\in N$$

رابطه‌ی دوم:

$$\begin{cases} P = 6n+1 : n \neq Px + \frac{Py-1}{6} \text{ یا } Px - \frac{Py+1}{6} \\ P = 6n-1 : n \neq Px + \frac{Py+1}{6} \text{ یا } Px - \frac{Py-1}{6} \end{cases}$$

$$x,y\geq 1\ ,\ x,y\in N\ ,\ 2,3\nmid y$$

پی‌نویس

۱. جدول را می‌توان به این صورت نیز تنظیم کرد:

(۳×۱)+۱	(۳×۲)+۱	(۳×۳)+۱	(۳×۴)+۱	(۳×۵)+۱	...	(۳×n)+۱
(۵×۱)+۲	(۵×۲)+۲	(۵×۳)+۲	(۵×۴)+۲	(۵×۵)+۲	...	(۵×n)+۲
(۷×۱)+۳	(۷×۲)+۳	(۷×۳)+۳	(۷×۴)+۳	(۷×۵)+۳	...	(۷×n)+۳
(۹×۱)+۴	(۹×۲)+۴	(۹×۳)+۴	(۹×۴)+۴	(۹×۵)+۴	...	(۹×n)+۴
(۱۱×۱)+۵	(۱۱×۲)+۵	(۱۱×۳)+۵	(۱۱×۴)+۵	(۱۱×۵)+۵	...	(۱۱×n)+۵
...	...	...	...	...	...	...

منبع

۱. «عددهای اول»، امیل بورل، ترجمه‌ی پرویز شهریاری.

زبان حال ریاضی دانان



فورکوش بویویی

در نامه‌ای خطاب به پسرش یانوش راجع به کشف هندسه‌ی نااقلیدسی

تو دیگر نباید برای گام نهادن در راه توازی‌ها تلاش کنی. من پیچ و خم‌های این راه را از اول تا آخر می‌شناسم و این شب بی‌پایان را که همه‌ی روشنایی و شادمانی زندگی مرا به کام نابودی برده است سپری کرده‌ام.

التماس می‌کنم که دانش موازی‌ها را رها کنی. من در این اندیشه بودم که خودرا در راه حقیقت فدا کنم. حاضر بودم شهیدی باشم که این نقص هندسه را مرتفع سازد و پاک شده‌ی آن را به عالم بشریت تقدیم نماید. من زحمتی عظیم و سترگ کشیدم. آن‌چه را که من آفریدم به مراتب برتر از آفریده‌ی دیگران است. ولی بازهم رضای خاطر به‌دست نیاوردم. وقتی دریافتم که هیچکس نمی‌تواند به پایان این شب ظلمانی راه یابد بازگشتم، بی‌تسلای خاطر بازگشتم، درحالی که برای خود و بشریت متأسف بودم.

می‌پذیرم که انتظار بی‌جایی است که بخواهم تو از راه خود منصرف شوی. اما من مدت‌ها در این دیار بوده‌ام و با تمام صخره‌های جهنمی این دریای مرده مواجه شده‌ام و همیشه با دکل شکسته و بادبان پاره بازگشته‌ام. تباهی و سقوط من به آن دوران باز می‌گردد. من از روی بی‌فکری زندگانی و خوشبختیم را به مخاطره افکندم.

فورکوش بویویی

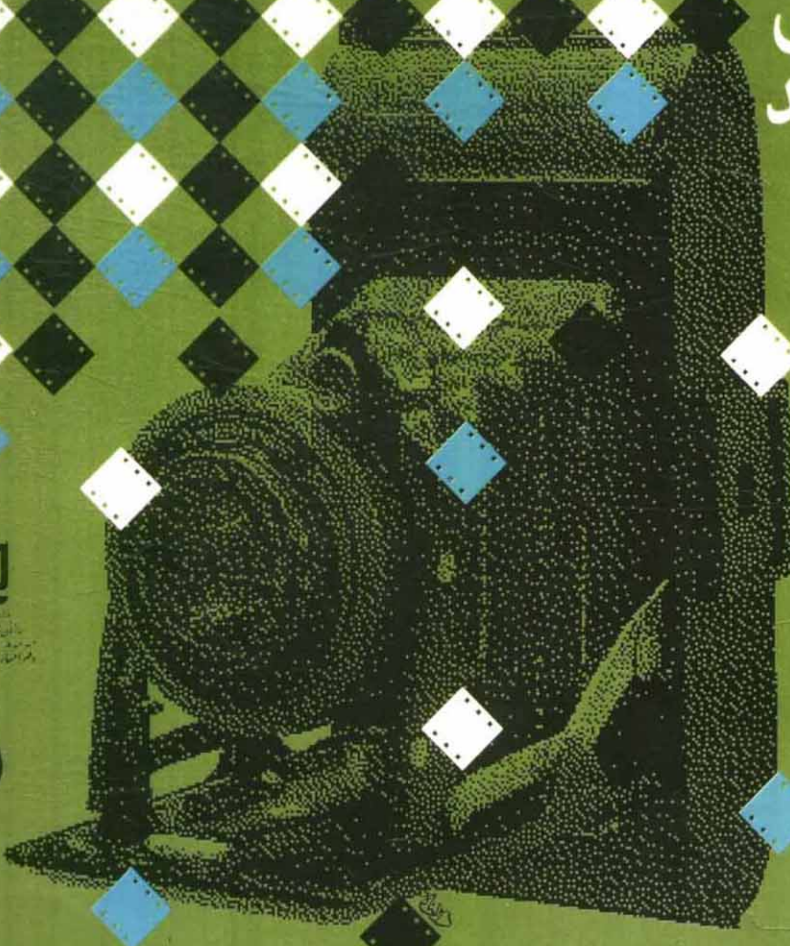


یانوش بویویی

در جواب پدرش فورکوش راجع به کشف هندسه نااقلیدسی

اکنون نقشه‌ی من این است که به محض آن‌که مطالب را کامل و مرتب کنم و فرصتی به دست آورم کتابی درباره‌ی موازی‌ها چاپ کنم. فعلاً هنوز راه خود را به روشنی نمی‌بینم. ولی راهی که پیش گرفته‌ام نشان می‌دهد که به هدف خواهم رسید اگر اساساً این هدف رسیدنی باشد. ولی چیزهایی که کشف کرده‌ام به اندازه‌ای شگفت‌انگیزند که خودم حیرت زده شده‌ام و بدبختی جبران‌ناپذیری است اگر این‌ها از دست بروند. پدر جان وقتی آن‌ها را ببینید خواهی فهمید که چه می‌گویم. در شرایط فعلی تنها چیزی که می‌توانم بگویم این است که «از هیچ دنیایی تازه و شگفت‌انگیز آفریده‌ام.» آن‌چه را که قبلاً برای شما فرستاده‌ام از لحاظ مقایسه با آن‌چه که اکنون پدید آورده‌ام بسان خانه‌ای است مقوایی در مقابل برجی رفیع. اطمینان من به افتخارهایی که این کشف‌ها نصیب من خواهند کرد کمتر از اعتقادم به مباهاتی نیست که در تکمیل آن‌ها احساس خواهم کرد.

فراخوان ششمین جشنواره‌ی عکس رشد



◆ مهلت ارسال آثار

۳۱ تیرماه ۱۳۸۹

داوری: مرداد ۱۳۸۹

برگزاری نمایشگاه و اعلام برگزیدگان:

دهه‌ی اول مهرماه ۱۳۸۹

◆ موضوع

گرایش آموزش و پرورش (مدرسه، معلمان، دانش‌آموزان، ساعت ورزش، کلاس، اردو، نمازخانه، کتاب‌خانه، بابای مدرسه، آغاز سال تحصیلی، زنگ تفریح و ...)

گرایش ایران، سرزمین پرگهر (بازی‌های محلی، آرامگاه مفاخر، کار، راهپیمایی‌ها، جشن‌ها، عزاداری‌ها و ...)

◆ بخش جنبی

در بخش دانش‌آموزی (۱۳ تا ۱۸ ساله) با موضوع آزاد برگزار خواهد شد.

◆ امتیازها

◆ عکس‌های برگزیده به صورت نمایشگاهی در معرض دید عموم قرار خواهد گرفت. ◆ به ازای هر یک از آثاری که به نمایشگاه راه یابد، مبلغ ۳۰۰/۰۰۰ ریال به صاحب اثر پرداخت خواهد شد. ◆ برای عکاسانی که آثارشان به نمایشگاه راه یابد، گواهی شرکت در نمایشگاه صادر می‌شود.

◆ جوایز

نفر اول: تندیس جشنواره، دیپلم افتخار و ۵ سکه بهار آزادی

نفر دوم: لوح تقدیر و ۴ سکه بهار آزادی

نفر سوم: لوح تقدیر و ۳ سکه بهار آزادی

◆ مقررات

◆ شرکت تمامی عکاسان در این جشنواره آزاد است.

◆ هر عکاس می‌تواند حداکثر ۱۰ عکس در هر گرایش ارسال کند.

◆ تمامی عکس‌ها می‌باید به صورت چاپ دیجیتال یا آنالوگ باشد. (پرینت با کیفیت مطلوب نیز پذیرفته می‌شود).

◆ تمامی عکس‌ها اعم از دیجیتال و آنالوگ باید به همراه سی دی محتوی عکس‌های ارسالی با فرمت tif یا jpeg و dpi حداقل ۳۰۰ ارسال شود.

◆ ابعاد و اندازه‌ی عکس‌های ارسالی حداقل با عرض ۳۰ سانتی‌متر و طول آن حداکثر ۴۵ سانتی‌متر باشد.

◆ عکس‌ها نباید قاب یا پاسپورتو شده باشد.

◆ ارسال اثر توسط عکاسان به منزله‌ی قبول مالکیت اثر و اصالت آن تلقی می‌شود و هیچ‌گونه مسئولیتی به عهده‌ی دبیرخانه نخواهد بود.

◆ به آثاری که پس از مهلت مقرر به دبیرخانه‌ی جشنواره ارسال شود، ترتیب اثر داده نخواهد شد.

◆ آثاری که به نمایشگاه راه نیابد، (حداکثر ۲ ماه پس از برگزاری نمایشگاه) عودت داده می‌شوند.

◆ دبیرخانه ضمن به کار بردن نهایت کوشش خود برای حفظ آثار، هیچ‌گونه مسئولیتی در قبال آسیب‌های ناشی از ارسال نامطلوب یا اشکلات پستی نمی‌پذیرد.

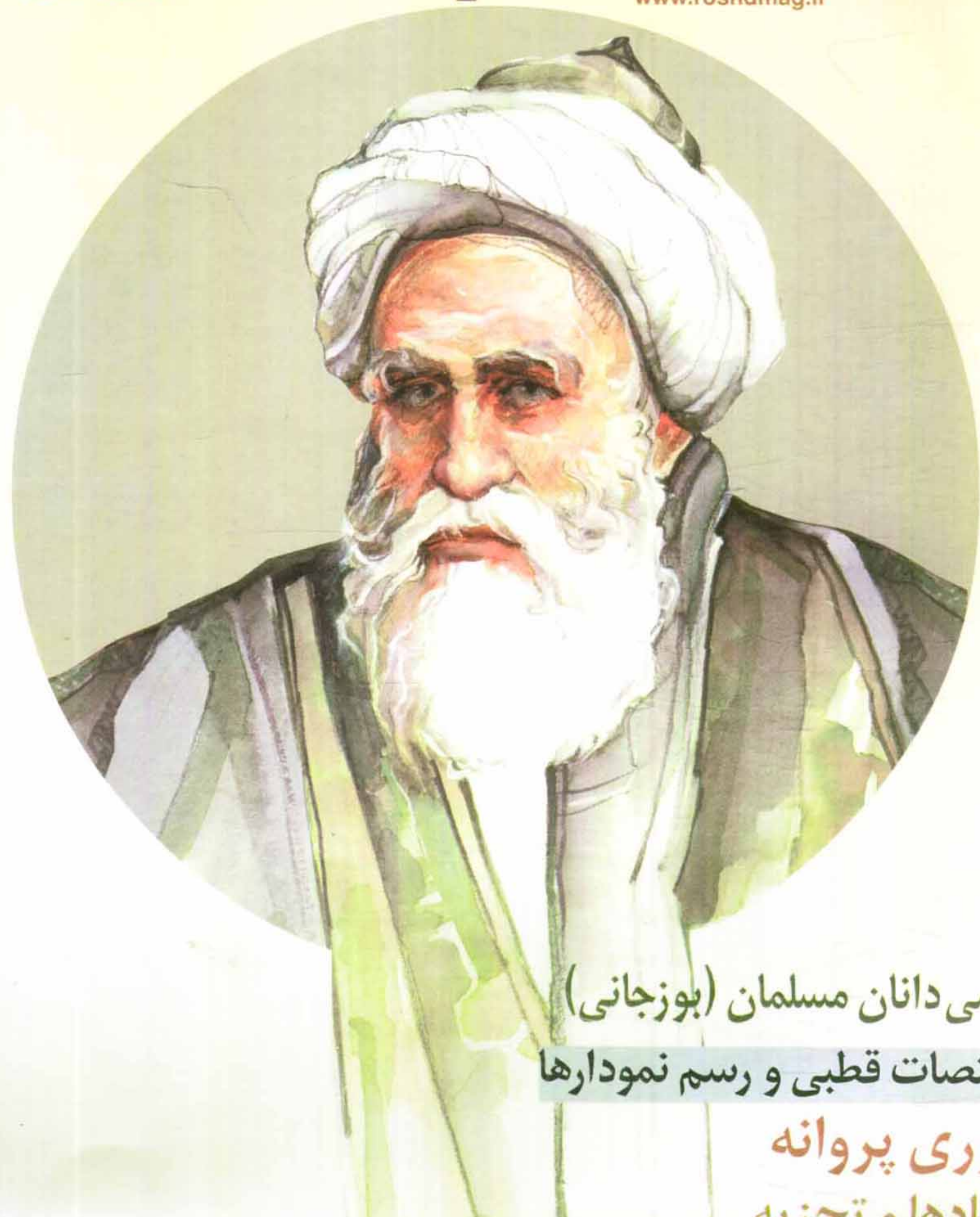
◆ عکاس باید برچسب مربوط را تکمیل کند و پشت هر عکس بچسباند.

◆ ارسال عکس برای این جشنواره، به منزله‌ی قبول شرایط و مقررات آن است.

◆ تصمیم‌گیری در مورد مسائل پیش‌بینی نشده، به عهده‌ی برگزارکننده است.

◆ از عکس‌های راه‌یافته به جشنواره در تولیدات دفتر استفاده خواهد شد.

رشد
برهان ۶۶
مجله‌ی ریاضی
دوره‌ی متوسطه
دوره‌ی نوزدهم / تابستان ۱۳۸۹ / شماره‌ی ۴ / ۶۴ صفحه / ۴۵۰۰ ریال
فصلنامه‌ی آموزشی، تحلیلی و اطلاع رسانی
www.roshdmag.ir
ISSN:1735-4951
وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی
دفتر انتشارات کمک آموزشی



- ریاضی دانان مسلمان (بوزجانی)
- مختصات قطبی و رسم نمودارها
- تئوری پروانه
- اتحادها و تجزیه
- تاریخچه‌ی مجلات ریاضی ایران

بوزجانی

ابوالوفا محمدبن یحیی بن اسماعیل بوزجانی
ریاضی‌دان و منجم مسلمان ایرانی (۳۸۸-۳۲۸)

ریاضی دانان مسلمان



بوزجانی یکی از مفاخر علمی ایران و از بزرگ‌ترین ریاضی دانان دوره‌ی اسلامی بوده است. بنا به گفته‌ی **ابن ندیم**، وی در روز چهارشنبه اول ماه رمضان سال ۳۲۸ در شهر بوزجان (تربت جام فعلی) تولد یافت. علم عدد و هندسه را نزد عموی خود، **ابوعمرو مغازلی** و دایی خود، **ابوعبدالله محمدبن عَنبَسه** آموخت. در سال ۳۴۸، یعنی در سن ۲۰ سالگی به عراق مهاجرت کرد و تا آخر عمر در بغداد می‌زیست.

ابن اثیر در «کتاب الکامل فی التاریخ»[1] تاریخ درگذشت بوزجانی را سال ۳۸۷ نوشته و **ابن خلکان** در «وفیات الاعیان» از وی نقل کرده است.

بوزجانی بدون تردید یکی از مشهورترین منجمان و مهندسان زمان خود بوده است و این مطلب از قضاوتی که معاصران وی و مورخان بعدی درباره‌ی او کرده‌اند، کاملاً پیداست. بوزجانی گاهی در کارهای علمی با معاصر خود بیرونی، به وسیله‌ی مکاتبه تشریک مساعی می‌کرده است. بیرونی در کتاب «تحدید نهایات الاماکن» نوشته است که در سال ۳۸۷، هنگامی که او در خوارزم و بوزجانی در بغداد بوده است، کسوفی را با قرارداد قبلی با هم رصد کرده و نتیجه را مقایسه کرده‌اند.

ابوعلی حبوبی که معاصر بوزجانی بود و ظاهراً در حدود خوارزم می‌زیست نیز، با بوزجانی مکاتبه داشت و دستوری برای محاسبه‌ی مساحت مثلث از او خواست و بوزجانی جواب او را در رساله‌ی مختصری داد.

اهمیت آثار ریاضی بوزجانی

الف) مثلثات

اهمیت آثار ریاضی بوزجانی بیشتر به واسطه‌ی سهم به‌سزایی است که وی در پیشرفت علم مثلثات دارد. کتاب اعمال هندسی وی نیز بدیع‌ترین و جالب‌ترین اثری است که در دوره‌ی اسلامی درباره‌ی هندسه‌ی عملی پدید آمده است.

بخش مهمی از کتاب «مجسطی» بوزجانی را می‌توان کتاب جامعی درباره‌ی علم مثلثات دانست که در آن، دستورهای مهم مثلثات، چه در مثلثات مسطح و چه در مثلثات کروی، ثابت شده و در مسائل متعدد و متنوع، مورد استعمال قرار گرفته است. در مثلث مسطح، بوزجانی صحت روابط زیر را ثابت کرده و آن‌ها را به‌کار بسته است:

$$\frac{2R-(180^\circ-\alpha)}{\text{وتر}\,\frac{\alpha}{2}}=\frac{\text{وتر}\,\frac{\alpha}{2}}{R} \qquad (1)$$

در این دستور، R شعاع دایره‌ی محیطی و α برحسب درجه است. این دستور معادل است با دستور کنونی:

$$2\sin^2\frac{\alpha}{2}=1-\cos\alpha .$$

$$\frac{\text{وتر}\,\alpha}{\text{وتر}\,\frac{\alpha}{2}}=\frac{\text{وتر}\,(180^\circ-\frac{\alpha}{2})}{R} \qquad (2)$$

این دستور معادل است با دستور کنونی:

$$\sin\alpha=2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} .$$

برای محاسبه‌ی جیب مجموع و تفاضل دو قوس دو استدلال هندسی بیان کرده است که یکی از آن‌ها به‌دستور پیچیده‌ی زیر منجر می‌شود:

$$(a\pm b)=\sqrt{\sin^2 a-\sin^2 a\sin^2 b}\pm\sqrt{\sin^2 b-\sin^2 a\sin^2 b}$$

نتیجه‌ی استدلال دومی نیز دستور زیر است:

$$\sin(a\pm b)=\sin a\cos b\pm\cos a\sin b$$

ب) هندسه

کتاب «اعمال هندسی» بوزجانی مربوط به هندسه‌ی عملی است و بین کتاب‌هایی که مسلمانان در هندسه تألیف کرده‌اند، بی‌نظیر است. در این کتاب سه مطلب مهم زیر به‌خصوص جلب توجه می‌کند:

۱. ترسیمات متفاوت هندسی به وسیله‌ی خط‌کش و فقط یک گشادگی دهانه‌ی پرگار (که از ابتدا تا انتهای ترسیم ثابت نگه داشته می‌شود).

۲. حل کامل و بدیع مسئله‌ی زیر:

تقسیم یک مربع به عده‌ی معلومی مربعات، یا تشکیل یک مربع با عده‌ی معینی از مربعات به وسیله‌ی پهلو به پهلو قرار دادن آن‌ها و بدون استفاده از قضیه‌ی **فیثاغورث**.

۳. ساختن چند وجهی‌های منتظم (و چند چند وجهی نیم‌منتظم) با طریقه‌ای غیر از روش‌های متفاوتی که **اقلیدس** و **پاپوس** به‌کار بسته‌اند.

ج) حساب

کتاب حساب بوزجانی که عنوانش «کتاب فی مایحتاج الیه الکتاب والعمال من علم الحساب» است، از جهت تاریخ علم حساب اهمیت دارد. بوزجانی در سه منزل اول این کتاب، تعاریف و قاعده‌های مربوط به نسبت، ضرب، تقسیم و مساحت را که در زمان او معمول بوده، مدوّن ساخته است و هر جا دیگران درباره‌ی آن‌ها اشتباهی مرتکب شده بوده‌اند، آن‌ها را تصحیح کرده است. چهار منزل دیگر کتاب او مربوط به حساب عملی است. در کتاب‌های «یوشکویچ M» و «فرهنگ زندگی‌نامه‌ی علمی»، درباره‌ی کتاب حساب بوزجانی بحث شده است.

ادامه در صفحه‌ی ۳ جلد

بسم الله الرحمن الرحیم

رشد برهان ۶۶ متوسطه
مجله‌ی ریاضی

دوره‌ی آموزش متوسطه
فصلنامه‌ی آموزشی، تحلیلی و اطلاع رسانی

وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی
دفتر انتشارات کمک آموزشی

دوره‌ی نوزدهم /شماره‌ی ۴ / تابستان ۱۳۸۹

◆مدیر مسئول: محمد ناصری ◆سردبیر: حمیدرضا امیری
◆مدیر داخلی: میرشهرام صدر ◆طراح گرافیک: شاهرخ خرمغانی
◆هیئت تحریریه: حمیدرضا امیری، محمد هاشم رستمی، احمد قندهاری، میرشهرام صدر، هوشنگ شرقی، سید محمدرضا هاشمی موسوی، غلامرضا یاسی‌پور و با تشکر از همکاری ارزنده‌ی استاد پرویز شهریاری ◆ویراستار ادبی: کبری محمودی
◆ پایگاه اینترنتی www.roshd mag.ir
◆ رایانامه: Borhanm@roshdmag.ir
◆پیام‌گیر نشریات رشد: ۰۲۱-۸۸۳۰۱۴۸۲
نشانی دفتر مجلّه: تهران، صندوق پستی ۱۵۸۷۵/۶۵۸۵
◆تلفن دفتر مجله: ۰۲۱-۸۸۳۰۵۸۶۲
◆تلفن امور مشترکین: ۰۲۱-۷۷۳۳۶۶۵۵_۷۷۳۳۶۶۵۶
◆شمارگان: ۸۰۰۰ نسخه
■ چاپ: شرکت افست (سهامی عام)

رشد برهان متوسطه، تمامی دبیران محترم و دانش‌آموزان عزیز را در زمینه‌های زیر به همکاری دعوت می‌کند:

■ نگارش مقاله‌های کمک درسی (شرح و بسط و رفع مشکلات مبحث درسی کتاب‌های ریاضی دوره‌ی متوسطه و پیش‌دانشگاهی)
■ طرح مسائل کلیدی به همراه حل آن‌ها (برای دانش‌آموزان)
■ طرح مسائل مسابقه‌ای به همراه حل آن‌ها (برای دانش‌آموزان)
■ طرح معماهای ریاضی
■ نگارش یا ترجمه‌ی مقاله‌های عمومی ریاضی (مانند تاریخ ریاضیات، زندگینامه‌ی علمی و اجتماعی ریاضیدانان، نکته‌های تازه و لطیف ریاضیات، آموزش ریاضیات، آموزش کامپیوتر و ...)

رشد برهان متوسطه هر سه ماه، یکبار منتشر می‌شود.
مجلّه در حکّ، اصلاح، حذف و اضافه ی مقاله ها آزاد است.
مقاله های وارده ،باید خوانا و حتی‌الامکان کوتاه باشد.
مقاله های رسیده مسترد نمی‌شود.
استفاده از مطالب مجلّه در کتاب ها یا مجله های دیگر با ذکر دقیق مأخذ بلامانع است.

حرف اول

ریاضیات کاربردی ـ ریاضیات محض

ریاضیات در دوره‌های متفاوت تاریخی، به‌دلیل ویژگی‌های تمدنی و اجتماعی هر دوره، همواره تحت تأثیر دو عامل قرار داشته و پیشرفت کرده است: یکی عامل درونی که همان زیبایی‌ها و ویژگی‌های خاص و جذاب ریاضیات است و حس کنجکاوی بشر را پاسخ‌گو بوده و هست، و دیگری عامل بیرونی که همان احتیاجات و کاربردهای آن در زندگی روزمره و علوم دیگر است.

در دوره‌ای که هم‌اکنون در آن به سر می‌بریم، گرچه هر دو عامل باعث دگرگونی و پیشرفت در ریاضیات بوده‌اند، اما شاید بتوان گفت کاربرد ریاضیات در علوم و دانش‌های دیگر، هم‌چون فیزیک و مکانیک، شیمی، زیست‌شناسی، اقتصاد و... بیشتر باعث رشد و تنوع در پیدایش شاخه‌های متفاوت ریاضیات شده است که در این فرصت به تعدادی از آن‌ها اشاره می‌کنم.

«کاربردهای ریاضیات، بی‌اندازه زیاد و بسیار گوناگون است. در واقع به کار بردن روش‌های ریاضی مرزی نمی‌شناسد. همه‌ی شکل‌های متنوع حرکت ماده را می‌توان با روش ریاضی بررسی کرد. البته، نقش و اهمیت روش ریاضی در حالت‌های گوناگون، متفاوت است. هیچ طرح معین ریاضی نمی‌تواند از عهده‌ی بیان همه‌ی ویژگی‌های پدیده‌های حقیقی برآید. وقتی می‌خواهیم پدیده‌ای را بررسی کنیم، شکل خاصی از آن را در معرض تحلیل منطقی قرار می‌دهیم. در ضمن تلاش می‌کنیم نقطه‌هایی را بیابیم که در این شکل جدا شده از پدیده‌ی واقعی وجود ندارد و شکل‌های تازه‌ای پیدا کنیم که بیشتر و کامل‌تر، دربرگیرنده‌ی پدیده‌ی ما باشد.»[۱]

مکانیک آسمانی، به‌خصوص مطالعه روی حرکت سیاره‌ها و کهکشان‌ها، نمونه‌ی موفقی از کاربرد روش‌های ریاضیات است. هم‌چنین، قانون جاذبه‌ی عمومی مدلی ریاضی است برای بیان یک پدیده‌ی طبیعی که به خوبی آن را تشریح می‌کند و توضیح می‌دهد. کاربردهای ریاضی در فیزیک در حدی پیشرفته و فراگیر است که اگر فقط مفهوم مشتق را از ریاضی حذف کنیم، از ابتدایی‌ترین معادلات در فیزیک و مکانیک که همان معادله‌ی حرکت باشد به بعد، چیزی باقی نمی‌ماند!

از نظریه‌ی احتمال، در بررسی جابه‌جایی تصادفی و میکروسکوپی ذره‌ها، تحت تأثیر مولکول‌های ماده‌ی حلال استفاده می‌شود و چون تعداد ذره‌های در حال انتشار بسیار زیاد است، قوانین توزیع احتمال ما را به سمت کشف یک قانون معین و غیرتصادفی برای مواد قابل انتشار سوق می‌دهد.

هم‌چنین در دانش زیست‌شناسی، روش‌های ریاضی توانسته‌اند در علم ژنتیک نقش مهم و به‌سزایی را ایفا کنند و نیز در علوم اجتماعی و انسانی، نقش آمار ریاضی غیرقابل انکار و چشم‌پوشی است. امروزه، توسط روش‌های آماری بسیاری از پدیده‌های اجتماعی قابل توجیه و تجزیه و تحلیل هستند و برنامه‌ریزی بدون استفاده از علم آمار تقریباً غیرممکن است. خلاصه، دانشی از دانش‌های بشری را نمی‌توان یافت که به نوعی، مستقیم یا غیرمستقیم، از دانش ریاضی بهره نبرد.

سردبیر

پی‌نوشت.............

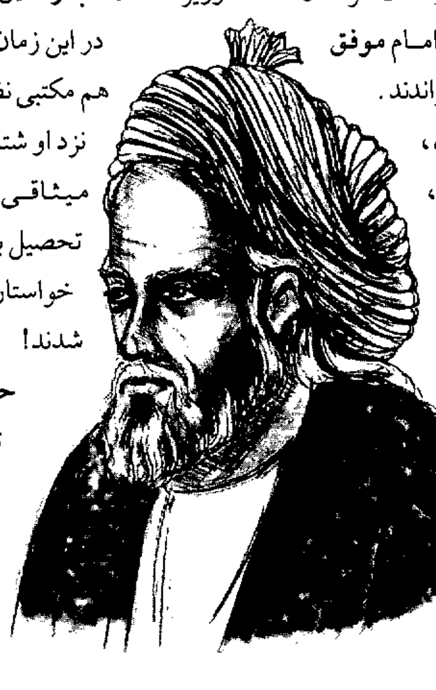
۱. بخشی از مقدمه‌ی کتاب: فرهنگ ریاضیات دبیرستانی، اثر استاد پرویز شهریاری، از انتشارات مدرسه.

● نوشته‌ی دکتر هاورد ایوز
ترجمه‌ی حسن نصیرنیا

ریاضی‌دان و شاعر خطه‌ی خراسان

سه یار دبستانی

در نیمه‌ی دوم قرن پنجم هجری قمری، سه جوان ایرانی که هر یک شاگردی ممتاز بود، هم‌زمان در محضر یکی از بزرگ‌ترین فرزانگان خراسان، فقیه بزرگ عصر، امام موفق **نیشابوری**، درس می‌خواندند. این سه جوان، **نظام‌الملک**، **حسن بن صباح** و **عمر خیام**، دوستانی یکدل و یکرنگ بودند. اعتقاد بر این بود که شاگردی که در مکتب امام تحصیل کند، نیک‌بخت و نیک‌فرجام خواهد شد. از همین روی، روزی حسن به دوستان خویش پیشنهاد کرد که هر سه تن پیمان ببندند، اگر هر یک به مقام و منصب والایی رسید، مراتب فضل و برتری را منحصراً از آن خود نداند و دو یار دیگر را نیز به تساوی از آن بهره‌مند کند. با گذشت زمان، معلوم شد که بخت بلند با نظام‌الملک یار بوده است، چرا که او وزیر سلطان **آلب ارسلان** شد.



در این زمان، دو یار دیگر هم مکتبی نظام‌الملک، نزد او شتافتند و بنابر میثاقی که در دوران تحصیل بسته بودند، خواستار سهم خویش شدند! **حسن صباح**، تقاضای منصبی دیوانی کرد که بنا به استدعای وزیر، سلطان سلجوقی آن را به او تفویض کرد. اما وی که شخصی خودخواه و ناسپاس بود، بر آن شد که دوست خود نظام‌الملک را از مقام صدارت به زیر کشد و جانشین او شود. ولی سرانجام پس از بر ملا شدن خیانت، مورد غضب واقع و تبعید شد.

اما عمر خیام نه مقامی می‌خواست و نه عنوانی. تنها خواسته‌اش این بود که به او رخصت داده شود تا در پناه و سایه‌ی وزیر بتواند به اشاعه‌ی علم و ریاضیات بپردازد و به پاس این نعمت، برای دوام عمر و سعادت دوست خویش دست به دعا بردارد. وزیر که سخت تحت تأثیر فروتنی و اخلاص هم‌مکتبی سابق خود قرار گرفته بود، برای او مقرری سالانه تخصیص داد.

حسن صباح پس از تحمل دربه‌دری و بدبختی‌های بسیار، رهبر فرقه‌ای متعصب مذهبی شد که در سال ۴۸۳ هجری قمری بر قلعه‌ی الموت، واقع در کوهستان‌های مرتفع جنوب دریای خزر تسلط یافتند.

برخلاف زندگی پرآشوب حسن صباح، زندگی خیام با آرامش و سادگی توأم بود. وی در طول سال‌ها عمر مسالمت‌آمیز خویش، خدمات ارزنده‌ای به ادبیات و فرهنگ علمی آن عصر کرد.

چکیده

مقاله‌ی حاضر، به یکی از دستاوردهای برجسته‌ی ریاضی این اندیشمند پژوهشگر (دستاوردی که در زمره‌ی لحظه‌های مهم در تاریخ ریاضیات[۲] قرار می‌گیرد) اختصاص یافته است. نخست برای روشن‌تر شدن موضوع، اندکی درباره‌ی مقدمات آن سخن می‌گوییم.

کلیدواژه‌ها: خیام، ریشه‌ی معادله، چندجمله‌ای حقیقی، ریشه‌های حقیقی مثبت.

مقدمه

مفهوم معادله و حل آن

منظور از معادله‌ی چندجمله‌ای حقیقی با یک مجهول x هر معادله‌ای به شکل زیر است:

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n = 0$$

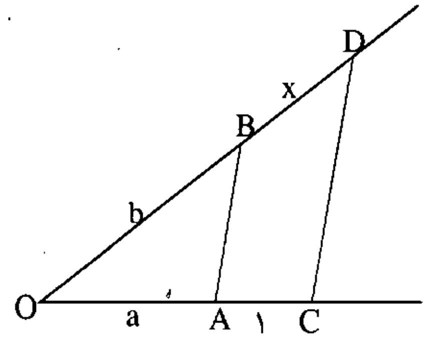
که در آن n یک عدد صحیح مثبت و $a_0, a_1, \dots, a_n$ اعداد حقیقی با شرط $a_0 \neq 0$ هستند. هر مقدار x که در معادله صدق کند، ریشه‌ی آن معادله خوانده می‌شود. یکی از هدف‌های اصلی دانش جبر در آغاز پیدایش، آن بود که روش‌های کلی برای به‌دست آوردن ریشه‌های این گونه معادلات را بیابد. این کار را حل کردن معادلات می‌نامیدند. چون در آن روزگار تنها اعداد شناخته شده، اعداد مثبت حقیقی بودند، طی صدها سال، حل کردن معادله، به مفهوم یافتن ریشه‌های حقیقی مثبت آن معادله بود؛ در صورتی که ریشه‌ای می‌داشت. معادلات بر حسب این که درجه‌ی آن‌ها مساوی ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ و... باشد، به ترتیب معادلات خطی، درجه دو، درجه سه، درجه چهار، درجه پنج و... نامیده می‌شوند.

امروزه مشکلی در راه‌حل معادله‌ی خطی وجود ندارد، زیرا می‌توان آن را از راه هندسی یا جبری به راحتی حل کرد.

معادلات درجه اول و درجه دوم

اگر یک معادله‌ی چند جمله‌ای خطی با یک مجهول x یک ریشه‌ی مثبت داشته باشد، می‌توان این معادله را همواره به شکل ax=b نوشت که در آن a و b هر دو عددهای مثبت‌اند. ریشه‌ی معادله از راه جبری $x = \frac{b}{a}$ و از راه هندسی عبارت است از چهارمین جزء تناسبی که سه پاره‌خط به طول‌های a، b و ۱ سه جز دیگر آن هستند. به این معنی که $\frac{a}{b} = \frac{1}{x}$ و مقدار x را می‌توان از شکل ساده‌ی زیر توسط پرگار یا خط‌کش مشخص کرد.

در این شکل، COD زاویه‌ای دل‌خواه است و OA=a، OB=b و AC=1، و CD موازی AB رسم شده است.



(شکل ۱)

جالب توجه است که مصریان عهد باستان، معادلات خطی را به شیوه‌ای حل می‌کردند که بعدها در اروپا به‌عنوان قاعده‌ی تصحیح و خطا[3] معروف شد. بنا براین شیوه، برای حل معادله‌ی $x + \frac{x}{7} = 24$ باید از قاعده‌ای که در پی می‌آید، استفاده کرد. فرض کنیم، x معادل مقداری دل‌خواه باشد؛ مثلاً x=7 که به ازای آن مقدار $x + \frac{x}{7}$ مساوی ۸ می‌شود نه ۲۴. چون ۸ باید در ۳ ضرب شود تا عدد مطلوب یعنی ۲۴ به‌دست آید، مقدار واقعی x باید از رابطه‌ی ۲۱=(۷)۳ حاصل شود. نکته‌ی شایان تأمل این است که از یک حدس محض، پاسخ صحیح به‌دست آمده است.

هر چند که حالات معادلات درجه دوم مشکل‌تر از مورد معادلات خطی است، ریاضی‌دانان روزگار قدیم، این مورد را نیز، هم از راه هندسه و هم از راه جبر حل می‌کردند. راه‌حل جبری، اعم از این که به روش مربع کامل کردن یا به روش جای گزینی در فرمول کلی ریشه‌ی معادله‌ی درجه دوم صورت گیرد، باید برای تمام کسانی که مقدمات جبر را در درس‌های دوران مدرسه فراگرفته‌اند، آشنا باشد. بابلی‌ها در تقریباً ۲۰۰۰ سال پیش از میلاد، شیوه‌های مشابهی را برای راه‌حل جبری هر دو معادله‌ی مذکور می‌شناختند.

معادلات درجه سوم و راه‌حل خیام

مورد معادلات درجه سوم به مراتب دشوارتر از دو مورد یاد شده است. البته بابلی‌ها برخی معادلات درجه سوم خاص را به کمک یک جدول حاوی مقادیر n^3+n^2 نظیر مقادیر n حل می‌کردند و بنا بر آن چه در یکی از آثار به جا مانده از **ارشمیدس** آمده است، این ریاضی‌دان یونانی از شرایطی بحث می‌کند که تحت آن، یک معادله‌ی درجه سوم ممکن است ریشه‌ی مثبت و حقیقی داشته باشد.

بحث در این باره، در دوره‌های بعد نیز ادامه یافت تا این که در قرن شانزدهم، یک ریاضی‌دان ایتالیایی، سرانجام راه‌حل جبری کلی برای معادلات درجه سوم ارائه داد. با این حال، در حدود پانصد سال پیش از این واقعه، شاعری ریاضی‌دان از اهالی ایران، موسوم به عمر خیام، یک راه‌حل هندسی برای معادلات درجه سوم یافت. این همان لحظه‌ی مهم در تاریخ ریاضیات است که در بالا بدان اشاره شد و حال پس از ذکر

مقدماتی چند درباره ی تاریخچه ی آن، به بحث در مورد راه‌حل خیام خواهیم پرداخت:

دوران بین نیمه ی قرن پنجم تا قرن یازدهم میلادی، به قرون تاریک اروپا مشهور است، زیرا طی این دوره، آموزش و تمدن در اروپای غربی تا سطح بسیار نازلی افول کرد. از سوی دیگر در این دوران، امپراتوری اسلامی به نقطه ی اوج ترقی خود رسید. در طول یک دهه پس از هجرت حضرت محمد(ص) از مکه به مدینه در سال ۶۲۳ میلادی، قبایل بادیه‌نشین پراکنده و از هم گسیخته ی شبه‌جزیره ی عربستان، به برکت شور و شوق ناشی از مذهبی مقتدر، در قالب امت قدرتمندی متحد شدند. پس از گذشت یک قرن از هجرت، حکومت ستاره و هلال[1] مسلمانان در قلمروی وسیع از هند تا سرتاسر ایران، بین‌النهرین، آفریقای شمالی و اسپانیا گسترده شد.

یکی از کارهای مهم در حفظ بخش بزرگی از میراث فرهنگ جهانی، تلاش خستگی‌ناپذیر و مجدانه ی مسلمانان در بارور کردن دستاوردهای علمی و تحقیقی یونانیان و هندیان بود. در ضمن این فعالیت‌ها، بسیاری از آثار هندی و یونانی در زمینه‌های پزشکی، نجوم و ریاضیات، با جدیت تمام به زبان عربی ترجمه شدند. بدین‌ترتیب، این آثار مدت‌ها از دستبرد حوادث زمانه در امان ماند تا این‌که بعدها دانشمندان اروپایی توانستند آن‌ها را بار دیگر به زبان لاتین و سایر زبان‌های اروپایی برگردانند. اما اگر فعالیت‌های مجدانه ی پژوهشگران اندیشمند اسلامی نبود، بسیاری از علوم یونانی و هندی در خلال دوران طولانی قرون تاریک، به گونه‌ای جبران‌ناپذیر از میان می‌رفت. مسلمانان نه تنها پاس‌داران شایان تحسین بسیاری از سرمایه‌های فکری و معنوی قلمداد می‌شوند، بلکه توانستند خود نیز بر غنای آن‌ها بیفزایند. از جمله کارهای بسیار اصیل و ارجمند در این زمینه، ارائه ی راه‌حل هندسی معادلات درجه سوم توسط عمر خیام بود.

عمر خیام (که در نیمه ی دوم قرن چهارم و نیمه ی اول قرن پنجم هجری قمری می‌زیست)، شاعر، منجم و ریاضی‌دان ایرانی بود که در نیشابور زاده و دانش آموخته شد. اما شهرت خیام نزد مردم جهان غرب که به او سخت مهر می‌ورزند، بیشتر ناشی از رباعیات نغز اوست که توسط شاعر دل‌باخته ی ایرلندی، **ادوارد فیتز جرالد**، به گونه‌ای استادانه و شیوا به انگلیسی ترجمه شده است. عمر خیام در جهان علم نیز شهرت دارد؛ چه او توانسته است تقویم را به خوبی اصلاح و تقویم جلالی را تدوین کند. برخورد انتقادی او نسبت به اصل توازی اقلیدس نشان می‌دهد که خیام در این باره، مقدم بر ساکری است که ایده ی او سرانجام به آفرینش هندسه ی نااقلیدسی منجر شد. از این‌ها گذشته، خدمت برجسته ی او به جهان علم و جبر دنیای اسلام، این بود که برای حل همه ی معادلات درجه سوم ـ یافتن ریشه‌های مثبت این معادلات ـ راه‌حل هندسی ارائه داد.

برای نشان دادن شیوه ی ابداعی عمر خیام از معادله ی درجه سوم خاص، یعنی معادله ی $x^3 + b^2x + a^3 = cx^2$ کمک می‌گیریم که در آن a، b، c و x به‌عنوان طول‌های چندپاره خط فرض شده‌اند. خیام این نوع معادله ی درجه سوم را با اصطلاحات خاص آن دوره، چنین مطرح می‌کند: «یک مکعب، چند ضلع و چند عدد که مساوی چند مربع هستند.»

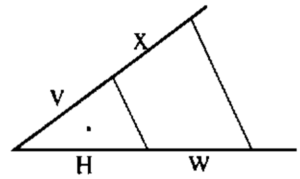
یکی از کارهای مهم در حفظ بخش بزرگی از میراث فرهنگ جهانی، تلاش خستگی‌ناپذیر و مجدانه ی مسلمانان در بارور کردن دستاوردهای علمی و تحقیقی یونانیان و هندیان بود

اما مسئله ی مذکور از نظر هندسی این طور بیان می‌شود: به فرض داشتن یک پاره خط واحد و چند پاره‌خط a، b و c، پاره‌خط x را چنان بکشید که رابطه ی بالا بین a، b، c و x برقرار باشد.

هدف آن است که تا سر حد امکان، پاره‌خط x تنها با استفاده از خط‌کش و پرگار رسم شود. یافتن یک راه‌حل صرفاً متکی به استفاده از خط‌کش و پرگار به‌طور کلی ناممکن است؛ چه در قسمتی از کشیدن شکل باید مجاز باشیم از منحصراً یک مقطع مخروطی خاص مفروض استفاده کنیم.

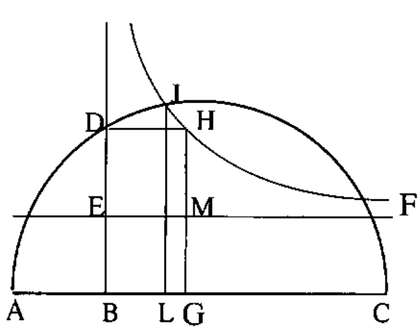
یک راه اساسی ترسیم شکل که چندین‌بار در حل معادله ی درجه سوم به کار گرفته شده، منوط به آن است که چهارمین جزء از تناسبی را بیابیم که سه پاره‌خط مفروض، سه جزء معلوم آن باشند. این یک مسئله ی قدیمی است که راه‌حل آن بر یونانیان عهد باستان معلوم بوده است.

فرض کنیم u، v و w سه پاره‌خط معین باشند و ما بخواهیم طول پاره‌خط x را طوری تعیین کنیم که $\frac{u}{v} = \frac{w}{x}$ باشد. شکل ۲ که شبیه شکل ۱ است، نشان می‌دهد که چگونه می‌توان با کمک خط‌کش و پرگار، پاره‌خط x موردنظر را رسم کرد.



(شکل ۲)

حال دنباله‌ی راه‌حل هندسی معادله‌ی درجه سوم $x^3 + b^2x + a^3 = cx^2$ عمر خیام را شرح می‌دهیم: نخست با استفاده از راه اساسی ترسیم شکل، پاره‌خط z را چنان می‌یابیم که $\frac{b}{a} = \frac{a}{z}$ باشد. سپس بار دیگر با استفاده از راه اساسی ترسیم شکل، پاره‌خط m را چنان می‌یابیم که $m = \frac{a^3}{b^2}$ باشد. حال در شکل $AB = m = \frac{a^3}{b^2}$ و $BC = c$ را رسم می‌کنیم. آن‌گاه نیم‌دایره‌ای به قطر AC می‌کشیم و از B عمودی بر AC رسم می‌کنیم تا نیم‌دایره را در D قطع کند. سپس روی BD، مقدار $BE = b$ را جدا می‌کنیم و از E خط EF را موازی AC می‌کشیم. باز با توجه به راه اساسی ترسیم شکل، G را روی BC چنان می‌یابیم که $\frac{ED}{BE} = \frac{AB}{BG}$ باشد و مستطیل DBGH را کامل می‌کنیم. در مرحله‌ی بعد، یک هذلولی قائم را از H طوری رسم می‌کنیم که EF و ED خطوط مجانب آن باشند (به این معنی که معادله‌ی هذلولی گذرنده بر نقطه‌ی H نسبت به محورهای EF، به‌عنوان محور طول و ED، به‌عنوان محور y، به شکل $xy = a$ باشد که a عدد ثابت است).
این هذلولی، نیم‌دایره را در J قطع می‌کند و خطی که از J موازی DE رسم شود، خط



(شکل ۳)

EF را در K و BC را در L قطع می‌کند. اگر GH با EF در M برخورد کند، خواهیم داشت:
چون J و H روی هذلولی هستند، داریم:

$$(EK)(KJ) = (EM)(MH) \qquad (1)$$

چون $\frac{ED}{BE} = \frac{AB}{BG}$ است، داریم:

$$(BG)(ED) = (BE)(AB) \qquad (2)$$

بنابراین، از دو رابطه‌ی ۱ و ۲ نتیجه می‌شود که:

$$(EK)(KJ) = (EM)(MH) = (BG)(ED) = (BE)(AB) \qquad (3)$$

حل:

$$(BL)(LJ) = (EK)(BE + KJ) = (EK)(BE) + (EK)(KJ) = (EK)(BE) + (AB)(BE)(3) = (BE)(EK + AB) = (BE)(AL) \qquad (4)$$

و از آن‌جا: $(BL)^2(LJ)^2 = (BE)^2(AL)^2$

اما با توجه به هندسه‌ی مقدماتی داریم:

$$(LJ)^2 = (AL)(LC) \qquad (5)$$

بنابراین، از رابطه‌های ۴ و ۵ نتیجه می‌گیریم:

$$(BE)^2(AL) = (BL)^2(LC) \qquad (6)$$

یا $(BE)^2(BL + AB) = (BL)^2(BC - BL)$

با قرار دادن $BE = b$، $AB = \frac{a^3}{b^2}$ و $BC = C$ در رابطه‌ی ۶ داریم:

$$b^2(BL + \frac{a^3}{b^2}) = (BL)^2(C - BL) \qquad (7)$$

با بسط آخرین معادله در رابطه‌ی ۷ و مرتب‌کردن جمله‌ها داریم:

$$(BL)^3 + b^2(BL) + a^3 = C(BL)^2 \qquad (8)$$

و از این‌جا $BL = X$ یعنی یک ریشه‌ی معادله‌ی درجه سوم مفروض به دست می‌آید.
باید اذعان کرد که روش خیام ماهرانه و بدیع است و ضرورت ایجاب می‌کند که هر معلم دبیرستان بتواند علاقه‌ی برخی از دانش‌آموزان خود را نسبت به آن برانگیزاند. ترسیم

> **شهرت خیام نزد مردم جهان غرب که به او سخت مهر می‌ورزند، بیش‌تر ناشی از رباعیات نغز اوست که توسط شاعر دل‌باخته‌ی ایرلندی، ادوارد فیتز جرالد، به گونه‌ای استادانه و شیوا به انگلیسی ترجمه شده است**

نقطه به نقطه‌ی هذلولی (با استفاده از ترسیم در حالت کلی شکل) کار آسانی است، زیرا اگر N هر نقطه‌ای روی EF باشد و اگر عمود بر EF از نقطه‌ی N، هذلولی را در p قطع کند، داریم:

$$(EM)(MH) = (EN)(NP)$$

و از آن‌جا $\frac{MH}{NP} = \frac{EN}{EM}$ و NP چهارمین پاره‌خط متناسب با پاره‌خط‌های مفروض EN، EM و MH است.

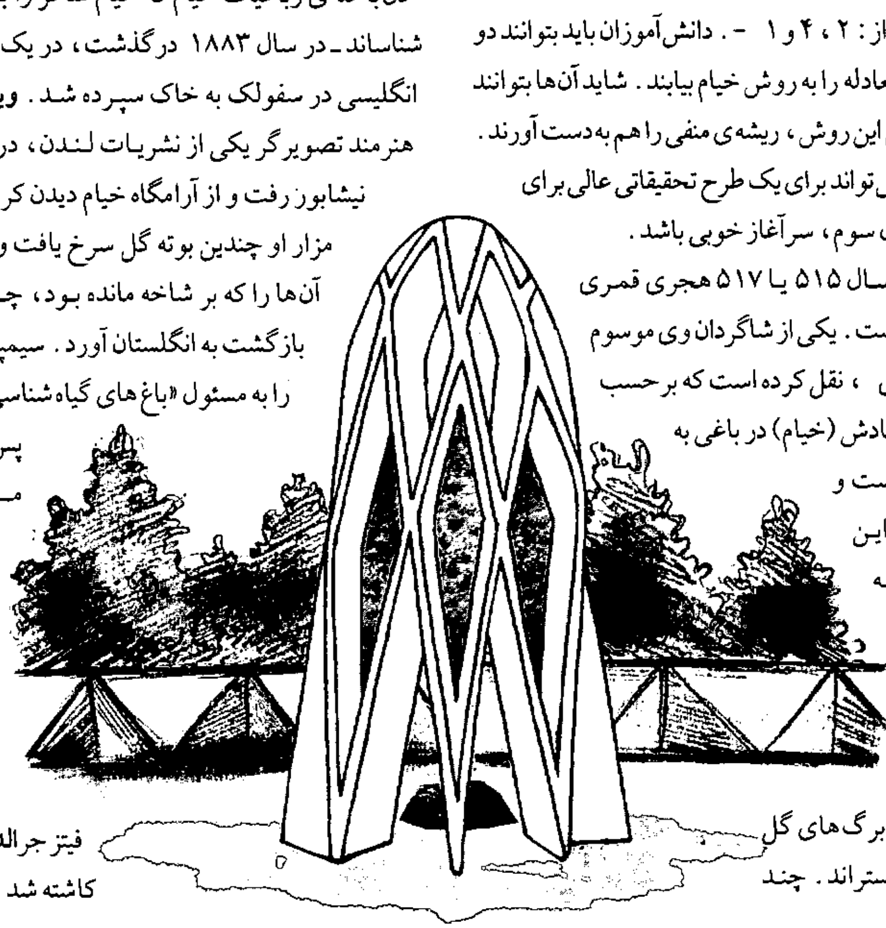
به این ترتیب، نخست می‌توان تعدادی از نقطه‌های روی هذلولی را مشخص کرد و سپس با ترسیم یک منحنی بر نقاط به‌دست آمده، هذلولی را کامل کرد. ممکن است معادله‌ی درجه سوم $x^3 + 2x + 8 = 5x^2$ را به دانش‌آموزان پیشنهاد کرد. در این‌جا $a = 2$، $b = \sqrt{2}$ و $c = 5$ است. سه ریشه‌ی این معادله عبارت‌اند از: ۲، ۴ و ۱ -. دانش‌آموزان باید بتوانند دو ریشه‌ی مثبت معادله را به روش خیام بیابند. شاید آن‌ها بتوانند با مختصر تعمیم این روش، ریشه‌ی منفی را هم به‌دست آورند.

حل این مسئله می‌تواند برای یک طرح تحقیقاتی عالی برای دانش‌آموزان سال سوم، سرآغاز خوبی باشد.

عمر خیام در سال ۵۱۵ یا ۵۱۷ هجری قمری در نیشابور درگذشت. یکی از شاگردان وی موسوم به **نظامی سمرقندی**، نقل کرده است که برحسب معمول، او با استادش (خیام) در باغی به گفت‌وگو می‌نشست و خیام در یکی از این جلسات به او گفته بوده است که آرزو دارد مدفنش در نقطه‌ای بنا شود که باد شمال برگ‌های گل سرخ را بر آن بگستراند. چند سال بعد از این گفت‌وگو که خیام جهان را به درود گفته بود، شاگردش به نیشابور می‌رود و پس از یافتن آرامگاه خیام، درمی‌یابد که قبر او درست در مجاورت باغی قرار گرفته و شاخه‌ی درختان میوه از دیوارهای باغ به طرف خارج سرازیر شده و شکوفه‌های گل‌های آن‌ها آن‌قدر بر آرامگاه استاد فرو ریخته‌اند که سنگ مزارش را کاملاً پوشانیده‌اند.

برخورد انتقادی خیام از اصل توازی اقلیدس نشان می‌دهد که او در این باره، مقدم بر ساکری است که ایده‌ی او سرانجام به آفرینش هندسه‌ی نااقلیدسی منجر شد

وقتی **ادوارد فیتز جرالد** ـ شاعر ایرلندی دل‌باخته‌ی رباعیات خیام که خیام شاعر را به اروپا شناساند ـ در سال ۱۸۸۳ درگذشت، در یک کلیسای کوچک انگلیسی در سفولک به خاک سپرده شد. **ویلیام سیمپسون**، هنرمند تصویرگر یکی از نشریات لندن، در سال ۱۸۸۴ به نیشابور رفت و از آرامگاه خیام دیدن کرد. در کنار سنگ مزار او چندین بوته گل سرخ یافت و مقداری از تخم آن‌ها را که بر شاخه مانده بود، چید و آن‌ها را در بازگشت به انگلستان آورد. سیمپسون تخم گل‌ها را به مسئول «باغ‌های گیاه‌شناسی کیو» سپرد و او پس از کاشتن آن‌ها موفق شد، بوته‌های گل سرخ به عمل آورد. در ۷ اکتبر ۱۸۹۳ یکی از این بوته‌های گل، به آرامگاه فیتز جرالد منتقل و در آن‌جا کاشته شد.



پی‌نوشت

۱. این نشان عثمانی‌ها و ترکیه‌ی فعلی است که البته از قرن ۱۶ میلادی پرچم عثمانی‌ها بوده است، نه در قرن‌های اول یا دوم هجری.

۲. ادوارد فیتزجرالد ایرلندی، مترجم رباعیات خیام، در مقدمه‌ای که به زبان انگلیسی بر این کتاب نگاشته است، صحت انتساب این روایت افسانه‌آمیز به خیام را تأیید می‌کند ـ م.

۳. پروفسور هاور ایوز (نگارنده‌ی این مقاله)، استاد برجسته‌ی معاصر و صاحب‌نظر در تاریخ ریاضیات و هندسه، مجموعه سخن‌رانی‌های خویش را در دو کتاب به نام‌های «لحظه‌های مهم در تاریخ ریاضیات قبل از سال ۱۶۵۰» و «لحظه‌های مهم در تاریخ ریاضیات بعد از سال ۱۶۵۰» تنظیم و منتشر کرده است. مقاله‌ی حاضر، از کتاب نخست انتخاب و ترجمه شده است.

۴. «قاعده‌ی تصحیح و خطا» یا rule of false position در واقع روشی است برای تخمین زدن ریشه‌های یک معادله‌ی جبری و تعیین کمیت نزدیک به صحت. (م.)

منبع

Eves, Howard, Great Moments in Mathematics Before 1650, Washington, D.C. The Mathematical Association of America, 1983.

احمد قندهاری

اتحادها و تجزیه

تعریف اتحاد: هر تساوی بین دو عبارت جبری که به ازای جمیع مقادیر متغیرهای تعریف شده، در دو طرف تساوی همواره برقرار باشد، اتحاد نامیده می‌شود. برای مثال، تساوی $x^2 - a^2 = (x-a)(x+a)$ یک اتحاد است، زیرا به ازای هر مقدار عددی از x و a، دو طرف تساوی با هم برابرند.

اتحادهای جبری

اتحاد اول (مربع مجموع دو جمله‌ای): $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$

اتحاد دوم (مربع تفاضل دو جمله‌ای): $(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$

نتایج:

الف) $a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab$

ب) $a^2 + b^2 = (a^2 - b^2) + 2ab$

ج) $(a+b)^2 + (a-b)^2 = 2(a^2 + b^2)$

د) $(a+b)^2 + (a-b)^2 = 4ab$

مسئله‌ی ۱. اگر x و y اعداد حقیقی مثبت باشند، حاصل $(2x\sqrt{x} + \sqrt{3}y^2\sqrt{y})^2 - (2x\sqrt{x} - \sqrt{3}y^2\sqrt{y})^2$ را بیابید.

حل: فرض می‌کنیم $a = 2x\sqrt{x}$ و $b = \sqrt{3}y^2\sqrt{y}$ پس مسئله به صورت زیر است:

$$(a+b)^2 - (a-b)^2$$

بنا به نتیجه‌ی (د) داریم: $(a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab$

$$\Rightarrow (2x\sqrt{x} + \sqrt{3}y^2\sqrt{y})^2 - (2x\sqrt{x} - \sqrt{3}y^2\sqrt{y})^2$$

$$= 4(2x\sqrt{x})(\sqrt{3}y^2\sqrt{y}) = 8xy^2\sqrt{3xy}$$

اتحاد سوم (اتحاد مزدوج):

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$

مسئله‌ی ۲. عبارت $P = x^4 + 4y^4$ را به حاصل ضرب عوامل تجزیه کنید.

حل:

$$P = x^4 + 4y^4$$

$$P = \underbrace{x^4 + 4y^4 + 4x^2y^2}_{\text{بنابر اتحاد اول}} - 4x^2y^2$$

$$P = (x^2 + 2y^2)^2 - 4x^2y^2 = \underbrace{(x^2 + 2y^2)^2 - (2xy)^2}_{\text{بنابر اتحاد مزدوج}}$$

$$\Rightarrow P = (x^2 + 2y^2 - 2xy)(x^2 + 2y^2 + 2xy)$$

اتحاد چهارم (اتحاد جمله مشترک):

$$(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$$



مسئله‌ی ۳. عبارت $P=(x^2-1)^2-11x^2+35$ را تجزیه کنید.

حل:

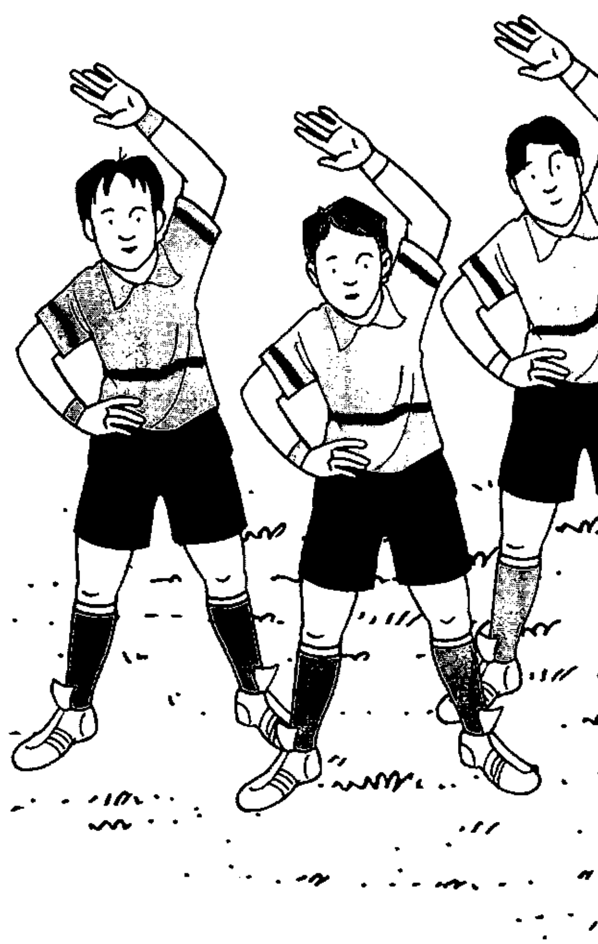
$$P=(x^2-1)^2-11x^2+35$$
$$P=(x^2-1)^2-11(x^2-1+1)+35$$
$$P=(x^2-1)^2-11(x^2-1)-11+35$$
$$P=(x^2-1)^2-11(x^2-1)+24$$

فرض می‌کنیم $a=x^2-1$ $\qquad P=a^2-11a+24$

حال دو عدد می‌یابیم که مجموع آن‌ها ۱۱- و حاصل ضرب آن‌ها ۲۴ باشد.

این دو عدد (۳-) و (۸-) هستند. پس:

$$P=(a-3)(a-8) \qquad a=x^2-1$$
$$P=(x^2-1-3)(x^2-1-8)$$
$$P=(x^2-4)(x^2-9)=(x-2)(x+2)(x-3)(x+3)$$



اتحاد پنجم (اتحاد مربع مجموع سه جمله):

$$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+ac+bc)$$

اتحاد ششم (اتحاد مکعب مجموع دو جمله):

$$\begin{cases}(a+b)^3=a^3+b^3+3a^2b+3ab^2\\(a+b)^3=a^3+b^3+3ab(a+b)\end{cases}$$

اتحاد هفتم (اتحاد مکعب تفاضل دو جمله):

$$\begin{cases}(a-b)^3=a^3-b^3-3a^2b+3ab^2\\(a-b)^3=a^3-b^3-3ab(a-b)\end{cases}$$

مسئله‌ی ۴. اگر $x=\sqrt[3]{3+2\sqrt{2}}+\sqrt[3]{3-2\sqrt{2}}$، آن‌گاه حاصل عبارت $P=x^3-3x$ را بیابید.

حل:

$$x=\underbrace{\sqrt[3]{3+2\sqrt{2}}}_{a}+\underbrace{\sqrt[3]{3-2\sqrt{2}}}_{b}$$
$$x=a+b\Rightarrow x^3=(a+b)^3\Rightarrow$$
$$x^3=a^3+b^3+3ab(a+b)$$
$$x^3=3+2\sqrt{2}+3-2\sqrt{2}+3\sqrt[3]{(3+2\sqrt{2})(3-2\sqrt{2})}(x)$$
$$x^3=6+3\sqrt[3]{9-8}(x)\Rightarrow x^3=6+3x\Rightarrow P=x^3-3x=6$$

مسئله‌ی ۵. اگر $x=\sqrt[4]{\sqrt{5}+2}-\sqrt[4]{\sqrt{5}-2}$، آن‌گاه $P=(x^3+3x)^2$ را بیابید.

حل:

$$x=\underbrace{\sqrt[4]{\sqrt{5}+2}}_{a}-\underbrace{\sqrt[4]{\sqrt{5}-2}}_{b}$$
$$x=a-b\Rightarrow x^3=(a-b)^3\Rightarrow$$
$$x^3=a^3-b^3-3ab(a-b)$$
$$x^3=(\sqrt[4]{\sqrt{5}+2})^3-(\sqrt[4]{\sqrt{5}-2})^3-3\sqrt[4]{(\sqrt{5}+2)(\sqrt{5}-2)}(x)$$
$$x^3=\sqrt{\sqrt{5}+2}-\sqrt{\sqrt{5}-2}-3\sqrt[4]{\sqrt{5}-2x}$$
$$x^3=\sqrt{\sqrt{5}+2}-\sqrt{\sqrt{5}-2}-3x$$
$$\Rightarrow x^3+3x=\sqrt{\sqrt{5}+2}-\sqrt{\sqrt{5}-2}$$
$$\Rightarrow(x^3+3x)^2=\sqrt{5}+2+\sqrt{5}-2-2\sqrt{5-4}\Rightarrow$$
$$P=(x^3+3x)^2=2\sqrt{5}-2$$

مسئله‌ی ۶. ثابت کنید

$$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab+ac+bc)$$

حل: عبارت‌های سمت راست را درهم ضرب می‌کنیم.

$$'' \quad '' = a^3+ab^2+ac^2-a^2b-a^2c-abc$$
$$+a^2b+b^3+bc^2-ab^2-abc-bc^2+a^2c+b^2c+c^3-abc$$
$$-ac^2-bc^2=a^3+b^3+c^3-3abc$$

پس همواره داریم:

$$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab+ac+bc)$$

اگر $a^3+b^3+c^3-3ab=0$ یا $a^3+b^3+c^3=3abc$

$$\Rightarrow \begin{cases} a+b+c=0 \\ \text{یا} \\ a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc=0 \Rightarrow a=b=c \end{cases}$$

نتیجه‌ی مهم: (اتحاد اولر یا لاگرانژ)

$$\begin{cases} a+b+c=0 \\ \text{یا} \\ a=b=c \end{cases} \Leftrightarrow a^3+b^3+c^3=3abc$$

مسئله‌ی ۷. حاصل کسر $\frac{x^3+y^3+z^3-3xyz}{(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2}$ را بیابید.

حل: عبارت مخرج را ساده می‌کنیم

$$(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2$$
$$=x^2+y^2-2xy+y^2+z^2-2yz-z^2+x^2-2xz$$
$$=2x^2=2y^2+2z^2-2(xy+yz+xz)$$

$$\text{کسر}=\frac{(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-xz)}{2(x^2+y^2+z^2-xy-yz-xz)}=\frac{x+y+z}{2}$$

مسئله‌ی ۸. حاصل عبارت زیر را بیابید.

$$P=\sqrt{2(2-\sqrt{2})}.\sqrt[4]{2(3+2\sqrt{2})}$$

حل:

$$P=\sqrt[4]{4(2-\sqrt{2})^2}.\sqrt[4]{2(3+2\sqrt{2})}$$

$$P=\sqrt[4]{4(4+2-4\sqrt{2})}.\sqrt[4]{2(3+2\sqrt{2})}=\sqrt[4]{4(6-4\sqrt{2})^2}.\sqrt[4]{2(3+2\sqrt{2})}$$

$$P=\sqrt[4]{8(3-2\sqrt{2})}.\sqrt[4]{2(3+2\sqrt{2})}=\sqrt[4]{16(3-2\sqrt{2})(3+2\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow P=\sqrt[4]{16(9-8)}=\sqrt[4]{16(1)}=2$$

مسئله‌ی ۸. اگر $n\in N$ و n عددی فرد باشد و داشته باشیم $a^3+b^3+c^3=a+b+c=0$، آن‌گاه حاصل عبارت $P=a^n+b^n+c^n$ را بیابید.

حل:

داریم: $a+b+c=0 \xrightarrow{\text{بنا بر اتحاد اولر}} a^3+b^3+c^3=3abc$

داریم: $a^3+b^3+c^3=0 \Rightarrow 3abc=0 \Rightarrow abc=0$

$\Rightarrow a=0$ یا $b=0$ یا $c=0$

فرض می‌کنیم $c=0$. در نتیجه، از رابطه‌ی $a+b+c=0$ نتیجه می‌شود: $a+b=0$. بنابراین: $a=-b$.

$$P=a^n+b^n+c^n=(-b)^n+b^n+0=-b^n+b^n+0=0$$
$$\Rightarrow P=0$$

مسئله‌ی ۹. حاصل عبارت $P=(a-b)^3+(b-c)^3+(c-a)^3$ را بیابید.

حل:

فرض می‌کنیم: $x=a-b$ و $y=b-c$ و $z=c-a$

$$x+y+z=a-b+b-c+c-a=0$$
$$\Rightarrow x+y+z=0 \ \text{بنا بر اتحاد اولر} \Rightarrow x^3+y^3+z^3=3xyz$$
$$\Rightarrow P=(a-b)^3+(b-c)^3+(c-a)^3-3(a-b)(b-c)(c-a)$$

آزمون

آزمون ۱. اگر $x^2+x+1=0$، آن‌گاه $(x^3+\frac{1}{x^3})$ کدام است؟

الف) ۲   ب) ۲-   ج) ۸   د) ۸-

حل: گزینه‌ی الف.

$x^2+x+1=0 \Rightarrow$ بر $x\neq 0$ تقسیم می‌کنیم $\Rightarrow x+1+\frac{1}{x}=0 \Rightarrow$

دو طرف را به توان ۳ می‌رسانیم $x+\frac{1}{x}=-1$

$$\Rightarrow x^3+\frac{1}{x^3}+3(x)(\frac{1}{x})(\underbrace{x+\frac{1}{x}}_{-1})=-1$$

$$\Rightarrow x^3+\frac{1}{x^3}-3=-1 \Rightarrow x^3+\frac{1}{x^3}=2$$

آزمون ۲. اگر $x^2+x+1=0$ ، آن‌گاه $(x^6+\frac{1}{x^6})$ کدام است؟

الف) ۸ ب) ۹ ج) ۱۶ د) ۱۸

حل: گزینه‌ی د.

دو طرف را $x \neq 0$ تقسیم می‌کنیم $x^2+x-1=0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow x+1-\frac{1}{x}=0 \Rightarrow$$

دو طرف را به توان ۳ می‌رسانیم $x-\frac{1}{x}=-1$

$$\Rightarrow x^3-\frac{1}{x^3}-3x(\frac{1}{x})(\underbrace{x-\frac{1}{x}}_{-1})=-1$$

دو طرف را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$\Rightarrow x^3-\frac{1}{x^3}+3=-1 \Rightarrow x^3-\frac{1}{x^3}=-4$$

$$\Rightarrow x^6+\frac{1}{x^6}-2=16 \Rightarrow x^6+\frac{1}{x^6}=18$$

آزمون ۳. اگر $\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=-\sqrt[3]{z}$ ، آن‌گاه $(x+y+z)^6$ برابر است با:

الف) $81x^2y^2z^2$ ب) $729xyz$

ج) $729x^2y^2z^2$ د) $-81x^2y^2z^2$

حل: گزینه‌ی ج.

بنا به اتحاد اولر $\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}+\sqrt[3]{z}=0 \Rightarrow$

دو طرف را به توان ۶ می‌رسانیم: $x+y+z=3\sqrt[3]{xyz}$

$$(x+y+z)^6=3^6(x^2y^2z^2)=729x^2y^2z^2$$

آزمون ۴. اگر $a^2+b^2-ab-a-b+1=0$ ، آن‌گاه حاصل عبارت $\frac{a^n+b^n}{a^6+b^6}$ کدام است؟

الف) ۱ ب) ۴ ج) ۱۶ د) ۱۲۸

حل: گزینه‌ی الف.

دو طرف فرض را در ۲ ضرب می‌کنیم:

$$2a^2+2b^2-2ab-2a-2b+2=0$$

$$(a^2+b^2-2ab)+(a^2-2a+1)+(b^2-2b+1)=0$$

$$(a-b)^2+(a-1)^2+(b-1)^2=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a=b \\ a=b=1 \end{cases} \Rightarrow \frac{a^n+b^n}{a^4+b^4}=\frac{1+1}{1+1}=1$$

آزمون ۵. حاصل عبارت زیر کدام است؟

$$(\sqrt{2}-1)^n(\sqrt{2}+1)^{n+4}(3-2\sqrt{2})^2 \quad (n \in N)$$

الف) ۴ ب) ۱ ج) $4\sqrt{2}$ د) $16\sqrt{2}$

حل: گزینه‌ی ب.

$$(\sqrt{2}-1)^n(\sqrt{2}+1)^{n+4}(3-2\sqrt{2})^2$$

$$=\underbrace{(\sqrt{2}-1)^n(\sqrt{2}+1)^n}(\sqrt{2}-1)^4(3-2\sqrt{2})^2$$

$$=\left[(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)\right]^n \times \left[(\sqrt{2}+1)^2\right]^2(3-2\sqrt{2})^2$$

$$=(2-1)^n \times (3+2\sqrt{2})^2(3-2\sqrt{2})^2=\left[(3+2\sqrt{2})(3-2\sqrt{2})\right]^2$$

$$=1\times(9-8)^2=1\times1=1$$

آزمون ۶. اگر $a+b=3$ ، آن‌گاه حاصل عبارت $P=a(a^2+a+1)+b(b^2+b+1)+ab(3a+3b+2)$ کدام است؟

الف) ۱۸ ب) ۲۷ ج) ۳۹ د) ۴۹

حل: گزینه‌ی ج.

$$P=a^3+a^2+a+b^3+b^2+b+3a^2b+3ab^2+2ab$$

$$P=(a^3+b^3+3a^2b+3ab^2)+(a^2+b^2+2ab)+(a+b)$$

$$P=(a^3+b^3)+(a+b)^2+(a+b)=(3)^3+(3)^2+3$$

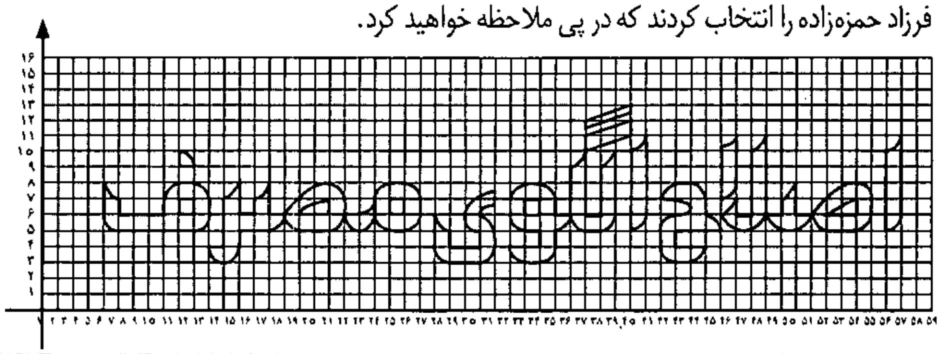
$$=27+9+3=39$$

پاسخ

فرزاد حمزه پور
دبیر ریاضی شهر ستان بانه

مسابقه‌ی طراحی با رابطه‌های ریاضی

اشاره : در برهان شماره‌ی ۶۳ ـ پاییز ۸۸، عنوان «اصلاح الگوی مصرف» را به عنوان مسابقه‌ی طراحی با رابطه‌های ریاضی آورده بودیم. هیئت تحریریه مجله از بین پاسخ‌های رسیده، پاسخ آقای فرزاد حمزه‌زاده را انتخاب کردند که در پی ملاحظه خواهید کرد.



برای طراحی این عنوان ابتدا عنوان مورد نظر را به صورت دستی نوشتم، سپس با استفاده از معادلات خط، نامعادلات، سهمی‌های افقی و یک چهارم و نصف دایره، معادلات و نامعادلات مربوطه را به طور کامل نوشتم. ترتیب نوشتن را کاملاً رعایت کرده‌ام تا راحت‌تر بررسی شود.

در ضمن قسمت‌هایی از سهمی افقی را برای راحتی کار در نوشتن معادلات به این صورت آورده‌ام:

۱) رأس سهمی $B\begin{bmatrix}۵۱\\۶\end{bmatrix}$ و $A\begin{bmatrix}۵۴\\۷\end{bmatrix}$ انتهای سهمی

$$(y-۶)^۲=\frac{۴}{۳}(x-۵۱)$$

از نوشتن معادلات سهمی صرف نظر و فقط به رأس سهمی و انتهای سهمی افقی اشاره کرده‌ام که از کلیت کار نیز نمی کاهد.

روابط ریاضی کلمه‌ی اصلاح



۱) $(x-۵۶)^۲+(y-۱۱)^۲=۱ \quad ۵۶\le x\le ۵۷ \quad ۱۰\le y\le ۱۱$

۲) $x=۵۷ \quad ۶\le y\le ۱۱$

۳) $(x-۵۶)^۲+(y-۶)^۲=۱ \quad ۵۶\le x\le ۵۷ \quad ۵\le y\le ۶$

۴) $x=۵۶ \quad ۵\le y\le ۱۰$

۱) رأس سهمی $S\begin{bmatrix}۵۱\\۶\end{bmatrix}$ و $A\begin{bmatrix}۵۴\\۸\end{bmatrix}$ انتهای سهمی

$$(y-۶)^۲=\frac{۴}{۳}(x-۵۱)$$

۲) $(x-۵۴)^۲+(y-۷)^۲=۱ \quad ۵۴\le x\le ۵۵ \quad ۷\le y\le ۸$

۳) $x=۵۵ \quad ۶\le y\le ۷$

۴) $(x-۵۴)^۲+(y-۶)^۲=۱ \quad ۵۴\le x\le ۵۵ \quad ۵\le y\le ۶$

۵) $x=۵ \quad ۵۲\le x\le ۵۴$

۶) $(x-۵۲)^۲+(y-۶)^۲=۱$ $۵۱\le x\le ۵۲$ $۵\le y\le ۶$

۷) رأس سهمی $S\begin{bmatrix}۵۲\\۶\end{bmatrix}$ و انتهای سهمی $A\begin{bmatrix}۵۴\\۷\end{bmatrix}$

۸) $x=۵۴$ $۶\le y\le ۷$

۹) $y=۶$ $۵۲\le x\le ۵۴$

۱۰) $y=۶$ $۵۰\le x\le ۵۱$

۱۱) $x=۵۰$ $۶\le y\le ۸$

۱۲) $(x-۴۹)^۲+(y-۸)^۲=۱$ $۴۹\le x\le ۵۰$ $۷\le y\le ۸$

۱۳) $x=۴۹$ $۶\le y\le ۷$

۱۴) $y=۶$ $۴۸\le x\le ۴۹$

۱۵) $(x-۴۹)^۲+(y-۶)^۲=۱$ $۴۸\le x\le ۴۹$ $۵\le y\le ۶$

۱۶) $y=۵$ $۴۹\le x\le ۵۰$

۱۷) $(x-۵۰)^۲+(y-۶)^۲=۱$ $۵۰\le x\le ۵۱$ $۵\le y\le ۶$

۱) $(x-۴۷)^۲+(y-۱۱)^۲=۱$ $۴۷\le x\le ۴۸$ $۱۰\le y\le ۱۱$

۲) $x=۴۸$ $۶\le y\le ۱۱$

۳) $(x-۴۷)^۲+(y-۶)^۲=۱$ $۴۷\le x\le ۴۸$ $۵\le y\le ۶$

۴) $y=۵$ $۴۶\le x\le ۴۷$

۵) $(x-۴۶)^۲+(y-۶)^۲=۱$ $۴۵\le x\le ۴۶$ $۵\le y\le ۶$

۶) $(x-۴۵)^۲+(y-۷)^۲=۱$ $۴۵\le x\le ۴۶$ $۶\le y\le ۷$

۷) $x=۴۶$ $۶\le y\le ۷$

۸) $y=۶$ $۴۶\le x\le ۴۷$

۹) $x=۴۷$ $۶\le y\le ۱۰$

۱۰) $(x-۴۵)^۲+(y-۱۱)^۲=۱$ $۴۵\le x\le ۴۶$ $۱۰\le y\le ۱۱$

۱۱) $x=۴۶$ $۸\le y\le ۱۱$

۱۲) $(x-۴۵)^۲+(y-۸)^۲=۱$ $۴۵\le x\le ۴۶$ $۷\le y\le ۸$

۱۳) $y=۴۵$ $۷\le y\le ۱۰$

۱) $(x-۴۲)^۲+(y-۷)^۲=۱$ $۴۱\le x\le ۴۲$ $۷\le y\le ۸$

۲) $y=۸$ $۴۲\le x\le ۴۳$

۳) $(x-۴۳)^۲+(y-۷)^۲=۱$ $۴۳\le x\le ۴۴$ $۷\le y\le ۸$

۴) $x=۴۴$ $۶\le y\le ۷$

۵) $(x-۴۴)^۲+(y-۵)^۲=۱$ $۴۴\le x\le ۴۵$ $۵\le y\le ۶$

۶) $y=۵$ $۴۲\le x\le ۴۵$

۷) $x=۴۲$ $۴\le y\le ۵$

۸) $y=۴$ $۴۲\le x\le ۴۴$

۹) $(x-۴۳)^۲+(y-۴)^۲=۱$ $۴۳\le x\le ۴۴$ $۳\le y\le ۴$

۱۰) $y=۳$ $۴۲\le x\le ۴۳$

۱۱) $(x-۴۲)^۲+(y-۴)^۲=۱$ $۴۱\le x\le ۴۲$ $۳\le y\le ۴$

۱۲) $x=۴۱$ $۴\le y\le ۵$

۱۳) $(x-۴۲)^۲+(y-۵)^۲=۱$ $۴۱\le x\le ۴۲$ $۵\le y\le ۶$

۱۴) $y=۶$ $۴۲\le x\le ۴۲\frac{۱}{۲}$

۱۵) $(x-۴۲\frac{۱}{۲})^۲+(y-۶\frac{۱}{۲})^۲=۱$ $۴۲\frac{۱}{۲}\le x\le ۴۳$ $۶\le y\le ۷$

۱۶) $y=۷$ $۴۱\le x\le ۴۲\frac{۱}{۲}$

روابط ریاضی کلمه‌ی الگوی



۱) $(x-۳۹)^۲+(y-۱۱)^۲=۱$ $۳۹\le x\le ۴۰$ $۱۰\le y\le ۱۱$

۲) $x=۴۰$ $۶\le y\le ۱۱$

۳) $(x-۳۹)^۲+(y-۶)^۲=۱$ $۳۹\le x\le ۴۰$ $۵\le y\le ۶$

۴) $x=۳۹$ $۵\le y\le ۱۰$

۱) $(x-۳۷)^۲+(y-۱۰)^۲=۱$ $۳۷\le x\le ۳۸$ $۹\le y\le ۱۰$

۲) $x=۳۸$ $۶\le y\le ۱۰$

۳) $(x-۳۷)^۲+(y-۶)^۲=۱$ $۳۷\le x\le ۳۸$ $۵\le y\le ۶$

۴) $y=۵$ $۳۶\le x\le ۳۷$

۵) $(x-۳۶)^۲+(y-۶)^۲=۱$ $۳۵\le x\le ۳۶$ $۵\le y\le ۶$

۶) $x=۳۵$ $۶\le y\le ۹$

۷) $(x-۳۵)^۲+(y-۱۰)^۲=۱$ $۳۵\le x\le ۳۶$ $۹\le y\le ۱۰$

۸) $x=۳۶$ $۶\le y\le ۱۰$

۹) $y=۶$ $۳۶\le x\le ۳۷$

۱۰) $x=۳۷$ $۶\le y\le ۹$

۱۱) $x=۳۶$ $۱۰\le y\le ۱۱$

۱۲) $A\begin{bmatrix}۳۶\\۱۰\end{bmatrix}$ $B\begin{bmatrix}۳۹\\۱۱\end{bmatrix}$: $y-۱۰=\frac{۱۰-۱۱}{۳۶-۳۹}(x-۳۶)$

۱۳) $x=۳۹$ $۱۱\le y\le ۱۲$

۱۴) $A\begin{bmatrix}۳۹\\۱۲\end{bmatrix}$ $B\begin{bmatrix}۳۶\\۱۱\end{bmatrix}$: $y-۱۲=\frac{۱۲-۱۱}{۳۹-۳۶}(x-۳۹)$

۱۵) $x=۳۶$ $۱۱\frac{۱}{۲}\le y\le ۱۲$

۱۶) $A\begin{bmatrix}۳۶\\ ۱۱\frac{۱}{۲}\end{bmatrix}$ $B\begin{bmatrix}۳۹\\ ۱۲\frac{۱}{۲}\end{bmatrix}$: $y-۱۲\frac{۱}{۲}=\dfrac{۱۲\frac{۱}{۲}-۱۱\frac{۱}{۲}}{۳۹-۳۶}(x-۳۹)$

۱۷) $x=۳۹ \quad ۱۲\frac{۱}{۲}\le y\le ۱۳$

۱۸) $A\begin{bmatrix}۳۹\\ ۱۳\end{bmatrix}$ $B\begin{bmatrix}۳۶\\ ۱۲\end{bmatrix}$: $y-۱۲=\dfrac{۱۲-۱۳}{۳۶-۳۹}(x-۳۶)$

۱) $y=۶ \quad ۳۴\le x\le ۳۵$
۲) $(x-۳۴)^۲+(y-۶)^۲=۱ \quad ۳۴\le x\le ۳۵ \quad ۵\le y\le ۶$
۳) $x=۳۴ \quad ۴\le y\le ۵$
۴) $(x-۳۳)^۲+(y-۴)^۲=۱ \quad ۳۳\le x\le ۳۴ \quad ۳\le y\le ۴$
۵) $y=۳ \quad ۳۲\le x\le ۳۳$
۶) $(x-۳۲)^۲+(y-۴)^۲=۱ \quad ۳۱\le x\le ۳۲ \quad ۳\le y\le ۴$
۷) $y=۴ \quad ۳۱\le x\le ۳۳$
۸) $x=۳۳ \quad ۴\le y\le ۵$
۹) $y=۵ \quad ۳۲\le x\le ۳۳$
۱۰) $(x-۳۲)^۲+(y-۶)^۲=۱ \quad ۳۱\le x\le ۳۲ \quad ۵\le y\le ۶$
۱۱) $x=۳۱ \quad ۶\le y\le ۷$
۱۲) $(x-۳۲)^۲+(y-۷)^۲=۱ \quad ۳۱\le x\le ۳۲ \quad ۷\le y\le ۸$
۱۳) $y=۸ \quad ۳۲\le x\le ۳۳$
۱۴) $(x-۳۳)^۲+(y-۷)^۲=۱ \quad ۳۳\le x\le ۳۴ \quad ۷\le y\le ۸$
۱۵) $x=۳۴ \quad ۶\le y\le ۷$
۱۶) $y=۷ \quad ۳۲\le x\le ۳۳$
۱۷) $x=۳۳ \quad ۶\le y\le ۷$
۱۸) $y=۶ \quad ۳۲\le x\le ۳۳$

۱۹) $x=۳۲ \quad ۶\le y\le ۷$

۱) $x=۳۰ \quad ۶\frac{۱}{۲}\le x\le ۷\frac{۱}{۲}$

۲) رأس سهمی $S\begin{bmatrix}۲۹\\ ۶\end{bmatrix}$ و $A\begin{bmatrix}۳۰\\ ۶\frac{۱}{۲}\end{bmatrix}$ انتهای سهمی

۳) $(x-۲۹)^۲+(y-۵)^۲=۱ \quad ۲۹\le x\le ۳۰ \quad ۵\le y\le ۶$
۴) $x=۳۰ \quad ۴\le y\le ۵$
۵) $(x-۲۹)^۲+(y-۴)^۲=۱ \quad ۲۹\le x\le ۳۰ \quad ۳\le y\le ۴$
۶) $y=۳ \quad ۲۷\le x\le ۲۹$
۷) $(x-۲۷)^۲+(y-۴)^۲=۱ \quad ۲۶\le x\le ۲۷ \quad ۳\le y\le ۴$
۸) $x=۲۶ \quad ۴\le y\le ۶$
۹) $(x-۲۷)^۲+(y-۶)^۲=۱ \quad ۲۶\le x\le ۲۷ \quad ۵\le y\le ۶$
۱۰) $x=۲۷ \quad ۴\le y\le ۵$
۱۱) $y=۴ \quad ۲۷\le x\le ۲۹$
۱۲) $x=۲۹ \quad ۴\le y\le ۵$
۱۳) $(x-۲۹)^۲+(y-۶)^۲=۱ \quad ۲۸\le x\le ۲۹ \quad ۵\le y\le ۶$

۱۴) رأس سهمی $S\begin{bmatrix}۲۸\\ ۶\end{bmatrix}$ و $A\begin{bmatrix}۳۰\\ ۷\frac{۱}{۲}\end{bmatrix}$ انتها



۱) $y=۸ \quad ۲۳\le x\le ۲۴$
۲) $(x-۲۴)^۲+(y-۷)^۲=۱ \quad ۲۴\le x\le ۲۵ \quad ۷\le y\le ۸$
۳) $x=۲۵ \quad ۶\le y\le ۷$
۴) $(x-۲۴)^۲+(y-۶)^۲=۱ \quad ۲۴\le x\le ۲۵ \quad ۵\le y\le ۶$
۵) $y=۵ \quad ۲۳\le x\le ۲۴$
۶) $(x-۲۳)^۲+(y-۶)^۲=۱ \quad ۲۲\le x\le ۲۳ \quad ۵\le y\le ۶$
۷) $x=۲۲ \quad ۶\le y\le ۷$
۸) $(x-۲۳)^۲+(y-۷)^۲=۱ \quad ۲۲\le x\le ۲۳ \quad ۷\le y\le ۸$
۹) $y=۷ \quad ۲۳\le x\le ۲۴$
۱۰) $x=۲۴ \quad ۶\le y\le ۷$
۱۱) $y=۶ \quad ۲۳\le x\le ۲۴$
۱۲) $x=۲۳ \quad ۶\le y\le ۷$
۱۳) $(x-۲۱)^۲+(y-۷)^۲=۱ \quad ۲۱\le x\le ۲۲ \quad ۶\le y\le ۷$
۱۴) $y=۶ \quad ۲۰\le x\le ۲۱$
۱۵) $(x-۲۱)^۲+(y-۶)^۲=۱ \quad ۲۰\le x\le ۲۲ \quad ۵\le y\le ۶$

۱) رأس سهمی $S\begin{bmatrix}۱۶\\ ۶\end{bmatrix}$ و $A\begin{bmatrix}۱۹\\ ۸\end{bmatrix}$ انتهای سهمی

۲) $(x-۱۹)^۲+(y-۷)^۲=۱ \quad ۱۹\le x\le ۲۰ \quad ۷\le y\le ۸$

۳) $x=۲۰ \quad ۶\le y\le ۷$

۴) $(x-۱۹)^۲+(y-۶)^۲=۱ \quad ۱۹\le x\le ۲۰ \quad ۵\le y\le ۶$

۵) $y=۵ \quad ۱۷\le x\le ۱۹$

۶) $(x-۱۷)^۲+(y-۶)^۲=۱ \quad ۱۶\le x\le ۱۷ \quad ۵\le y\le ۶$

۷) رأس سهمی $S\begin{bmatrix}۱۷\\۶\end{bmatrix}$ و $A\begin{bmatrix}۱۹\\۷\end{bmatrix}$ انتهای سهمی

۸) $x=۱۹ \quad ۶\le y\le ۷$

۹) $y=۶ \quad ۱۷\le x\le ۱۹$

۱۰) $y=۶ \quad ۱۵\le x\le ۱۶$

۱۱) $(x-۱۵)^۲+(y-۶)^۲=۱ \quad ۱۵\le x\le ۱۶ \quad ۵\le y\le ۶$

۱۲) $y=۵ \quad ۱۳\le x\le ۱۵$

۱۳) $x=۱۳ \quad ۴\le y\le ۵$

۱۴) $(x-۱۲)^۲+(y-۴)^۲=۱ \quad ۱۱\le x\le ۱۳ \quad ۳\le y\le ۴$

۱۵) $y=۴ \quad ۱۱\le x\le ۱۲$

۱۶) $x=۱۲ \quad ۴\le y\le ۷$

۱۷) $(x-۱۲)^۲+(y-۸)^۲=۱ \quad ۱۲\le x\le ۱۳ \quad ۷\le y\le ۸$

۱۸) $x=۱۳ \quad ۶\le y\le ۸$

۱۹) $y=۶ \quad ۱۳\le x\le ۱۴$

۲۰) $x=۱۴ \quad ۶\le y\le ۷$

۲۱) $(x-۱۴)^۲+(y-۸)^۲=۱ \quad ۱۴\le x\le ۱۵ \quad ۷\le y\le ۸$

۲۲) $x=۱۵ \quad ۶\le y\le ۸$

۱) $y=۸ \quad ۹\le x\le ۱۰$

۲) $(x-۱۰)^۲+(y-۷)^۲=۱ \quad ۱۰\le x\le ۱۱ \quad ۷\le y\le ۸$

۳) $x=۱۱ \quad ۶\le y\le ۷$

۴) $(x-۱۰)^۲+(y-۶)^۲=۱ \quad ۱۰\le x\le ۱۱ \quad ۵\le y\le ۶$

۵) $y=۵ \quad ۵\le x\le ۱۰$

۶) $(x-۵)^۲+(y-۶)^۲=۱ \quad ۴\le x\le ۵ \quad ۵\le y\le ۶$

۷) $x=۴ \quad ۶\le y\le ۸$

۸) $(x-۵)^۲+(y-۸)^۲=۱ \quad ۴\le x\le ۵ \quad ۷\le y\le ۸$

۹) $x=۵ \quad ۶\le y\le ۷$

۱۰) $y=۶ \quad ۵\le x\le ۸$

۱۱) $x=۸ \quad ۶\le y\le ۷$

۱۲) $(x-۹)^۲+(y-۷)^۲=۱ \quad ۸\le x\le ۹ \quad ۷\le y\le ۸$

۱۳) $y=۷ \quad ۹\le x\le ۱۰$

۱۴) $x=۱۰ \quad ۶\le y\le ۷$

۱۵) $y=۶ \quad ۹\le x\le ۱۰$

۱۶) $x=۹ \quad ۶\le y\le ۷$

۱۷) $x=۹ \quad ۹\le y\le ۱۰$

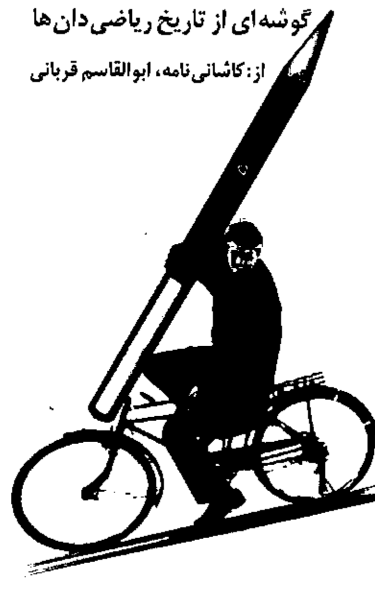
۱۸) $(x-۹)^۲+(y-۷)^۲=۱ \quad ۹\le x\le ۱۰ \quad ۹\le y\le ۱۰$

۱۹) $y=۹ \quad ۹\le x\le ۱۰$

از نامه‌ی غیاث‌الدین جمشید کاشانی به پدرش

گوشه‌ای از تاریخ ریاضی‌دان‌ها

از: کاشانی‌نامه، ابوالقاسم قربانی



غرض که چون بنده همچنین جایی درآمد و هر کس چشم و گوش برگماشتند که معلوم کنند که این کس در چه نصاب است، هرچند روز بندگی حضرت سلطنت پناهی در حلقه‌ی درس حاضر می‌شود و چون حاضر شد. یکی از امتحان طلبه این است که هر کس به حلقه‌ی درسی درآید غافل است از آن که چه مسئله در میان خواهد بود و اصحاب مدرسه آن را به تجدید مطالعه بلیغ کرده‌اند، چون آغاز بحث می‌شد هربار به عنایة‌اللّه تعالی و یمن همت آن خداوندی این بنده دخل کاملی کرده چنانکه چند چیز که ایشان را از مطالعه معلوم نشده گفته و اعتراضات وارده بر سخن ایشان کرده و نکته‌های لطیف بیرون آورده که همه حیران مانده‌اند. پیش از آمدن این بنده اشکالی چند ایشان را واقع شده بود و در میان یکدیگر انداخته و هیچکس بیرون آوردن آن نتوانسته است. مثلاً خواسته‌اند که اسطرلابی که یک گز قطر آن باشد بسازند... همه‌ی مستخرجان فرمودند که به اتفاق عمل کنند... و درمانده بودند. ریاضی‌دان را اشارت فرموده بودند که به قوت قوانین هندسی تحقیق و تصحیح آن بکنند. هیچ کس نتوانسته است که تحقیق آن بکند... هرچند عمل می‌کرده‌اند و فکر در آن می‌نموده‌اند راست نمی‌آمده. چون این بنده رسید در روز این مسأله در حضرت سلطنت پناهی پیش آورده‌اند و این بنده در فور و هم در مجلس تصحیح یکی از آن کرده و منشأ غلط ایشان بیان کرده و تطبیق کلام زیج بر این بیان کرد.

● غلامرضا یاسی‌پور

تاریخچه‌ی مجلات ریاضی ایران

در شماره‌ی ۳۲ مجله‌ی یکان، در مقاله‌ای با عنوان «پژوهشگر امروز، پژوهشگر فردا» چنین می‌خوانیم:

«ما خوش داریم بگوییم که قرن بیستم قرن دانش است. به‌راستی هم، حضور دانش در زندگی ما روز به‌روز محسوس‌تر می‌شود. دانش به ما امکان می‌دهد تا موادی را که در زندگی‌مان به‌کار می‌آید، به‌وجود آوریم. پدیده‌های شگرفی در جهان پیرامون خود کشف کنیم و برای ساختن ماشین‌ها که کار را بر ما آسان می‌کنند، اصول نوینی بیابیم. با این همه می‌توان گفت که دانش خدمت‌گزار بشر است؟»

البته چنین سخنی درست نیست. دانش، خود آدمی است. کشش و گرایش اوست به رشد و گسترش بی‌پایان، کار جست‌وجوی اوست و کنجکاوی بی‌حد اوست، عطش مبرا از سودجویی اوست برای دانستن و قابلیت شور شگفتی اوست.

اگر به دقت به دانش بنگریم، نه‌تنها قدرت آدمی، بلکه هم‌چنین ضعف او را در آن بازمی‌یابیم و نه‌تنها هوش و زیرکی، بلکه قلب و احساس او را. دانش مانند خود آدمی وابسته‌ی الزامات فخر و شرف است و معتقدات اخلاقی. و شاید هم دچار برخی پنداشت‌ها. و احتمالاً هم همین است که آن را جذّاب و گیرا می‌کند و کسانی که دوستش می‌دارند، می‌گویند که دانش نه یک خدمت‌گزار ماشینی، بلکه چیزی زنده و شگرف است.

اکنون همه دانش را محترم می‌شمارند و خواستار آن‌اند. فیزیک، ریاضیات، زیست‌شناسی، پزشکی و پیشه‌ی مهندسی را هرکس که خواسته باشد، فرامی‌گیرد.

در بخشی از همین شماره، با عنوان: «بی‌آن‌که عصبانی شوید، این مسئله را حل کنید»، چنین آمده است:

«جک لندن، نویسنده‌ی معروف آمریکایی، درباره‌ی یکی از مسافرت‌هایش به نواحی قطبی نقل می‌کند که یکدفعه، در خارج از اقامتگاه خبر می‌شود که هم‌سفرش که در اقامتگاه بستری است، در حال نزاع است. جک لندن تصمیم می‌گیرد هرچه زودتر به اقامتگاه برگردد. سورتمه‌ای فراهم می‌کند که پنج سگ آن را می‌کشند. حرکت می‌کند. اولین ۲۴ ساعت را بدون حادثه‌ای می‌گذراند و حساب می‌کند، اگر با همین سرعت پیش برود، در رأس موعدی که پیش‌بینی کرده است، به مقصد می‌رسد. متأسفانه در پایان نخستین ۲۴ ساعت، دو سگ از پنج سگ سورتمه، افسار را پاره و فرار می‌کنند. جک لندن مجبور می‌شود بقیه‌ی راه را با کمک سه سگ بپیماید و درنتیجه ۴۸ ساعت دیرتر از زمانی که پیش‌بینی کرده بود، به مقصد می‌رسد.

جک لندن ضمن این روایت توضیح می‌دهد، اگر دو سگ فراری ۵۰ میل دورتر افسار را پاره می‌کردند، تأخیر وی فقط ۲۴ ساعت می‌شد.

کل مسافتی را که جک لندن پیموده است، حساب کنید.

این شماره بخشی دارد با عنوان: «از هر جایی یادداشتی» که در آن این دو خبر بسیار خواندنی هستند:

شهرت جهانی لاپلاس به خاطر فرضیه‌ی وی درباره‌ی پیدایش منظومه‌ی شمسی است که به فرضیه‌ی لاپلاس معروف است. بنا به این فرضیه، خورشید و سیارات از یک سحابی اولیه جدا شده‌اند

خبر اول:

«بعضی تعاریف هندسی» که در «فرهنگ آکادمی فرانسه» چاپ هفتم ۱۸۷۷ بیان شده است: (خواننده به سادگی درمی‌یابد، تعاریف زیر نه تنها دقیق نیست، بلکه صحیح هم نیست و از این لحاظ، فرهنگ آکادمی هیچ قابل توجه نیست).

خط[۱]: خیلی ساده، با ملاحظه‌ی این‌که نه پهنا دارد و نه عمق.

خط[۲]: خطی که با قلم رسم می‌شود.

سطح: رویه، خارج: قسمت خارجی یک جسم.

رویه: سطح یا گسترش یک جسم صلب که فقط از لحاظ درازا و پهنا سنجیده می‌شود؛ بدون این‌که عمق یا ضخامت آن مورد نظر باشد.

حجم: فضا، بزرگی یک جسم یا یک تنه یا یک بسته.

زاویه: گشادی دو خط که در یک نقطه متلاقی باشند، میلی که هریک نسبت به دیگری دارد.

میل: بیان ریاضی نسبت انحنا (؟)

انحنا: میل یک خط یا یک سطح نسبت به دیگری.

محدب: وضع متقابل مقعر، سطحی که به‌طور کروی برآمده باشد (چرا به‌طور کروی؟)

برآمدگی: محدب شدن.

مقعر: وضع متقابل محدب، سطحی که به‌طور کروی تو رفته باشد.

متوازی‌الاضلاع: چهار ضلعی که ضلع‌های روبه‌رویش مساوی و موازی باشند (برای تعریف متوازی‌الاضلاع، توازی ضلع‌های روبه‌رو یا تساوی آن‌ها کفایت می‌کند).

نکتهـ در چاپ ششم این فرهنگ، تعریف متوازی‌الاضلاع از این قرار است: شکل مسطحی که ضلع‌های روبه‌رویش موازی باشند(!).

مربع: شکل مسطحی که چهارضلع و چهار زاویه‌ی قائمه دارد (!)

کمان: از لحاظ هندسی، قسمتی از دایره که از نصف آن کمتر باشد (!)

استوانه: شکل دراز و گرد، مخصوصاً با بزرگی برابر (؟!!)

[نقل از کتاب: Curiosités Géom]

خبر دوم:

در مورد «اطلاعاتی مقدماتی از علم تنجیم» است که در آن چنین آمده است:

احوال کواکب: زحل و مریخ نحس‌اند، زحل نحس اکبر و مریخ نحس اصغر. مشتری و زهره سعدند، مشتری سعد اکبر و زهره سعد اصغر. عطارد با سعد سعد باشد و با نحس نحس. نیّرین (خورشید و ماه) از تثلیث و تسدیس سعد باشند، از مقابله و تربیع و مقارنه نحس.

کواکب علویه و شمس مذکرند، زهره و قمر مؤنّث ... زحل سرد و خشک، مریخ و شمس گرم و خشک، مشتری و زهره گرم و تر، قمر سرد و تر، عطارد با هر کوکبی طبیعت او گیرد...

مدلولات کواکب: زحل کوکب پیرمردان و دهقانان و گوشه‌نشینان و ارباب خاندان‌های قدیم و مردمان سیاه و صفاران و یهودان و آن‌ها که کارهای سخت کنند. مشتری کوکب قضّات و علما و اشراف و اصحاب مناصب و ارباب نوامیس و ترسایان. مریخ کوکب، امرا و ترکان و اهل سلاح و خداوندان لشکر و سپاه‌سالاران و عیاران و دزدان و بت‌پرستان و اهل شر و فتنه. شمس کوکب پادشاهان و بزرگان و ملوک و خداوند امر و نهی و آتش‌پرستان. زهره‌ی کوکب، زنان و خادمان و ارباب لهو و طرب و اهل عشرت و مسلمانان. عطارد کوکب، دبیران و خواجگان و بزرگان و اهل دیوان و علما و اکابر و حکیمان و شاعران و زیرکان و منجمان. قمر کوکب، رسولان و پیکان و صاحب خبران و مسافران و اطفال و چهارپایان و

دانش مانند خود آدمی وابسته‌ی الزامات فخر و شرف است و معتقدات اخلاقی. و شاید هم دچار برخی پنداشت‌ها. و احتمالاً هم همین است که آن را جذّاب و گیرا می‌کند

سیّاحان. [از کتاب سی فصل خواجه نصیر]

در شماره‌ی ۳۳، در پاسخ معمای شماره‌ی قبل چنین آورده شده است:

از توضیح جک لندن مبنی بر این‌که اگر با پنج سگ ۵۰ میل دیگر می‌پیمود، فقط ۲۴ ساعت تأخیر داشت، نتیجه می‌گیریم که اگر با پنج سگ ۱۰۰ میل دیگر را می‌پیمود، ابداً تأخیر نداشت. بنابراین از محلی که دو سگ فرار کرده‌اند، یعنی از پایان ۲۴ ساعت اولیه، ۱۰۰ میل تا مقصد فاصله داشته است. اگر مدت زمانی که این فاصله را با سه سگ پیموده است، با پنج سگ طی می‌کرد، مسافتی برابر با $\frac{۱۰۰\times ۵}{۳}=۱۶۶\frac{۲}{۳}$ میل را می‌پیمود و یا این‌که فقط ۱۰۰ میل پیموده بود، در برابر $۶۶\frac{۲}{۳}$ میل، مدت ۴۸ ساعت از وقت صرفه‌جویی می‌کرد. بنابراین سرعت اولیه‌ی وی $۳۳\frac{۱}{۳}$ میل در ۲۴ ساعت بوده و کل مسافتی که پیموده، برابر است با:

$$۱۰۰+۳۳\frac{۱}{۳}=۱۳۳\frac{۱}{۳}$$

در این شماره و در مقاله‌ای با عنوان «مراحل مهم علم نجوم» در شرح زندگی **لاپلاس**، دانشمند معروف فرانسوی، چنین می‌خوانیم:

نام لاپلاس با بزرگ‌ترین فرضیه‌های مربوط به کیهان‌شناسی همراه است. **پیر سیمون لاپلاس** از خانواده‌ای کشاورز، اما مرفه در کالوادو به دنیا آمد. بعد از این‌که در ادبیات مطالعاتی به عمل آورد، به تحصیل ریاضیات علاقه‌مند شد و به پاریس آمد و از **دالامبر** خواست تا در حل بعضی مسائل مربوط به مکانیک، وی را راهنمایی کند. دالامبر این مسائل را بسیار جالب یافت و از آن به بعد، لاپلاس را تحت حمایت خویش قرار داد و وی را برای تدریس ریاضیات مدرسه‌ی نظامی پیشنهاد کرد. لاپلاس در سال ۱۷۷۲ رساله‌ای را که درباره‌ی حساب فاصله (دیفرانسیل) تألیف کرده بود، برای آکادمی شهر تورن فرستاد. این موضوع موجب شد که یک سال بعد، به عضویت آکادمی علوم برگزیده شود. هم‌چنین به عضویت دفتر طول جغرافیایی، مؤسسه‌ی ناسیونال و آکادمی فرانسه انتخاب شد و بعد از اعاده‌ی سلطنت، مؤسسه‌ی **پردوفرانس** را تأسیس کرد.

شهرت جهانی لاپلاس به خاطر فرضیه‌ی وی درباره‌ی پیدایش منظومه‌ی شمسی است که به فرضیه‌ی **لاپلاس** معروف است. بنا به این فرضیه، خورشید و سیارات از یک سحابی اولیه جدا شده‌اند. فرضیه به نوعی است که عظمت منظومه‌ی شمسی، گذشته، حال و آینده‌ی آن را نیز معلوم می‌کند. در این جا از این فرضیه صحبت نمی‌کنیم و شرح و تفصیل آن را به فصلی جداگانه موکول می‌کنیم.

لاپلاس که هم دانشمند ریاضی بود و هم نویسنده‌ای ظریف، فرضیه‌ی خود را چنان تنظیم کرده که در عین حال که همه‌ی قوانین جاذبه‌ی جهانی را متضمن است، از لحاظ نگارش هم یک شاهکار به حساب می‌آید. وی در خاتمه‌ی اثر خود این عبارت را به کار برده است که نه تنها هر علاقه‌مند به علم نجوم باید آن را بیاموزد، بلکه باید آن را با آب طلا زینت سردر هر رصدخانه‌ای ساخت:

«علم نجوم، به خاطر شکوه و عظمت موضوع آن و به خاطر فضیلت تئوری‌های مربوط به آن، عالی‌ترین بنای مجلل فکر انسانی و شریف‌ترین معیار هوش وی است.»

لاپلاس کلیه‌ی مسائل پیچیده‌ی مربوط به علم نجوم را بررسی و بسیاری از آن‌ها را حل کرده و نسبت به بقیه هم راه‌حل را هموار ساخته است. وی فرورفتگی قطبین زمین را از روی تأثیری که در حرکات ماه دارند، تعیین کرد. علت جزر و مد را که نیوتن فقط طرحی از آن را ارائه داده بود، به طور کامل توضیح داد و از راه محاسبات مربوط به آن‌ها، جرم ماه را حساب کرد. درباره‌ی اهتزازات زمین نظریه‌ای بیان داشت، اجزای سیاره‌ی اورانوس را که توسط **هرشل** کشف شده بود، اندازه گرفت و درباره‌ی اختلالات حرکت آن، مطالعات دقیقی انجام داد. و بالاخره اغتشاشات حرکات سیاره‌ی مشتری و حلقه‌ی زحل را بررسی کرد. در فیزیک هم مطالعاتی انجام داد؛ جدول‌های مربوط به انکسار جوی را تنظیم کرد و فرمول کامل تعیین ارتفاعات را از روی فشارسنج به دست آورد.

صرف‌نظر از اثر مهم وی «بیان سیستم جهان»، سایر آثار وی که عبارت‌اند از: «رساله‌ای درباره‌ی مکانیک سماوی»، «نظریه‌ی مربوط به حرکت و شکل بیضوی سیارات»، هنوز هم از آثار اساسی و مورد مراجعه‌ی طالبان علم نجوم هستند.

پی‌نوشت..

1. Ligne 2. Trait

● عنایت‌اله راستی‌زاده
دبیر ریاضی دبیرستان‌های شیراز

ریشه‌ی خارجی معادله

اشاره

در حل مسائل گوناگون معادلات، از جمله معادلات اصم، معادلات شامل لگاریتم و بعضی نمونه‌های دیگر، دانش‌آموزان پیش از شروع به حل معادله، به یافتن حدود قابل قبول برای متغیر می‌پردازند. در پایان و پس از حل معادله، جواب‌های به‌دست آمده را با دامنه‌ای که در ابتدا یافته‌اند، مقایسه می‌کنند. در این مقاله می‌خواهیم به این سؤال پاسخ دهیم که آیا این کار کافی است؟!

نمونه‌ی ۱: معادله‌ی رادیکالی زیر را حل کنید.

$$\sqrt{x+1}+\sqrt{2x+3}=\sqrt{2x}$$

حل: ابتدا دامنه یا مقدارهای قابل قبول برای x را می‌یابیم. داریم:

$$\begin{cases} x+1\geq 0 \\ 2x+3\geq 0 \\ 2x\geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\geq -1 \\ x\geq -\frac{3}{2} \\ x\geq 0 \end{cases} \Rightarrow x\geq 0$$

لذا دامنه $x\geq 0$ است.

برای حل معادله، دو طرف برابری را مجذور می‌کنیم:

$$x+1+2x+3+2\sqrt{(x+1)(2x+3)}=2x$$

و به این معادله می‌رسیم:

$$2\sqrt{(x+1)(2x+3)}=-(x+4)$$

دو طرف برابری را دوباره مجذور می‌کنیم:

$$4(x+1)(2x+3)=(x+4)^2$$

بنابراین: $7x^2+12x-4=0$

این معادله‌ی درجه دوم، دو جواب دارد: $x=-2$ و $x=\frac{2}{7}$.

$x=-2$ بیرون از دامنه است. ولی $x=\frac{2}{7}$ در دامنه‌ی تغییر x قرار دارد. ولی آیا جواب معادله است؟ اگر در معادله آزمایش کنیم، داریم: $\frac{3}{\sqrt{7}}+\frac{25}{\sqrt{7}}=\frac{2}{\sqrt{7}}$. پس در معادله صدق نمی‌کند و $x=\frac{2}{7}$ نیز قابل قبول نیست؛ **با وجودی که در دامنه صدق می‌کرد!**

به این ترتیب، در این نمونه دیدیم که هر جوابی که در دامنه‌ی تغییر x قرار داشته باشد، **لزوماً جواب معادله نیست.**

نمونه‌ی ۲. معادله‌ی زیر را حل کنید. آیا معادله جواب حقیقی دارد؟

$$\sqrt{x+3}+\sqrt{2x+7}=\sqrt{2x-1}$$

حل: ابتدا دامنه را می‌یابیم:

$$\begin{cases} x+3\geq 0 \\ 2x+7\geq 0 \\ 2x-1\geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\geq -3 \\ x\geq -\frac{7}{2} \\ x\geq \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow x\geq \frac{1}{2}$$

لذا دامنه $\left\{x\in R: x\geq \frac{1}{2}\right\}$ است.

برای حل معادله، دو طرف برابری را مجذور می‌کنیم. به معادله‌ی زیر می‌رسیم:

$$2\sqrt{(x+3)(2x+7)} = -(x+11)$$

دو طرف برابری را دوباره مجذور می‌کنیم:

$$7x^2+30x-37=0$$

معادله‌ی درجه دوم اخیر، دو جواب دارد: $x=1$ و

$$x=\frac{-37}{7}$$

$x=\frac{-37}{7}$ در دامنه‌ی جواب قرار ندارد و قابل قبول نیست. اما $x=1$ با وجودی که در محدوده‌ی دامنه قرار دارد، با آزمایش آن در معادله‌ی داده شده، خواهیم دید که در آن صدق نمی‌کند. اگر $x=1$ را در معادله قرار دهید، برابری نادرست $1=3+2$ حاصل می‌شود. درواقع $x=1$ ریشه‌ی معادله‌ی

$$-\sqrt{x+3}+\sqrt{2x+7}=\sqrt{2x-1}$$

است.

✲ ✲ ✲

در نمونه‌ی بعدی، به سراغ لگاریتم می‌رویم. در این‌جا با وضع متفاوتی روبه‌رو خواهیم شد.

«ریشه‌ی از دست رفته!»

نمونه‌ی ۳. معادله را حل کنید:

$$20\log_{4x}\sqrt{x}+7\log_{16x}x^3-3\log_{\frac{x}{2}}x^2=0$$

حل: دامنه‌ی تعریف معادله را پیدا می‌کنیم:

$$x>0, x\neq\frac{1}{4}, x\neq\frac{1}{16}, x\neq 2$$

حال داریم:

$$10\log_{4x}x+21\log_{16x}x-6\log_{\frac{x}{2}}x=0$$

با توجه به:

$$\log_b a=\frac{1}{\log_a b}$$

داریم:

$$\frac{10}{\log_x 4x}+\frac{21}{\log_x 16x}-\frac{6}{\log_x\frac{x}{2}}=0 \quad (x\neq 1)$$

$$\Rightarrow \frac{10}{1+2\log_x 2}+\frac{21}{1+4\log_x 2}-\frac{6}{1-\log_x 2}=0$$

$t=\log_x 2$ می‌گیریم، به این معادله می‌رسیم:

$$\frac{10}{1+2t}+\frac{21}{1+4t}=\frac{6}{1-t}$$

پس از انجام محاسبات خواهیم داشت:

$26t^2-3t-5=0$ و از آن‌جا: $t=\frac{1}{2}$ و $t_2=-\frac{5}{13}$.

در این صورت:

$$\log_x 2=\frac{1}{2}\Rightarrow\sqrt{x}=2\Rightarrow x=4$$

و هم‌چنین:

$$\log_x 2=-\frac{5}{13}\Rightarrow x=2^{-\frac{13}{5}}=2^{-3}\times 2^{\frac{2}{5}}=\frac{\sqrt[5]{4}}{8}$$

هر دو جواب $x=\frac{\sqrt[5]{4}}{8}$ و $x=4$ در محدوده هستند و در معادله صادق‌اند. اما تنها جواب‌های معادله این‌ها نیستند. $x=1$ هم جواب معادله است. شاید بتوان $x=1$ را ریشه‌ی فراموش‌شده نامید!

در واقع، استفاده‌ی صوری از دستور مربوط به تغییر مبنای لگاریتم $\log_a b=\frac{1}{\log_b a}, a>0, a\neq 1, b>0, b\neq 1$ به از دست رفتن جواب منجر شده است. چرا که سمت چپ و سمت راست تساوی فوق، می‌تواند دامنه‌های تعریف متفاوتی داشته باشد.

✲ ✲ ✲

اینک به سراغ **مثلثات** می‌رویم. وقتی یک برابری بین زاویه‌ها داشته باشیم و از دو طرف برابری، سینوس یا کسینوس بگیریم، غالباً با وضع مشابهی روبه‌رو می‌شویم. برای نمونه، زوج بودن تابع کسینوس، به معنای آن است که می‌تواند موجب ورود ریشه‌های خارجی شود.

نمونه‌ی ۴. معادله‌ی زیر را حل کنید:

$$\operatorname{Arccos}x-\operatorname{Arccos}\frac{\sqrt{2}}{2}x=\frac{\pi}{4} \qquad (1)$$

حل: این معادله، برای مقدارهایی از x که با شرط $-1\leq x\leq 1$ (دامنه) سازگار باشند، معنی دارد:

$$\left.\begin{array}{l}-1\leq\frac{\sqrt{2}}{2}x\leq 1\Rightarrow-\sqrt{2}\leq x\leq\sqrt{2}\\ -1\leq x\leq 1\end{array}\right\}\Rightarrow-1\leq x\leq 1$$

اکنون از دو طرف معادله کسینوس می‌گیریم:

$$\cos(\operatorname{Arccos}x-\operatorname{Arccos}\frac{\sqrt{2}}{2}x)=\cos\frac{\pi}{4}$$

چون

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$$

خواهیم داشت:

$$(x)(\frac{\sqrt{۲}}{۲}x)+\sqrt{۱-x^{۲}}.\sqrt{۱-\frac{۱}{۲}x^{۲}}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

$$\Rightarrow\frac{\sqrt{۲}}{۲}x^{۲}+\sqrt{۱-\frac{۳}{۲}x^{۲}+\frac{x^{۴}}{۲}}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

$$\Rightarrow ۱-\frac{۳}{۲}x^{۲}+\frac{x^{۴}}{۲}=\frac{۱}{۲}(۱+x^{۴}-۲x^{۲})$$

$$\Rightarrow x^{۲}=۱\Rightarrow x=\pm ۱$$

با وجودی که هر دو مقدار $x=۱$ و $x=-۱$ در مجموعه‌ی مقدارهای قابل قبول برای x (یعنی در دامنه‌ی معادله) قرار دارند، $x=۱$ ریشه‌ی خارجی معادله‌ی ۱ است، زیرا به ازای $x=۱$، مقدار سمت چپ معادله‌ی ۱، برابر $-\frac{\pi}{۴}$ می‌شود و نه $\frac{\pi}{۴}$.

در این مثال هم دیدیم که صدق کردن مقدار به‌دست آمده در دامنه کافی نیست، بلکه باید جواب‌ها را آزمایش کرد.

❁ ❁ ❁

حال به نمونه‌ی جالب توجه زیر می‌پردازیم؛ یک معادله‌ی رادیکالی با ریشه‌های سوم. ظاهراً به توان ۳ رساندن نمی‌تواند ریشه‌ی خارجی پدید آورد. به‌جای هرگونه اضافه گویی، به سراغ مسئله می‌رویم:

نمونه‌ی ۵. معادله‌ی زیر را حل کنید:

$$\sqrt[۳]{x}+\sqrt[۳]{۳x-۲}=\sqrt[۳]{x-۲} \qquad (۲)$$

حل: مجموعه مقدارهای قابل قبول x در این معادله (یعنی دامنه‌ی آن)، عبارت است از تمامی R.

دو طرف معادله‌ی ۲ را به توان ۳ می‌رسانیم:

$$x+۳x-۲+۳\sqrt[۳]{x(۳x-۲)}(\sqrt[۳]{x}+\sqrt[۳]{۳x-۲})=x-۲ \qquad (۳)$$

در معادله‌ی ۳، می‌توانیم به جای $\sqrt[۳]{x}+\sqrt[۳]{۳x-۲}$، مقدارش از معادله‌ی ۱، یعنی $\sqrt[۳]{x-۲}$ را قرار دهیم.

به دست می‌آید:

$$\sqrt[۳]{x(۳x-۲)(x-۲)}=-x$$

دوباره دو طرف را به توان ۳ می‌رسانیم:

$$x(۳x-۲)(x-۲)=-x^{۳}\Rightarrow x^{۳}+x(۳x-۲)(x-۲)=۰$$

$$x(x^{۲}+۳x^{۲}-۸x+۴)=۰\Rightarrow x(۴x^{۲}-۸x+۴)=۰$$

که از آن‌جا به دست می‌آید:

$$x(x^{۲}-۲x+۱)=۰ \qquad (۴)$$

و درنتیجه: $x=۰$ و $x=۱$.

با آزمایش (امتحان جواب) معلوم می‌شود که $x=۱$ (با آن‌که بیرون از دامنه نیست!) یک ریشه‌ی خارجی است و فقط $x=۰$ قابل قبول است. در این نمونه هم دیدیم که صرف صدق کردن جواب در دامنه کافی نیست!

کار تمام نشده است! حوصله کنید تا ببینیم اشکال کار در کجاست؟ به توان ۳ رساندن، چه بار اول و چه بار دوم، نمی‌تواند مشکلی به‌وجود آورد. اما در این بین، یک عمل می‌ماند که می‌تواند موجب تردید شود. این عمل به آن‌جا مربوط می‌شود که سمت چپ معادله‌ی ۲ را با سمت راست آن



عوض کردیم؛ یعنی به‌جای $\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{3x-2}$ ، مقدار $\sqrt[3]{x-2}$ را گذاشتیم. باید در همین جا باشد که ریشه‌ی خارجی فرصتی برای ورود یافته باشد. همه‌ی بحث به همین تبدیل ارتباط دارد.

دروافع اگر برابری

$$a+b=c \qquad (۵)$$

را در نظر بگیریم و دو طرف آن را به توان ۳ برسانیم، به این برابری می‌رسیم:

$$a^3+b^3+3ab(a+b)=c^3 \Rightarrow a^3+b^3+3abc=c^3 \qquad (۶)$$

واضح است، تمام عددهای حقیقی که در تساوی ۵ صدق کنند، در تساوی ۶ هم صادق‌اند. اما عکس این حکم درست نیست. برابری ۶ به‌ازای $a=b=-1$ و $c=1$ برقرار است، درحالی‌که برابری ۵، یعنی $a+b=c$ ، به ازای همین مقدارها برقرار نیست.

نمونه‌ی ۶. معادله‌ی زیر را حل کنید. آیا معادله جواب دارد؟

$$2\operatorname{Arccos} x+\operatorname{Arcsin}(1-x)=-\frac{\pi}{2} \qquad (۷)$$

حل: این معادله برای مقدارهایی از x که در شرایط زیر سازگار باشند، معنی دارد:

الف) $-1 \le x \le 1$

ب) $-1 \le 1-x \le 1 \Rightarrow 0 \le x \le 2$

درنتیجه، دامنه‌ی معادله (اشتراک الف و ب) عبارت است از:

$$D=\{x \in R: 0 \le x \le 1\}$$

حال داریم:

$$2\operatorname{Arccos} x=-\frac{\pi}{2}-\operatorname{Arcsin}(1-x)$$

از دو طرف معادله کسینوس می‌گیریم:

$$\cos(2\operatorname{Arccos} x)=\cos(-\frac{\pi}{2}-\operatorname{Arcsin}(x))$$

$$2\cos^2(\operatorname{Arccos} x)-1=\cos(\frac{\pi}{2}+\operatorname{Arcsin}(1-x))$$

$$2x^2-1=-\sin(\operatorname{Arcsin}(1-x))$$

$$\Rightarrow 2x^2-1=-(1-x) \Rightarrow 2x^2-1=-1+x$$

پس داریم:

$$2x^2-x=0$$

و بنابراین جواب‌های معادله عبارت‌اند از:

$$x=0, x=\frac{1}{2}$$

هردو جواب به‌دست آمده در دامنه قرار می‌گیرند، اما هیچ‌کدام در معادله‌ی ۷ صدق نمی‌کند!

کافی است جواب‌ها را در معادله‌ی داده شده آزمایش کنیم:

$$x=0: \ 2\operatorname{Arccos} 0+\operatorname{Arcsin}(1-0)=2(\frac{\pi}{2})+\frac{\pi}{2}=\frac{3\pi}{2} \neq -\frac{\pi}{2}$$

$$x=1: \ 2\operatorname{Arccos} 1+\operatorname{Arcsin} 0=2(0)+(0)=0 \neq -\frac{\pi}{2}$$

بنابراین، معادله‌ی اخیر در مجموعه‌ی اعداد حقیقی جواب ندارد. به نقش بی‌بدیل آزمایش کردن جواب‌های به‌دست آمده در معادله توجه کنید.

راه دیگری نیز می‌توان ارائه داد. بدون حل معادله‌ی

$$2\operatorname{Arccos} x+\operatorname{Arcsin}(1-x)=-\frac{\pi}{2}$$

می‌توان نشان داد که معادله جواب ندارد. توجه کنید که:

$0 \le 2\operatorname{Arccos} x \le 2\pi$ و $-\frac{\pi}{2} \le \operatorname{Arcsin}(1-x) \le \frac{\pi}{2}$

حاصل جمع دو عبارت $2\operatorname{Arccos} x$ و $\operatorname{Arcsin}(1-x)$ در صورتی برابر $-\frac{\pi}{2}$ خواهد شد که هر دو کمترین مقدار خود را بگیرند. در حالی که هیچ xای را نمی‌توان یافت که هم $2\operatorname{Arccos} x=0$ شود و هم $\operatorname{Arcsin}(1-x)=-\frac{\pi}{2}$.

❊ ❊ ❊

نمونه‌های بالا کافی است تا قانع شویم که در پایان حل معادله، جواب را آزمایش کنیم. حوزه‌ی تعریف (یا مجموعه‌ی مقدارهای قابل قبول برای مجهول یا به زبان ساده، دامنه) و بیرون نبودن جواب‌ها از دامنه، ما را از آزمایش جواب‌هایی که به دست می‌آوریم، بی‌نیاز نمی‌کند.

تمرین

۱. معادله را حل کنید:

$$\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[3]{3x-1}=\sqrt[3]{x+1}$$

۲. معادله را حل کنید:

$$\operatorname{Arcsin} x-\operatorname{Arcsin}\frac{x}{2}=-\frac{\pi}{3}$$

۳. آیا این معادله جواب دارد؟

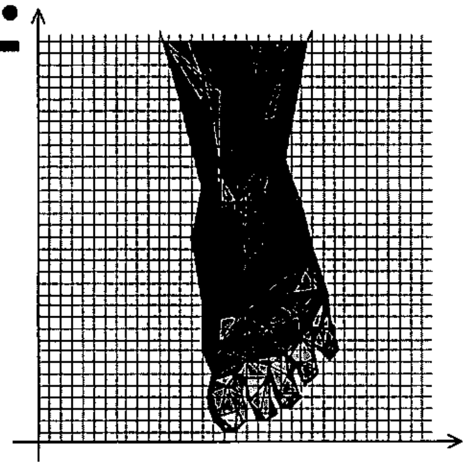
$$\sqrt{|x+5|}-\sqrt{|x+2|}=1$$

۴. این معادله چند ریشه دارد؟

$$10\log_{4x} x+\log_{\frac{x}{2}} x-3\log_{16x} x^7=0$$

● محمد هاشم رستمی

۱۱



رویکرد هندسی و جبری ـ مختصاتی در آموزش هندسه

اشاره

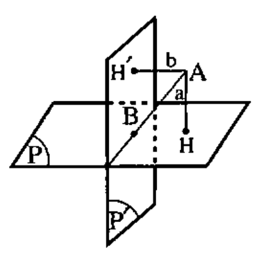
یکی از مهم‌ترین پیوندها و اتصال‌ها در همه‌ی ریاضیات، اتصال و پیوند بین هندسه و جبر است.

از استانداردهای موضوعی NCTM

در این شماره نیز اتصال و پیوند را در فضای سه بعدی بررسی می کنیم.

نکته‌ی مهم: ضمن بررسی رویکرد هندسی، رویکرد جبری ـ مختصاتی در آموزش هندسه، برخی از راهبردهای مهم برای حل مسئله‌های هندسه مانند «تحدید یا کوچک‌تر کردن مسئله، مسئله را حل شده فرض کردن، به کارگیری مسئله‌های خویشاوند برای حل یک مسئله، چگونگی به کارگیری مکان‌های هندسی و استفاده از روش‌های متفاوت حل یک مسئله» را مطرح می کنیم تا دانش آموزان به دیدگاه‌های جدیدی برای حل مسئله‌های هندسه دست یابند. در ضمن لازم است گفته شود، مسئله‌هایی را که با دو رویکرد هندسی و رویکرد جبری ـ مختصاتی حل می کنیم، کلیدی هستند و از کتاب‌های درسی هندسه‌ی (۱) و هندسه‌ی (۲) انتخاب شده‌اند تا دانش آموزان بتوانند مسأله‌های دیگر این کتاب‌ها، هم‌چنین مسأله‌های دیگر از کتاب‌های هندسه را با استفاده از این دو رویکرد، به راحتی حل کنند.

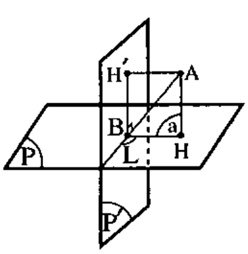
مسئله‌ی ۱۳. اگر دو صفحه‌ی P و P′ برهم عمود باشند و نقطه‌ی A از دو صفحه‌ی P و P′ به‌ترتیب به فاصله‌های a و b باشد، ثابت کنید فاصله‌ی نقطه‌ی A تا فصل مشترک این دو صفحه برابر است با $\sqrt{a^2+b^2}$.



حل:

الف) روش هندسی

فصل مشترک دو صفحه‌ی P و P′ را L، پای عمود وارد از A بر صفحه‌ی P را H و پای عمود وارد از A بر صفحه‌ی P′ را

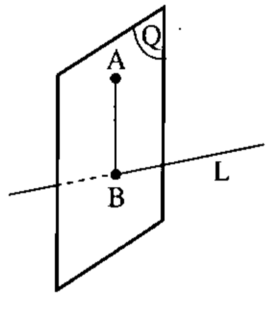


H′ می‌نامیم. بر دو خط متقاطع AH و AH′ یک صفحه می‌گذرد که آن را صفحه‌ی Q می‌نامیم. این صفحه بر خط L، یعنی فصل مشترک دو صفحه‌ی P و P′ عمود است، زیرا L بر AH عمود است. چون خط AH که بر صفحه‌ی P عمود است، بر تمام خط‌های صفحه‌ی P و از جمله بر خط L عمود می‌باشد، هم‌چنین L بر خط AH′ نیز عمود است. زیرا به دلیل این که AH′ بر صفحه‌ی P′ عمود است، بر تمام خط‌های این صفحه و از جمله بر خط L که یک خط از صفحه‌ی P′ می‌باشد نیز عمود است.» در نتیجه، خط L بر صفحه‌ی Q عمود است.

اکنون نقطه‌ی برخورد صفحه‌ی Q با خط L را B می‌نامیم و از B به H و H′ وصل می‌کنیم. چون خط L بر صفحه‌ی Q عمود است، پس بر تمام خط‌های این صفحه و در نتیجه بر AB عمود است. در نتیجه، پاره‌خط AB فاصله‌ی نقطه‌ی A از فصل مشترک دو صفحه‌ی P و P′ است. یعنی پاره‌خطی است که می‌خواهیم ثابت کنیم اندازه‌ی آن $AB=\sqrt{a^۲+b^۲}$ است.

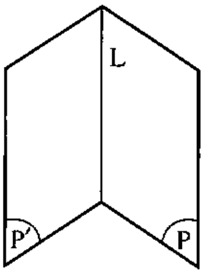
از عمود بودن صفحه‌ی Q بر خط L، فصل مشترک دو صفحه‌ی عمود بر هم P و P′ نتیجه می‌شود که زاویه‌ی $H\hat{B}H'$ زاویه‌ی مسطحه‌ی فرجه‌ی حاصل از دو صفحه‌ی P و P′ است. چون این دو صفحه برهم عمودند، پس $H\hat{B}H'=۹۰^\circ$ است. از طرف دیگر، در چهارضلعی $AH\hat{B}H'$، $\hat{H}=۹۰^\circ$، $\hat{H}'=۹۰^\circ$ و $H\hat{B}H'=۹۰^\circ$ است. پس زاویه‌ی چهارم این چهارضلعی یعنی $H\hat{A}H'=۹۰^\circ$ و چنین معنی می‌دهد که چهارضلعی موردنظر مستطیل است. در این مستطیل، بنا به فرض مسئله، دو ضلع AH=a و AH′ = b هستند. بنابراین، اندازه‌ی قطر آن $AH=\sqrt{a^۲+b^۲}$ و حکم مسئله درست است.

تعریف فاصله‌ی نقطه از خط. نقطه‌ی A و خط L را که بر A نمی‌گذرد، در نظر می‌گیریم. اگر از A صفحه‌ی Q را که منحصر به فرد است، بر خط L عمود کنیم تا این خط را در نقطه‌ی ثابت B قطع کند، اندازه‌ی پاره‌خط AB را فاصله‌ی نقطه‌ی A از خط L می‌نامند.



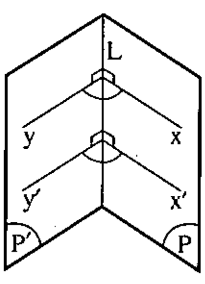
نکته: اگر نقطه‌ی A روی خط L باشد، فاصله‌ی A از L را مساوی صفر تعریف می‌کنیم.

زاویه‌ی مسطحه‌ی یک فرجه. هرگاه دو صفحه‌ی P و P′ در خط L یکدیگر را قطع کنند، چهار فرجه پدید می‌آید که دو به دو متقابل به رأس‌اند. در واقع، هر دو نیم‌صفحه با مرز مشترک L یک فرجه پدید می‌آورند که شکل، یکی از این فرجه‌ها را نشان می‌دهد.



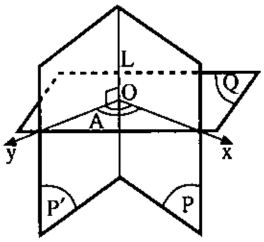
این فرجه را به صورت P ـ L ـ P′ نمایش می‌دهند. L را یال فرجه و P و P′ را دو وجه فرجه می‌نامند. به همین دلیل، فرجه را زاویه‌ی دووجهی نیز می‌نامند.

اکنون اگر از نقطه‌ی O واقع بر L دو خط Ox و Oy را به ترتیب در دو صفحه‌ی P و P′ عمود بر L رسم کنیم، یعنی $Ox\subset P$، $Ox\perp L$، $Oy\subset P'$ و $Oy\perp L$، در این صورت زاویه‌ی xoy را زاویه‌ی مسطحه‌ی فرجه‌ی P ـ L ـ P′ می‌توانیم از یک نقطه‌ی اختیاری مانند O واقع بر L، صفحه‌ای بر L عمود کنیم تا صفحه‌های P و P′ را به ترتیب در فصل مشترک Ox و Oy قطع کند. زاویه‌ی xoy زاویه‌ی مسطحه‌ی فرجه‌ی P′ ـ L ـ P است. بدیهی است که اندازه‌ی این زاویه‌ی مسطحه‌ی فرجه، به جای نقطه‌ی O روی یال L بستگی ندارد. یعنی اگر از نقطه‌ی دیگری مانند O′ واقع بر L، صفحه‌ای بر L عمود کنیم تا در صفحه‌ی P و P′ را در O′x′ و O′y′ قطع کند، زاویه‌ی x′o′y′ نیز زاویه‌ی مسطحه‌ی فرجه‌ی P′ ـ L ـ P است. یعنی $x\hat{o}y=x'\hat{o}'y'$ است.

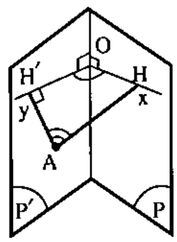


نکته: از تعریف بالا نتیجه می‌شود که اگر فرجه‌ی P′ ـ L ـ P و نقطه‌ی A درون این فرجه و غیر واقع بر

دو صفحه‌ی P و ′P داده شده باشد و از این نقطه صفحه‌ای مانند Q بر L رسم کنیم تا یال L را در O و صفحه‌های P و ′P را در Ox و Oy قطع کند، زاویه‌ی $x\hat{O}y$ همان زاویه‌ی مسطحه‌ی فرجه‌ی P-L-P′ است.



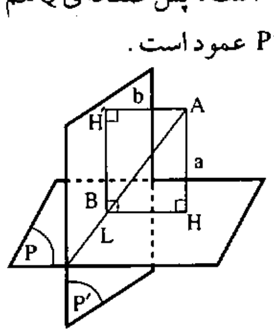
نتیجه: اگر از A عمود AH را بر صفحه‌ی P و عمود ′AH را بر صفحه‌ی ′P فرود آوریم، صفحه‌ی ′HAH همان صفحه‌ای است که از A عمود بر یال L رسم می‌شود و اگر فصل مشترک این صفحه با صفحه‌های P و ′P را به‌ترتیب Ox و Oy بنامیم، $x\hat{O}y$ زاویه‌ی مسطحه‌ی فرجه‌ی $P-L-P'$ است.



به‌علاوه، به‌دلیل محاطی بودن چهارضلعی HAH′B، چون $\hat{H}=\hat{H}'=90°$ و در نتیجه $\hat{H}+\hat{H}'=180°$ است، پس $H\hat{A}H'+H\hat{O}H'=180°$، یعنی دو زاویه‌ی $H\hat{A}H'$ و $H\hat{O}H'$ مکمل یکدیگرند.

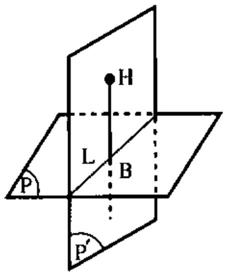
اثبات هندسی با روشی دیگر

فصل مشترک دو صفحه‌ی P و ′P را L می‌نامیم. از نقطه‌ی A صفحه‌ی Q را عمود بر خط L رسم می‌کنیم و محل تلاقی Q با L را B می‌نامیم. طول پاره‌خط AB همان فاصله‌ی نقطه‌ی A از L، فصل مشترک دو صفحه‌ی P و ′P است. خط L در دو صفحه‌ی P و ′P است، پس صفحه‌ی Q هم بر صفحه‌ی P و هم بر صفحه‌ی ′P عمود است.



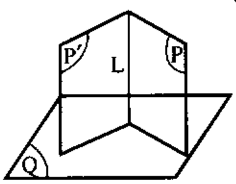
(شکل الف)

از نقطه‌ی A عمود AH را بر صفحه‌ی P و عمود ′AH را بر صفحه‌ی ′P رسم می‌کنیم. می‌دانیم که بنا به فرض AH=a و $AH'=b$ است (شکل الف). AH و ′AH در صفحه‌ی Q قرار دارند، زیرا می‌دانیم اگر دو صفحه‌ی بر هم عمود باشند و از یک نقطه واقع در یک صفحه، عمودی بر صفحه‌ی دیگر رسم کنیم، آن خط به تمامی در آن صفحه قرار می‌گیرد (شکل ب).



(شکل ب)

فصل مشترک دو صفحه‌ی Q و ′P خط H′b است که بر صفحه‌ی P عمود است، زیرا P، ′P و Q سه صفحه‌ی دو به دوی عمود بر هم هستند و می‌دانیم که اگر دو صفحه بر یک صفحه عمود باشند، فصل مشترکشان هم بر آن صفحه عمود است (شکل پ).



(شکل پ)

از عمود بودن H′b بر صفحه‌ی P نتیجه می‌شود که $H'\hat{B}H=90°$ است. چهارضلعی AHBH′ که در صفحه‌ی Q است، سه زاویه‌ی قائمه دارد که عبارت‌اند از $H'\hat{B}H=\hat{H}=\hat{H}'=90°$. پس این چهارضلعی مستطیل است. ضلع‌های مجاور این مستطیل AH=a و $AH'=b$ هستند. پس اندازه‌ی قطر آن $AB=\sqrt{a^2+b^2}$ است که همان فاصله‌ی نقطه‌ی A از خط L فصل مشترک دو صفحه‌ی P و ′P است و حکم مسئله درست است.

مثال ۱. دو صفحه‌ی عمود بر هم P و ′P و نقطه‌ی A به فاصله‌ی ۸ از صفحه‌ی P و به فاصله‌ی ۶ از صفحه‌ی ′P قرار دارد. فاصله‌ی نقطه‌ی A از فصل مشترک این دو صفحه را تعیین کنید.

حل: با توجه به مسئله‌ی حل شده، $a=8$ و $b=6$ است. پس فاصله‌ی خواسته شده برابر است با:

$$AB=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{8^2+6^2}=\sqrt{64+36}=\sqrt{100}=10$$

مثال۲. دو صفحه‌ی عمود برهم P و P′ داده شده‌اند. نقطه‌ی A به فاصله‌ی ۲۵ از خط L، فصل مشترک این دو صفحه محسوب می‌شود و به فاصله‌ی ۲۴ از صفحه‌ی P واقع است. فاصله‌ی این نقطه از صفحه‌ی P′ را تعیین کنید.

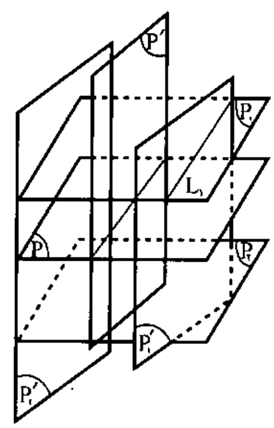
حل: با توجه به مسئله‌ی حل شده (مسئله‌ی ۱۳)، $a=24$ و $\sqrt{a^2+b^2}=25$ است.

بنابراین داریم:

$$\sqrt{24^2+b^2}=25 \Rightarrow 576+b^2=625 \Rightarrow b^2=49 \Rightarrow b=7$$

فاصله‌ی نقطه‌ی A از صفحه‌ی P′

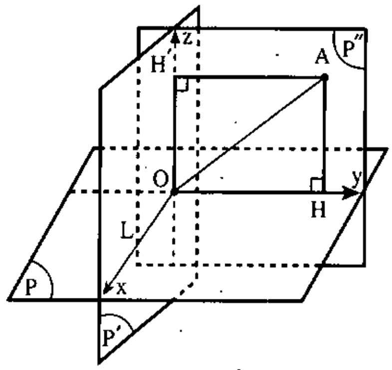
مثال۳. دو صفحه‌ی عمود برهم P و P′ با فصل مشترک L داده شده‌اند. مکان هندسی نقطه‌ای از فضا را بیابید که از صفحه‌ی P به فاصله‌ی معلوم a و از صفحه‌ی P′ به فاصله‌ی معلوم b باشد.



حل: می‌دانیم، مکان هندسی نقطه ای از فضا که از یک صفحه‌ی داده شده مانند P به فاصله‌ی معلوم a قرار دارد، دو صفحه‌ی موازی صفحه‌ی P و به فاصله‌ی a از آن است. که در دو طرف این صفحه قرار دارند. این دو صفحه را P_1 و P_2 می‌نامیم. هم‌چنین، مکان هندسی نقطه‌ای از فضا که از صفحه‌ی داده شده‌ی P′ به فاصله‌ی معلوم b واقع است، دو صفحه‌ی موازی صفحه‌ی P′ به فاصله‌ی b از آن و در دو طرف آن است. این دو صفحه را P'_1 و P'_2 می‌نامیم. فصل مشترک‌های این چهار صفحه را که دو به دو عمود برهم نیز هستند، L_1، L_2، L_3 و L_4 می‌نامیم. این چهار خط جواب مسئله‌اند که با خط L فصل مشترک دو صفحه‌ی P و P′ نیز موازی هستند.

ب) اثبات به روش جبری ـ مختصاتی

دو صفحه‌ی عمود بر هم P و P′ و نقطه‌ی A به فاصله‌ی a از صفحه‌ی P و به فاصله‌ی b از صفحه‌ی P′ داده شده‌اند. می‌خواهیم ثابت کنیم که فاصله‌ی نقطه‌ی A از فصل مشترک دو صفحه‌ی P و P′ که آن را L می‌نامیم، مساوی $\sqrt{a^2+b^2}$ است.



برای حل مسئله یا رویکرد جبری ـ مختصاتی، نخست باید یک دستگاه مختصات مناسب در فضا انتخاب کنیم. برای این کار، صفحه‌ی گذرنده بر AH (خطی که از A بر P عمود شده است) و AH′ (خطی که از A بر صفحه‌ی P عمود شده است) را P″ می‌نامیم. این صفحه، بر دو صفحه‌ی P و P′ عمود است. در واقع P، P′ و P″ سه صفحه‌ی دوبه‌دوی عمود برهم عمود هستند. نقطه‌ی برخورد P″ با خط L را O می‌نامیم و خط‌های OH و OH′ را رسم می‌کنیم. سه خط L، OH و OH′ را روی این سه خط درنظر می‌گیریم. برای مثال Ox را رو خط L، Oy را روی خط OH و Oz را روی OH′ می‌گیریم. در این صورت، نقطه‌ی A به مختصات $A=(0,b,a)$ است. با توجه به این‌که پاره‌خط AO همان فاصله‌ی نقطه‌ی A از خط L، فصل مشترک دو صفحه‌ی P و P′ است، پس داریم:

$$A=(0,b,a), O=(0,0,0) \Rightarrow AO=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$
$$=\sqrt{0+b^2+a^2} \Rightarrow AO=\sqrt{a^2+b^2}$$

پس حکم مسئله درست است.

نکته‌ی۱. اگر در روش اثبات جبری ـ مختصاتی، صفحه‌های P و P′ را به ترتیب صفحه‌ی xoy و xoz اختیار کنیم، اما صفحه‌ی yoz را صفحه‌ای غیر از HAH′ اختیار کنیم، یعنی صفحه‌ای مانند P″ بگیریم (شکل ۱) نقطه‌ی A به مختصات زیر خواهند بود:

$A=(x,b,a)$

در این صورت، اگر پای عمود رسم شده از A را که روی فصل مشترک دو صفحه‌ی P و P′ است XB

بنامیم، نقطه‌ی B به مختصات زیر خواهد بود:

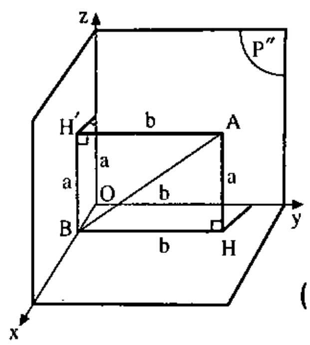
$B=(x,0,0)$

و از آن‌جا، طول پاره‌خط AB برابر است با:

$$AB=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

$$=\sqrt{(x-x)^2+(b-0)^2+(a-0)^2}$$

$$\Rightarrow AB=\sqrt{0+b^2+a^2}=\sqrt{a^2+b^2}\Rightarrow AB=\sqrt{a^2+b^2}$$



(شکل ۱)

به‌طوری که دیده می‌شود، محاسبه کمی طولانی‌تر و مشکل‌تر می‌شود.

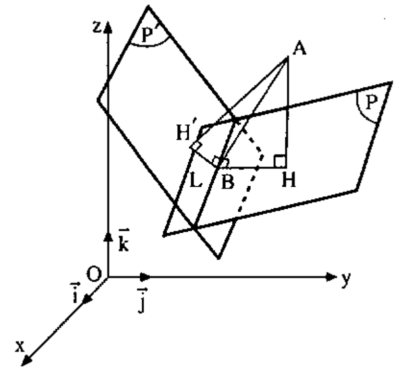
نکته‌ی ۲. اگر دستگاه مختصات قائم را در حالت کلی در نظر بگیریم، یعنی هیچ یک از صفحه‌های مختصات بر صفحه‌های P و P′ منطبق نباشند، محاسبه طولانی‌تر و مشکل‌تر خواهد بود. در این حالت، $A(x_1,y_1,z_1)$ و دو صفحه‌ی P و P′ به معادله‌های:

$$P:\ ax+by+cz+d=0\ ,\ \ P':\ a'x+b'y+c'z+d'=0$$

با شرط $aa'+bb'+cc'=0$ خواهند بود.

با این فرض خط d فصل مشترک دو صفحه‌ی P و P′ به معادله‌ی زیر خواهد بود:

$$\begin{cases} ax+by+cz+d=0 \\ a'x+b'y+c'z+d'=0 \\ aa'+bb'+cc'=0 \end{cases}$$



در این حالت، فاصله‌ی نقطه‌ی A از صفحه‌ی P $AH=\frac{|ax_1+by_1+cz_1+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=a$ و فاصله‌ی نقطه‌ی A از صفحه‌ی P′ $AH'=\frac{a'x_1+b'y_1+c'z_1+d'}{\sqrt{a'^2+b'^2+c'^2}}=b$ خواهد بود.

از طرف دیگر، مختصات نقطه‌ی B، محل برخورد صفحه‌ی HAH′ (یا همان صفحه‌ی Q که در راه حل هندسی دیدیم) باید محاسبه شود و سپس طول پاره‌خط AB به‌دست آید و ثابت شود که $AB=\sqrt{a^2+b^2}$ است. اما برای نوشتن معادله‌ی صفحه‌ی Q، باید نمودار نرمال این صفحه را به‌دست آوریم. این بردار قائم، از دستور زیر محاسبه‌ی بار $\vec{V}_p\wedge\vec{V}_{p'}$ است. یعنی داریم:

$$\vec{V}_Q=\vec{V}_p\wedge\vec{V}_{p'}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a & b & c\\ a' & b' & c'\end{vmatrix}$$

البته شرط $aa'+bb'+cc'=0$ را نیز همواره باید در نظر داشته باشیم.

به‌طوری که دیده می‌شود، حل مسئله با انتخاب این دستگاه مختصات قائم در فضا، خیلی طولانی‌تر و مشکل‌تر از اولین راه‌حل جبری مختصاتی است که در آن صفحه‌های P و P′ و صفحه‌ی Q (صفحه‌ای که از A بر دو صفحه‌ی P و P′ عمود می‌شود) را به عنوان صفحه‌های مختصات اختیار کرده بودیم.

به‌طوری که دیده می‌شود، انتخاب دستگاه مختصات در راه‌حل جبری ـ مختصاتی، از اهمیت فراوانی برخوردار است.

برای هر یک از روش‌های ذکر شده‌ی جبری ـ مختصاتی، مثال‌هایی می‌توان مطرح کرد. ما برای آخرین حالت، یعنی حالتی که دستگاه مختصات را در حالت کلی گرفته‌ایم، مثالی ذکر می‌کنیم.

مثال: دو صفحه‌ی

$$P':\ x-2y+4=0\ ,\ \ P:\ 2x+y-2z-2=0$$

داده شده‌اند، اگر نقطه‌ی $A=(2,-1,4)$ و فاصله‌ی نقطه‌ی A از صفحه‌ی P را با a و فاصله‌ی نقطه‌ی A از صفحه‌ی P′ را با b نمایش دهیم، ثابت کنید. فاصله‌ی نقطه‌ی A از

خط L، یعنی فصل مشترک دو صفحه‌ی P و P′ برابر $\sqrt{a^2+b^2}$ است.

حل: شرط عمود بودن دو صفحه برقرار است، زیرا داریم:

$$\vec{V}_P=(2,1,-2)\ ,\ \vec{V}_{P'}=(1,-2,0)\Rightarrow \vec{V}_P.\vec{V}_{P'}$$
$$=(2)(1)+(1)(-2)(-2)(0)=2-2=0$$
$$\Rightarrow \vec{V}_P\perp\vec{V}_{P'}\Rightarrow P\perp P'$$

اکنون معادله‌ی فصل مشترک دو صفحه‌ی P و P′ را به‌دست می‌آوریم. داریم:

$$\begin{matrix}P:\\P':\end{matrix}\begin{cases}2x+y-2z-2=0\\x-2y+4=0\end{cases}\Rightarrow L:\ \frac{x}{4}=\frac{y-2}{2}=\frac{z}{5}$$

برای به‌دست آوردن فاصله‌ی نقطه‌ی A از خط L، از دستور $AB=\frac{|\vec{AM}\wedge\vec{L}|}{\vec{L_1}}$ استفاده می‌کنیم که در آن بردار $\vec{L}$ بردار هادی خط L و M نقطه‌ای دل‌خواه متعلق به L است. داریم:

$$M=(0,2,0)\in L\ ,\ A=(2,-1,4)$$

$$\Rightarrow \vec{AM}=(2,-3,4)\ ,\ \vec{L}=(4,2,5)$$

$$\Rightarrow \vec{AM}\wedge\vec{L}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\2&3&4\\4&2&5\end{vmatrix}=-23\vec{i}-6\vec{j}+16\vec{k}$$

$$\Rightarrow \vec{AM}\wedge\vec{L}=(-23,-6,16)$$

$$\Rightarrow \vec{AM}\wedge\vec{L}=\sqrt{(-23)^2+(-6)^2+(16)^2}=\sqrt{821}\ ,$$

$$\left|\vec{L}\right|=\sqrt{16+4+25}=\sqrt{45}\Rightarrow AB=\frac{\sqrt{821}}{\sqrt{45}}=\sqrt{\frac{821}{45}}$$

اکنون فاصله‌های نقطه‌ی A از صفحه‌های P و P′ را به‌دست می‌آوریم:

$$AH=a=\frac{|4-1-8-2|}{\sqrt{4+1+4}}=\frac{7}{3}\ ,\ AH'=b=\frac{|2+2+4|}{\sqrt{1+4}}=\frac{8}{\sqrt{5}}$$

$$\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{\frac{49}{9}+\frac{64}{5}}=\sqrt{\frac{821}{45}}=AB$$

پس حکم درست است.

تفریح اندیشه

۱. در استخری یک قایق لاستیکی باد شده انداخته‌ایم. کدام عمل سطح آب را بالاتر می‌آورد: انداختن سکه‌ای درون قایق، یا انداختن سکه‌ای در آب؟

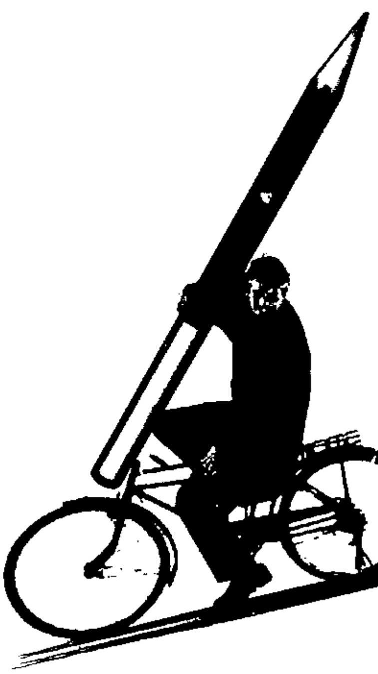
۲. اسماعیل قصّاب، رئیس کمیته‌ی مغازه‌داران خیابان، که شامل بقال، نانوا، و سیگار فروش نیز هست، می‌باشد. تمام آن‌ها دور میزی نشسته‌اند.

ـ اسماعیل سمت چپ اسمال نشسته است.

ـ اصغر سمت چپ بقال نشسته است.

ـ اصلان که مقابل اسمال است نانوا نیست.

ـ اصغر چه دکانی دارد؟



جواب۱: انداختن سکه در قایق، زیرا سکه در آب به اندازه‌ی حجمش آب را تغییر می‌دهد، در حالی که در قایق به اندازه‌ی آب هم وزنش آن را جابه‌جا می‌کند، و از آن‌جا که سکه‌ی فلزی از آب سنگین‌تر است، سکه بیش‌تر از آب هم حجمش وزن دارد.

جواب۲: با تخصیص اسماعیل در صندلی ته میز، چهار شخص مذکور می‌توانند تنها به این طریق بنشینند:

اصغر ـ اسمال ـ اصلان ـ اسماعیل

در نتیجه، اسمال بقال است، و اصلان سیگار فروش، و اصغر نانوا.

برهان — دوره‌ی نوزدهم، شماره‌ی ۴، تابستان ۱۳۸۹

● هوشنگ شرقی



المپیاد ریاضی در کشور انگلستان سال ۱۹۹۹

درباره‌ی المپیادهای ریاضی انگلستان، پیش از این توضیحاتی داده‌ایم و مسائلی از آن‌ها را در شماره‌های ۵۲ و ۶۰ آورده‌ایم. در شماره‌ی ۵۲، مسائل المپیاد ریاضی سال ۲۰۰۰ و در شماره‌ی ۶۰ منتخبی از مسائل سال‌های ۲۰۰۱ و ۲۰۰۲ را آوردیم. هم‌چنین، توضیحاتی نیز در مورد چگونگی برگزاری المپیاد ریاضی این کشور دادیم. یادآور می شوم، مسائل المپیادهای ریاضی این کشور، به همراه مطالبی درباره‌ی نحوه‌ی برگزاری این مسابقات، در کتابی به قلم تونی گاردینر، سرپرست کمیته‌ی المپیاد ریاضی این کشور، گردآوری و توسط نگارنده ترجمه شده است که انتشارات مدرسه آن را منتشر کرده است.[1] در این شماره، مسائل سال ۱۹۹۹ (منتخبی از مسائل دورهای اول و دوم) را همراه با راه‌حل آن‌ها می‌آوریم.

مسائل

۱. من چهار فرزند دارم. سن هر یک از آن‌ها به واحد سال، عددی طبیعی، بین یا مساوی ۲ و ۱۶ است و عدد سن همه‌ی آن‌ها متمایز است. یک سال قبل، مربع سن بزرگ‌ترین بچه، مساوی مجموع مربع‌های سن سه‌تای دیگر بود و یک سال بعد، مجموع مربع‌های سن بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین بچه‌ها، مساوی مجموع مربع‌های سن دو بچه‌ی دیگر خواهد شد. آیا با این اطلاعات، می‌توان سن بچه‌ها را به صورت یکتا مشخص کرد و همه‌ی حالت‌های ممکن برای سن آن‌ها را به دست اورد.

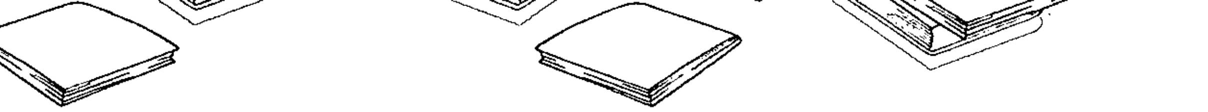
۲. دایره‌ای به قطر AB مفروض است و X نقطه‌ی ثابتی روی AB و بین A و B است. نقطه‌ی متغیر p (متمایز از A و B) روی نیم‌دایره‌ی به قطر AB قرار دارد. ثابت کنید به ازای هر نقطه‌ی p، نسبت $\frac{\tan\ A\hat{P}X}{\tan\ P\hat{A}X}$ همواره مقدار ثابتی دارد.

۳. مقداری ثابت و طبیعی برای C بیابید که معادله‌ی زیر دقیقاً سه جواب در مجموعه‌ی اعداد طبیعی به صورت (x,y) داشته باشد:

$$xy^{2} - y^{2} - x + y = c$$

۴. برای هر عدد طبیعی n فرض کنید، S_n مجموعه‌ای شامل نخستین n عدد طبیعی باشد:

$$S_n = \{1,2,3,4,\dots,n-1,n\}$$



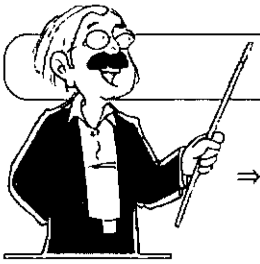
به ازای چه مقدار n می‌توان S_n را به صورت اجتماع دو زیرمجموعه‌ی جدا از هم و ناتهی نشان داد، به طوری که مجموع اعضای زیرمجموعه‌ی یکسان باشد؟

۵. عددهای حقیقی و نامنفی p، q و r صادق در رابطه‌ی $p+q+r=۱$ مفروض‌اند. ثابت کنید:

$$۷(pq+qr+rp)\le ۲+۹pqr$$

۶. همه‌ی عددهای طبیعی به فرجه‌ی $۳n^۲+n+۱$ را در نظر بگیرید.
کوچک‌ترین مقدار برای مجموع ارقام (در مبنای ۱۰) این گونه عددها چیست؟

حل مسائل



۱. اگر سن بچه‌ها را به ترتیب از بزرگ به کوچک، a، b، c و d در نظر بگیریم، خواهیم داشت:

$$۱۶\ge a>b>c>d\ge ۲$$

$$\begin{cases}(a-۱)^۲=(b-۱)^۲+(c-۱)^۲+(d-۱)^۲\\(a+۱)^۲+(d+۱)^۲=(b+۱)^۲+(c+۱)^۲\end{cases}$$

و با تفریق رابطه‌ی پایین از بالا نتیجه می‌شود:

$$۴a+d^۲+۲d+۱=۴b+۴c-d^۲+۲d-۱$$

$$\Rightarrow ۲d^۲+۲=۴(b+c-a)\Rightarrow d^۲+۱=۲(b+c-a)$$

بنابراین، $d^۲+۱$ زوج و در نتیجه $d^۲$ فرد و لذا d هم فرد است. هم‌چنین، نتیجه می‌شود $b+c-a=\frac{d^۲+۱}{۲}$ و چون $a>b$ پس $c>b+c-a$. در نتیجه: $c>\frac{d^۲+۱}{۲}$ و چون d فرد است، پس حداقل مقدار d مساوی ۳ است. از آن‌جا $c>\frac{۹+۱}{۲}=۵$، یعنی حداقل مقدار c نیز مساوی ۶ است.

حال اگر $d=۵$ باشد، $c>\frac{۲۵+۱}{۲}=۱۳$ و لذا $Min\,c=۱۴$ و برای a و b نیز عددی به غیر از $b=۱۵$ و $a=۱۶$ باقی نمی‌ماند. پس در این حالت، جواب منحصر به فرد $(a,b,c,d)=(۱۶,۱۵,۱۴,۵)$ به دست می‌آید که در معادلات بالا سوق نمی‌کنند.

پس، تنها جواب قابل قبول برای d، $d=۳$ است و از آن‌جا نتیجه می‌شود:

$$\begin{cases}(a-۱)^۲=(b-۱)^۲+(c-۱)^۲+۴\\(a+۱)^۲+۱۶=(b+۱)^۲+(c+۱)^۲\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}(a-۱)^۲-(b-۱)^۲=(c-۱)^۲+۴\\(a+۱)^۲-(b+۱)^۲=(c+۱)^۲-۱۶\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}[(a-۱)-(b-۱)]\,[(a-۱)+(b-۱)]=(c-۱)^۲+۴\\[(a-۱)-(b+۱)]\,[(a+۱)+(b+۱)]=(c+۱)^۲-۱۶\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}(a-۱)(a+b-۲)=(c-۱)^۲+۴\\(a-۱)(a+b+۲)=(c+۱)^۲-۱۶\end{cases}$$

و با فرض $a-b=x$ و $a+b=y$ نتیجه می‌شود:

$$\begin{cases}x(y+۲)=(c+۱)^۲-۱۶\\x(y-۲)=(c-۱)^۲+۴\end{cases}$$

و با توجه به فرض $۱۴\le c\le ۶$ کافی است مقادیر متفاوتی به c بدهیم و از آن‌جا x، y، a و b را بیابیم؛ مثلاً به ازای $c=۶$ نتیجه می‌شود:

$$\begin{cases}x(y+۲)=۲۲\\x(y-۲)=۲۹\end{cases}$$

و از تقسیم دو رابطه‌ی بالا نتیجه می‌شود:

$$\frac{y+۲}{y-۲}=\frac{۳۳}{۲۹}\Rightarrow ۳۳y-۶۶=۲۹y+۵۸\Rightarrow y=۳۱,x=۱$$

$$\Rightarrow\begin{cases}a+b=۳۱\\a-b=۱\end{cases}\Rightarrow a=۱۶,b=۱۵$$

و جواب $(a,b,c,d)=(۱۶,۱۵,۶,۳)$ به‌دست می‌آید که قابل قبول است.

به ازای $c=۷$ نتیجه می‌شود:

$$\begin{cases}x(y+2)=48\\x(y-2)=40\end{cases}\Rightarrow\frac{y+2}{y-1}=\frac{6}{5}\Rightarrow y=22,x=2$$

$$\Rightarrow\begin{cases}a+b=22\\a-b=2\end{cases}\Rightarrow a=12,b=10$$

و جواب $(a,b,c,d)=(12,10,7,3)$ به‌دست می‌آید که آن هم قابل قبول است.

به ازای $c=8$ نتیجه می‌شود:

$$\begin{cases}x(y+2)=65\\x(y-2)=53\end{cases}\Rightarrow\frac{y+2}{y-2}=\frac{65}{53}\Rightarrow y=\frac{59}{3}$$

که غیرقابل قبول است، زیرا باید $y\in\mathbb{N}$ به ازای $c=9$ خواهیم داشت:

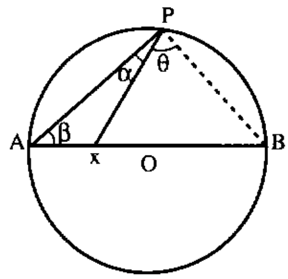
$$\begin{cases}x(y+2)=84\\x(y-2)=68\end{cases}\Rightarrow\frac{y+2}{y-2}=\frac{21}{17}\Rightarrow y=19,\quad x=4$$

$$\Rightarrow\begin{cases}a+b=19\\a-b=4\end{cases}\Rightarrow a=\frac{23}{2},\quad b=\frac{15}{2}$$

که غیرقابل قبول است، زیرا باید $b\in\mathbb{N}$ و a به همین ترتیب، به ازای هیچ مقدار دیگر از c، جواب قابل قبولی به‌دست نمی‌آید و جواب‌ها با یکی از شرایط اصلی مسئله، یعنی طبیعی بودن b,c,d,x,y و a و نیز شرط $a>b>c>d$ تناقض دارد.

پس مسئله تنها دو دسته جواب دارد و بچه‌ها به ترتیب ۱۶ و ۱۵ و ۶ و ۳ سال، یا ۱۲ و ۱۰ و ۷ و ۳ سال دارند.

۲. مطابق شکل $A\hat{P}X=\alpha$ و $P\hat{A}X=\beta$ نام‌گذاری شده‌اند.



مطابق قضیه‌ی سینوس‌ها، در مثلث APX داریم:

$$\frac{AX}{PX}=\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}\qquad(1)$$

هم‌چنین، واضح است که $\hat{\alpha}+\hat{\beta}=90^\circ$ و در نتیجه:

$$\theta=90-\alpha\Rightarrow\cos\alpha=\sin\theta$$

و به کمک قضیه‌ی سینوس‌ها در مثلث PXB داریم:

$$\frac{BX}{PX}=\frac{\sin\theta}{\sin B}=\frac{\cos\alpha}{\sin(90-\beta)}=\frac{\cos\alpha}{\cos\beta}\qquad(2)$$

و از تقسیم رابطه‌ی ۱ بر رابطه‌ی ۲ خواهیم داشت:

$$\frac{\frac{AX}{PX}}{\frac{BX}{PX}}=\frac{\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}}{\frac{\cos\alpha}{\cos\beta}}\Rightarrow\frac{tg\alpha}{tg\beta}=\frac{AX}{BX}=\text{مقدار ثابت}$$

۳. با فرض $x=t+1$ رابطه به صورت زیر ساده‌تر می‌شود:

$$(t+1)y^2-y^2-(t+1)+y=c$$

$$\Rightarrow ty^2-t-1+y=c\Rightarrow t(y-1)(y+1)+(y-1)=c$$

$$\Rightarrow(y-1)(ty+t+1)=c$$

حال با فرض $c=1$ نتیجه می‌شود ($y-1$ و t هر دو نامنفی‌اند):

$$\begin{cases}y-1=1\\ty+t+1=1\end{cases}\Rightarrow y=2,t=0\Rightarrow x=1$$

به این ترتیب، تنها یک جواب برای (x,y) به‌دست می‌آید. با فرض $c=2$، تنها یک جواب قابل قبول $(x,y)=(1,3)$ به‌دست می‌آید.

پس باید c را طوری اختیار کنیم که سه جواب متمایز برای $y-1$ و $ty+t+1$ به‌دست آید و از آن‌جا سه جواب متمایز برای (x,y) پیدا شود. یعنی باید c را طوری انتخاب کرد که حداقل به سه صورت به حاصل‌ضرب دو عامل قابل تبدیل باشد. به ازای $c=4$ داریم:

$$\begin{cases}y-1=1\\ty+t+1=4\end{cases}\text{ یا }\begin{cases}y-1=2\\ty+t+1=2\end{cases}\text{ یا }\begin{cases}y-1=4\\ty+t+1=1\end{cases}$$

که از اولی جواب $(x,y)=(2,2)$ و از سوی جواب $(x,y)=(1,5)$ به‌دست می‌آید، ولی از دومی جواب قابل قبولی به دست نمی‌آید: $(t=\frac{1}{4})$. به ازای $c=6$ داریم:

$$(1)\begin{cases}y-1=6\\ty+t+1=1\end{cases}\text{ یا }(2)\begin{cases}y-1=3\\ty+t+1=2\end{cases}$$

$$(3)\begin{cases}y-1=2\\ty+t+1=3\end{cases}\text{ یا }(4)\begin{cases}y-1=2\\ty+t+1=6\end{cases}\text{ یا}$$

که از جواب $(x,y)=(1,7)$ به‌دست آمده است و از بقیه جواب قابل قبولی به‌دست نمی‌آید. به ازای $c=8$ داریم:

$$(1)\begin{cases}y-1=8\\ty+t+1=1\end{cases}\text{ یا }(2)\begin{cases}y-1=4\\ty+t+1=2\end{cases}$$

$$(3)\begin{cases}y-1=2\\ty+t+1=4\end{cases}\text{ یا }(4)\begin{cases}y-1=1\\ty+t+1=1\end{cases}\text{ یا}$$

که باز هم فقط از دستگاه جواب قابل قبول $(x,y)=(1,9)$ پیدا می‌شود. به ازای $c=9$ نیز تنها یک جواب به‌دست می‌آید. ولی به ازای $c=10$ داریم:

$$(1)\begin{cases}y-1=1\\ ty+t+1=10\end{cases} \text{ یا } (2)\begin{cases}y-1=2\\ ty+t+1=5\end{cases}$$

$$\text{ یا } (3)\begin{cases}y-1=5\\ ty+t+1=2\end{cases} \text{ یا } (4)\begin{cases}y-1=10\\ ty+t+1=1\end{cases}$$

از دستگاه، جواب قابل قبول $(x,y)=(4,2)$، از دستگاه ۲ جواب قابل قبول $(x,y)=(2,3)$ و از دستگاه جواب قابل قبول $(x,y)=(1,11)$ به‌دست می‌آید. ولی از دستگاه ۳ جواب قابل قبولی به‌دست نمی‌آید $(t=\frac{1}{7})$. به این ترتیب نتیجه می‌شود که $c=10$.

۴. بدیهی است، مجموع اعضای S_n مساوی $\frac{n(n+1)}{2}$ است. پس اگر $S_n=A\cup B$، با توجه به شرط مسئله، مجموعه اعضای هر دو مجموعه‌ی A و B باید مساوی $\frac{n(n+1)}{4}$ باشند. پس باید یکی از دو عدد n و $n+1$ مضرب ۴ باشند. یعنی $n=4k$ یا $n=4k-1$ (n و $n+1$ هر دو نمی‌توانند زوج باشند). نشان می‌دهیم به ازای هر دوی این حالت‌ها، همواره می‌توان S_n را به‌صورت اجتماع دو مجموعه‌ی مناسب A و B نوشت. اگر $n=4k$ باشد، در این صورت مجموع اعضای A باید مساوی $\frac{4k(4k+1)}{4}=4k^2+k$ باشد و $S_n=\{1,2,3,\ldots,4K\}$. حال با توجه به اتحاد $1+3+5+\ldots+(2n-1)=n^2$ (که به سادگی به کمک قضیه‌ی استقرای ریاضی ثابت می‌شود)، داریم:

$$1+3+5+\ldots+(4k-1)=(2k^2)=4k^2$$

یعنی مجموع همه‌ی افراد فرد عضو S_n مساوی $4k^2$ است. حال اگر k خود زوج باشد، مجموع اعضای مجموعه‌ی $A=\{1,3,5,\ldots,4k^{-1},k\}$ مساوی $4k^2+k$ است و در نتیجه با فرض $B=S_n-A$، مجموعه اعضای B هم مساوی $4k^2+k$ می‌شود (چرا؟) و A و B زیر مجموعه‌های مطلوب هستند. اما اگر k فرد باشد، یعنی جزو عددهای ۱، ۳، ۵، ...، $4k-1$ باشد، چه باید کرد؟ در این حالت نیز جای نگرانی وجود ندارد و کافی است عدد $k+1$ را که زوج است، وارد A و ۱ را از آن خارج کنیم. یعنی:

$$A=\{3,5,7,\ldots,k,\ldots,4k-1,k+1\}$$

حال مجموع اعضای A، $4k^2+k$ است (چرا؟) و در نتیجه $B=S_n-A$ و A و B به‌دست می‌آیند. در حالت دیگر که $n=4k-1$ باشد، به طریق مشابه، مسئله حل می‌شود. در این حالت، مجموع تمام اعضای $S_n=\{1,2,3,\ldots,4k-1\}$ برابر است با: $\frac{n(n+1)}{2}=2k(4k-1)$ و بنابراین، مجموع اعضای A و B باید مساوی $k(4k-1)$ و یا $4k^2-k$ باشد و می‌توان نوشت: $4k^2-k=(2k-1)^2+3k-1$ و با توجه به تساوی $1+3+5+\ldots+(2n-1)=n^2$، داریم:

$$1+3+5+\ldots+(4k-3)=(2k-1)^2$$

حال اگر $3k-1$ زوج باشد (یعنی k فرد باشد)، کافی است تمام عددهای فرد S_m به غیر از $4k-1$ را به همراه عدد $3k-1$ در یک مجموعه قرار دهیم:

$$A=\{1,3,5,\ldots,4k-3,3k-1\}$$

اکنون روشن است که مجموع اعضای A مساوی $4k^2-k$ است. در نتیجه با فرض $B=S_n-A$، A و B دو زیرمجموعه‌ی مطلوب هستند. اگر هم $3k-1$ فرد باشد (k زوج باشد)، در این صورت کافی است عدد ۱ را از A خارج و عدد زوج $3k$ را جای‌گزین آن کنیم:

در این صورت، با فرض $B=S_n-A$، A و B زیرمجموعه‌های مطلوب هستند (چرا؟)

بنابراین، پاسخ مسئله این است که به ازای $n=4k$ و $n=4k-1$ مسئله همواره جواب دارد. لازم به ذکر است، جواب‌هایی که به این روش پیشنهادی ما به‌دست می‌آیند، تنها جواب‌های ممکن نیستند و ممکن است A و B مناسب، به صورت‌های دیگری هم به‌دست بیایند. برای مثال، برای $S_8=\{1,2,3,\ldots,8\}$ مطابق روش‌ها،

$$A=\{1,3,5,7,2\} \qquad B=\{4,6,8\}$$

ولی جواب دیگری نیز به صورت زیر وجود دارد:

$$A=\{8,7,3\} \qquad B=\{1,2,4,5,6\}$$

آیا جواب دیگری می‌توانید بنویسید؟

۵. به کمک روش بازگشتی می‌نویسیم:

$$7(pq+pr+qr-pqr)\le 2+2pqr$$

هم‌چنین داریم:

$$(1-p)(1-q)(1-r)=1-\underbrace{(p+q+r)}_{1}+(pq+pr+qr)-pqr$$

$$=pq+pr+qr-pqr$$

بنابراین، نامساوی حکم به صورت زیر تغییر می‌یابد:

$$7(1-p)(1-q)(1-r)\le 2+2pqr$$

و با توجه به متساوی $p+q+r=1$:

حال با فرض $p+q=x$ ، $p+r=y$ و $q+r=z$ خواهیم داشت: $x+y+z=2(p+q+r)=2$ و نیز:

$$\begin{cases}p+q=x\\ p+r=y\\ q+r=z\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}q-r=x-y\\ q+r=z\end{cases}\Rightarrow q=\frac{x+z-y}{2}$$

$$\Rightarrow q=\frac{2-y-y}{2}=(1-y)$$

و به همین ترتیب:

$$p=1-z,\ \ r=1-x$$

و از آن‌جا، نابرابری حکم به صورت زیر تغییر می‌یابد:

$$x,y,z\ge 0,\ \ x+y+z=2\Rightarrow$$

$$7xyz\ge 2+2(1-x)(1-y)(1-z)$$

و با ضرب و ساده کردن دو طرف خواهیم داشت:

$$7xyz\le 2+2(1-\underbrace{(x+y+z)}_{2}+(xy+xz+yz)-xyz)$$

$$\Rightarrow 7xyz\le 2(xy+xz+yz)-2xyz$$

$$\Rightarrow 9xyz\le 2(xy+xz+yz)$$

$$\overset{x+y+z=2}{\Rightarrow} 9xyz\le (x+y+z)(xy+xz+yz)$$

$$\Rightarrow 9xyz\le x^2y+x^2z+xyz+xy^2+xyz+y^2z+xyz+xz^2+yz^2$$

$$\Rightarrow x^2y+xy^2+x^2z+xz^2+y^2z+yz^2\ge 6xyz$$

و با تقسیم طرفین بر xyz نتیجه می‌شود:

$$\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)+\left(\frac{y}{z}+\frac{z}{y}\right)+\left(\frac{x}{z}+\frac{z}{x}\right)\ge 6$$

و با توجه به نابرابری‌های درست $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\ge 2$ ، $\frac{y}{z}+\frac{z}{y}\ge 2$ و $\frac{z}{x}+\frac{x}{z}\ge 2$ ، درستی نابرابری بالا واضح است.

۶. با فرض $f(n)=3n^2+n+1$ ، خواهیم داشت:

$$f(1)=5, f(2)=15,\dots, f(8)=201$$

بنابراین، مجموع ارقام $f(8)$ مساوی ۳ است و به نظر می‌رسد که این کمترین مجموع ارقام برای $f(n)$ ها باشد. اما درستی این موضوع را اثبات هم می‌کنیم. اگر مجموع ارقام $f(n)$ بخواهد از این کمتر باشد، باید مساوی ۱ یا ۲ شود. مجموع ارقام $f(n)$ نمی‌تواند مساوی ۱ باشد، زیرا در این صورت باید $f(n)=10^k$ باشد و این نامکن است، زیرا $f(n)$ همواره عددی فرد است (چرا؟). اما مجموع ارقام $f(n)$ مساوی ۲ هم نمی‌تواند باشد، زیرا با توجه به فرد بودن $f(n)$، رقم سمت راست آن نمی‌تواند صفر باشد. پس در صورتی می‌تواند مجموع ارقام آن مساوی ۲ شود که دو رقم ۱ در دو طرف آن و بقیه‌ی رقم‌های بین این دو رقم، مساوی صفر باشد؛

یعنی: $f(n)=1000\dots 1=10^k+1$

و از آن‌جا نتیجه می‌شود $3n^2+n=10^k$ و در نتیجه:

$$n(3n+1)=2^k.5^k$$

اگر n زوج باشد، $3n+1$ فرد است و در نتیجه $n=2^k.5^\alpha$ و $3n+1=5^{k-\alpha}$ و $0\le\alpha\le k$. ولی با این فرض نتیجه می‌شود.

$$3\times 2.5^\alpha+1=5^{k-\alpha}$$

و عبارت سمت راست تساوی بر ۵ بخش‌پذیر است، اما عبارت سمت چپ، در تقسیم بر ۵ باقی‌مانده‌ی ۱ دارد. بنابراین $\alpha=0$ و در نتیجه:

$$3\times 2^k+1=5^k,\ \ n=2^k,\ \ 3n+1=5^k$$

اما به سادگی و مثلاً به کمک قضیه‌ی استقرای ریاضی می‌توان ثابت کرد که همواره $5^k>3\times 2^k+1$ و در نتیجه تساوی بالا هرگز برقرار نمی‌شود. اما اگر n فرد باشد، $3n+1$ زوج است و در نتیجه، به طریق مشابه داریم:

$$3n+1=2^k,\ \ n=5^k\Rightarrow 2^k=3\times 5^k+1$$

و این تساوی نیز هرگز برقرار نمی‌شود (چرا؟)

بنابراین، به ازای هیچ مقدار n ، $3n^2+n$ مساوی توانی از ۱۰ نمی‌شود و لذا مجموع ارقام $f(n)$ ها هرگز مساوی ۲ نخواهد شد. سپس کمترین مقدار مجموع ارقام $f(n)$ ها مساوی ۳ است.

پی‌نوشت

۱. گاردینز. راهنمای المپیاد ریاضی. ترجمه‌ی هوشنگ شرقی. انتشارات مدرسه. چاپ دوم. ۱۳۸۴.

غلامرضا یاسی پور

بی نهایت

بزرگی بی نهایت چه قدر است؟ پاسخ کوتاه به این پرسش این است که ∞ (نماد بی‌نهایت) بسیار بزرگ است. خط مستقیمی را با اعداد بزرگ‌تر و بزرگ‌تر واقع بر امتداد آن، در حالی که تا «بی نهایت» امتداد یافته است تصور کنید. در این مورد، به ازای هر عدد بسیار بزرگی که در نظر گرفته شود، مثلاً، $۱۰^{۱۰۰۰}$، همواره عددی بزرگ‌تر از آن، چون $۱۰^{۱۰۰۰}+۱$ موجود است.

در مفهوم سنتی، بی‌نهایت عددی است که تا ابد ادامه دارد. ریاضیات، بی‌نهایت را همه‌جا به کار می‌برد، اما باید توجه داشت که آن را مانند عددی معمولی در نظر نگیریم، چرا که عددی معمولی نیست.

شمارش

ژرژ کانتور[1] ریاضی‌دان آلمانی، مفهوم کاملاً متفاوتی از بی‌نهایت به دستمان داده است. در این فرانید، وی دست تنها نظریه‌ای آفرید که بیش‌تر ریاضیات مدرن را به جلو رانده است. مفهومی که نظریه‌ی کانتور وابسته به آن است، با مفهوم ابتدایی شمارش سروکار دارد؛ یعنی ساده‌تر از آن‌چه که در زندگی روزمرّه‌مان به کار می‌بریم.

کشاورزی را در نظر می‌گیریم که در مورد شمارش با اعداد چیزی نمی‌داند. پس چگونه خواهد دانست چند گوسفند دارد؟ خیلی ساده، هنگامی که صبح گوسفندان را به چرا می‌برد، می‌تواند عصر با جفت کردن هر گوسفند با سنگی از توده‌ای که از صبح در مدخل طویله موجود است، بگوید آیا همه‌ی گوسفندان برگشته‌اند یا خیر. چه اگر گوسفندی گم شده باشد، سنگی باقی می‌ماند. به این ترتیب، کشاورزمان، حتی بدون استفاده از اعداد، ریاضی‌ورز بوده است. چرا که وی مفهوم تناظر یک به یک[2] را بین گوسفندان و سنگ‌ها به کار برده است. این مفهوم، ابتدایی است، اما پیامدهای شگفت انگیزی دارد.

نظریه‌ی کانتور با مجموعه‌ها[3] سروکار دارد (مجموعه، به طور ساده، کلکسیونی از اشیاست). برای مثال:

$$N = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, \dots\}$$

به معنی مجموعه‌ی اعداد تمام (مثبت) است. هنگامی که مجموعه‌ای داشته باشیم، می‌توانیم درباره‌ی زیرمجموعه‌هایی[4] که داخل مجموعه‌ی بزرگ‌ترند، صحبت کنیم. واضح‌ترین زیر مجموعه‌هایی که با مثال Nمان مرتبط‌اند، زیرمجموعه‌های

$$O = \{1, 3, 5, 7, \dots\} \text{ و } E = \{2, 4, 6, 8, \dots\}$$

هستند که به‌ترتیب، مجموعه‌های اعداد فرد[5] و اعداد زوج[6] را تشکیل می‌دهند. در این جا، اگر این پرسش را مطرح کنیم که «آیا تعداد اعداد فرد با تعداد اعداد زوج برابر است؟» پاسخمان چیست؟ گرچه این کار را نمی‌توان با شمردن اعضایی که در هر مجموعه موجود است، و مقایسه‌ی جواب‌ها انجام داد، پاسخ به‌طور مطمئن «آری» است. اما این اطمینان بر چه مبنایی است؟ شاید بر چیزی شبیه این: «نیمی از اعداد تمام فرد و نیمی زوج هستند.» کانتور با این پاسخ موافق است، اما استدلال متفاوتی به‌دست می‌دهد. وی چنین می‌گوید: هربار که عددی فرد داریم، عدد زوجی در کنارش، به عنوان «جفت»[7] خواهیم داشت. این ایده که هر دو مجموعه‌ی O و E دارای اعضایی با تعداد یکسان‌اند، بر مبنای جفت کردن هر عدد فرد با یک عدد زوج قرار دارد:

O:	۱	۳	۵	۷	۹	۱۱	۱۳	۱۵	۱۷	۱۹	۲۱...
	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕
E:	۲	۴	۶	۸	۱۰	۱۲	۱۴	۱۶	۱۸	۲۰	۲۲...

اما در صورتی که این پرسش دیگر را مطرح کنیم که «آیا تعداد اعداد تمام، برابر تعداد اعداد زوج است؟» پاسخ ممکن

است خیر

باشد، و استدلال این که مجموعه‌ی N، به خودی خود، دوبرابر مجموعه‌ی اعداد زوج عدد دارد.

مفهوم «بیشتر»، زمانی که با مجموعه‌هایی با تعداد اعضای نامعین سروکار داریم، مفهومی مبهم است. اما این کار را می‌توانیم با مفهوم تناظر یک به یک بهتر انجام دهیم. تعجب‌آور است که بین N و مجموعه‌ی اعداد زوج (E)، نیز تناظری یک به یک موجود است:

O:	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱...
	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕
E:	۲	۴	۶	۸	۱۰	۱۲	۱۴	۱۶	۱۸	۲۰	۲۲...

به این ترتیب، به این نتیجه‌ی مبهوت‌کننده می‌رسیم که به «همان تعداد» اعداد تمام، عدد زوج داریم! نتیجه‌ای که با «مفهوم متعارف» اعلام شده توسط یونانیان باستان، در تناقض است؛ چه آغاز کتاب مقدمات[8] **اقلیدس اسکندرانی**[9] بر این است که «کل بزرگ‌تر از جزء است».

اصلیت

تعداد اعضای یک مجموعه، به «اصلیت» یا عدد اصلی آن موسوم است. در حالت مربوط به گوسفندان، عدد اصلی ثبت شده به حساب کشاورز ۴۲ است. اصلیت مجموعه‌ی $\{a,b,c,d,e\}$ برابر ۵ است که آن را به صورت زیر می‌نویسیم:

$\text{card}\{a,b,c,d,e\} = ۵$

به این ترتیب، اصلیت، قدر یا «اندازه‌ی» یک مجموعه است. کانتور در مورد اعداد تمام N، و هر مجموعه‌ی در تناظر یک به یک با N، از نماد -[11] استفاده کرد. بنابراین، به زبان ریاضی می‌توان نوشت

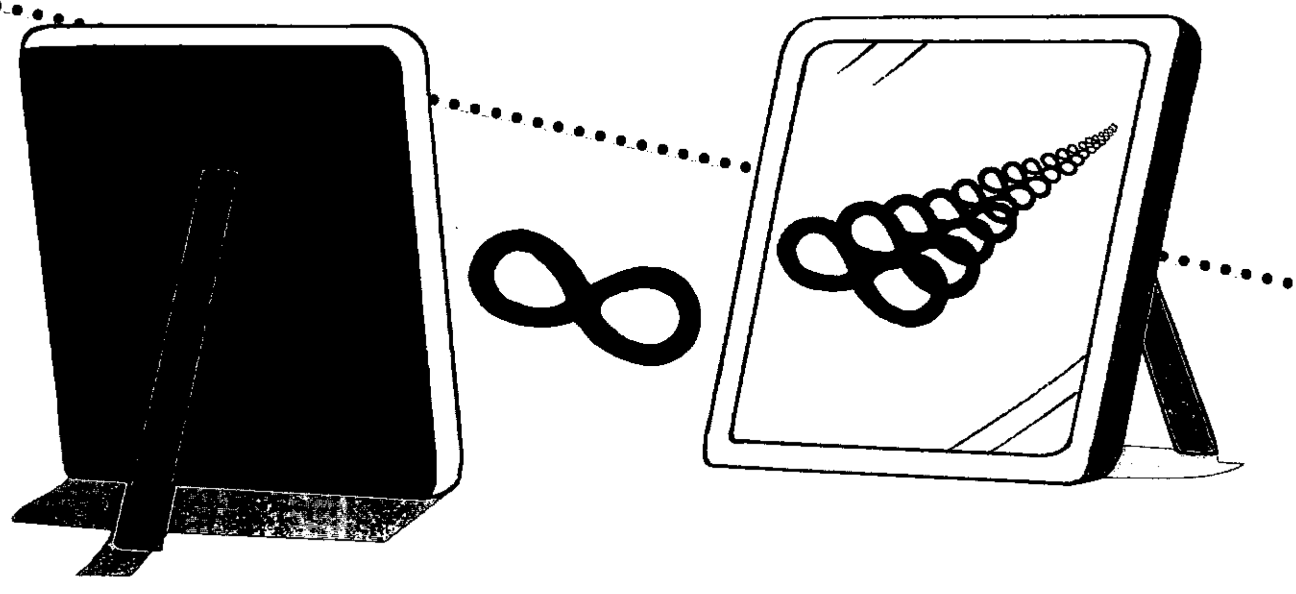
$\text{card}(N)=\text{card}(O)=\text{card}(E)=\aleph_0$

هر مجموعه که بتواند در تناظر یک‌به یک با N قرار گیرد، مجموعه‌ی «بی‌نهایت شمارا» یا «نامتناهی شمارا»[12] نامیده می‌شود. بی‌نهایت ـ شمارا بودن یک مجموعه به این معنی است که می‌توانیم اعضای آن مجموعه را در یک فهرست قراردهیم. برای مثال، فهرست اعداد فرد، به‌طور ساده عبارت است از: ۱, ۳, ۵, ۷, ۹، ... و می‌دانیم کدام عضو اول، کدام دوم، و غیره است.

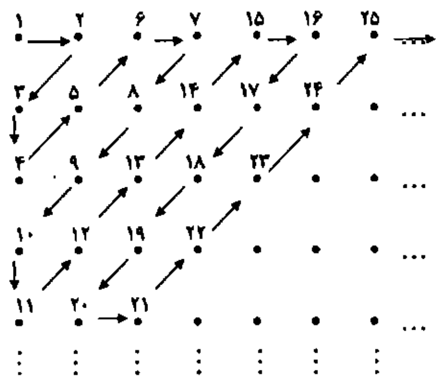
آیا کسرها بی‌نهایت ـ شمارا هستند؟

مجموعه‌ی کسرها یا Q، به این معنی‌که می‌توان N را به عنوان زیر مجموعه‌ای از Q در نظر گرفت، بزرگ‌تر از N است. اما آیا می‌توان جمیع اعضای Q را در یک فهرست نوشت؟ یعنی آیا می‌توانیم فهرستی ارائه کنیم که هر کسر (از جمله کسرهای منفی) جایی در آن داشته باشد؟ به‌نظر می‌رسد این ایده که مجموعه‌ای به این بزرگی را می‌توان در تناظری یک به یک با N قرار داد، غیرممکن باشد. با این همه، این کار را می‌توان انجام داد.

1	-1	2	-2	3	-3	4	...
$\frac{1}{2}$	$\frac{-1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{-3}{2}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{-5}{2}$	$\frac{7}{2}$	...
$\frac{1}{3}$	$\frac{-1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{-2}{3}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{-4}{3}$	$\frac{5}{3}$	...
$\frac{1}{4}$	$\frac{-1}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{-3}{4}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{-5}{4}$	$\frac{7}{4}$	...
$\frac{1}{5}$	$\frac{-1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{-2}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{-3}{5}$	$\frac{4}{5}$	...
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	



طریق آغاز این کار، مجسّم کردن عبارات دو بعدی است. برای شروع، ردیفی از جمیع اعداد تمام، متناوباً مثبت و منفی، می‌نویسیم. سپس در زیر آن، جمیع کسرهایی را می‌نویسیم که مخرجشان ۲ است، اما آن‌هایی را که در سطر بالا ظاهر شده‌اند (مانند $۲ = ۶/۳$) می‌اندازیم. آن‌گاه زیر این سطر، کسرهایی را می‌نویسیم که مخرج ۳ دارند، و بار دیگر، آن‌هایی را که قبلاً ثبت کرده‌ایم، حذف می‌کنیم. کار را به این طریق ادامه می‌دهیم، اما در مورد آن، گرچه هیچ‌گاه پایان نمی‌پذیرد، دقیقاً می‌دانیم که در نمودارمان، هر کسر در کدام مکان ظاهر می‌شود. برای مثال، $۲۰۹/۶۷$ در ردیف ۶۷ام، در حدود ۲۰۰ مکان در سمت راست $۱/۶۷$ قرار دارد.



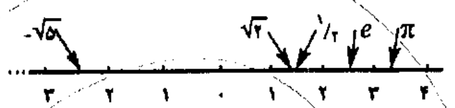
با نمایش جمیع کسرها در این طریق، دست کم بالقوه می‌توانیم فهرستی یک‌بعدی بنا کنیم. در صورتی‌که از سطر بالایی شروع و در هر مرحله به راست حرکت کنیم، هرگز به سطر دوم نمی‌رسیم. اما با انتخاب یک مسیر پرپیچ و خم زیگزاگی، می‌توان به موفقیت رسید. با شروع از ۱، فهرست خطی معهود، به صورت زیر آغاز می‌شود:

$$1,-1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},-\frac{1}{2},2,-2$$

که از پیکان‌ها پیروی می‌کند. هر کسر، مثبت یا منفی، در جایی از این فهرست خطی واقع است و برعکس، موقعیتش «جفتش» را در فهرست دو بعدی کسرها به دست می‌دهد. بنابراین، می‌توان نتیجه گرفت که مجموعه‌ی کسرهای Q بی‌نهایت شماراست و نوشت: $card(Q)=\aleph_0$.

فهرست کردن اعداد حقیقی

در حالی‌که مجموعه‌ی کسرها جوابگوی اعضای بسیاری بر محور عددی حقیقی است، بعضی اعداد حقیقی از قبیل $\sqrt{2}$ و e، π نیز موجودند که کسر نیستند. این اعداد، اعداد گنگ هستند و «رخنه‌ها را پر می‌کنند» تا محور عدد حقیقی R را به دست دهند.



به مجموعه‌ی R، با رخنه‌های پر شده، به‌عنوان «پیوستار»[۱۳] رجوع می‌شود. اما چگونه می‌توانیم فهرستی از اعداد حقیقی تشکیل دهیم؟ کانتور، در حرکتی مملو از زیرکی محض، نشان داد که حتی کوشش در قرار دادن اعداد حقیقی بین ۰ و ۱ در یک فهرست، محکوم به شکست است. این پاسخ، بدون شک به صورت شوکی به اشخاصی وارد شد که به فهرست‌سازی معتاد بودند، چرا که در واقع از این به حیرت می‌افتادند که چگونه نمی‌توان مجموعه‌ای از اعداد را یکی پس از دیگری نوشت.

فرض می‌کنیم که به حرف کانتور اعتقاد نداشته باشید. می‌دانید که هر عدد بین ۰ و ۱ را می‌توان به‌صورت یک دهدهی گسترش یابنده، مثلاً:

$$1/\pi = ۰/۳۱۸۳۰۹۸۸۶۱۸۳۷۹۰۶۷۱۵۳...$$

و

$$1/2 = ۰/۵۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰...$$

بیان کرد، پس
باید به کانتور بگویید: «بفرمایید، این فهرست من از جمیع اعداد بین ۰ و ۱ است»؛ فهرستی که آن را r_1، r_2، r_3، r_4 ... می‌نامیم. چه، در صورتی که نتوانید چنین کنید، حق با کانتور است.

تصور کنید کانتور به فهرستتان نگاه می‌کند و اعداد واقع در قطر مشخص شده را با حرف سیاه علامت می‌زند:

$r_1: 0/\underline{a_1}\, a_2\, a_3\, a_4\, a_5 \ldots$
$r_2: 0/ b_1\, \underline{b_2}\, b_3\, b_4\, b_5 \ldots$
$r_3: 0/ c_1\, c_2\, \underline{c_3}\, c_4\, c_5 \ldots$
$r_4: 0/ d_1\, d_2\, d_3\, \underline{d_4}\, d_5 \ldots$

اما عدد $x = x_1x_2x_3x_4x_5\ldots$ که در آن x_1 متفاوت از a_1، x_2 متفاوت از b_2، x_3 متفاوت از c_3، و به همین گونه در امتداد قطر است کجاست؟ عدد ایکس وی از هر عدد واقع در فهرستتان در یک مکان دهدهی تفاوت دارد و لذا نمی‌تواند در این فهرست باشد. پس حق با کانتور است.

در واقع، هیچ فهرستی در مورد مجموعه‌ی اعداد حقیقی R ممکن نیست و بنابراین R مجموعه‌ی نامتناهی «بزرگ‌تر»ی از مجموعه‌ی نامتناهی کسرهای Q است. یعنی مجموعه‌ای با مرتبه‌ی نامتناهی بالاتر.

بیش‌تر بدانید (چند تاریخچه)



۳۵۰ قبل از میلاد: ارسطو نامتناهی بالفعل را رد می‌کند.

۱۶۳۹ میلادی: ژیرار دزارگ "Girard Desargues" مفهوم نامتناهی را در هندسه معرفی می‌کند.

۱۶۵۵ میلادی: جان والیس "John Wallis" اولین کسی است که نماد (گره‌ی عشق) "love knot" یعنی ∞ را در مورد نامتناهی به کار می‌برد.

۱۸۷۴ میلادی: کانتور با مشخص کردن مرتبه‌های متفاوت نامتناهی، مفهوم نامتناهی را به دقت بررسی می‌کند.

دهه‌ی ۱۹۶۰ میلادی: ابراهیم رابینسون "Abraham Robinson" حسابان غیراستانداردی مبتنی بر مفهوم بی‌نهایت کوچک "infinitesimal" بنا می‌کند.

پی‌نوشت

1. Georg Cantor　2. one to one correspondence　3. sets　4. subsets　5. odd numbers
6. even numbers　7. mate　8. Elements　9. Euclid of Alexandria　10. cardinality
۱۱. (ℵ یا «الف» از الفبای عبری است؛ نماد $\aleph_0$ به صورت «الف صفر» "aleph nought" خوانده می‌شود).
12. countably infinite　13. continuum

رشد و زوال

● میرشهرام صدر

اشاره

کمیت‌هایی که مقدار آن‌ها با گذشت زمان افزایش یا کاهش می‌یابند، از قوانینی پیروی می‌کنند که به قوانین رشد و زوال موسوم هستند.

هر گاه کمیت b نسبت به زمان t، رو به رشد یا زوال برود. یعنی افزایش یا کاهش پیدا کند، معمولاً مدل تغییرات آن از معادله‌ی زیر به دست می‌آید:

$b = a^t$

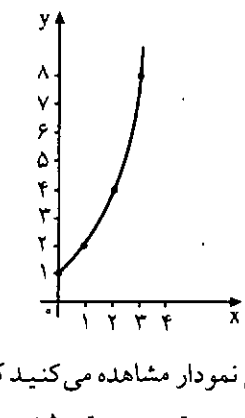
الف) اگر $a > ۱$ باشد، b رشد می‌یابد.

ب) اگر $۰ < a < ۱$ باشد، b به زوال میل می‌کند.

نمودار رشد نمایی

برای مثال، نمودار تابع با ضابطه‌ی $b = ۲^t$ را با استفاده از نقطه‌یابی رسم می‌کنیم:

t	۰	۱	۲	۳	۴
b	۱	۲	۴	۸	۱۶



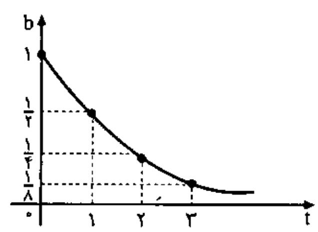
در این نمودار مشاهده می‌کنید که هرچه زمان به جلو می‌رود، b سریع‌تر و سریع‌تر رشد می‌کند. این ویژگی یک تابع نمایی است. این نمودار نشان می‌دهد که حتی اگر یک تابع نمایی در ابتدا آهسته آهسته رشد کند، با گذشت زمان، این رشد سریع و سریع‌تر خواهد شد.

تذکر: روابطی از نوع رابطه‌ی $b = a^t$ که در آن‌ها $a > ۱$؛ شکلی مشابه با این نمودار دارند.

نمودار زوال نمایی

برای مثال؛ نمودار تابع $b = (\frac{۱}{۲})^t$ را با استفاده از نقطه‌یابی رسم می‌کنیم.

t	۰	۱	۲	۳
b	۱	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۴}$	$\frac{۱}{۸}$



در نمودار بالا مشاهده می‌کنید که هرچه زمان به جلو می‌رود، b سریع‌تر و سریع‌تر به سمت صفر یا زوال یا نابودی میل می‌کند. این به دلیل آن است که پایه $(\frac{۱}{۲})$ کوچک‌تر از واحد است، می‌دانیم که عدد کوچک‌تر از واحد، وقتی به توان اعداد طبیعی می‌رسد، مرتب کوچک می‌شود.

تذکر: روابطی از نوع $b = a^t$ که در آن‌ها a کوچک‌تر از ۱ و بزرگ‌تر از ۰ است $(۰ < a < ۱)$ شکلی مشابه با این نمودار دارند.

مثال ۱. یک صفحه کاغذ سفید بردارید و آن را تا بزنید کاغذ تاخورده را تای جدیدی بزنید و این تا زدن‌ها را تا جایی که

می‌توانید ادامه دهید.
چگونگی افزایش تعداد ناحیه‌هایی که بر اثر تا زدن‌های متوالی ایجاد می‌شوند و چگونگی تغییر مساحت‌های آن‌ها را بررسی کنید.

حل: بعد از اولین تا زدن ($n = ۱$)، دو ناحیه به وجود می‌آید که مساحت هر یک نصف مساحت اولیه است. در دومین تا زدن ($n = ۲$) چهار ناحیه ایجاد می‌شود که مساحت هر کدام از آن‌ها نصف مساحت قبلی، یعنی $\frac{۱}{۴}$ مساحت اولیه است. در سومین تا زدن ($n = ۳$)، هشت ناحیه ایجاد می‌شود که مساحت هر کدام از آن‌ها، نصف مساحت قبلی، یعنی $\frac{۱}{۸}$ مساحت اولیه است و همین طور... مطالب بالا را در جدول زیر خلاصه می‌کنیم:

تعداد تازدن‌ها	تعداد ناحیه‌ها	چگونگی تغییر مساحت ناحیه‌ها
۰	$۱ = ۲^۰$	$۱ = (\frac{۱}{۲})^۰$
۱	$۲ = ۲^۱$	$۲ = (\frac{۱}{۲})^۱$
۲	$۴ = ۲^۲$	$۴ = (\frac{۱}{۲})^۲$
۳	$۸ = ۲^۳$	$۸ = (\frac{۱}{۲})^۳$
⋮	⋮	⋮
n	۲^n	۲^n

همان‌طور که در جدول می‌بینید هم‌چنان که تعداد ناحیه‌ها بر اثر تا کردن‌های متوالی بیش‌تر و بیش‌تر می‌شود، مساحت ناحیه‌ها کم‌تر و کم‌تر می‌شود! در واقع تعداد ناحیه‌ها به‌طور نمایی رشد می‌کند و مساحت ناحیه‌ها به‌طور نمایی رو به زوال می‌رود.

تذکر: با بررسی دقیق‌تر جدول بالا، مشاهده می‌کنیم که فاکتور زوال $a = \frac{۱}{۲}$ است که از یک کوچک‌تر است، در حالی که فاکتور رشد $a = ۲$ است که از یک بزرگ‌تر است.

رشد نمایی

هرگاه A_0، برای مثال، هزینه‌ی اولیه یا سرمایه‌ی اولیه یا جمعیت کشور در سال معینی باشد، r آهنگ رشد سالانه‌ی هزینه یا سرمایه یا جمعیت کشور، t تعداد سال‌ها و A_t هزینه‌ی انباشته شده یا سرمایه‌ی انباشته شده و یا جمعیت ایجاد شده بعد از t سال باشد، این مجموع انباشته یا ایجاد شده را با استفاده از فرمول روبه‌رو حساب می‌کنیم: $A_t = A_0(۱+r)^t$

این فرمول (با مقایسه‌ی $b = a^t$)، یک تابع نمایی رشد است که در آن تابع A_t به جای b و $(۱+r)$ به جای a آمده است.

تذکر: $(۱+r)$ فاکتور رشد در یک واحد زمانی و $(۱+r)^t$ فاکتور رشد در دوره‌ی زمانی t است.

مثال۲. جمعیت یک شهر ۳/۲ میلیون نفر است. اگر نرخ رشد جمعیت این شهر ۱/۲ درصد در سال باشد، بعد از ۱۰ سال جمعیت آن چند نفر می‌شود؟

حل:

$$A_0 = ۳/۲ \,,\; r = ۱/۲\% = ۰/۰۱۲ \,,\; t = ۱۰ \,,\; A_{۱۰} = ?$$

$$A_t = A_0(۱+r)^t \Rightarrow A_{۱۰} = ۳/۲(۱+۰/۰۱۲)^{۱۰}$$

$$\Rightarrow A_{۱۰} = ۳/۲(۱/۰۱۲)^{۱۰}$$

$$\Rightarrow A_0 = ۳/۶ \text{ میلیون نفر}$$

مثال۳. فرض کنید که هزینه‌ی تحصیلات عمومی از سال ۱۳۷۰ خورشیدی با آهنگ سالانه‌ی ۱۰ درصد رو به افزایش بوده است. اگر در سال ۱۳۷۰ که میلاد به کلاس اول رفت، هزینه‌ی تحصیل او ۱۸۰۰۰ تومان بوده باشد، این هزینه در سال ۱۳۸۸ (پس از ۱۸ سال)، چه‌قدر شده است؟

حل:

$$r = ۱۰\% = \frac{۱۰}{۱۰۰} = ۰/۱ \,,\; A_0 = ۱۸۰۰۰ \,,\; t = ۱۸ \,,\; A_{۱۸} = ?$$

$$A_t = A_0(۱+r)^t \Rightarrow A_{۱۸} = ۱۸۰۰۰(۱+۰/۱)^{۱۸}$$

$$\Rightarrow A_{۱۸} = ۱۸۰۰۰(۱/۱)^{۱۸}$$

$$\Rightarrow A_{۱۸} = ۱۰۰۰۷۸ \text{ تومان}$$



می‌توانیم به جای آهنگ رشد سالانه، آهنگ رشد ماهانه و حتی آهنگ رشد روزانه را به‌دست آوریم که به واقعیت نزدیک‌تر است. به‌طور کلی، اگر سال را به n قسمت مساوی تقسیم کنیم، یعنی $\frac{۱}{n}$، آن‌گاه فرمول زیر را خواهیم داشت:

$$A_t = A_{\circ}(۱+\frac{r}{n})^{nt}$$

مثال ۴. جمعیت کره‌ی زمین در ۳۵ سال بعد با توجه به جمعیت اولیه‌ی ۵/۲ میلیارد نفری در سال ۱۹۹۰ و قرار دادن زمان بر حسب ماه، چند نفر خواهد شد، در صورتی‌که بدانیم آهنگ رشد جمعیت ۲ درصد در ماه است؟

$$A_{\circ} = ۵/۲\ ,\ t = ۳۵\ ,\ A_{۳۵} = ?\ ,\ n = ۱۲\ ,\ r = ۰/۰۲$$

$$A_t = A_{\circ}(۱+\frac{r}{n})^{nt} \Rightarrow A_{۳۵} = ۵/۲(۱+\frac{۰/۰۲}{۱۲})^{۱۲\times۳۵}$$

$$\Rightarrow A_{۳۵} = ۵/۲\ (۱/۰۰۱)^{۴۲۰}$$

$$\Rightarrow A_{۳۵} = ۱۰/۴۶۵ \text{ میلیارد نفر}$$

مثال ۵. شخصی مبلغ ۱۰۰۰۰ تومان با نرخ سود علی‌الحساب ۴ درصد به حساب سپرده گذاشته است. چه مبلغی (اصل و فرع) پس از ۱۰ سال دریافت می‌کند اگر سود در پایان هر سه ماه پرداخت شود؟

حل:

$$A_{\circ} = ۱۰۰۰۰\ ,\ r = ۰/۰۴\ ,\ t = ۱۰\ ,\ n = ۴\ ,\ A_{۱۰} = ?$$

$$A_t = A_{\circ}(۱+\frac{r}{n})^{nt} \Rightarrow A_{۱۰} = ۱۰۰۰۰(۱+\frac{۰/۰۴}{۴})^{۴\times۱۰}$$

$$\Rightarrow A_{۱۰} = ۱۰۰۰۰(۱/۰۱)^{۴۰}$$

$$\Rightarrow A_{۱۰} = ۱۴۸۸۸/۶۳ \text{ تومان}$$

تمرین ۱. جمعیت شهری در دو سال آینده با توجه به جمعیت اولیه‌ی ۱۰۰۰۰۰ نفری آن، و قرار دادن زمان بر حسب روز چند نفر خواهد شد، در صورتی‌که بدانیم آهنگ رشد جمعیت ۰/۱ درصد در روز است؟

جواب: ۱۰۰۱۴۴ نفر

تمرین ۲. اگر با نرخ ۱۲ درصد، آخر هر ماه سود علی‌الحساب بر سرمایه اضافه شود، پس از پنج سال سرمایه‌ی فعلی در چه عددی ضرب می‌شود؟

جواب: سرمایه‌ی فعلی باید در $(۱/۰۱)^{۶۰}$ ضرب شود.

زوال نمایی

در شیمی، به مدت زمانی که طول می‌کشد تا مقداری از یک ماده‌ی رادیواکتیو به نصف برسد، نیمه عمر گفته می‌شود. برای مثال نیمه عمر نوعی ایزوتوپ در حدود پنج دقیقه است. پس از گذشت نیم ساعت، چه کسری از ماده‌ی اولیه باقی مانده است؟

حل: ۳۰ دقیقه شامل ۶ دوره‌ی زمانی ۵ دقیقه‌ای است.

$$۱ \xrightarrow{۵'} \frac{۱}{۲} \xrightarrow{۵'} \frac{۱}{۴} \xrightarrow{۵'} \frac{۱}{۸} \xrightarrow{۵'} \frac{۱}{۱۶} \xrightarrow{۵'} \frac{۱}{۳۲} \xrightarrow{۵'} \frac{۱}{۶۴}$$

بنابراین، پس از نیم ساعت، $\frac{۱}{۶۴}$ از ماده‌ی اولیه باقی مانده است.

مثال ۶. نیمه عمر ماده‌ی رادیواکتیوی ۶ ساعت است. اگر ۱۹۲ گرم از این ماده موجود باشد، بعد از گذشت یک شبانه‌روز (۲۴ ساعت) چه مقدار از این ماده باقی خواهد ماند؟

$$۱۹۲gr \xrightarrow{\text{۶ ساعت}} ۹۶gr \xrightarrow{\text{۶ ساعت}} ۴۸gr \xrightarrow{\text{۶ ساعت}} ۲۴gr \xrightarrow{\text{۶ ساعت}} ۱۲gr$$

بنابراین، پس از یک شبانه‌روز، ۱۲ گرم از ماده‌ی اولیه باقی مانده است.

معادله‌ی کلی زوال نمایی به‌صورت $A = A_{\circ}(۱-r)^t$ است که در آن A بیانگر مقدار نهایی، $A_{\circ}$ بیانگر مقدار اولیه، r بیانگر میزان نزول (زوال) بر حسب اعشار و t بیانگر زمان است.

مثال ۷: نیمه عمر ماده‌ی رادیواکتیوی ۴ ساعت است. اگر ۱۱۵۲ گرم از این ماده موجود باشد، بعد از گذشت یک شبانه‌روز، چند گرم از ماده‌ی اولیه تجزیه نشده باقی مانده است؟

حل:

$$T = \text{یک دوره‌ی زمانی ثابت} \times t \Rightarrow ۲۴ = ۴ \times t \Rightarrow t = ۶$$

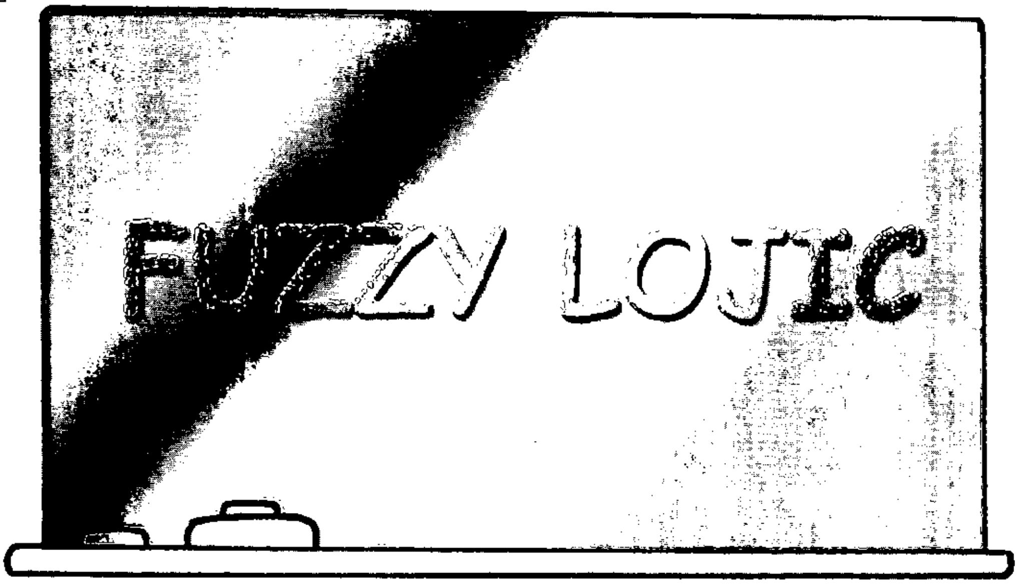
$$A = A_{\circ}(۱-r)^t\ ;\ A_{\circ} = ۱۱۲۵\ ,\ r = \frac{۱}{۲} \text{ نیمه عمر}$$

$$A = ۱۱۵۲(۱-\frac{۱}{۲})^۶ = ۱۱۵۲ \times \frac{۱}{۶۴} = ۱۸ \text{ گرم}$$

بعد از گذشت یک شبانه‌روز، ۱۸ گرم از ماده‌ی رادیواکتیو باقی خواهد ماند.

● دکتر محمدعلی فریبرزی عراقی
عضو هیئت علمی دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکزی

۸



نظریه‌ی مجموعه‌های فازی

اشاره

در بخش‌های قبل، خوانندگان محترم با مفاهیم اولیه در مجموعه‌های فازی آشنا شدند. هدف از ارائه‌ی این مجموعه از مقالات، معرفی تاریخچه، اصول تعاریف پایه‌ای در تئوری مجموعه‌های فازی برای آشنایی دانش‌آموزان و معلمان گرامی بود. هر یک از خوانندگان عزیز می‌توانند با مطالعه‌ی مراجعی که در پایان بخش معرفی شده بودند، اطلاعات کامل‌تری را در خصوص مطالب مطرح شده از مجموعه‌های فازی دریافت کنند. هم‌چنین، با استفاده از شبکه‌ی اینترنت و جست‌وجو در سایت‌های مربوط به معرفی مفاهیم فازی، می‌توان تاریخچه و کاربردهای مجموعه‌ها و منطق فازی را در علوم گوناگون ملاحظه کرد. در حال حاضر، مجلات علمی متعدی در جهان وجود دارند که مقالات علمی مربوط به شاخه‌های گوناگون علم فازی را چاپ می‌کنند و آخرین تحقیقات و دستاوردهای دانشمندان و محققان را در خصوص پیشرفت‌های این شاخه‌ی علمی جدید به چاپ می‌رسانند. از جمله مجلات معتبر خارجی که می‌توان در زمینه ی مجموعه‌ها و سیستم‌های فازی معرفی کرد، ژورنال Fuzzy Sets and System است. در کشور ما نیز مجله ی سیستم‌های فازی ایران، با عنوان «Iranian Journal of fuzzy System» زیر نظر انجمن سیستم‌های فازی ایران به چاپ می‌رسد که از جمله مجلات داخلی معتبر در خصوص معرفی مقالات فازی است. سالانه در ایران و سایر کشورهای جهان، همایش‌هایی با عنوان سیستم‌های فازی برگزار می‌شود که محققان علم فازی در شاخه‌های کاری خود، با حضور در این کنفرانس‌های بین‌المللی، کارهای تحقیقاتی خود را معرفی می‌کنند. به امید آن که این چند قسمت از معرفی مجموعه‌های فازی توانسته باشد مورد استفاده ی خوانندگان محترم قرار گیرد و انگیزه‌ای برای مطالعه ی بیشتر را برای علاقه‌مندان فراهم کرده‌باشد، در این قسمت که آخرین مقاله در خصوص آشنایی با مجموعه‌های فازی است، به مفاهیم منطق فازی اشاره‌ی مختصری می‌کنیم.

مقدمه

منطق فازی توسعه‌ای از منطق دودویی (منطق بولی) است. در منطق کلاسیک، تنها دو ارزش مورد نظر هستند. در این منطق، ارزش هر گزاره، یا درست یا نادرست است، در حالی که در منطق فازی، هر گزاره ارزش‌های متعددی دارد. به همین دلیل، به آن منطق چند ارزشی هم می‌گویند. در منطق کلاسیک، ارزش درستی یا نادرستی هر گزاره، به ترتیب با T و F نمایش داده می‌شود. به عبارت دیگر، در منطق قطعی،

مقدار درستی هر گزاره با ۰ یا ۱ بیان می‌شود. ولی در منطق فازی، مقدار درستی یک گزاره دربازه‌ی [۱ و ۰] است و به عبارت دیگر، متغیرهای منطق فازی درجه‌ای از صحت بین ۰ و ۱ دارند و تنها به دو مقدار ۰ و ۱ منحصر نیستند. این امر باعث می‌شود که بتوانیم، به جای یک استدلال قطعی، یک استدلال تقریبی را مطرح کنیم. منطق فازی به عنوان نتیجه‌ای از مجموعه‌های فازی، توسط پروفسور لطفی‌زاده مطرح شد و تاکنون کاربردهای بسیار زیادی را در رشته‌های گوناگون علمی ایجاد کرده است.

گاهی در محاوره‌های روزمره، از الفاظی استفاده می‌کنیم که برای توصیف یک تغییر به‌کار می‌رود. مثلاً: دمای هوای امروز بالاست، سرعت وسیله‌ی نقلیه کند است و معلم درس ریاضی جوان است. به این نوع جملات، گزاره‌های فازی[1] می‌گوییم. همان‌طور که ملاحظه می‌کنیم، نمی‌توان به این جملات، به یقین یکی از ارزش‌های درستی یا نادرستی را نسبت داد. صورت کلی هر گزاره‌ی فازی ساده عبارت است از: A ، x

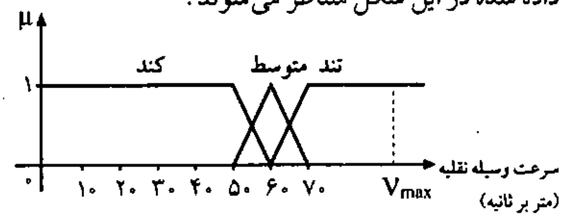
در این حالت، x یک متغیر زبانی[2] و A مقدار زبانی برای متغیر x است. در واقع A مجموعه‌ای فازی است که در دامنه‌ی تعریف x معرفی می‌شود.

در مثال دمای هوای امروز بالاست، «دمای هوای امروز»، متغیر این گزاره‌ی فازی و «بالا» مقدار این متغیر است. این متغیر می‌تواند مقادیری نظیر $20^\circ C$ یا $15^\circ C$ را اختیار کند. وقتی یک متغیر، اعداد را به عنوان مقدار می‌پذیرد؛ آن‌را متغیر عددی می‌گوییم و براساس قوانین ریاضی آن‌را بررسی می‌کنیم. ولی وقتی یک متغیر الفاظ یا واژه‌ها را به‌عنوان مقدار می‌گیرد، به آن یک متغیر زبانی یا بیانی می‌گوییم. هر متغیر زبانی با چهار پارامتر به‌صورت کلی (X, T, U, M) معرفی می‌شود. این پارامترها عبارت‌اند از:

x نام متغیر زبانی است. T مجموعه مقادیر زبانی است که x اختیار می‌کند. U دامنه‌ی تعریف قطعی است که در آن متغیر زبانی x مقادیر عددی خود را اختیار می‌کند. M قاعده‌ای است که هر مقدار زبانی در مجموعه‌ی T را به یک مجموعه‌ی فازی در U نظیر می‌کند.

برای مثال، سرعت یک وسیله‌ی نقلیه، متغیری نظیر x است که مقادیری دربازه‌ی $[0, v_{max}]$ را اختیار می‌کند. حال سه مجموعه‌ی فازی کند، متوسط و تند را درنظر می‌گیریم که در این محدوده باشند. اگر x یک متغیر زبانی باشد، x یکی از واژه‌های کند، متوسط یا تند را به عنوان مقدار می‌پذیرد. مثلاً می‌گوییم x تند است. در این حالت، نام متغیر زبانی x همان سرعت وسیله‌ی نقلیه است و $U=[0, v_{max}]$. (v_{max} حداکثر سرعت این وسیله است).

هم‌چنین {تند و متوسط و کند} = T. در شکل ۱، مقادیر کند، متوسط و تند توسط قاعده‌ی M به توابع عضویت نمایش داده شده در این شکل متناظر می‌شوند.



شکل ۱

ملاحظه می‌کنیم، واژه‌ی فازی متوسط، با تابع عضویت زیر معرفی شده است که بیانگر یک عدد فازی مثلثی است.

$$\mu_{\text{متوسط}}(x)=\begin{cases}\dfrac{x-50}{10} & 50\le x\le 60\\[2mm] \dfrac{70-x}{10} & 60\le x\le 70\\[2mm] 0 & 70<x\le v_{max}\ ,\ 0\le x<50\end{cases}$$

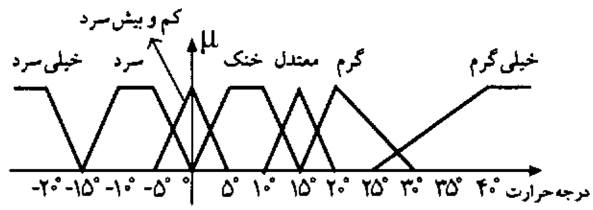
هم‌چنین، تابع عضویت متناظر واژه‌ی فازی کند به‌صورت زیر درنظر گرفته شده است:

$$\mu_{\text{کند}}(x)=\begin{cases}1 & 0\le x<50\\[2mm] \dfrac{60-x}{10} & 50\le x\le 60\\[2mm] 0 & 60<x\le v_{max}\end{cases}$$

متغیرهای زبانی در علوم نقش و اهمیت زیادی دارند، چرا که این متغیرها برای اندازه‌گیری بسیاری از مفاهیم که با ابهام توأم هستند، به کار می‌روند. اجزای هر متغیر زبانی، ترکیبی از یک اصطلاح پایه[3]، شامل یک مجموعه‌ی فازی نظیر تند، یک مکمل‌کننده چون «نه»، یک رابط نظیر «یا» یا «و» و در نهایت قیود[4] نظیر «کمی»، «خیلی»، «کم وبیش» و امثال آن است. برای مثال، نمونه‌هایی از متغیرهای زبانی در مورد درجه حرارت هوا عبارت‌اند از: خیلی سرد، سرد، تقریباً سرد، کم

و بیش سرد، نسبتاً گرم، کمی گرم، گرم، بسیار گرم، به شدت گرم، داغ، خیلی داغ، نه خیلی گرم.

شکل ۲، نمونه‌ای از این متغیرهای زبانی را نمایش می‌دهد که توسط قاعده‌ی M به یک مجموعه‌ی فازی نسبت داده شده‌اند.



شکل ۲

ملاحظه می‌کنیم که در این حالت، برای معرفی متغیرها از اعداد فازی مثلثی و ذوزنقه‌ای استفاده شده است. مثلاً تابع عضویت متغیر زبانی «خنک» به صورت زیر تعریف شده است:

$$\mu_{\text{خنک}}(x) = \begin{cases} \frac{x}{5} & 0 < x < 5^\circ \\ 1 & 5^\circ \leq x \leq 10^\circ \\ \frac{15 - x}{5} & 10^\circ < x \leq 15^\circ \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

که این یک عدد فازی ذوزنقه‌ای است.

هر گزاره‌ی فازی مرکب، ترکیبی از یک گزاره‌ی فازی ساده با رابط‌های گزاره‌ای «و»، «یا» و «نه» است که به ترتیب بیانگر اعمال اشتراک، اجتماع و مکمل (متمم) فازی هستند. سه گزاره‌ی فازی زیر را که در آن‌ها، A، B و C مجموعه‌هایی فازی هستند، درنظر می‌گیریم:

x، A است، x، B است، x، C است.

در این صورت، گزاره‌های مرکب زیر را به عنوان نمونه می‌توان از روی آن‌ها ساخت:

x، A یا B است. x، نه A یا نه B است.

(x، A و C است) یا x، B است.

هر گزاره‌ی فازی مرکب می‌تواند به صورت شرطی اگر p آن‌گاه q نیز بیان شود که در آن p و q گزاره‌های فازی مفروض هستند. مثلاً اگر سرعت اتومبیل بالا باشد، آن‌گاه مقاومت بالاست. اگر دمای هوا سرد باشد، آن‌گاه طول میله کم می‌شود. اگر دما خیلی بالاست، آن‌گاه پنکه را سریع کن.

در حال حاضر منطق فازی، در طراحی و برنامه‌ریزی سیستم‌های تهویه‌ی مطبوع، ترمز ضد قفل ABS، مونوریل، دوربین عکاسی، ماشین لباس‌شویی، ماکروویو، چراغ‌های راهنمایی هوشمند کنترل ترافیک، آسانسور، شبکه‌های عصبی[5]، هوش مصنوعی[6]، رباتیک، الگوریتم‌های ژنتیک، کنترل سرعت قطار، بالگردهای نظامی و . . . کاربرد دارد.

برای مثال، سیستم ترمز خودکار ABS، بر سیستم ترمز وسیله‌ی نقلیه نظارت دارد چه‌طوری که قبل از قفل شدن چرخ‌ها در سرعت‌های بالا، به رهاکردن ترمز چرخ‌ها می‌کند. یک کامپیوتر این وظیفه را بر عهده دارد که بهترین زمان انجام این کار را مشخص کند. در این حالت، دو عامل مورد توجه است: یکی توجه به سرعت وسیله‌ی نقلیه، زمانی که ترمزها استفاده می‌شوند و دیگری توجه به این عامل که چه‌قدر ترمزها سریع فشار داده می‌شوند. به‌ویژه، زمانی این سیستم باید عمل کند که راننده با سرعت رانندگی می‌کند و به سرعت ترمزها را می‌فشارد. در این لحظه، سیستم ترمز ABS باید آن‌قدر هشیار باشد که اجازه ندهد چرخ‌ها قفل شوند. هم‌چنین، پلوپزی که براساس منطق فازی کار می‌کند، دارای تراشه‌ای رایانه‌ای است که توانایی کنترل زمان پخت و دما را دارد. در این حالت، اطمینان خواهیم داشت که برنج به‌طور مناسب پخته می‌شود. عملکرد این منطق براساس هر گزاره‌ی فازی، به صورت شرطی اگر آن‌گاه است. مثلاً اگر برنج خیلی داغ شود و افزایش حرارت نسبتاً به سرعت ادامه یابد، آن‌گاه المنت حرارتی خاموش شود. حتی مغز انسان نیز دارای عملکردی براساس منطق فازی است و بر همین اساس، در مبحث شبکه‌های عصبی، از این منطق استفاده می‌شود. علاقه‌مندان می‌توانند برای کسب اطلاعات بیشتر، به مراجع زیر مراجعه کنند.



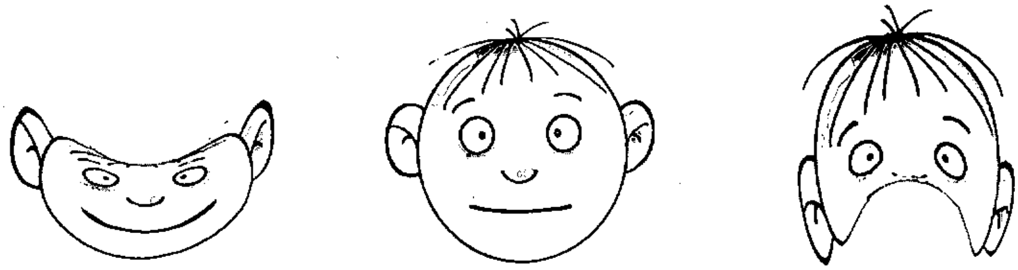
۱. لی‌وانگ. سیستم‌های فازی و کنترل فازی. ترجمه‌ی محمد تشنه‌لب و دیگران. دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی. ۱۳۷۸.

۲. منهاج، محمدباقر. محاسبات فازی. انتشارات دانش‌نگار. ۱۳۸۶.

پی‌نوشت

1. Fuzzy Proposition 2. Linguistic variable
3. Primary term 4. Hedges
5. Artificial inteligent 6. Neural networks

● صدیقه بابایی
کارشناس ارشد ریاضی محض



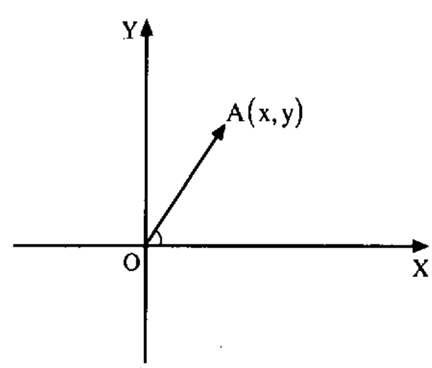
سرآغاز

در این مقاله، علاوه بر معرفی مختصاتی جدید با عنوان «مختصات زاویه‌ای برای نقاط دکارتی» که به صورت زوج مرتب نمایش داده می‌شوند، در ابتدا برای هر زوج مرتب، برحسب طول بردار تولید شده و زاویه‌ای که با جهت مثبت محور طول‌ها می‌سازد، مختصات زاویه‌ای معرفی شده است. سپس ارتباط بین مختصات قطبی و دکارتی آمده است. در ادامه، از ویژگی‌های اساسی مختصات قطبی، به خصوص داشتن نمایش‌های متفاوت برای یک نقطه، سخن به میان آمده است.

مختصات قطبی و رسم نمودارها

مختصات زاویه‌ای یا قطبی

هر نقطه در فضای دکارتی را با دو مؤلفه‌ی x به عنوان طول و y به عنوان عرض معرفی می‌کنیم. هر زوج مرتب (x,y) در دستگاه مختصات دکارتی، برداری با ابتدای O (مبدأ دستگاه دکارتی) تولید می‌کند.

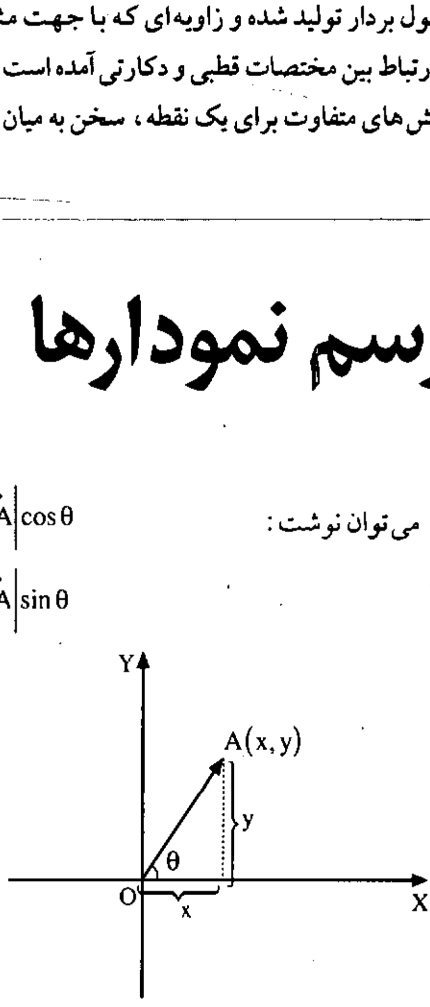


بردار $\vec{OA} \rightarrow$ زوج مرتب (x,y)

اگر زاویه‌ای را که بردار $\vec{OA}$ با جهت مثبت محور طول‌ها و درخلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت می‌سازد θ در نظر بگیریم، می‌توان نوشت:

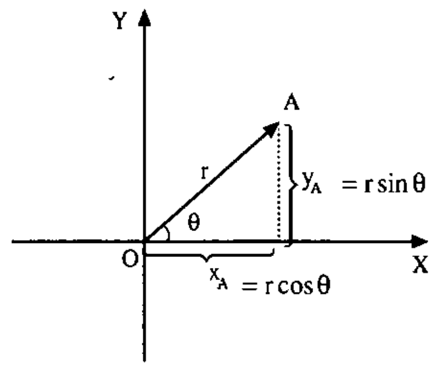
$$x = \left|\vec{OA}\right| \cos\theta$$

$$y = \left|\vec{OA}\right| \sin\theta$$



که در آن $\left|\vec{OA}\right|$ اندازه‌ی بردار $\vec{OA}$ است. با فرض $r = \left|\vec{OA}\right|$ داریم: $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$. به راحتی می‌توان نشان داد که $\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \operatorname{Arc}\tan\dfrac{y}{x} \end{cases}$. بنابراین می‌توان به زوج مرتب (x,y) زوج

مرتب جدید (r,θ) را نسبت داد که در آن r طول برداری است که زوج مرتب با ابتدای مبدأ مختصات ایجاد کرده و θ زاویه‌ای است که این بردار با جهت مثبت محور طول‌ها و خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت می‌سازد.



$$\begin{cases} (x,y) \xrightarrow[\theta = \text{Arc}\tan\frac{y}{x}]{r=\sqrt{x^2+y^2}} (r,\theta) \\ (r,\theta) \xrightarrow[y = r\sin\theta]{x = r\cos\theta} (x,y) \end{cases}$$

تعریف: برای هر زوج مرتب (x,y) در دستگاه دکارتی با فرض $\begin{cases} r=\sqrt{x^2+y^2} \\ \theta = \text{Arc}\tan\frac{y}{x} \end{cases}$ زوج مرتب (r,θ) را «مختصات زاویه‌ای» یا قطبی زوج مرتب (x,y) می‌نامیم.

از آن‌چه بیان شد نتیجه می‌گیریم، هر مختصات دکارتی یک مختصات قطبی دارد و برعکس، مختصات قطبی هر نقطه نیز یک مختصات دکارتی دارد.

مثال ۱. فرم قطبی زوج مرتب $(3,-3)$ را بنویسید.

حل:

$$\left.\begin{array}{l} r=\sqrt{3^2+(-3)^2}=3\sqrt{2} \\ \theta = \text{Arc}\tan\frac{-3}{3} = 2\pi - \frac{\pi}{4} \end{array}\right\} \Rightarrow (3\sqrt{2}, 2\pi - \frac{\pi}{4})$$

بنابراین، فرم قطبی $(3,-3)$ با $(3\sqrt{2}, 2\pi - \frac{\pi}{4})$ برابر است.[1]

مثال ۲. فرم دکارتی $(\sqrt{2}, \frac{4\pi}{3})$ را محاسبه کنید.

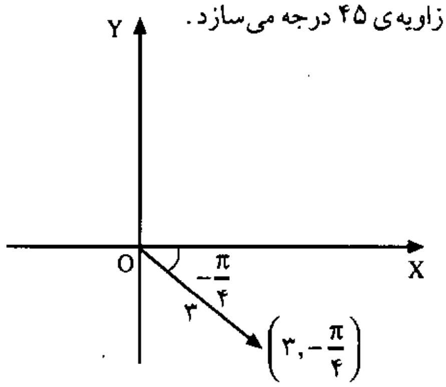
حل:

$$\left.\begin{array}{l} x=\sqrt{2}\cos(\pi+\frac{\pi}{3}) = \frac{-\sqrt{2}}{2} \\ y=\sqrt{2}\sin(\pi+\frac{\pi}{3}) = \frac{-\sqrt{6}}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow (\frac{-\sqrt{2}}{2}, \frac{-\sqrt{6}}{2})$$

همان‌طور که قبلاً ذکر شد، θ زاویه‌ای است که در جهت مثبت محور طول‌ها و خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت در نظر گرفته می‌شود. θ می‌تواند منفی هم باشد. علامت منفی θ نشان دهنده‌ی آن است که زاویه‌ی در نظر گرفته شده، در جهت حرکت عقربه‌های ساعت تولید شده است. برای مثال،

هر مختصات دکارتی یک مختصات قطبی دارد و برعکس، مختصات قطبی هر نقطه نیز یک مختصات دکارتی دارد

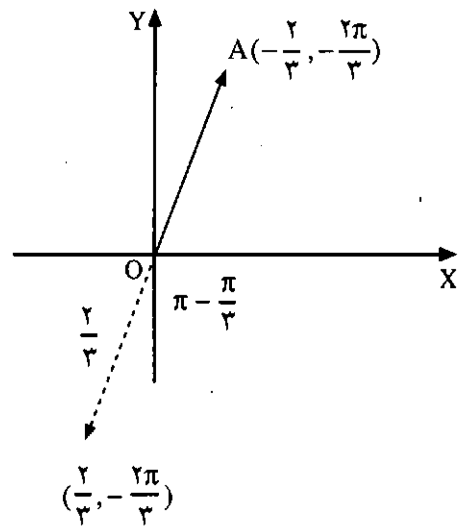
نقطه‌ی قطبی $(3,-\frac{\pi}{4})$ نشان می‌دهد که نقطه‌ای در ربع چهارم دستگاه دکارتی، برداری به طول ۳ تولید می‌کند که با محور طول‌ها زاویه‌ی ۴۵ درجه می‌سازد.



از آن‌جا که $r=\sqrt{x^2+y^2}$ مشخص کننده‌ی طول بردار است، همواره مقداری مثبت است. اما می‌تواند علامت منفی نیز داشته باشد. $-r$ نشان دهنده‌ی برداری است با طول r ولی خلاف جهت بردار اصلی. در حقیقت، نقطه‌ی $(-r,\theta)$ را به این صورت ترسیم می‌کنیم. ابتدا نقطه‌ی (r,θ) را مشخص و سپس برداری هم‌اندازه و قرینه‌ی بردار (r,θ) رسم می‌کنیم تا نقطه‌ی $(-r,\theta)$ ایجاد شود. برای مثال، نقطه‌ی $(-2,\frac{\pi}{5})$ را در نظر بگیرید. ابتدا $(2,\frac{\pi}{5})$ را در دستگاه رسم می‌کنیم و سپس قرینه‌ی بردار تولید شده را رسم می‌کنیم.

مثال ۳. الف) نقطه‌ی $(-\frac{۳}{۲},-\frac{۲\pi}{۳})$ را دستگاه دکارتی نشان دهید.

حل:



ب) فرم دکارتی نقطه را بنویسید.

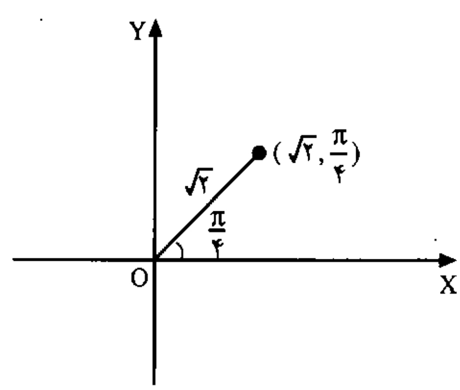
حل:

$$x = r\cos\theta = (-\frac{۳}{۲})\cos(-(\pi-\frac{\pi}{۳})) = \frac{۳\sqrt{۳}}{۴}$$

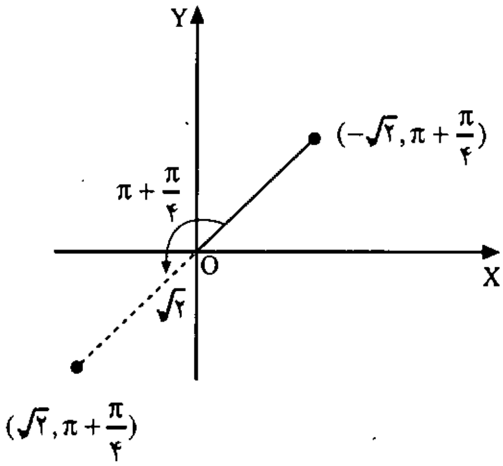
$$y = r\sin\theta = (-\frac{۳}{۲})\sin(-(\pi-\frac{\pi}{۳})) = \frac{۳}{۴}$$

صورت‌های مختلف فرم قطبی یک نقطه

نقاط در دستگاه مختصات دکارتی نمایش منحصر به فرد (x,y) را دارند. مؤلفه‌ی اول مقدار طول و مؤلفه‌ی دوم مقدار عرض نقاط را مشخص می‌کند. با تغییر مقدار یا علامت x,y نقطه‌ی جدیدی تولید می‌شود که با نقطه‌ی اولیه تفاوت دارد. اما به دلیل آن‌که r,θ می‌توانند علامت منفی داشته باشند و این علامت منفی جایگاه نقاط را تغییر می‌دهد، برای فرم قطبی نقاط، نمایش منحصر به فرد نداریم. برای مثال، نقطه‌ی $(\sqrt{۲},\frac{\pi}{۴})$ را در نظر بگیرید:



حال نقطه‌ی $(-\sqrt{۲},\pi+\frac{\pi}{۴})$ را در دستگاه دکارتی رسم کنید.



به روشنی آشکار است، نقطه‌ی $(-\sqrt{۲},\pi+\frac{\pi}{۴})$ همان جایگاه $(\sqrt{۲},\frac{\pi}{۴})$ را در دستگاه دارد. اما هر کدام به صورتی کاملاً متفاوت نمایش داده می‌شود. اگر نقاط $(\sqrt{۲},۲\pi+\frac{\pi}{۴})$، $(-\sqrt{۲},-\frac{۳\pi}{۴})$ و $(\sqrt{۲},-\frac{۷\pi}{۴})$ را نیز ترسیم کنید، همگی جایگاه $(\sqrt{۲},\frac{\pi}{۴})$ را خواهند داشت.

یک نقطه و پنج حالت متفاوت نمایش، ویژگی جالب فرم قطبی یک نقطه است. شما می‌توانید باز هم برای $(\sqrt{۲},\frac{\pi}{۴})$ فرم قطبی با r,θ های دیگری ارائه دهید. به‌طور کلی، برای نقطه‌ی $p(r,\theta)$ نمایش‌های کلی $p(r,۲k\pi+\theta)$، $p(r,-۲k\pi-\theta)$، $p(-r,-(۲k+۱)\pi+\theta)$ و $p(-r,(۲k+۱)\pi+\theta)$ وجود دارد.

مثال ۴. نمودار قطبی $r^۲\cos ۲\theta = ۱$ را رسم کنید.

حل: چون طرف اول عبارت مثبت است، باید $\cos ۲\theta \geq ۰$. بنابراین $۲\theta \in \left[-\frac{\pi}{۲},\frac{\pi}{۲}\right]$ و لذا $\theta \in \left[-\frac{\pi}{۴},\frac{\pi}{۴}\right]$. هم‌چنین $r^۲ = \frac{۱}{\cos ۲\theta}$ و این کسر برای تعریف شدن باید مخرجی مخالف صفر داشته باشد. در یک دوره‌ی تناوب، ریشه‌های مخرج $\theta = \frac{\pi}{۴},\frac{۳\pi}{۴},\frac{۵\pi}{۴},\frac{۷\pi}{۴}$ هستند. از توضیحات بالا نتیجه می‌شود که $\theta \in (-\frac{\pi}{۴},\frac{\pi}{۴})$.

تقارن نسبت به محور طول‌ها :

$(r,\theta) \to (r,-\theta)$

$r^{۲} = \frac{۱}{\cos ۲(-\theta)} = \frac{۱}{\cos ۲\theta}$ معادله تغییر نکرده است

نمودار نسبت به محور طول‌ها متقارن است، بنابراین $\theta \in [۰,\pi]$.

تقارن نسبت به محور عرض‌ها :

$(r,\theta) \to (-r,-\theta)$

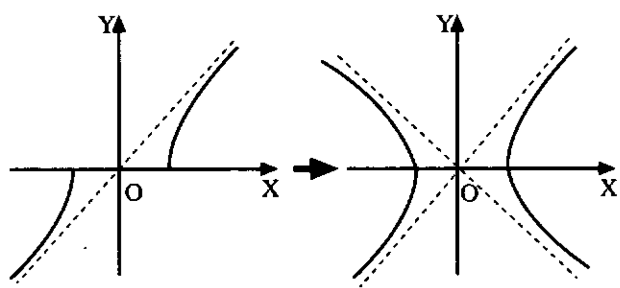
$(-r^{۲}) = \frac{۱}{\cos ۲(-\theta)} \Rightarrow r^{۲} = \frac{۱}{\cos ۲\theta}$ معادله تغییر نکرده است

نمودار نسبت به محور عرض‌ها متقارن است و این موجب می‌شود که $\theta \in \left[-\frac{\pi}{۲},\frac{\pi}{۲}\right]$.

با اشتراک گرفتن بین شرایط موجود، برای θ خواهیم داشت $\theta \in [۰,\frac{\pi}{۴})$. از طرف دیگر، به راحتی می‌توان نشان داد

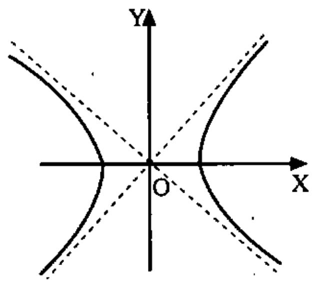
$$\lim_{\theta \to \frac{\pi}{۴}^-} \frac{۱}{\cos ۲\theta} = +\infty .$$

θ	۰	$\frac{\pi}{۶}$	$\frac{\pi}{۴}$
r	±۱	±۱.۱	+∞



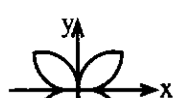
● آیا همیشه استفاده از مختصات قطبی ترسیم را آسان می‌کند؟

باید دقت کرد، هر چند استفاده از مختصات قطبی یک نمودار برای ترسیم روابط ضمنی مزایای زیادی دارد، اما در برخی موارد استفاده از فرم دکارتی برای ترسیم، مراحل کار را کمتر و ترسیم را راحت‌تر خواهد کرد. برای نمونه، می‌توان به مثال بالا اشاره کرد. با تبدیل فرم قطبی نمودار بالا به فرم دکارتی درمی‌یابیم که فرم قطبی بالا هذلولی $x^{۲} - y^{۲} = ۱$ با دو مجانب $y = \pm x$ است که ترسیم آن با استفاده از مباحث هندسه‌ی تحلیلی بسیار آسان‌تر است.



باید دقت کرد، هر چند استفاده از مختصات قطبی یک نمودار برای ترسیم روابط ضمنی مزایای زیادی دارد، اما در برخی موارد استفاده از فرم دکارتی برای ترسیم، مراحل کار را کمتر و ترسیم را راحت‌تر خواهد کرد

تمرین

۱ . نمودار $\sqrt{(x^{۲}+y^{۲})^{۳}} - ۶xy = ۰$ را رسم کنید (راهنمایی : ) .

۲ . نمودار رابطه‌ی ضمنی $x^{۲}+y^{۲} = \frac{۴x}{\sqrt{x^{۲}+y^{۲}}}$ را رسم کنید (راهنمایی : ) .

پی‌نوشت

۱ . $\pi - \frac{\pi}{۴}$ نیز می‌تواند جواب θ باشد، اما از آن‌جا که زوج مرتب ما در ربع چهارم دایره‌ی مثلثاتی قرار دارد، جواب درست $۲\pi - \frac{\pi}{۴}$ است.

منابع

۱ . لویی لیت هولد. حساب دیفرانسیل و انتگرال با هندسه‌ی تحلیلی. ترجمه علی‌اکبر عالم‌زاده.

۲ . جرج توماس و راس ال فینی. حساب دیفرانسیل و انتگرال و هندسه‌ی تحلیلی. ترجمه‌ی علی‌اکبر عالم‌زاده و داریوش بهمردی.

احمد قندهاری

بخش‌پذیری

اشاره

در این مقاله به تعریف بخش‌پذیری چند جمله‌ای P(x) بر (x-a) خواهیم پرداخت، سپس مسائل و آزمون‌های متفاوتی را در این زمینه طرح و حل می‌کنیم.

۱. عبارت P(x) را بر (x-a) وقتی بخش‌پذیر گویند که باقی‌مانده‌ی تقسیم P(x) بر (x-a) صفر باشد. اگر خارج قسمت تقسیم Q(x) باشد، می‌توان نوشت $P(x)=(x-a)Q(x)$

مثلاً عبارت $P(x)=x^3-5x^2+5x-1$ بر $(x-1)$ بخش‌پذیر است. زیرا می‌توان نوشت:

$$x^3-5x^2+5x-1=(x-1)(x^2-4x+1)$$

$$P(x)=(x-1).Q(x)$$

۲. اگر باقی‌مانده‌ی تقسیم عبارت P(x) بر (x-a)، R و خارج قسمت آن Q(x) باشد، می‌توان نوشت

$$P(x)=(x-a).Q(x)+R$$

اگر در این رابطه به‌جای x، عدد a را قرار دهیم، خواهیم داشت: $P(a)=R$.

نتیجه: اگر عبارت P(x) بر (x-a) بخش‌پذیر باشد، آن‌گاه $P(a)=0$.

مثال: نشان دهید عبارت $P(x)=x^7-4x^2+3$ بر $(x-1)$ بخش‌پذیر است.

$$P(1)=1-4+3=0 \Rightarrow P(1)=0$$

در نتیجه P(x) بر $(x-1)$ بخش‌پذیر است.

مسئله‌ی۱. اگر عبارت $P(x)=x^3+4x^2-5x+m$ بر $(x+1)$ بخش‌پذیر باشد، آن‌گاه باقی‌مانده‌ی تقسیم P(x) بر $(x-2)$ را بیابید.

حل: چون P(x) بر $(x+1)$ بخش‌پذیر است، پس باید $P(-1)=0$.

$$P(-1)=-1+4+5+m=0 \Rightarrow m=-8$$

حال، باقی‌مانده‌ی تقسیم $P(x)=x^3+4x^2-5x-8$ بر $(x-2)$ را تعیین می‌کنیم.

$$R=P(2)=8+16-10-8 \Rightarrow R=6$$

۳. اگر عبارت P(x) بر (x-a) و (x-b) و (x-c) و... بخش‌پذیر باشد، آن‌گاه باید $P(a)=0$ ، $P(b)=0$ ، $P(c)=0$ و...

مسئله‌ی۲. m و n را چنان بیابید تا عبارت $P(x)=mx^3+nx^2-4x+12$ بر $(4-x^2)$ بخش‌پذیر باشد.

حل: روش اول:

$$x^2-4=(x-2)(x+2)=0 \Rightarrow \begin{cases}x=2\\x=-2\end{cases}$$

$$\begin{cases}P(2)=0\\P(-2)=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}8m+4n-8+12=0\\-8m+4n+8+12=0\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}8m+4n=-4\\-8m+4n=-20\end{cases} \Rightarrow$$

$$8n=-24 \Rightarrow n=-3 \ , \ 8m+4n=-4$$
$$\Rightarrow 8m-12=-4 \Rightarrow 8m=8 \Rightarrow m=1$$

روش دوم: $x^2-4=0 \Rightarrow x^2=4$ ، در عبارت P(x) به جای هر (x^2) ، عدد ۴ را قرار می‌دهیم. سپس باقی‌مانده را



متحد با صفر قرار می‌دهیم.

$$P(x) = mx(x^2) + n(x^2) - 4x + 12$$

$$R = mx(4) + n(4) - 4x + 12$$

$$R = (4m - 4)x + (4n + 12) \equiv 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4m - 4 = 0 \\ 4n + 12 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = 1 \\ n = -3 \end{cases}$$

تذکر مهم: در بعضی از مسائل، روش اول مقدور نیست. باید از روش دوم استفاده کرد.

مسئله‌ی ۳. a و b را چنان بیابید تا عبارت $P(x) = x^9 + ax^4 + bx^3 - 8$ بر $(x^2 + 1)$ بخش‌پذیر باشد.

حل:

$P(x) = x(x^2)^4 + a(x^2)^2 + bx(x^2) - 8$ و $x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x^2 = -1$

$$R = x(-1)^4 + a(-1)^2 + bx(-1) - 8 = x + a - bx - 8$$

$$R = (1 - b)x + (a - 8) \equiv 0 \Rightarrow \begin{cases} 1 - b = 0 \Rightarrow b = 1 \\ a - 8 = 0 \Rightarrow a = 8 \end{cases}$$

توجه: ممکن است برای بعضی‌ها این سؤال پیش آید که آیا x^2 می‌تواند مساوی (۱-) باشد؟ در جواب باید گفت، در ریاضی معادله‌ی $x^2 = -1$ دو ریشه‌ی متمایز دارد که در حوزه‌ی اعداد حقیقی نیست. پس تساوی $x^2 = -1$ اشکالی ندارد.

مسئله‌ی ۴. اگر عبارت $P(x) = x^4 + mx^3 + nx^2 + (k - 5)$ بر $x(x-1)(x+1)$ بخش‌پذیر باشد، m و n و k را بیابید.

حل: روش اول:

$$x(x-1)(x+1) = 0 \Rightarrow x = 0,\ \ x = 1,\ \ x = -1$$

$$\begin{cases} P(0) = 0 \\ P(1) = 0 \\ P(-1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 + 0 + 0 + k - 5 = 0 \\ 1 + m + n + k - 5 = 0 \\ 1 - m + n + k - 5 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow k = 5$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m + n = -1 \\ -m + n = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} n = -1 \\ m = 0 \end{matrix}$$

روش دوم:

$$x(x-1)(x+1) = x(x^2 - 1) = x^3 - x = 0 \Rightarrow x^3 = x$$

در عبارت P(x) به جای هر x^3، x قرار می‌دهیم. سپس باقی‌مانده را متحد با صفر قرار می‌دهیم.

$$P(x) = x(x^3) + m(x^3) + nx^2 + k - 5$$

$$R = x(x) + m(x) + nx^2 + k - 5 = x^2 + mx + nx^2 + k - 5$$

$$R = (n + 1)x^2 + (m)x + (k - 5) \equiv 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} n + 1 = 0 \\ m = 0 \\ k - 5 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n = -1 \\ m = 0 \\ k = 5 \end{cases}$$

مسئله‌ی ۵. اگر عبارت $P(x) = x^{35} + 4x^{16} + ax^2 + bx + c$ بر $(x^3 + 1)$ بخش‌پذیر باشد، a، b و c را بیابید.

حل: در عبارت P(x)، به جای هر x^3، (۱-) را قرار

می‌دهیم:

$$x^3 + 1 = 0 \Rightarrow x^3 = -1$$

$$P(x) = x^2(x^3)^{11} + 4x(x^3)^5 + ax^2 + bx + c$$

$$R = x^2(-1)^{11} + 4x(-1)^5 + ax^2 + bx + c$$

$$= -x^2 - 4x + ax^2 + bx + c$$

$$R = (a-1)x^2 + (b-4)x + c \equiv 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a - 1 = 0 & a = 1 \\ b - 4 = 0 \Rightarrow b = 4 \\ c = 0 & c = 0 \end{cases}$$

مسئله‌ی ۶. چند جمله‌ای درجه سومی بنویسید که باقی‌مانده‌ی تقسیم آن بر $(x-1)$ و $(x-2)$ و $(x-3)$ عدد ۴۸ باشد و این چندجمله‌ای بر $(x+1)$ بخش‌پذیر باشد.

حل: چندجمله‌ای درجه سوم را به صورت $P(x) = m(x-1)(x-2)(x-3) + 48$ می‌نویسیم.

$x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$ باید $P(-1) = 0$

$$p(-1) = m(-2)(-3)(-4) + 48 = 0$$
$$\Rightarrow -24m + 48 = 0 \Rightarrow m = 2$$
$$\Rightarrow p(x) = 2(x-1)(x-2)(x-3) + 48$$

۴. اگر باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد A بر عدد t مساوی R_1 و باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد B بر عدد t مساوی R_2 باشد، آن‌گاه:

الف) باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد (A+B) بر عدد t برابر است با باقی‌مانده‌ی تقسیم $(R_1 + R_2)$ بر (t).

ب) باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد $(A \times B)$ بر عدد t برابر است با باقی‌مانده‌ی تقسیم $(R_1.R_2)$ بر (t).

مسئله‌ی ۷. اگر باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد A بر ۸ مساوی ۷ و باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد B بر ۸ مساوی ۶ باشد، آن‌گاه باقی‌مانده‌ی تقسیم (A.B) بر ۸ را بیابید.

حل: این مسئله را بدون در نظر گرفتن قسمت «ب» از شماره‌ی ۴ درس حل می‌کنیم.

$$\begin{cases} A = 8m + 7 \\ B = 8k + 6 \end{cases} \Rightarrow A \times B = (8m+7)(8k+6)$$

$$= 8(8km + 6m + 7k) + 42$$

همان‌طور که ملاحظه می‌شود، باقی‌مانده‌ی تقسیم (A.B) بر عدد ۸، باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد ۴۲ بر (۸) است که مساوی با ۲ است. پس: $R = 2$.

آزمون

آزمون ۱. اگر $f(2) = f(-2) = 8$، آن‌گاه کدام یک از عبارت‌های زیر بر $(4 - x^2)$ بخش‌پذیر است؟

۱) $f(x)$ ۲) $f(x) + 8$ ۳) $f(x) - 8$ ۴) $f(x) - 4$

حل: گزینه‌ی ۳. گزینه‌ای درست است که به ازای $x = 2$ و $x = -2$ حاصل آن صفر شود.

آزمون ۲. اگر P(x) بر $(x - 2\sqrt{2})$ بخش‌پذیر باشد، آن‌گاه باقی‌مانده‌ی تقسیم $P(x^4 - 2x^2 + 2x)$ بر $(x - \sqrt{2})$ کدام است؟

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۲-

حل: گزینه‌ی ۱.

$x = \sqrt{2}$ و $P((\sqrt{2})^4 - 2(2) + 2\sqrt{2}) = P(4 - 4 + 2\sqrt{2}) = P(2\sqrt{2}) = 0$.

آزمون ۳. اگر باقی‌مانده‌ی تقسیم $ax^5 + bx^4 + cx + 7$ بر $(x-1)$، ۷ باشد، آن‌گاه باقی‌مانده‌ی تقسیم $ax^2 + bx + c$ بر $(x - \frac{c}{a})$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۱ ۳) ۲- ۴) ۰

حل: گزینه‌ی ۴.

$P(x) = ax^5 + bx^4 + cx + 7$ و $P(1) = 7 \Rightarrow a + b + c + 7 = 7 \Rightarrow a + b + c = 0$

$$ax^2 + bx + c = 0 \xrightarrow{a+b+c=0} \begin{cases} x' = 1 \\ x'' = \frac{c}{a} \end{cases}$$

پس عبارت $ax^2 + bx + c$ بر $(x - \frac{c}{a})$ بخش‌پذیر است.

آزمون۴. اگر باقی‌مانده‌ی تقسیم $P(x)$ بر $(x-۱)$ ، ۷ و بر $(x-۲)$ ، ۵ باشد، آن‌گاه باقی‌مانده‌ی تقسیم $P(x)$ بر $x^۲-۳x+۲$ کدام است؟

۱) $-۲x+۹$ ۲) $۲x-۹$ ۳) $-۲x-۹$ ۴) $۲x+۹$

حل: گزینه‌ی ۱ .

$(x-۱)(x-۲)=x^۲-۳x+۲$; $a=۱$ و $R_۱=۷$; $b=۲$ و $R_۲=۵$

$$mx+n \text{ باقی‌مانده باشد } \Rightarrow \begin{cases} m(a)+n=R_۱ \\ m(b)+n=R_۲ \end{cases}$$

$$\Rightarrow {}^{-۱\times}\begin{cases} m+n=۷ \\ ۲m+n=۵ \end{cases} \Rightarrow m=-۲ \ , \ n=۹$$

$$\Rightarrow mx+n=-۲x+۹$$

آزمون۵. اگر باقی‌مانده‌ی تقسیم $P(x)=x^۳-۶x^۲+۱۲x-۲$ بر $(x-a)$ ، ۷۰ باشد، باقی‌مانده‌ی تقسیم $P(x)$ بر $(x-\frac{a}{۲})$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۳ ۳) ۵ ۴) ۷

حل: گزینه‌ی ۴ .

$$p(a)=۷۰ \Rightarrow a^۳-۶a^۲+۱۲a-۲=۷۰$$
$$\Rightarrow a^۳-۶a^۲+۱۲a-۸=۶۴$$
$$\Rightarrow (a-۲)^۳=۶۴ \Rightarrow a-۲=۴ \Rightarrow a=۶$$
$$\Rightarrow x-\frac{a}{۲}=x-۳ \Rightarrow P(۳)=۲۷-۵۴+۳۶-۲=۷$$

آزمون۶. اگر $۲f(x)+f(-x)=x^۳-۳x$ ، آن‌گاه باقی‌مانده‌ی تقسیم $f(x)$ بر $(x-۳)$ کدام است؟

۱) ۱۸ ۲) -۱۸ ۳) -۵ ۴) -۶

حل: گزینه‌ی ۲ .

$$x \xrightarrow[\text{تبدیل}]{} -x \Rightarrow \ {}_{-۲\times}\begin{cases} ۲f(-x)+f(x)=-x^۳+۳x \\ ۲f(x)+f(-x)=x^۳-۳x \end{cases}$$

$$\Rightarrow -۳f(x)=-۳x^۳+۹x \Rightarrow f(x)=x^۳-۳x \ ,$$
$$f(۳)=۲۷-۹=۱۸$$

آزمون۷. اگر $f(\frac{۱}{x-۱})=\frac{۴x-۳}{x-۱}$ ، آن‌گاه باقی‌مانده‌ی تقسیم $f(x)$ بر $(x-\sqrt{۲})$ کدام است؟

۱) $(۲+\sqrt{۲})$ ۲) $(۳+\sqrt{۲})$ ۳) $(۴+\sqrt{۲})$ ۴) $(۵+\sqrt{۲})$

حل: گزینه‌ی ۳ .

$$f(\frac{۱}{x-۱})=\frac{۴(x-۱)+۱}{x-۱}=۴+\frac{۱}{x-۱} \ ، \ \frac{۱}{x-۱} \xrightarrow[\text{تبدیل}]{} x$$

$$f(x)=۴+x \Rightarrow f(\sqrt{۲})=۴+\sqrt{۲}$$

آزمون ۸. باقی‌مانده‌ی تقسیم $x^۷$ بر $(x^۲-x+۱)$ کدام است؟

۱) x ۲) $۲x$ ۳) $-۲x$ ۴) $۳x$

حل: گزینه‌ی ۱.

$$P(x) = x^{7} = x(x^{6}) = x(x^{6} - 1 + 1) = x(x^{6} - 1) + x = x(x^{3} - 1)(x^{3} + 1) + x$$

$$P(x) = x\underbrace{(x^{3} - 1)(x + 1)(x^{2} - x + 1)}_{\text{بر } (x^2-x+1) \text{ بخش‌پذیر است}} + x \Rightarrow R = x$$

آزمون ۹. باقی‌مانده‌ی تقسیم $x^{111} + x^{21} - 2$ بر $(x^{2} - x)$ کدام است؟

۱) 0 ۲) -2 ۳) $2x - 2$ ۴) $2x + 2$

حل: گزینه‌ی ۳.

$$x^{2} - x = 0 \Rightarrow x^{2} = x \ , \ P(x) = x^{111} + x^{21} - 2$$

در عبارت $P(x)$ به جای هر x^2 ، x قرار دهیم، به‌این ترتیب، هر x^n ، $n \in N$ و $n > 1$ در نهایت به x تبدیل می‌شود. درباره‌ی x^9 این عمل را انجام می‌دهیم.

$$x^{9} = x(x^{2})^{4} \rightarrow x(x)^{4} = x(x^{2})^{2} \rightarrow x(x)^{2} = x(x^{2})$$

$$\rightarrow x(x) = x^{2} \rightarrow x$$

پس درباره‌ی $P(x)$ ، $x^{111} \rightarrow x$ و $x^{21} \rightarrow x$ بنابراین: $R = 2x - 2$.

آزمون ۱۰. اگر $f(x + 4) = x^{2} - 4x$ ، آن‌گاه باقی‌مانده‌ی تقسیم $f(x)$ بر $(x - 1)$ کدام است؟

۱) ۱۵ ۲) ۱۸ ۳) ۲۰ ۴) ۲۱

حل: گزینه‌ی ۴ ، باید $f(1)$ را پیدا کرد، بنابراین با فرض $x = -3$ ، مقدار $f(x + 4)$ را به دست می‌آوریم:

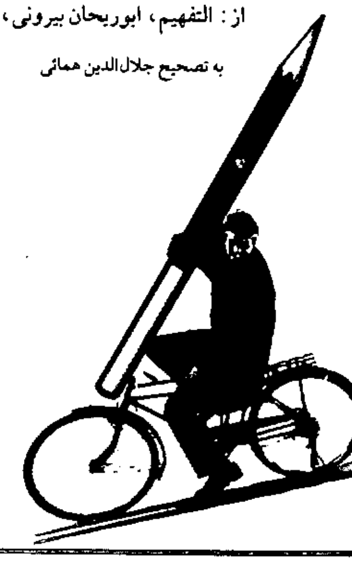
$$f(-3 + 4) = 9 + 12 \Rightarrow f(1) = 21$$

یکی چیست؟

تفریح اندیشه

از: التفهیم، ابوریحان بیرونی،

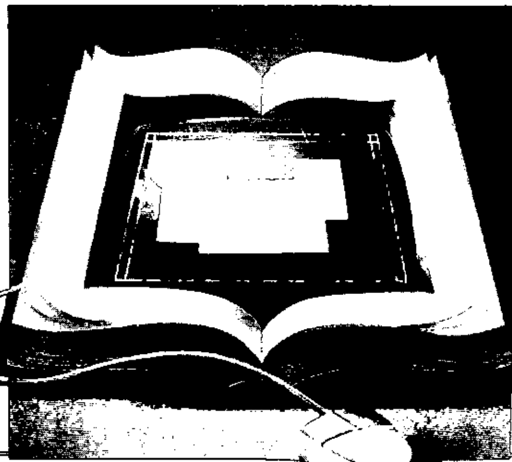
به تصحیح جلال‌الدین همائی



آن است که یگانگی بر او افتد و بدو نام زده شود. و از تمامی وی آن است که کمی و بیشی نپذیرد و ز حال خویش به ضرب و قسمت نگردد و اندر قوت همه عددهاست و همه خاصیت‌های ایشان. و حال یکی اندر آن چیزها که شمرده شود بدو، هر چند یگانگی او نه به حقیقت باشد، و لکن از جهت نهادن مردمان یک دیگر [نیز همچنان است]. و این یکی ایستاده است میان آن عددها که از مانده‌ی او گرد آید به جمله شدن و میان آن پاره‌ها که از او کمترند. و این ایستادن او میان ایشان از بهر آن پاره‌ها که از او کمترند. و این ایستادن او میان ایشان از بهر آن است که او چون میانه‌ی معتدل راست است. اگر او را به مثل خویش زنی یا بر مثل خویش قسمت کنی هم یکی باشد. و دیگر عددها که از او بیشترند هرگه که یکی ایشان را ضرب کنی بیفزاید. و قسمت کنی بکاهند. و اما اجزاها که از او کمترند هرگاه که ضرب کنی بکاهند و که قسمت کنی بیفزایند. و یکی به میان ایشان برحال خویش است.

● احسان یارمحمدی

معرفی سایت‌های ریاضی جهان



عنوان سایت:.. **algebrahelp.com**

نشانی سایت:.. http://www.algebrahelp.com

در صفحه‌ی اصلی این سایت، کاربر می‌تواند مسائل جبری را به نرم‌افزار Algebra solved ارائه دهد و پاسخ را به صورت گام به گام دریافت کند. سایت algebrahelp.com دارای چهار بخش با زیر عنوان‌های متنوع و مطالب جالب پیرامون موضوعات جبر به این شرح است:

۱. دروس (Lessons)

- مفهوم‌های جبر پایه (Basic Algebra Concepts)
- مختصرسازی (Simplifying)
- جانشینی و ارزیابی (Substitution and Evaluating)
- عامل‌یابی (Factoring)
- نماهای منفی (Negative Exponents)
- معادلات ـ پیشرفته (Equations - Advanced)
- شرح‌ها و مسائل ساده (Descriptions and Sample Problems)
- ضمیمه به همراه شرح‌ها (Index with Description)

۲. محاسبه‌گرها (Calculators)

- معادلات (Equations)
- عبارات (Exressions)
- توابع (Functions)
- اعداد (Numbers)
- کسرها (Fractions)
- دیگر (Other)

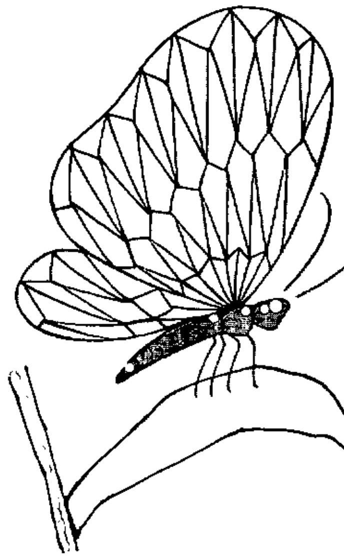
۳. کاربرگ‌ها (Worksheets)

- مبانی‌ها (Basics)
- مختصرسازی (Simplifying)
- ضرب (Multiplication)
- نماها (Exponents)
- مختصرسازی پیشرفته (Advanced Simplifying)
- نماهای منفی (Negative Exponents)
- معادلات پیشرفته (Advanced Equations)
- رسم (Graphing)
- ضمیمه به همراه شرح‌ها (Index with Descriptions)

هر چیز دیگر (Every Things Else)

- منابع ریاضی (Math Resources)
- آگاهی دهندگان (Advertisers)

○ گردآورنده: روزبه یوسف‌نژاد



تئوری پروانه

اشاره

در این مقاله‌ی کوتاه کوشیده‌ایم شما را با نظریه‌ای به نام «نظریه‌ی پروانه» آشنا کنیم. سال‌ها پیش مبحث جدیدی به نام «تئوری پروانه[1]» بیان شد که در علم ریاضیات جایگاه ویژه‌ای داشت. در اثبات این قضیه‌ی مهم، از مباحث چهارضلعی محاطی و هم‌نهشتی‌های مثلث‌ها و تشابه استفاده شده است که برای فهم مطلب، دانستن آن‌ها لازم است.

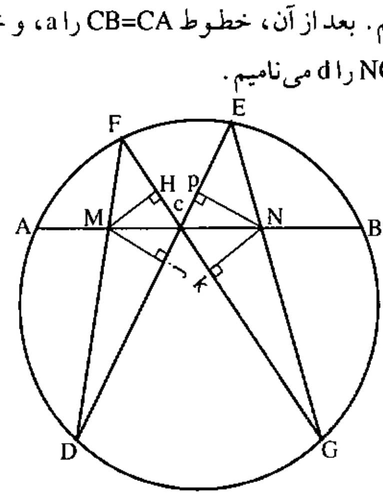
صورت قضیه

دایره‌ای فرضی به شعاعی خاص داریم و وتری از آن به نام AB را رسم می‌کنیم. وسط وتر را با نقطه‌ی C نشان می‌دهیم. حال دو وتر دل‌خواه ED و FG را رسم می‌کنیم، به طوری که محل برخورد آن‌ها در C باشد. دو سر نقاط D ، F ، G و E را به هم متصل می‌کنیم. حالا ما دو مثلث به نام‌های FDC و EGC داریم که دو ضلع FD و EG، وتر AB را به ترتیب در M و N قطع می‌کنند. حال طبق قضیه‌ی پروانه داریم:

قضیه‌ی پروانه ← NC=MC

اثبات قضیه‌ی پروانه

ابتدا برای اثبات، خطوط عمود MH، MJ، NP و NK را رسم می‌کنیم. بعد از آن، خطوط CB=CA را a، و خط MC را b و خط NC را d می‌نامیم.



مثلث‌های شکل متشابه‌اند و نسبت تشابه آن‌ها را می‌نویسیم:

	Propration (نسبت‌ها)	Triangles (مثلث‌ها)
(۱)	$\frac{CM}{CN}=\frac{MH}{NK}$	CMH و CNK
(۲)	$\frac{CM}{CN}=\frac{MJ}{NP}$	CMJ و CNP
(۳)	$\frac{MH}{NP}=\frac{FM}{EN}$	FMH و ENP
(۴)	$\frac{MJ}{NK}=\frac{MD}{NG}$	DMJ و GKN

$$(۱)\times(۲)\Rightarrow \frac{CM^{2}}{CN^{2}}=\frac{MH}{NK}\times\frac{MJ}{NP}=\frac{FM}{EN}\times\frac{MD}{NG}=\frac{FM.MD}{EN.NG}$$

$$= \text{قوت نقطه در دایره} = \frac{AM\times MB}{BN.NA}$$

$$\Rightarrow \frac{b^{2}}{a^{2}}=\frac{(a-b)(a+b)}{(a-d)(a+d)}=\frac{a^{2}-b^{2}}{a^{2}-d^{2}}$$

$\Rightarrow b^{2}=d^{2}$ $b,d>0$ $\Rightarrow b=d$ حکم اثبات شد

● فرهاد جعفری یقین

دانش‌آموز پیش‌دانشگاهی شهرستان مهاباد

اتحادی دیگر

$$(1+2+3+...+n+n+1)^2 - (1+2+3+...+n)^2 = (n+1)^3$$

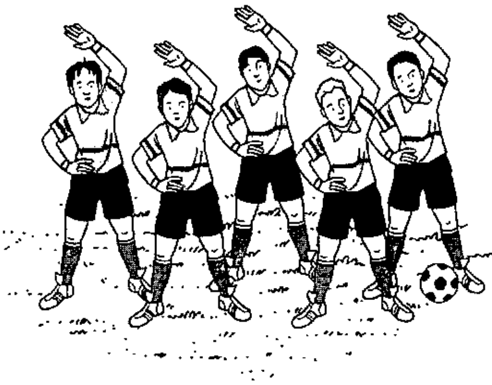
اثبات: با فرض این‌که $a = 1+2+3+...+n$ ، $b = n+1$ و جایگزینی آن‌ها در سمت راست اتحاد بالا، خواهیم داشت:

$$A = (a+b)^2 - a^2 = a^2 + 2ab + b^2 - a^2 = b^2 + 2ab$$
$$= (n+1)^2 + 2(1+2+3+...+n)\ (n+1) \quad (1)$$

از طرف دیگر می‌دانیم: $1+2+3+...+n = \frac{n(n+1)}{2}$

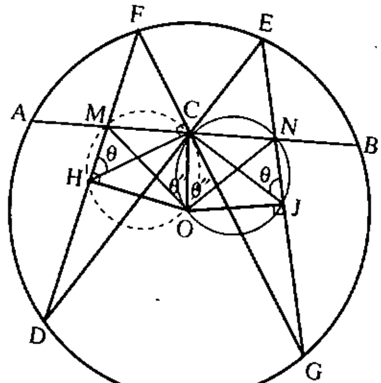
با جای‌گزینی رابطه‌ی اخیر در ۱ خواهیم داشت:

$$A = (n+1)^2 + 2 \times \frac{n(n+1)}{2}\ (n+1)$$
$$= (n+1)^2 + n(n+1)^2 = (n+1)^2\ (n+1) = (n+1)^3$$





مسابقه: با توجه به این‌که روش‌های دیگری برای اثبات قضیه‌ی پروانه وجود دارند و با توجه به شکل زیر، این قضیه را اثبات کنید:



پی‌نوشت

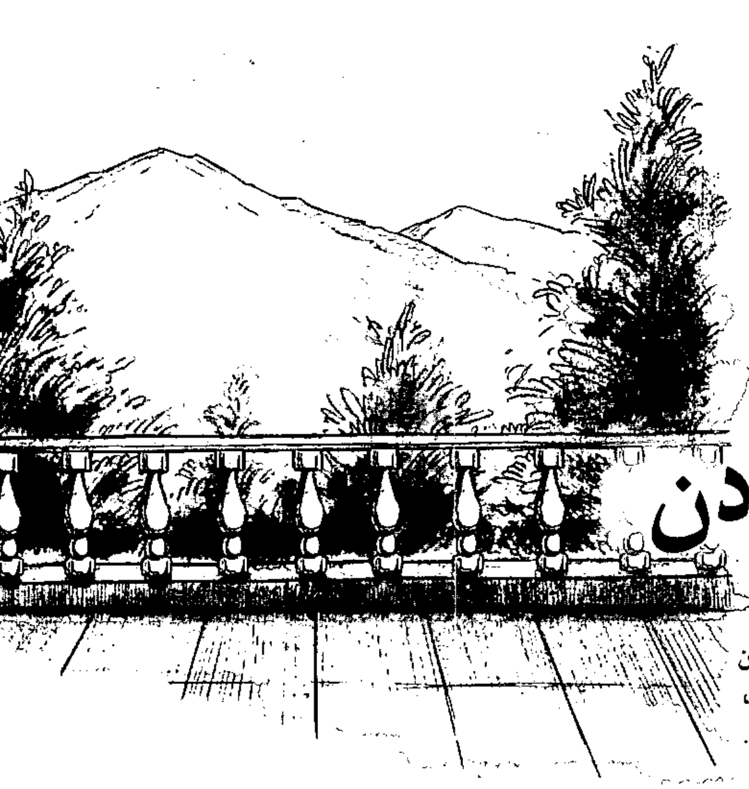
1. Butterfly theorem

منابع

1. agutie. Home stead.com
2. www.Cut-the knot.org

○ غلامرضا یاسی‌پور

۱۷ با راهیان المپیادهای ریاضی



مسائل تناوبی بودن

اشاره

در شماره‌ی قبل درباره‌ی مسائل تناوبی بودن توضیحاتی داده شد و تعدادی مسأله بررسی و حل شد، در ادامه‌ی آن بقیه‌ی مسائل تناوبی بودن را بررسی می‌کنیم.

۶. جمیع $\alpha \in R$ ها را با این ویژگی بیابید که دنباله‌ی صادق در بازگشتی

$x_{n+1} + x_{n-1} = \alpha x_n , n \in N$

دوره‌ای باشد.

۷. فرض می‌کنیم $f: R \to R$ تابعی دوره‌ای و چنان باشد که مجموعه‌ی $\{f(n) | n \in N\}$ دارای بی‌نهایت عضو باشد. ثابت کنید دوره‌ی تناوب f گنگ است.

۸. فرض می‌کنیم b_n آخرین رقم عدد زیر باشد:

$1^1 + 2^2 + 3^3 + ... + n^n$

ثابت کنید دنباله‌ی $\{b_n\}_n$ متناوبی با دوره‌ی تناوب ۱۰۰ است.

۹. فرض می‌کنیم a ، b اعدادی صحیح و مثبت و a فرد باشد. دنباله‌ی $\{u_n\}_n$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم: به ازای $n \in N$ ، $u_0 = b$

$$u_{n+1} = \begin{cases} \frac{1}{2} u_n & \text{اگر } u_n \text{ زوج باشد} \\ u_n + a & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

الف) نشان دهید به ازای $n \in N$ ی، $u_n \le a$.

ب) نشان دهید دنباله‌ی $\{u_n\}_n$ ، از یک مرحله به بعد، متناوب است.

۱۰. اعداد صحیح و مثبت a_1 ، a_2 ، a_3 و...، که هیچ یک متجاوز از ۱۹۸۸ نیستند، دنباله‌ای را تشکیل می‌دهد که در این شرط صدق می‌کند: اگر m و n اعدادی صحیح و مثبت باشند، در این صورت $a_m + a_n$ بر a_{m+n} بخش‌پذیر است. ثابت کنید این دنباله، از یک مرحله به بعد، تناوبی است.

۱۱. فرض می‌کنیم $f: R \to R$ تابعی یکنواخت است که در مورد آن $a,b,c,d \in R$ با $a \neq 0$ ، $c \neq 0$ چنان موجودند که به ازای جمیع مقادیر x برابری‌های زیر برقرارند:

$$\int_x^{x+\sqrt{3}} f(t)dt = ax + b \quad \text{و} \quad \int_x^{x+\sqrt{2}} f(t)dt = cx + d$$

ثابت کنید f تابعی خطی است، یعنی به ازای m و $n \in R$: $f(x) = mx + n$

۶. اگر $\alpha = 2$ ، آن‌گاه دنباله‌ی $x_n = n$ در رابطه‌ی بازگشتی مفروض صادق است و به‌طور واضح دوره‌ای نیست. بنابراین، فرض می‌کنیم $\alpha \neq 2$. در این حال، معادله‌ی $x^2 - \alpha x + 1 = 0$ دو جواب متمایز r، r^{-1} دارد و جمله‌ی عمومی دنباله را می‌توان در شکل نهایی، به‌صورت $x_n = Ar^n + Br^{-n}$ نوشت که در آن A و B توسط دو جمله‌ی اول دنباله مشخص شده‌اند.

اگر دنباله دوره‌ای باشد، آن‌گاه r باید دارای قدرمطلقی برابر یک باشد، زیرا در غیر این صورت، قدرمطلق جمله‌ی عمومی به بی‌نهایت میل می‌کند.

به این ترتیب: $x_n = Ar^n + Br^{-n}$

دنباله‌ی $\overline{x_n}$ نیز باید دوره‌ای باشد که با استفاده از جمع، مستلزم این است که $(A+\bar{B})r^n + (\bar{A}+B)r^{-n}$ دوره‌ای باشد. در نتیجه، دنباله‌ی $Re((A+\bar{B})r^n)$ دوره‌ای است (در این جا $Re\ z$ جزو حقیقی z را نمایش می‌دهد).

با نوشتن $r = \cos \pi t + i \sin \pi t$ نتیجه می‌گیریم که $Re(A+\bar{B})\cos n\pi t$ دوره‌ای است که مستلزم این است که t گویا باشد. در واقع، اگر t گویا نباشد، آن‌گاه عددهای به‌صورت $2m\pi + n\pi t, m, n \in Z \quad , \quad n > 0$ در R چگال خواهند بود. بنابراین: $\cos n\pi t$ ، $n > 0$ ، در $[0,1]$ چگال است و نمی‌تواند دوره‌ای باشد. نتیجه می‌شود که α باید به‌صورت $2\cos \pi t$ ، با t ی گویا باشد.

(برنامه‌ی تابستانی المپیاد ریاضی، ۱۹۹۶)

۷. فرض می‌کنیم T دوره‌ی تناوب f باشد. با استفاده از طریق تناقض، فرض می‌کنیم $T = p/q$ ، که در آن p و q اعدادی صحیح و مثبت و نسبت به هم اول‌اند. در این صورت، $qT = p$ نیز دوره‌ی تناوب f است. فرض می‌کنیم $n = kp + r$ که در آن k و r اعدادی صحیح‌اند و

$0 < r < p-1$

در این صورت: $f(n) = f(kp+r) = f(r)$

بنابراین، به ازای جمیع اعداد صحیح و مثبت n،

$f(n) \in \{f(1), f(2), \ldots, f(p-1)\}$

در تناقض با این واقعیت که $\{f(n) | n \in N\}$ دارای بی‌نهایت عنصر است و به این ترتیب، اثبات کامل می‌شود.



Revista Matematică din Timisoara (Timisoara Mathematics Review), 1981; proposed by D. Andrica

۸. آخرین رقم عدد صحیح و مثبت n را l(n) نمایش می‌دهیم. دنباله‌ی $\{l(n)\}_n$ دوره‌ای و با دوره‌ی تناوب ۱۰ است. نیز، به ازای ثابت $a \in N$ ، دنباله‌ی $\{l(a^n)\}_n$ دوره‌ای و دوره‌ی تناوب آن برابر ۱ است، اگر a به ۰ ، ۱ ، ۵ ، یا ۶ ختم شود، و برابر ۲ است، اگر α به ۴ یا ۲ ختم شود، و برابر ۴ است اگر به ۲ ، ۳ ، ۷ ، یا ۸ مختوم باشد.

از آن‌جا که کوچک‌ترین مضرب مشترک ۱۰ و ۴ برابر ۲۰ است، اگر فرض کنیم:

$m = (n+1)^{n+1} + (n+2)^{n+2} + \ldots + (n+20)^{n+20}$

در این صورت l(m) به n وابسته نیست. بنابراین، آخرین رقم $1^1 + 2^2 + 3^3 + \ldots + 20^{20}$ را محاسبه می‌کنیم. آخرین رقم این عدد، به علت دوره‌ای بودن دنباله‌های به‌صورت $\{l(a^n)\}_n$ ، آخرین رقم

$1 + 2^2 + 3^3 + 4^2 + 5 + 6 + 7^3 + 8^4 + 9^1$

$+ 1 + 2^4 + 3^1 + 4^2 + 5 + 6 + 7^1 + 8^2 + 9^1$

است. محاسبه‌ای آسان نشان می‌دهد که آخرین رقم مورد بحث ۴ است. در نتیجه، آخرین رقم مجموع به صورت

$(n+1)^{n+1} + (n+2)^{n+2} + \ldots + (n+100)^{n+100}$

برابر

$l(4 \times 5) = l(20) = 0$

است. در نتیجه، b_n دوره‌ای، با دوره‌ی تناوب ۱۰۰ است.

(آزمون انتخابی **IMO** رومانی، ۱۹۸۰)

۹. الف) فرض می‌کنیم $u_n > 0$. اگر u_n زوج باشد، آن‌گاه $u_{n+1} = u_n / 2 < u_n$

و اگر u_n فرد باشد، داریم $u_{n+2} = (u_n + a)/2 < u_n$

در نتیجه، به ازای هر جمله‌ی بزرگ‌تر از a، جمله‌ی تالی کوچک‌تری موجود است. این جملات، یک زیر دنباله‌ی نزولی را تشکیل می‌دهند که باید سرانجام مختوم شود و این وضع تنها اگر $u_n \le a$ باشد، اتفاق می‌افتد.

ب) نشان می‌دهیم که بی‌نهایت جمله‌ی دنباله‌ی مورد بحث، کوچک‌تر از 2a هستند. فرض می‌کنیم چنین نباشد

و u_m بزرگ‌ترین جمله با این ویژگی باشد. اگر u_m زوج باشد، آن‌گاه

$$u_{m+1} = u_m / 2 < 2a$$

اگر u_m فرد باشد، آن‌گاه $u_{m+1} = u_m + a$ زوج است.

در نتیجه: $u_{m+2} = (u_m + a) / 2 < 3a / 2 < 2a$

که باز هم غیرممکن است.

این موضوع نشان می‌دهد که بی‌نهایت جمله‌ی کمتر از $2a$ موجودند. کاربرد اصل دیریکله یا لانه‌ی کبوتر، با بی‌نهایت کبوتر، نشان می‌دهد که جمله‌ی u_n ای تکرار می‌شود که به دنباله‌ی دوره‌ای می‌انجامد.

(المپیاد ریاضی فرانسه، ۱۹۹۶)

۱۰. از آن‌جا که دنباله کران‌دار است، بعضی جمله‌ها باید بی‌نهایت مرتبه تکرار شوند. فرض می‌کنیم k بزرگ‌ترین عددی باشد که بی‌نهایت مرتبه در دنباله رخ می‌دهد و N عددی طبیعی، چنان که به ازای $i \ge N$، $a_i \le k$، $m \ge N$ را چنان انتخاب می‌کنیم که $a_m = k$. ثابت می‌کنیم m دوره‌ی تناوبی از دنباله است. یعنی، به ازای هر $i \ge N$، $a_{i+m} = a_i$.

ابتدا فرض می‌کنیم به ازای iای، $a_{i+m} = k$. از آن‌جا که $a_i + a_m$ بر $a_{i+m} = k$ بخش‌پذیر است، داریم:

$$a_i = k = a_{i+m}$$

در غیر این صورت، اگر $a_{i+m} < k$، $j \ge N$ را چنان انتخاب می‌کنیم که $a_{i+j+m} = k$

$a_{i+j} + a_m < 2k$ حاصل می‌شود. از آن‌جا که $a_{i+m} + a_j$ بر $a_{i+j+m} = k$ بخش‌پذیر است، نتیجه می‌شود: $a_{i+m} + a_j = k$

و بنابراین $a_j < k$. از آن‌جا که $a_{i+j+m} = k$، استدلال فوق مستلزم

$$a_{i+j+m} = a_{i+j} = k$$

است. بنابراین، k، $a_i + a_j$ را می‌شمارد. نتیجه می‌گیریم:

$$a_i + a_j = k$$

زیرا $a_i \le k$ و $a_j < k$. در نتیجه:

$$a_{i+m} = k - a_j = a_i$$

(المپیاد ریاضی لنینگراد، ۱۹۸۸)

۱۱. تابع زیر را در نظر می‌گیریم

$$F = R \to R,\ \ F(x) = \int_0^x f(t)dt$$

در این صورت F، به ازای هر $x \in R$، در $F(x+\sqrt{3}) - F(x) = ax + b$ و $F(x+\sqrt{2}) - F(x) = cx + d$ صدق می‌کند. می‌توان دو تابع چند جمله‌ای f_1 و f_2 ی درجه دو چنان یافت که به ازای هر $x \in R$، $f_1(x+\sqrt{3}) - f_1(x) = ax + b$ و ،

$$f_2(x+\sqrt{2}) - f_2(x) = cx + d$$

از این برابری‌ها می‌توان استخراج کرد که توابع $i = 1,2$ و $g_i = F - f_i$ دوره‌ای هستند و دوره‌های تناوب آن‌ها به ترتیب چنین است: $\sqrt{3}$ و $\sqrt{2}$

نتیجه می‌شود که به ازای هر x،

$$f_1(x) - f_2(x) + g_1(x) - g_2(x) = 0$$

اما از آن‌جا که g_1 و g_2 پیوسته و دوره‌ای‌اند، کران‌دارند. در نتیجه، $f_1 - f_2$ باید ثابت باشند.

نتیجه می‌گیریم که به ازای $c \in IR$،

$$g_1(x) = g_2(x) + c$$

در نتیجه، g_1 علاوه بر دوره‌ی تناوب $\sqrt{3}$، دارای دوره‌ی تناوب $\sqrt{2}$ نیز هست. در این صورت، نتیجه می‌گیریم که جمیع اعداد به صورت $r\sqrt{3} + s\sqrt{2}$، $r,s \in Z$، دوره‌های تناوب g_1 اند، و از آن‌جا که مجموعه‌ی اعداد به این صورت، در R چگال است، g_1 بر مجموعه‌ی چگالی ثابت است. g_1، با استفاده از پیوستگی، بر R ثابت است. همین استدلال نشان می‌دهد که g_2 ثابت است.

دریافتیم که به ازای هر $m,n,p \in R$ ی داریم:

$$F(x) = mx^2 + nx + p$$

نتایج استاندارد مربوط به انتگرال‌ها مستلزم این است که تابع F در هر نقطه از x که در آن f پیوسته است، مشتق‌پذیر باشد. در این نقاط: $F'(x) = 2mx + n = f(x)$

از آن‌جا که f یکنواخت است، مجموعه‌ی چنین نقطه‌هایی در R چگال است. بنابراین، بر تابع خطی‌ای واقع بر زیرمجموعه‌ی چگالی از R منطبق است. استدلال فشرده‌ای با استفاده از یکنوایی f نشان می‌دهد که f در هرجا بر این تابع خطی منطبق است و مسئله حل می‌شود.

(المپیاد ریاضی رومانی، ۱۹۹۹، طرح از M.Piticari)

● سیدمحمدرضا هاشمی موسوی

hashemi-moosavi@yahoo.com

۱۰

هم‌نهشتی و کاربردهای آن

(حل معادله‌های هم‌نهشتی و معادله‌های سیاله به کمک جدول H.M)



اشاره

در قسمت‌های قبل، به بسیاری از کاربردهای هم‌نهشتی اشاره شد. در این شماره قصد بر این است که روش حل معادله‌های هم‌نهشتی و معادله‌های سیاله را توسط جدول H.M نشان دهیم و کاربرد این جدول را در پیدا کردن وارون ضربی یک عدد در هم‌نهشتی ارائه دهیم. در انتهای این قسمت نیز تمرین‌هایی نظیر مسئله‌های حل شده در متن طرح شده است که می‌توانید با دیدن مثال‌ها، آن‌ها را حل کنید. کاربردهای هم‌نهشتی در جبر، آنالیز، نظریه‌ی اعداد و دیگر شاخه‌های ریاضیات بر هیچ کس پوشیده نیست و این موضوع مقالات فراوانی را طلب می‌کند. این مقاله به معرفی روش جدید جدول H.M اختصاص دارد.



حل معادله‌ی هم‌نهشتی[1] توسط جدول (H.M)[2]

قرارداد: در معادله‌ی هم‌نهشتی

$$ax \overset{n}{\equiv} c \qquad (1)$$

عدد n را سنج یا پیمانه یا هنگ (mod)، x را مجهول، a را ضریب مجهول و c را عدد ثابت هم‌نهشتی می‌نامیم.

می‌دانیم، با فرض $(a,n)=1$ و با توجه به معکوس ضربی a یعنی a^{-1} (وارون ضربی a در هم‌نهشتی) داریم:

$$a^{-1}.a \overset{n}{\equiv} 1$$

معادله‌ی ۱ را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$x \overset{n}{\equiv} a^{-1}.c$$

$$x = kn + a^{-1}.c \quad (k \in Z)$$

بنابراین، برای حل معادله‌ی ۱، کافی است معکوس a را محاسبه کنیم. می‌دانیم، معکوس a (وارون ضربی a) از معادله‌ی هم‌نهشتی زیر محاسبه می‌شود:

$$x_1 = a^{-1};\ ax_1 \overset{n}{\equiv} 1 \qquad (2)$$

در معادله‌ی ۲، اگر $a > n$ و r_1 باقی‌مانده‌ی حاصل تقسیم $a:n$ باشد، می‌توان نوشت:

$$r_1x_1 \overset{n}{\equiv} 1 \qquad (3)$$

معادله‌ی هم‌نهشتی ۳ را می‌توان به صورت معادله‌ی سیاله زیر نوشت:

$$r_1x_1 - nx_2 = 1\ ;$$
$$nx_2 - r_1x_1 = -1\ ;$$

$$nx_2 \overset{r_1}{\equiv} -1 \qquad (4)$$

با توجه به $n > r_1$ و با فرض این‌که r_2 باقی‌مانده‌ی حاصل تقسیم $n:r_1$ باشد، می‌توان نوشت:

$$r_2x_2 \overset{r_1}{\equiv} -1 \qquad (5)$$

مطابق مرحله‌ی پیش، معادله‌ی هم‌نهشتی ۵ را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$r_1x_3 \overset{r_2}{\equiv} 1 \qquad (6)$$

به همین ترتیب، اگر این عمل را ادامه دهیم، ضریب مجهول، برابر یک خواهد شد و با بازگشت به مرحله‌های پیش، به روش بازگشتی می‌توان x را حساب کرد (توجه: تمام

عملیات را توسط یک جدول چهار سطری انجام می‌دهیم).

مثال ۱. معادله‌ی هم‌نهشتی زیر را حل کنید:

$$۱۹۹۹x \overset{۱۳۷۸}{\equiv} ۱۳۵۷$$

حل: با فرض $a=۱۹۹۹$ ، $n=۱۳۷۸$ ، $c=۱۳۵۷$ و با توجه به $(۱۹۹۹,۱۳۷۸)=۱$ ، جواب معادله چنین است:

$$x=۱۳۷۸k+۱۳۵۷a^{-1}(k\in Z)$$

بنابراین، برای حل معادله کافی است معکوس (وارون ضربی) عدد ۱۹۹۹ را از معادله‌ی زیر حساب کنیم:

$$۱۹۹۹x_۱ \overset{۱۳۷۸}{\equiv} ۱ \ (x_۱=a^{-1})$$

باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد ۱۹۹۹ بر ۱۳۷۸ برابر ۶۲۱ است. بنابراین، با توجه به هم‌نهشتی:

$$۱۹۹۹ \overset{۱۳۷۸}{\equiv} ۶۲۱$$

معادله‌ی مورد نظر را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$۶۲۱x_۱ \overset{۱۳۷۸}{\equiv} ۱ \qquad (۱)$$

معادله‌ی ۱ را با وارد کردن مجهول جدید $x_۲$ ، می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$۱۳۷۸x_۲ \overset{۶۲۱}{\equiv} -۱$$

باقی‌مانده‌ی تقسیم ۱۳۷۸ بر ۶۲۱ برابر ۱۳۶ است. بنابراین، با توجه به هم‌نهشتی:

$$۱۳۷۸ \overset{۶۲۱}{\equiv} ۱۳۶$$

معادله‌ی ۲ را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$۱۳۶x_۲ \overset{۶۲۱}{\equiv} -۱ \qquad (۲)$$

به همین ترتیب می‌توان نوشت:

$$۶۲۱x_۳ \overset{۱۳۶}{\equiv} ۱ \ ;$$

$$(۶۲۱ \overset{۱۳۶}{\equiv} ۷۷) \quad ۷۷x_۳ \overset{۱۳۶}{\equiv} ۱ \qquad (۳)$$

$$۱۳۶x_۴ \overset{۷۷}{\equiv} -۱ \ ;$$

$$(۱۳۶ \overset{۷۷}{\equiv} ۵۹) \quad ۵۹x_۴ \overset{۷۷}{\equiv} -۱ \qquad (۴)$$

$$۷۷x_۵ \overset{۵۹}{\equiv} ۱ \ ;$$

$$(۷۷ \overset{۵۹}{\equiv} ۱۸) \quad ۱۸x_۵ \overset{۵۹}{\equiv} ۱ \qquad (۵)$$

$$۵۹x_۶ \overset{۱۸}{\equiv} -۱ \ ;$$

$$(۵۹ \overset{۱۸}{\equiv} ۵) \quad ۵۹x_۶ \overset{۱۸}{\equiv} -۱ \qquad (۶)$$

$$۱۸x_۷ \overset{۵}{\equiv} ۱ \ ;$$

$$(۱۸ \overset{۵}{\equiv} ۳) \quad ۳x_۷ \overset{۵}{\equiv} ۱ \qquad (۷)$$

$$۵x_۸ \overset{۳}{\equiv} -۱ \ ;$$

$$(۵ \overset{۳}{\equiv} ۲) \quad ۲x_۸ \overset{۳}{\equiv} -۱ \qquad (۸)$$

$$۳x_۹ \overset{۲}{\equiv} ۱ \ ;$$

$$(۳ \overset{۲}{\equiv} ۱) \quad x_۹ \overset{۲}{\equiv} ۱ \qquad (۹)$$

بنابراین: $x_۹=۱$

با برگشت به مرحله‌های پیش، مقدار x را به روش بازگشتی محاسبه می‌کنیم:

از معادله‌ی ۸ : $x_۸=\frac{۳x_۹-۱}{۲}=\frac{۳(۱)-۱}{۲}=۱$

از معادله‌ی ۷ : $x_۷=\frac{۵x_۸+۱}{۳}=\frac{۵(۱)+۱}{۳}=۲$

از معادله‌ی ۶ : $x_۶=\frac{۱۸x_۷-۱}{۵}=\frac{۱۸(۲)-۱}{۵}=۷$

از معادله‌ی ۵ : $x_۵=\frac{۵۹x_۶+۱}{۱۸}=\frac{۵۹(۷)+۱}{۱۸}=۲۳$

از معادله‌ی ۴ : $x_۴=\frac{۷۷x_۵-۱}{۵۹}=\frac{۷۷(۲۳)-۱}{۵۹}=۳۰$

از معادله‌ی ۳ : $x_۳=\frac{۱۳۶x_۴+۱}{۷۷}=\frac{۱۳۶(۳۰)+۱}{۷۷}=۵۳$

از معادله‌ی ۲ : $x_۲=\frac{۶۲۱x_۳-۱}{۱۳۶}=\frac{۶۲۱(۵۳)-۱}{۱۳۶}=۲۴۲$

از معادله‌ی ۱ : $x_۱=\frac{۱۳۷۸x_۲+۱}{۶۲۱}=\frac{۱۳۷۸(۲۴۲)+۱}{۶۲۱}=۵۳۷$

پس، با توجه به $x_۱=a^{-1}=۵۳۷$ ، جواب‌های معادله چنین است:

$$k\in Z: \ x=۱۳۷۸k+۱۳۵۷(۵۳۷)=۱۳۷۸k+۷۲۸۴۰۹$$

با توجه به هم‌نهشتی $۷۲۸۴۰۹ \overset{۱۳۷۸}{\equiv} ۱۱۲۵$ ، جواب اصلی معادله $\boxed{x=۱۱۲۵}$ و جواب عمومی معادله به ازای مقادیر صحیح k چنین است: $x=۱۳۷۸k+۱۱۲۵$

اکنون تمام عملیات فوق را توسط جدول H.M انجام می‌دهیم.

جدول (H.M)، چهار سطر دارد که پس از چهار مرحله کامل می‌شوند:

$$۱۹۹۹x \overset{۱۳۷۸}{\equiv} ۱۳۵۷$$

$\times n_i$	۱۳۷۸	۶۲۱	۱۳۶	۷۷	۵۹	۱۸	۵	۳	۲	۱
$+c_i$	۱	−۱	۱	−۱	۱	−۱	۱	−۱	۱	
$\div a_i$	۶۲۱	۱۳۶	۷۷	۵۹	۱۸	۵	۳	۲	۱	
x_i	۵۳۷	۲۴۲	۵۳	۳۰	۲۳	۷	۲	۱	۱	

در این مثال، چون $۱۳۷۸ = n < ۱۹۹۹ = a$ ، پس باید باقی‌مانده‌ی تقسیم $a:n$ را حساب کنیم و در دومین خانه‌ی سطر اول (از سمت چپ) کنار n (پیمانه) بنویسیم.

پیش از تشریح جدول، این نکته را یادآور می‌شویم که برای حل هر معادله‌ی هم‌نهشتی، ابتدا لازم است شرط $(a,n) = ۱$ را بررسی کنیم. در معادله‌ی هم‌نهشتی $ax \overset{n}{\equiv} c$ ، اگر $(a,n) = d$ ، در این صورت معادله وقتی جواب دارد که c بر d بخش‌پذیر باشد $(d|c)$.

بنابراین، برای بررسی شرط $(a,n) = ۱$ ، ابتدا همیشه تقسیم‌های متوالی را به صورت زیر انجام می‌دهیم و باقی‌مانده‌های حاصل را به ترتیب در سطر اول جدول می‌نویسیم. در صورتی که سطر اول جدول به عدد یک ختم شود، نشان‌دهنده‌ی این است که شرط $(a,n) = ۱$ برقرار است. و در صورتی که به عدد صفر ختم شود و عدد پیش از صفر عددی بزرگ‌تر از یک باشد، آن عدد بزرگ‌ترین مقسوم علیه مشترک a و n است.

مرحله‌ی ۱. تقسیم‌های متوالی را به صورت زیر انجام می‌دهیم و باقی‌مانده‌های حاصل را در سطر اول جدول درج می‌کنیم:

$$\begin{array}{r|l} ۱۹۹۹ & ۱۳۷۸ \\ \hline ۱۳۷۸ & ۱ \\ \hline ۶۲۱ & \end{array} \quad \text{و} \quad \begin{array}{r|l} ۱۳۷۸ & ۶۲۱ \\ \hline ۱۲۴۲ & ۲ \\ \hline ۱۳۶ & \end{array} \quad \text{و}$$

$$\begin{array}{r|l} ۶۲۱ & ۱۳۶ \\ \hline ۵۴۴ & ۴ \\ \hline ۷۷ & \end{array} \quad \text{و...و} \quad \begin{array}{r|l} ۳ & ۲ \\ \hline ۲ & ۱ \\ \hline ۱ & \end{array}$$

مرحله‌ی ۲. عدد ثابت هم‌نهشتی‌ها را که به‌طور متناوب ۱ و ۱- است، در سطر دوم جدول (سطر c_i) از سمت چپ به راست می‌نویسیم.

مرحله‌ی ۳. از اولین باقی‌مانده (۶۲۱) تا آخرین باقی‌مانده (۱) را بار دیگر در سطر سوم (سطر a_i) نظیر سطر اول (n_i) می‌نویسیم.

مرحله‌ی ۴. آخرین خانه‌ی سطر چهارم در سمت راست جدول (سطر x_i) را همیشه برابر عدد ثابت (۱+ یا ۱-) آن ستون، واقع در سطر دوم در نظر می‌گیریم. این توضیح لازم است که در سطر اول با شرط $(a,n) = ۱$ ، عدد ۱ ظاهر می‌شود و در نتیجه عمل تقسیم به پایان می‌رسد.

برای تکمیل سطر چهارم (سطر x_i) از سمت راست به شکل M متوالی (مطابق شکل و در جهت پیکان‌ها) به این ترتیب عمل می‌کنیم (عمل مربوط به هر سطر، ابتدای هر سطر نوشته شده است):

$$\frac{(۱)۳-۱}{۲} = ۱ \ , \ \frac{۱(۵)+۱}{۳} = ۲ \ , \ \frac{۲(۱۸)-۱}{۵} = ۷ \ ,$$

$$\frac{۷(۵۹)+۱}{۱۸} = ۲۳ \ , \ ...,^*$$

آخرین عدد از سمت راست در سطر چهارم (۵۳۷) را در عدد ثابت هم‌نهشتی ضرب می‌کنیم:

$$^*\frac{۲۴۲(۱۳۷۸)+۱}{۶۲۱} = ۵۳۷, \ ۵۳۷(۱۳۵۷) = ۷۲۸۷۰۹ \overset{۱۳۷۸}{\equiv} ۱۱۲۵$$

به بیان دیگر، باقی‌مانده‌ی حاصل از تقسیم عدد (۱۳۵۷) ۵۳۷ یا ۷۲۸۷۰۹ بر ۱۳۷۸ ، جواب معادله‌ی هم‌نهشتی است:

$x = ۱۱۲۵$ (جواب اصلی معادله)

بدیهی است که جواب عمومی معادله به ازای مقادیر صحیح دل‌خواه k چنین است:

$x = ۱۳۷۸k + ۱۱۲۵$ (جواب عمومی معادله)

مثال ۲. معادله‌ی هم‌نهشتی زیر را حل کنید.

$$۲۶x \overset{۱۹}{\equiv} ۱۷$$

حل: چون $۱۹ = n < ۲۶ = a$ ، ابتدا باقی‌مانده‌ی حاصل از تقسیم ۲۶÷۱۹ را در سمت راست سنج ۱۹ می‌نویسیم. سپس تقسیم‌های متوالی را انجام می‌دهیم و باقی‌مانده‌های حاصل را در سطر اول جدول درج می‌کنیم:

$$(-۸) \times ۱۷ = -۱۳۶ \overset{۱۹}{\equiv} ۱۶$$

$\times n_i$	۱۹	۷	۵	۲	۱
$+c_i$	۱	۱-	۱	۱-	
$\div a_i$	۷	۵	۲	۱	
x_i	۸-	۳-	۲-	۱-	

با توجه به هم‌نهشتی بالا، جواب اصلی معادله چنین است:

$$\boxed{x = ۱۶}$$

مثال ۳. وارون عدد ۱۹۹۹ به پیمانه‌ی ۱۹۸۰ را بیابید.

حل: بیان ریاضی مسئله، معادله‌ی هم‌نهشتی زیر است:

$$۱۹۹۹x \overset{۱۹۸۰}{\equiv} ۱$$

چون $۱۹۸۰ = n < ۱۹۹۹ = a$ ، باقی‌مانده‌ی تقسیم ۱۹۹۹ ÷ ۱۹۸۰ را در سمت راست پیمانه (۱۹۸۰) می‌نویسیم. سپس تقسیم‌های متوالی را انجام می‌دهیم.

توجه: چون همیشه جواب مثبت معادله موردنظر است، بنابراین کافی است عددسنج (۱۹۸۰) را به عدد (۵۲۱-) بیفزاییم تا جواب اصلی معادله به دست آید:

$\times n_i$	۱۹۸۰	۱۹	۴	۳	۱
$+c_i$	۱	−۱	۱	−۱	
$\div a_i$	۱۹	۴	۳	۱	
x_i	(−۵۲۱)	−۵	−۱	−۱	

(جواب) $x = ۱۹۸۰ - ۵۲۱ = ۱۴۵۹$.

پس معکوس ضربی عدد ۱۹۹۹ به پیمانه‌ی ۱۹۸۰، عدد ۱۴۵۹ است.

مثال ۴. آیا معادله‌ی هم‌نهشتی زیر دارای جواب است؟ در صورت وجود آن را بیابید.

$$۱۳۱۳x \overset{۱۰۲۷}{\equiv} -۲۶$$

حل: ابتدا حاصل (۱۳۱۳,۱۰۲۷) را به دست می‌آوریم:

$\times n_i$	۱۰۲۷	۲۸۶	۱۶۹	۱۱۷	۵۲	(۱۳)	۰
$+c_i$	۱	−۱	۱	−۱	۱	−۱	

با تقسیم‌های متوالی و ثبت باقی‌مانده‌های حاصل، بزرگ‌ترین مقسوم علیه مشترک دو عدد ۱۳۱۳ و ۱۰۲۷ به دست می‌آید. چون سطر اول جدول به صفر ختم شده است، عدد پیش از آن (۱۳)، بزرگ‌ترین مقسوم علیه مشترک دو عدد موردنظر است:

$(۱۳۱۳,۱۰۲۷) = ۱۳$

بنابراین، شرط وجود جواب برای معادله این است که عدد ثابت معادله (۲۶-) بر ۱۳ بخش‌پذیر باشد. چون $(-۲)۱۳ = -۲۶$ ، پس معادله دارای جواب است و برای تعیین آن، معادله را به عدد ۱۳ ساده می‌کنیم:

$$۱۰۱x \overset{۷۹}{\equiv} -۲$$

اکنون چون $۱ = (۱۰۱,۷۹)$ ، معادله را به کمک جدول H.M حل می‌کنیم: $(۱۰۱ \overset{۷۹}{\equiv} ۲۲)$

$\times n_i$	۷۹	۲۲	۱۳	۹	۴	۱
$+c_i$	۱	−۱	۱	−۱	۱	
$\div a_i$	۲۲	۱۳	۹	۴	۱	
x_i	(۱۸)	۵	۳	۲	۱	

با توجه به جدول، یک جواب اصلی معادله (از بی‌شمار جواب) چنین است:

$x = ۷۹ + ۱۸(-۲) = ۷۹ - ۳۶ = ۴۳;$ $\boxed{x = ۴۳}$

مثال ۵. معادله‌ی هم‌نهشتی زیر را حل کنید:

$$۴۴۱x \overset{۲۷۳}{\equiv} ۲۱$$

حل: با تقسیم‌های متوالی و درج باقی‌مانده‌های حاصل، ابتدا (۴۴۱,۲۷۳) را تعیین می‌کنیم:

$\times n_i$	۲۷۳	۱۶۸	۱۰۵	۶۳	۴۲	(۲۱)	۰
$+c_i$	۱	−۱	۱	−۱	۱	−۱	

معادله را به ۲۱ ساده می‌کنیم:

$$۲۱x \overset{۱۳}{\equiv} ۱$$

در این جا، معادله را به کمک جدول H.M حل می‌کنیم.

$\times n_i$	۱۳	۸	۵	۳	۲	۱
$+c_i$	۱	−۱	۱	−۱	۱	
$\div a_i$	۸	۵	۳	۲	۱	
x_i	۵	۳	۲	۱	۱	

با توجه به جدول، یک $(۸ \overset{۱۳}{\equiv} ۲۱)$ جواب اصلی معادله (از بی‌شمار جواب) چنین است: $\boxed{x = ۵}$

مثال ۶. معادله‌ی هم‌نهشتی زیر را از نظر داشتن یا عدم جواب بررسی کنید.

$$۲۶۸۰x \overset{۳۹۵۳}{\equiv} ۱۷۶$$

حل: ابتدا با تقسیم‌های متوالی و درج باقی‌مانده‌ها، بزرگ‌ترین مقسوم علیه مشترک دو عدد ۳۹۵۳ و ۲۶۸۰ را به دست می‌آوریم.

$\times n_i$	۳۹۵۳	۲۶۸۰	۱۲۷۳	۱۳۴	۶۷	۰
$+c_i$	۱	−۱	۱	−۱	۱	

با توجه به جدول داریم: $۶۷ = (۲۶۸۰,۳۹۵۳)$.

چون عدد ثابت معادله (۱۷۶) بر ۶۷ بخش‌پذیر نیست، معادله جواب ندارد.

مثال ۷. معادله‌ی هم‌نهشتی زیر را حل کنید.

$$۱۳۷۸x \overset{۷۷}{\equiv} ۷$$

حل: با تشکیل جدول H.M معادله را حل می‌کنیم:

$(۱۳۷۸ \overset{۷۷}{\equiv} ۶۹)$

$\times n_i$	۷۷	۶۹	۸	۵	۳	۲	۱
$+c_i$	۱	−۱	۱	−۱	۱	−۱	
$\div a_i$	۶۹	۸	۵	۳	۲	۱	
x_i	(−۲۹)	−۲۶	−۳	−۲	−۱	−۱	

یکی از جواب‌های معادله از بی‌شمار جواب چنین است:

$x_1 = (-29)(7) = -203$

چون جواب مثبت معادله در نظر است، بنابراین، ضریب مثبتی از سنج را به این جواب می‌افزاییم:

$x = 3(77) - 203 = 231 - 203 = 28$; $\boxed{x = 28}$ (جواب اصلی)

مثال ۸. معکوس (وارون ضربی) عدد ۳۴ به پیمانه‌ی ۴۱ را بیابید.

حل: این مسئله با هم‌نهشتی زیر معادل است:

$34x \overset{41}{\equiv} 1$

با تشکیل جدول H.M معادله را حل می‌کنیم: با توجه به جدول، جواب $x_1 = -6$ به دست می‌آید که برای یافتن جواب مثبت، کافی است عددسنج را به آن بیفزاییم:

$\times n_i$	41	34	7	6	1
$+c_i$	1	-1	1	-1	
$\div a_i$	34	7	6	1	
x_i	-6	-5	-1	-1	

$x = 41 - 6 = 35$; $\boxed{x = 35}$

بنابراین، معکوس عدد ۳۴ به پیمانه‌ی ۴۱، عدد ۳۵ است.

تمرین. معادله‌های هم‌نهشتی زیر را حل کنید.

۱) $79x \overset{9}{\equiv} 1$

۲) $1378x \overset{1357}{\equiv} -9$

۳) $1999x \overset{2999}{\equiv} 2000$

حل معادله‌های سیاله خطی چند مجهولی به کمک جدول H.M

$ax + by + cz + \ldots = d$

معادله‌ی سیاله‌ی دو مجهولی به صورت عمومی زیر را در نظر می‌گیریم:

$(a,b) = 1$; $ax + by = c$ (۱)

معادله‌ی ۱ را به صورت معادله‌ی هم‌نهشتی زیر می‌نویسیم:

$(x, y \in Z)$; $ax \overset{b}{\equiv} c$ (۲)

اینک معادله‌ی ۲ را از طریق جدول H.M حل و از آن‌جا مقدار x را تعیین می‌کنیم. سپس از رابطه‌ی $y = \frac{c - ax}{b}$، مقدار y را نیز به دست می‌آوریم.

مثال ۱. معادله‌ی سیال زیر را حل کنید.

$25x - 17y = 3$ (۱)

حل: ابتدا معادله را به صورت معادله‌ی هم‌نهشتی زیر می‌نویسیم:

$25x \overset{17}{\equiv} 3$ (۲)

حال در این‌جا، معادله‌ی هم‌نهشتی ۲ را توسط جدول H.M حل می‌کنیم:

$\times n_i$	17	8	1
$+c_i$	1	-1	
$\div a_i$	8	1	
x_i	-2	-1	

$x_1 = 3(-2) = -6$

$x = 17 - 6 = 11$

$x = 11$; $y = 16$

توجه: با در دست داشتن یک جواب اختصاصی معادله‌ی ۱، می‌توانیم جواب عمومی معادله را بنویسیم. زیرا اگر $\alpha, \beta \in Z$ یک جواب اختصاصی معادله باشد، در این صورت:

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a\alpha + b\beta = c \end{cases};$$

با فرض $(a,b) = 1$، از تفاضل دو معادله‌ی دستگاه خواهیم داشت:

$$y = \beta - \frac{a}{b}(x - \alpha)$$

برای این‌که $y \in Z$، لازم است داشته باشیم:

$$\frac{x - \alpha}{b} = t \in Z \ ; \ x = \alpha + bt$$

بنابراین، با فرض $t \in Z$، جواب‌های معادله‌ی ۱ از معادله‌های زیر به دست می‌آید:

$x = \alpha + bt$, $y = \beta - at$ (۳)

بنابر معادله‌های ۳، جواب عمومی معادله‌ی $25x - 17y = 3$، چنین است:

$x = 11 + (-17)t = 11 - 17t$, $y = 16 - 25t$ $(t \in Z)$

مثال ۲. معادله‌ی سیاله‌ی زیر را حل کنید:

$1340x - 3953y = 469$

حل: ابتدا معادله را به صورت معادله‌ی هم‌نهشتی زیر می‌نویسیم:

$1340x \overset{3953}{\equiv} 469$ (۱)

حال باید حاصل (۳۹۵۳ و ۱۳۴۰) را به دست آوریم :

$\times n_i$	۳۹۵۳	۱۳۴۰	۱۲۷۳	۶۷	۰
$+c_i$	۱	−۱	۱	−۱	

چون سطر اول به صفر ختم شده است، نتیجه می شود که عددهای ۱۳۴۰ و ۳۹۵۳ دارای عامل مشترک ۶۷ هستند :

$(۱۳۴۰, ۳۹۵۳) = ۶۷$

از طرف دیگر، چون ۷ = ۶۷ ÷ ۴۶۹ ، بنابراین معادله ی ۱ را می توان به ۶۷ ساده کرد :

$$۲۰x \overset{۵۹}{\equiv} ۷ \qquad (۲)$$

در این جا، برای حل معادله ی ۲ ، جدول H.M را تشکیل می دهیم :

$\times n_i$	۵۹	۲۰	۱۹	۱
$+c_i$	۱	−۱	۱	
$\div a_i$	۲۰	۱۹	۱	
x_i	۳	۱	۱	

با توجه به جدول می توان نوشت :

$x = ۳ \times ۷ = ۲۱$

با داشتن مقدار x، می توان مقدار y را محاسبه کرد :

$$y = \frac{۲۰x - ۷}{۵۹} = \frac{۲۰(۲۱) - ۷}{۵۹} = \frac{۴۱۳}{۵۹} = ۷$$

بنابراین، جواب عمومی معادله چنین است :

$x = ۲۱ - ۵۹t \ , \ y = ۷ - ۲۰t$

مثال: جواب های صحیح و مثبت معادله ی سیاله ی زیر را به دست آورید :

$$۷x + ۱۱y + ۲۶z = ۱۳۰ \qquad (۱)$$

حل: بزرگ ترین ضریب مجهول ها، ضریب z است.

بنابراین باید داشته باشیم :

$۷ + ۱۱ + ۲۶z \le ۱۳۰ \ ; \ z \le ۴$

پس می توان نوشت :

$$z_1 = ۱ : \ ۷x_1 + ۱۱y_1 = ۱۰۴ \ ; \ ۷x_1 \overset{۱۱}{\equiv} ۱۰۴ \qquad (۲)$$

با تشکیل جدول H.M، خواهیم داشت :

$x_1 = (-۳)(۱۰۴) = -۳۱۲$

$\times n_i$	۱۱	۷	۴	۳	۱
$+c_i$	۱	−۱	۱	−۱	
$\div a_i$	۷	۴	۳	۱	
x_i	−۳	−۲	−۱	−۱	

با توجه به هم‌نهشتی زیر :

$-۳۱۲ \overset{۱۱}{\equiv} ۷$

مقادیر x_1 و y_1 چنین است :

$x_1 = ۷$ و $y_1 = ۵$

به همین ترتیب :

$$z_2 = ۲ : \ ۷x_2 + ۱۱y_2 = ۷۸ \ ; \ ۷x_2 \overset{۱۱}{\equiv} ۷۸ \qquad (۳)$$

در این معادله ی هم‌نهشتی، ضریب مجهول x_2 برابر ۷ و پیمانه ی هم‌نهشتی برابر ۱۱ مطابق با هم‌نهشتی ۲ است. بنابراین، جواب معادله ی ۳ با توجه به جدول H.M اخیر چنین است :

$x_2 = (-۳)(۷۸) = -۲۳۴ \overset{۱۱}{\equiv} ۸ \ , \ y_2 = ۲$

معادله ی ۱ به ازای ۳ = z_3 و ۴ = z_4 ، جواب صحیح ندارد. پس معادله دارای دو دسته جواب اختصاصی (۷,۵,۱) و (۸,۲,۲) است که می توان با استفاده از این جواب های اختصاصی، جواب های عمومی معادله را نیز به دست آورد.



تمرین

۱ . با فرض (۳۹۹,۵۸۹) = d ، عددهای صحیح r و s را چنان بیابید که معادله ی زیر برقرار باشد :

$۳۹۹r + ۵۸۹s = d$

۲ . معادله های سیاله ی زیر را حل کنید.

الف) $۷x + ۵y = ۱۹$

ب) $۱۰x + ۸۶y = ۵۰۰$

ج) $۴x + ۳y - ۵z = ۲$



پی‌نوشت

1. Congruence (سازگاری، موافقت و تطبیق یک شیء با شیء دیگر)

۲ . این نام‌گذاری به دو منظور است : یکی مخفف (Hashemi Moosavi)، نام مبتکر آن و دیگر روش عمل جدول به صورت H.M.

آثار موجود ریاضی بوزجانی

- **کتاب مایحتاج الیه الکتاب و العمال من علم الحساب (کتاب المنازل السبع)**

این کتاب دارای هفت منزل و هر منزل آن دارای هفت باب است. ترجمه‌ی فارسی عنوان‌های منازل آن از این قرار است: منزل اول در نسبت، منزل دوم در ضرب و تقسیم، منزل سوم در مساحت، منزل چهارم در اعمال خراج، منزل پنجم در تصریف (صرّافی) و مقاسمات (تقسیم به نسبت)، منزل ششم در انواع گوناگون حساب که مورد احتیاج دوایر دولتی است، و منزل هفتم در معاملات تجّار.

بوزجانی این کتاب را به نام **عضدالدوله‌ی دیلمی** تألیف کرده است. چند نسخه‌ی خطی از این کتاب در لیدن، قاهره، رامپور و اسکوریال موجود است.

- **کتاب اعمال هندسی**

نسخه‌ی خطی ناقصی از ترجمه‌ی فارسی اعمال هندسی بوزجانی که مترجم آن معلوم نیست، متعلق به کتاب‌خانه‌ی مرکزی دانشگاه تهران (به شماره‌ی ۲۸۷۶) است که چنین شروع می‌شود:
«الحمدلله الموفق علی السداد فی الاقوال و الرشاد فی الاعمال و الصلوة علی نبیه المفضال محمد و آله و خیر آل. این کتاب استاد ابوالوفا محمدبن محمد البوزجانی است و آن‌چه صناع و محترفه به آن محتاج باشند، از اعمال هندسه و این کتاب را کتاب نجارت[1] خوانند و آغازش مترجم از زبان تازی این است. امتثال نمودم فرمان **ملک منصور بهاء الدوله** اطال الله بقاءه در اثبات معانی به حضرت عالی او مذاکرت آن می‌رفت از اعمال هندسی که صناع استعمال بسیار کنند، مجرد گردانیده از علّت و برهان هر عملی تا اهل صناعت آن را به آسانی فهم توانند کرد و طریق استعمال هر بابی بر ایشان آسان باشد و این کتاب بر سیزده باب نهاده‌ام.»

- **رسالة فی ترکیب عدد الوفق فی المربعات**

این رساله مربوط به ترکیب مربعات وفقی است و یک نسخه‌ی خطی آن در ایاصوفیا (به شماره‌ی ۴۸۴۳/۳) موجود است.

- **جواب ابی الوفا محمدبن محمد البوزجانی عمّا سأله الفقیه ابوعلی الحسن بن حارث الحبوبی عن ایجاد مساحة المثلث بدلالة الاضلاع بدون معرفة الارتفاع**

ابوعلی حبوبی از بوزجانی خواسته بود که دستوری برای محاسبه‌ی مساحت مثلث بدون به کار بردن ارتفاع آن تعیین کند. بوزجانی این رساله‌ی مختصر را در جواب او نوشته است.

دستوری که بوزجانی برای محاسبه‌ی مساحت مثلث داده، این است:

$$\sqrt{\left[\left(\frac{c+b}{۲}\right)^{۲}-\left(\frac{a}{۲}\right)^{۲}\right]\left[\left(\frac{a}{۲}\right)^{۲}-\left(\frac{c-b}{۲}\right)^{۲}\right]}$$

در این دستور a، b و c اندازه‌های اضلاع مثلث است. البته در رساله‌ی مذکور دستور بدون به‌کار بردن رمزها و اصطلاحات کنونی و فقط به وسیله‌ی عبارات عربی بیان شده است. مؤلف بعد از اثبات دستور فوق دو دستور دیگر نیز برای تعیین مساحت مثلث بر حسب اضلاع آن می‌دهد که البته با دستور فوق معادل هستند.

- **المدخل الی صناعة الارثماطیقی**

نسخه‌ی خطی این رساله در رامپور موجود است.

- **رسالة فی النسبة و التعریفات**

نسخه‌ی خطی این رساله در کتاب‌خانه‌ی مجلس (به شماره‌ی ۹۶۰۲) و نیز در جزو یک جُنگ در کتاب‌خانه‌ی شخصی آقای **حسن نراقی** در تهران موجود است.

- **رسالة فی جمع اضلاع المربعات و المکعبات**

این رساله را بوزجانی در پاسخ **ابوبشر (یا یحیی) بن سهل منجم تکریتی** نوشته است و نسخه‌ی آن در کتاب‌خانه‌ی آستان رضوی (به شماره‌ی ۵۵۲۱) موجود است.

- **کتاب المجسطی**

بوزجانی خود در مقدمه‌ی مجسطی آن را چنین تعریف کرده است:
«هرچند این موضوع را عده‌ای از دانشمندان متقدم، مانند **ابرخس و ابلونیوس و بطلمیوس** و غیره پیش از این مورد توجه قرار داده‌اند، در این کتاب ما روشی اتخاذ کرده‌ایم که هیچ یک از آنان نکرده‌اند. ما راه وصول به این معلومات را ساده‌تر و کوتاه‌تر کردیم و از روش‌های متداولی که برای متعلمان دشوار بود، مانند شکل قطاع و نسبت مؤلفه، اجتناب ورزیدیم و چنان کردیم که از نزدیک‌ترین و ساده‌ترین راه بتوان این معانی را، که پیش از این وصول به آن‌ها بسیار دشوار بود، به‌دست آورد. علاوه بر این، به روش‌هایی که قدما برای رسیدن به هر یک از این معلومات ایراد کرده بودند، اکتفا نکردیم، بلکه راه‌هایی تازه و برهان‌هایی جدید آوردیم. و هم‌چنین معانی دیگری که در علم هیئت مورد احتیاج شدید است و قدما آن‌ها را ذکر نکرده بودند، به آن‌ها افزودیم. و نیز استدلال‌های هندسی را از اعمال حسابی جدا ساختیم تا اگر مهندسان و محاسبانی باشند که هر یک به فن دیگری آشنایی نداشته باشد، بتوانند به تنهایی کتاب را مورد استفاده قرار دهند و کسی که در هر دو فن دست دارد، از هر دو بهره‌مند گردد.»

پی‌نوشت

۱. این کلمه را نویسندگان فهرست‌ها «تجارت» خوانده‌اند که به هیچ روی در این مقام مناسبت ندارد و معنی نمی‌دهد. به گمان من این کلمه بدون تردید «نجارت» است. نجارت (به کسر نون و فتح را) به معنی درودگری و نجاری است. به قول مرحوم دکتر معین (در تعلیقات چهار مقاله، ص ۲۵۷) در ادبیات عربی و فارسی گاه «مهندس» به نجار ماهر اطلاق شده و «نجّار» به مهندس عالی مقام. ابن العبری، «ابولونیوس» و «اقلیدس» را ـ که هر دو مهندس بودند ـ به لقب نجّار خوانده است و خاقانی به عکس پدر خود ـ علی نجار ـ را مهندس نامیده... ادوارد براون در ترجمه‌ی انگلیسی چهارمقاله، صفحه‌ی ۶۲، نجار را در این موضع geometrician (هندسه‌دان ـ مهندس) ترجمه کرده است. به همین روش، کتاب اعمال هندسی بوزجانی «کتاب نجارت» خوانده شده است؛ یعنی «کتاب مهندسی».



یا اباصالح المهدی
مرا به جشن بزرگ ظهورت دعوت کن
ای خجسته ترین صبح انتظار!

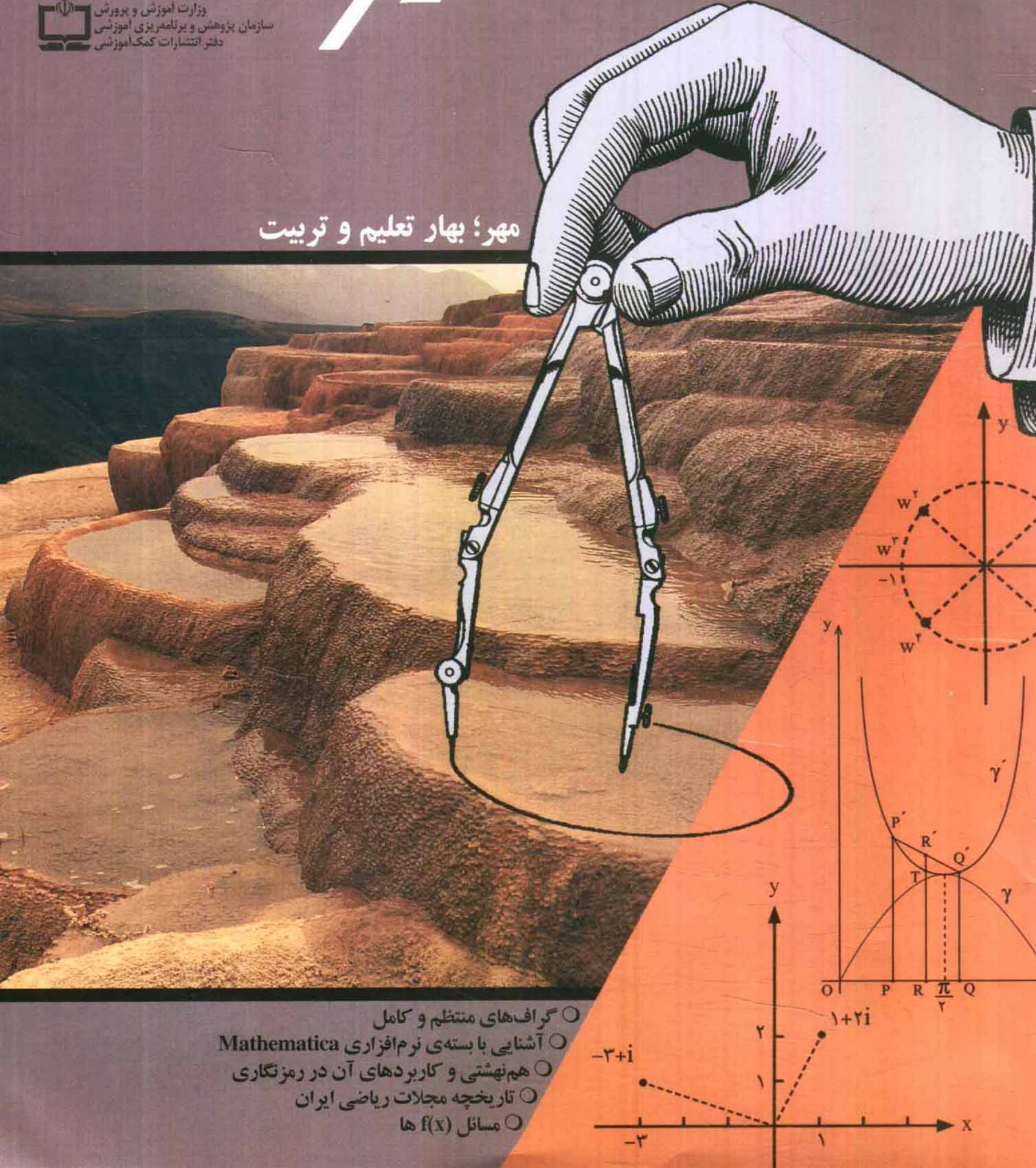
رشد برهان ۶۷

دوره‌ی بیستم/ پاییز ۱۳۸۹/ شماره‌ی ۱/ ٦٤ صفحه/ ۵۰۰۰ ریال
فصلنامه‌ی آموزشی، تحلیلی و اطلاع‌رسانی
www.roshdmag.ir

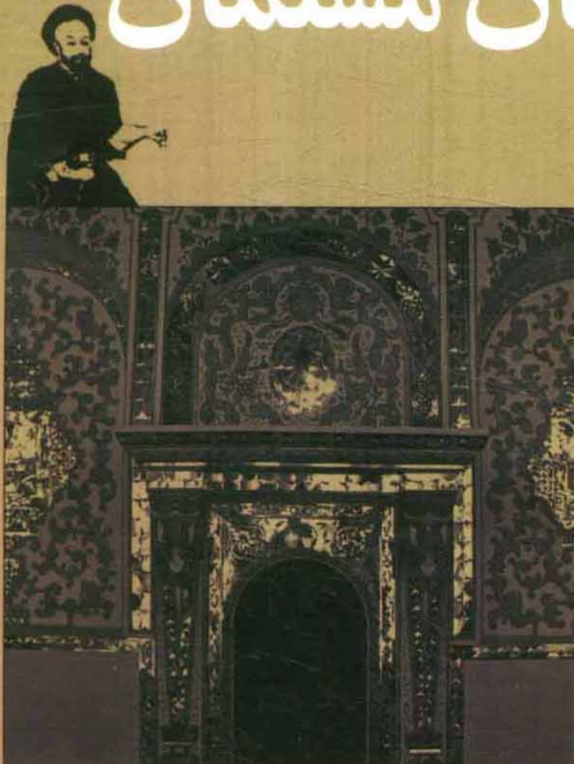
مجله‌ی ریاضی
دوره‌ی آموزش متوسطه

وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی
دفتر انتشارات کمک‌آموزشی

مهر؛ بهار تعلیم و تربیت



ریاضی‌دانان مسلمان



شیخ بهایی

بهاءالدین عاملی یا شیخ بهایی. محمدبن حسین بهاءالدین عاملی، متخلص به بهایی و معروف به شیخ بهایی، دانشمند معروف و ریاضی‌دان، که به سال ۹۵۳ در بعلبک متولد شد و در سال ۱۰۳۱ در اصفهان وفات یافت.

کتاب شیخ بهایی در ریاضی، به نام خلاصه‌الحساب است، که کتابی است درسی در ریاضیات مقدماتی که شرح‌های متعددی به زبان‌های عربی و فارسی بر آن نگاشته‌اند و چاپ‌های متعددی در ایران، ترکیه، هندوستان و سوریه از آن به عمل آمده است. این کتاب، در ۱۸۴۳ به آلمانی و در ۱۸۴۶ به فرانسوی ترجمه شد.

کتاب وی در نجوم، تشرح‌الافلاک نام دارد که خلاصه‌ای است در علم هیأت، که بر آن نیز شرح‌ها و حاشیه‌های متعدد نوشته شده است.



بیرونی

بیرونی، ابوریحان محمدبن احمد بیرونی، ریاضی‌دان، منجّم و دانشمند ایرانی که در سوم ذیحجه‌ی سال ۳۶۲ در بیرون خوارزم، پا به عرصه‌ی وجود گذاشت و به سال ۴۴۲ درگذشت.

وی یکی از نوابغ روزگار و یکی از بزرگ‌ترین مفاخر دنیای علم و تحقیق است.

بیرونی ریاضی‌دانی زبردست و مبتکر بود که علاوه بر آن، سیّاحی زیرک و نکته‌سنج شد و کتاب معروف تحقیق ماللهند را در لهجه‌های محلی و معارف و فلسفه‌ی هندیان نگاشت.

بیرونی، آخرین اثر خود به نام الصیدنه فی الطب را که درباره‌ی داروهای طبی است، در سنی متجاوز از هشتاد سالگی نوشته است.

بعضی از آثار ریاضی موجود بیرونی عبارت است از:

۱. کتاب التفهیم لاوائل صناعه‌التنجیم، که بیرونی آن را به دو زبان فارسی و عربی نوشته است.

۲. کتاب مقالید علم‌الهیئه که یکی از مهم‌ترین آثار ریاضی بیرونی و نخستین کتاب مستقل «مثلثات کروی» است، که نام کامل آن مقالید علم‌الهیئه مایحدث فی سطح‌الکره است.

۳. مقاله‌ی سوم، کتاب قانون مسعودی، که یکی از مهم‌ترین و مفصل‌ترین آثار او است.

منبع: فرهنگ ریاضیات/ گروه ریاضی انتشارات مدرسه/ انتشارات مدرسه‌ی برهان

بسم الله الرحمن الرحیم

رشد برهان ۶۷
مجله‌ی ریاضی
دوره‌ی آموزش متوسطه

وزارت آموزش‌وپرورش
سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی
دفتر انتشارات کمک آموزشی

فصلنامه‌ی آموزشی، تحلیلی و اطلاع‌رسانی
دوره‌ی بیستم/ شماره‌ی ۱/ پاییز ۱۳۸۹

سال همت مضاعف، کار مضاعف

● مدیر مسئول: **محمد ناصری** ● سردبیر: **حمیدرضا امیری**
● مدیر داخلی: **میرشهرام صدر** ● طراح گرافیک: **جعفر وافی**
● هیئت تحریریه: **حمیدرضا امیری، محمد هاشم رستمی، احمد قندهاری، میرشهرام صدر، هوشنگ شرقی، سید محمدرضا هاشمی موسوی، غلامرضا یاسی‌پور**
و با تشکر از همکاری ارزنده‌ی **استاد پرویز شهریاری**
● ویراستار ادبی: **لعیا عروجی**
● **پایگاه اینترنتی:** www.roshdmag.ir
● **رایانامه:** Borhanm@roshdmag.ir
● **پیام‌گیر نشریات رشد:** ۰۲۱ ـ ۸۸۳۰۱۴۸۲
نشانی دفتر مجلّه: تهران، صندوق پستی ۱۵۸۷۵/۶۵۸۵
● **تلفن دفتر مجله:** ۰۲۱ـ ۸۸۳۰۵۸۶۲
● **تلفن امور مشترکین:** ۰۲۱ـ ۷۷۳۳۶۶۵۵ ـ ۷۷۳۳۶۶۵۶
● **شمارگان:** ۱۳۰۰۰ نسخه
● چاپ: **شرکت افست (سهامی عام)**

رشد برهان متوسطه، تمامی دبیران محترم و دانش‌آموزان عزیز را در زمینه‌های زیر به همکاری دعوت می‌کند:

● نگارش مقاله‌های کمک درسی (شرح و بسط رفع مشکلات مبحث درسی کتاب‌های ریاضی دوره‌ی متوسطه و پیش‌دانشگاهی)
● طرح مسائل کلیدی به همراه حل آن‌ها (برای دانش‌آموزان)
● طرح مسائل مسابقه‌ای به همراه حل آن‌ها (برای دانش‌آموزان)
● طرح معماهای ریاضی
● نگارش یا ترجمه‌ی مقاله‌های عمومی ریاضی (مانند تاریخ ریاضیات، زندگینامه‌ی علمی و اجتماعی ریاضی دانان، نکته‌های تازه و لطیف ریاضیات، آموزش ریاضیات، آموزش کامپیوتر و...)

سرمقاله

«هذا من فضل ربّی»

وقتی برای چاپ اولین شماره‌ی مجله‌ی ریاضی رشد برهان و تولد این مجله، اولین جلسه‌ی هیئت تحریریه تشکیل شد و برای نام مجله، هریک از اعضا پیشنهادی دادند، استاد **پرویز شهریاری** نام برهان را به زبان آورد و این کلمه را خیلی با معنی و برای مجله‌ی ریاضی مناسب دانستند همه‌ی اعضای هیئت تحریریه نیز به اتفاق با این نام موافقت کردند و سرانجام این نام که هم یک اصطلاح ریاضی و هم یک واژه‌ی قرآنی است، برای مجله انتخاب شد.

از آن روزها حدود ۲۰ سال می‌گذرد و در آستانه‌ی ورود به بیستمین سال انتشار این مجله هستیم؛ مجله‌ای که در طول این ۲۰ سال فراز و نشیب‌های بسیاری را پشت سر گذاشته است و چه بسیار دانش‌آموزانی که از خوانندگان این مجله بوده‌اند و الآن در مشاغل گوناگون مشغول خدمت هستند. حتی تعدادی از این عزیزان، هنوز با مجله ارتباط دارند و آن را مطالعه می‌کنند. شما هم از هر کجا که در زمره‌ی علاقه‌مندان و خوانندگان این مجله قرار گرفته‌اید، می‌توانید با حفظ و نگه‌داری شماره‌های این مجله، جزو کسانی باشید که پس از حداکثر چهار سال دیگر که ان‌شاءالله وارد دانشگاه شدید، هم‌چنان با ما ارتباط داشته باشید (البته دفتر انتشارات کمک آموزشی در نظر دارد، تمام شماره‌های ۱ تا آخرین شماره‌ی امسال را در یک لوح فشرده در اختیار علاقه‌مندان قرار دهد).

به هر صورت ادامه‌ی کار مجله و رسیدن آن به ۲۰ سالگی در درجه‌ی اول مرهون لطف و فضلِ الهی بوده و در درجه‌ی دوم مدیون زحمات اعضای محترم هیئت تحریریه و مدیران مسئول و پشتیبانی شما خوانندگان عزیز که همواره پیشنهادات و انتقادات سازنده و راه‌گشایتان توشه‌ی راه ما بوده و خواهد بود.

از شما دانش‌آموزان که مخاطبان اصلیِ این مجله هستید، درخواست دارم که با مجله ارتباط بگیریم (از طریق ارسال نامه یا سایت) و هیئت تحریریه را با نظرات، پیشنهادات و انتقادات خود آشنا کنید. شاید سؤالات زیر بتواند سمت و سوی مناسب‌تری برای ایجاد این ارتباط فراهم سازد:

۱. چند درصد از مقالات و مطالب مجله برای شما قابل استفاده است؟
۲. از چه مقاله یا مطلبی بیشتر استفاده کردید؟
۳. آیا مطالب عمومی مانند تاریخ ریاضیات، مسئله، سرگرمی و... برای شما قابل استفاده بوده است؟
٤. کدام‌یک از مقالات از نثر روان‌تری برخوردار بوده است؟
٥. کدام مقاله کمک درسی، خودآموزتر از بقیه بیان شده است؟
٦. آیا جای مقاله یا مطلبی را در مجله خالی می‌بینید؟
۷. گرافیک مجله (صفحه‌آرایی، تیترها، طرح‌ها و...) را چگونه ارزیابی می‌کنید؟
۸. دست‌یابی شما به مجله از چه طریقی است و برای تهیه‌ی آسانِ آن چه پیشنهادی دارید؟
۹. آیا «سرمقاله‌ی» هر شماره را مطالعه کرده‌اید؟ چقدر برای شما سودمند بوده است؟
۱۰. آیا معلمین شما از این مجله استفاده می‌کنند و آن را می‌شناسند؟
۱۱. چرا برای ما مقاله یا مسئله ارسال نمی‌کنید؟
۱۲. اگر قبلاً هم این مجله را مطالعه کرده‌اید و خاطره یا نکته‌ی مهمی در ارتباط با مجله دارید، برای ما بفرستید.

در خاتمه، سال تحصیلی بسیار خوب و پر از موفقیتی برای همه‌ی شما عزیزان دانش‌آموز آرزو دارم و از درگاه حضرت حق، توفیق روزافزون برای شما خواستارم.

والسلام ـ سردبیر



ریاضیات در ایران (۸)

پرویز شهریاری

کلیدواژه‌ها
پورسینا، ابوعلی‌سینا، ابوعبداله‌جوزانی، رساله‌های ریاضی پورسینا

پورسینا

بوعلی حسین، فرزند عبداله فرزند سینا که غالباً او را فرزند سینابوعلی می‌نامند، نزد اروپاییان به آوسین شهرت دارد. او در سال ۹۸۰ میلادی، در نزدیکی‌های «بخارا» متولد شد و در سال ۱۰۳۷ میلادی در همدان درگذشت. اکنون مقبره‌اش در همدان است.

پورسینا هم فیلسوف و پزشک بود و هم ریاضی‌دان و اخترشناس؛ دانشمند مشهوری که برای شرح زندگی او، باید به نوشته‌ی خودش که سرگذشت ۳۰ سال نخست زندگی‌اش را نوشته و نوشته‌ی شاگردش، از روزی که به نزد او آمد و تا آخر عمر که با او بود، مراجعه کرد.

«پدرم مردی بود از اهل بلخ و از آن‌جا به بخارا رفت. در زمان نوح‌بن منصور، او کارهای دیوانی را انجام می‌داد. پدرم دختری از اهل قریه بخواست و در آن‌جا بماند. من و برادرم همان‌جا به‌دنیا آمدیم... پدرم مرا نزد مردی فرستاد که سبزی فروختی و در ضمن حساب هندی هم می‌دانست تا از وی تعلیم یابم ... پدرم، ابوعبداله ناتلی را که دعوی فلسفه می‌کرد، به خانه‌ی ما آورد به این امید که از او فلسفه بیاموزم... تا آن که منطق را خواندم ... بعد از آن خودم کتاب ها را مطالعه می‌کردم تا دانش منطق را محکم ساختم ... در این حال، ناتلی از ما مفارقت کرد... در این وقت شانزده سال داشتم ... پس از این پدرم فوت شد.»

ابوعلی‌سینا در سال ۴۰۴ به ری و سپس از ری در سال ۴۰۵ به قزوین و سپس همدان نزد شمس‌الدوله دیلمی رفت و در آن‌جا قرار یافت. او به ریاضیات و اخترشناسی کمتر پرداخته است، با وجود این کتاب‌های ریاضیات و اخترشناسی او را معرفی می‌کنم.

پورسینا به ریاضیات بیشتر از جنبه‌ی فلسفی می‌نگریست. او «اصل‌های اقلیدسی» را به عربی ترجمه کرده است. هم‌چنین، طرح نه‌نه را برای عددها و استفاده از آن را برای جذر و کعب بیان کرده است (در همدان).

مفهوم‌های عمده‌ی فیزیکی مثل حرکت، نیرو، اصطکاک، نور و حرارت را نیز بررسی کرده است. کراوره می‌گوید: رساله‌ای نوشته است و «احکام نجوم» را در آن ابطال کرده‌است که چند نسخه‌ی خطی از آن وجود دارد.

ابوعبداله جوزانی که شاگرد پدر سینا بود، سرگذشتی برای پورسینا نوشته است.

«... در مجسطی ده شکل در اختلاف منظر ایراد کرد و در آخر مجسطی در دانش اخترشناسی چیزهایی آورد که سابق بروی کسی اثبات به آن‌ها ننموده بود. و در اقلیدس شبهه‌ای چند ایراد کرد ... و در موسیقی مسئله‌ها افزود که از آن غافل بودند.

مهم‌ترین نوشته‌های پورسینا، یعنی نوشته‌های ریاضی و اخترشناسی همان است که خود پورسینا در کتابی از آن‌ها یاد کرده است. این کتاب به زبان آلمانی هم برگردان شده است. در حال حاضر این رساله‌ها از پورسینا در دست هستند.

۱. رساله‌ای درباره‌ی زاویه‌ها که از آن یک نسخه‌ی خطی موجود است.

۲. رساله‌ای تحقیقی و هندسه و از آن دو نسخه موجود است.

۳. رساله‌ای برای دیدن ستارگان که یک نسخه‌ی خطی از آن در مشهد است و نسخه‌های خطی دیگری در «ایاصوفیه» و «بریتیش میوزیوم» موجود است. در کتاب خانه‌ی مرکزی دانشگاه تهران نیز فیلمی از آن وجود دارد.

۴. قانون عمل خورشید و ماه و زمان‌های شب و روز که تنها یک نسخه از آن در «اسکوریال» موجود است.

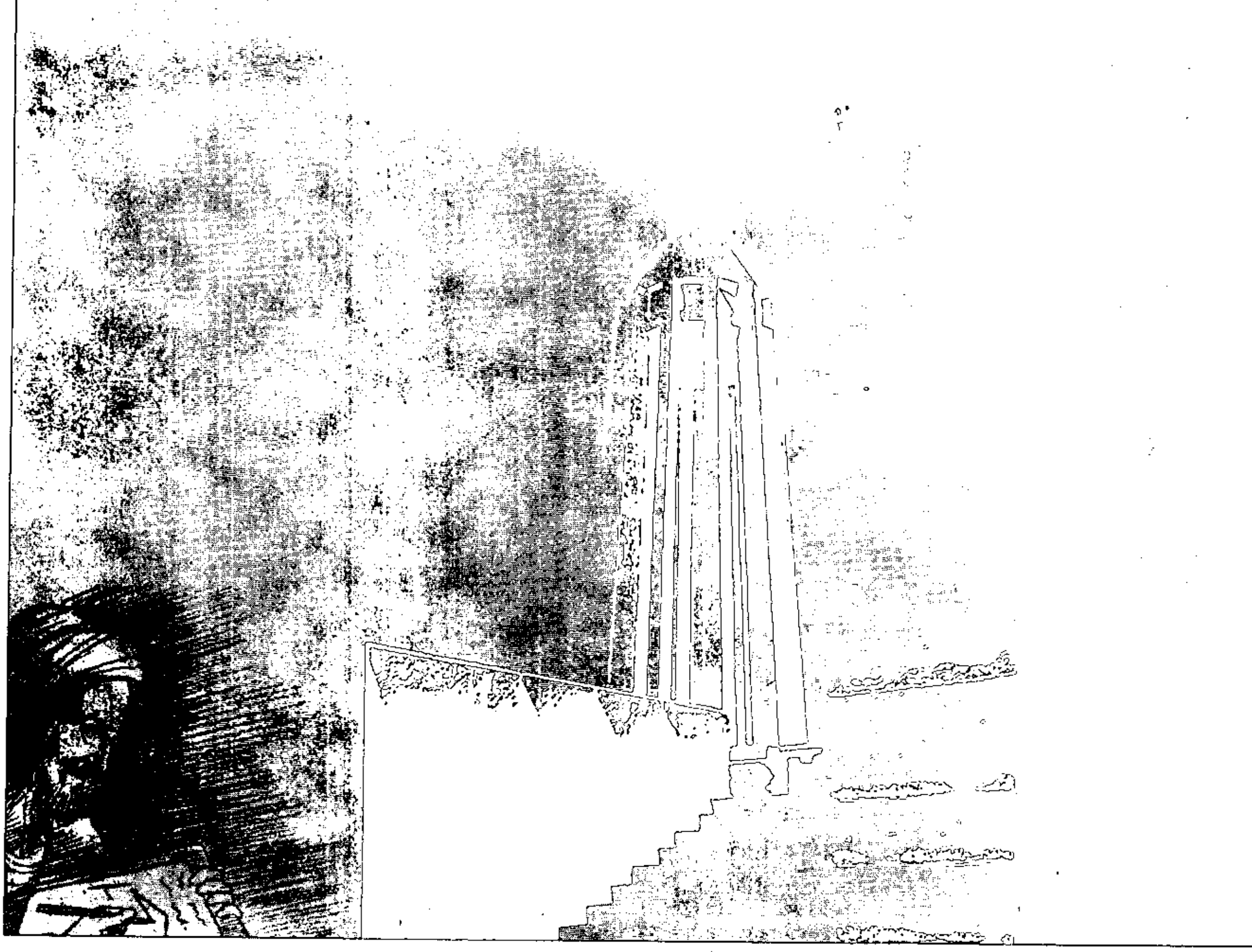
۵. رساله‌ای که پورسینا در جرجانیه برای احمدبن محمدسهلی نوشته است و چند نسخه خطی از آن موجود است.

۶. رساله‌ای درباره‌ی دانش اخترشناسی و از آن چند نسخه‌ی خطی وجود دارد.

۷. کوتاه شده‌ای از مجسطی که از آن یک نسخه در پاریس و یک نسخه هم در «آکسفورد» موجود است.

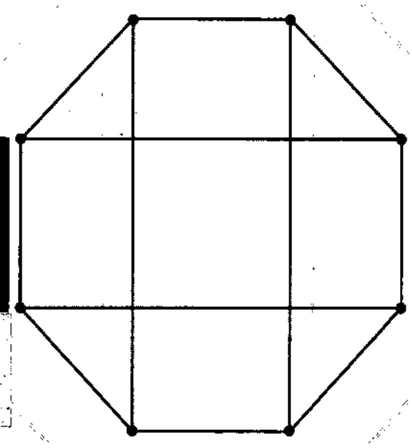
پی‌نوشت

۱. این مقاله را قبل از مطالب دیگری که در نظر داشتم، نوشتم و شامل همان چیزهایی است که پورسینا درباره‌ی ریاضیات و اخترشناسی نوشته است.



گراف‌های منتظم و کامل

حمیدرضا امیری



کلید واژه‌ها:
گراف منتظم، گراف کامل، تعداد یال‌های گراف کامل، مسائل گراف‌های کامل و منتظم

گراف منتظم

اگر در یک گراف از مرتبه‌ی[1] p، درجه‌ی[2] همه‌ی رأس‌ها با هم برابر باشند، چنین گرافی منتظم است و اگر درجه‌ی رأس‌ها برابر با عدد حسابیِ r باشند، آن را گراف r- منتظم می‌نامیم. به بیان دیگر، اگر بزرگ‌ترین درجه‌ی رئوس یک گراف را ماکزیمم درجه‌ی گراف و کوچک‌ترین درجه‌ی رئوس یک گراف را مینی‌مم درجه‌ی گراف بنامیم، و آن‌ها را به ترتیب با Δ و δ نمایش دهیم، داریم:

G گرافی r- منتظم است. $\Leftrightarrow \Delta = \delta = r$

از طرف دیگر، با توجه به قضیه‌ی کتاب درسی که بیان می‌کند: «مجموع درجات رئوس یک گراف از مرتبه‌ی p و اندازه‌ی[3] q همواره دو برابر تعداد یال‌های آن گراف است»، می‌توان نتیجه گرفت که «در هر گراف r- منتظم از مرتبه‌ی p و اندازه‌ی q، همواره داریم: $pr = ۲q$». بنابراین در هر گراف r- منتظم با مفروض بودنِ r، همواره رابطه‌ای بین q و p برقرار است و اگر یک معادله‌ی دیگر برحسب p و q مفروض باشد، با حل دستگاه دو معادله، دو مجهول p و q محاسبه می‌شوند.

مثال: در یک گراف ۴- منتظم از مرتبه‌ی p و اندازه‌ی q، داریم: $۵p - ۳q = -۹$. مجموع درجات رئوسِ این گراف را بیابید.

حل:

$$\begin{cases} ۴p = ۲q \\ ۵p - ۳q = -۹ \end{cases} \overset{q=۲p}{\Rightarrow} ۵p - ۶p = -۹ \Rightarrow p = ۹$$

$$q = ۲p = ۲ \times ۹ = ۱۸$$

$\Rightarrow$ مجموع درجات رئوس $۲q = ۳۶$

گراف کامل

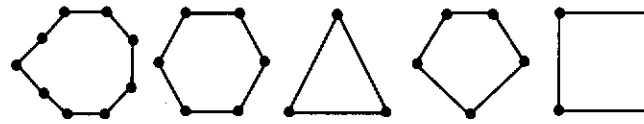
گراف‌های کامل، دسته‌ی خاصی از گراف‌های منتظم محسوب می‌شوند و همان‌طور که از اسم آن‌ها می‌توان دریافت، گراف‌هایی هستند که اندازه‌ی آن‌ها کامل است. گراف کامل از مرتبه‌ی p که با K_p نمایش داده می‌شود، گرافی است که درجه‌ی هر رأسِ آن $(p-۱)$ باشد. به عبارت دیگر، «هر گراف $(p-۱)$ - منتظم از مرتبه‌ی p را کامل می‌گوییم». بنابراین در هر گراف کامل از مرتبه‌ی P داریم:

$$rp = ۲q \overset{r=p-۱}{\Rightarrow} p(p-۱) = ۲q$$

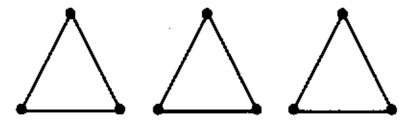
$$\Rightarrow q = \frac{p(p-۱)}{۲}$$

همان‌طور که ملاحظه می‌کنید، q حداکثر مقدار خودِ را دارد. زیرا q تعداد یال‌های یک گراف از مرتبه‌ی p است که چون مجموعه‌ی یال‌های یک گراف شامل زیرمجموعه‌های دو عضویِ مجموعه‌ی رأس‌های آن است و تعداد کل زیرمجموعه‌های دو عضویِ یک مجموعه‌ی p عضوی برابر است با: $\binom{p}{۲} = \frac{p(p-۱)}{۲}$، پس q در گراف کامل، حداکثر است.

یک نکته‌ی مهم: گراف‌های r- منتظم از مرتبه‌ی p که $r < p-۱$، در بسیاری از موارد منحصر به‌فرد نیستند، ولی گراف‌های کامل از هر مرتبه، منحصر به‌فردند. برای مثال، گراف‌های ۲- منتظم از مرتبه‌ی ۹ را رسم کرده‌ایم که تعداد آن‌ها ۴ عدد است، اما تعداد گراف‌های کامل از مرتبه‌ی ۹ فقط یکی است.



G۲: ۴ و ۵ ضلعی فاقد قطر　G۳: ۳ و ۶ ضلعی فاقد قطر　G۱: ۹ ضلعی بدون قطر



G۴: سه تا ۳ ضلعی

(G۱ و G۲ گراف‌های دو بخشی و G۳ گراف سه‌بخشی هستند.)

تمرین: تعداد گراف‌های ۳- منتظم از مرتبه‌ی ۱۲ را بیابید و آن‌ها را رسم کنید. (جواب: ۴ گراف)

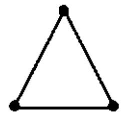
در جدول زیر، به‌دلیل اهمیت و موارد استفاده‌ی بسیار، تعداد یال‌های گراف‌های کامل از $K_۱$ تا $K_{۱۱}$ آمده است:

گراف K_p	(تعداد یال‌ها) $q=\frac{p(p-۱)}{۲}=\binom{p}{۲}$
$K_۱$	۰
$K_۲$	$\binom{۲}{۲}=۱$
$K_۳$	$\binom{۳}{۲}=۳$
$K_۴$	$\binom{۴}{۲}=۶$
$K_۵$	$\binom{۵}{۲}=۱۰$
$K_۶$	$\binom{۶}{۲}=۱۵$
$K_۷$	$\binom{۷}{۲}=۲۱$
$K_۸$	$\binom{۸}{۲}=۲۸$
$K_۹$	$\binom{۹}{۲}=۳۶$
$K_{۱۰}$	$\binom{۱۰}{۲}=۴۵$
$K_{۱۱}$	$\binom{۱۱}{۲}=۵۵$

مثال: در گراف کامل K_p، اگر داشته باشیم: $p = q$، این گراف را رسم کنید.

$$\begin{cases} q=\frac{p(p-۱)}{۲} \\ q=p \end{cases} \Rightarrow p=\frac{p(p-۱)}{۲} \Rightarrow$$

$$۲p=p(p-۱) \Rightarrow (p-۱) \overset{p\neq ۰}{=} ۲ \Rightarrow p=۳$$



مثال: اگر گراف G دارای ۳۸ یال باشد، این گراف حداقل چند رأس دارد؟

حل: برای پاسخ‌گویی به این نوع سؤال‌ها کافی است مشخص کنیم تعداد یال‌های گراف موردنظر بین تعداد یال‌های کدام دو گرافِ کامل قرار دارد! در این مثال داریم: $\binom{۹}{۲} < ۳۸ < \binom{۱۰}{۲}$. به عبارت دیگر، با ۹ رأس حداکثر ۳۶ یال می‌توان تعریف کرد. لذا برای تعریف دو یال دیگر، به‌حداقل یک رأسِ دیگر نیاز داریم. پس جواب این سؤال عدد ۱۰ است. درواقع گراف G با نزدیک‌ترین گراف کامل از نظر تعداد یال مقایسه شد.

تذکر مهم: مقایسه کردنِ یک گراف با گراف کاملِ نزدیک به آن، روشی است که مسائل دیگری را نیز می‌توان توسطِ آن حل کرد. چون گراف‌های کامل گراف‌های خاص و منحصر به‌فردی هستند، گاهی حذفِ یک یا چند یال از یک گراف کامل می‌تواند راه‌گشا باشد. به مثال‌های زیر توجه کنید:

مثال: گراف G از مرتبه‌ی ۹ دارای ۳۵ یال است، این گراف چند رأس از درجه‌ی ۸ (از درجه‌ی ماکزیمم) و چند رأس از درجه‌ی مینی‌مم دارد؟

حل: می‌دانیم $K_۹$ دارای ۳۶ یال است، لذا اگر یک یال از $K_۹$ حذف کنیم، گراف G حاصل می‌شود. واضح است که اگر از $K_۹$ یک یال حذف شود، دو رأسِ آن آسیب می‌بینند و از درجه‌ی ۸ به درجه‌ی ۷ تنزّل پیدا می‌کنند! بنابراین، گراف G دارای ۷ = ۲ - ۹ رأس از درجه‌ی ماکزیمم و دو رأس از درجه‌ی مینی‌مم دارد.

مثال: گراف G از مرتبه‌ی ۸ دارای ۲۶ یال است. این گراف حداقل و حداکثر چند رأس از درجه‌ی ماکزیمم است؟

حل: در این مثال باید ۲ یال از گراف $K_۸$ حذف کنیم تا گراف G حاصل شود. حذف این دو یال به دو صورت امکان‌پذیر است: یا هر دو یال را از یک رأس حذف کنیم (۳ رأس آسیب می‌بیند)، و یا دو یال را طوری حذف کنیم که رأس مشترک نداشته باشند (۴ رأس آسیب می‌بیند).

در حالت اول از یک رأس دو درجه و از دو رأس دیگر هرکدام ۱ درجه کم می‌شود و گرافی دارای ۵ رأسِ ماکزیمم (از درجه‌ی ۷) و ۱ رأس مینی‌مم (از درجه‌ی ۵) خواهیم داشت.

در حالت دوم نیز تعداد رأس‌های ماکزیمم (از درجه‌ی ۷) برابر است با: ۴ = ۴−۸. ۴ رأس نیز از درجه‌ی مینی‌مم (از درجه‌ی ۶) در گراف موجود است.

مثال: گراف G از مرتبه‌ی ۱۰ دارای ۴۲ یال است. اگر در این گراف داشته باشیم: ۱ = (δ - Δ)، در این‌صورت گراف G چند رأس ماکزی‌مم و چند رأس مینی‌مم دارد؟

حل: بدیهی است که اگر از K_{10} که ۴۵ یال دارد، ۳ یال حذف کنیم، گرافی با تعداد یال‌های برابر با G به‌دست می‌آید. اما چون طبق فرض ۱ = δ − Δ، حذف این سه یال باید به‌گونه‌ای باشد که از هیچ رأسی دو یال حذف نشود. زیرا در این‌صورت خواهیم داشت: ۲ = δ − Δ که خلاف فرض است. پس سه یال حذف شده نباید رأس مشترک داشته باشند که در این‌صورت، درجه‌ی ۶ یال هرکدام ۱ درجه کاهش می‌یابد و ۴ = ۶−۱۰ رأس از درجه‌ی ماکزیمم (از درجه‌ی ۹) و ۶ رأس از درجه‌ی مینی‌مم (از درجه‌ی ۸) در گراف G موجود است.

تمرین: مثال قبل را با فرض ۲ = δ − Δ حل کنید.

تذکر مهم: یکی دیگر از کاربردهای گراف‌های کامل در تعیین ماکزیمم تعداد یال‌های یک گراف چندبخشی است که در مثال‌های زیر به آن می‌پردازیم.

مثال: گراف G از مرتبه‌ی ۷ گرافی دو بخشی است. این گراف حداکثر چند یال می‌تواند داشته باشد؟

حل: توجه داریم که رأس ایزوله یا تنها، یک بخش محسوب می‌شود. برای مثال، گراف‌های •• و •/• هر یک دو بخشی هستند. در این مثال اگر بخواهیم گرافی دوبخشی با ۷ رأس و حداکثر یال داشته باشیم، کافی است یک رأس از ۷ رأس را ایزوله کنیم و با ۶ رأس دیگر یک گراف کامل (K_6) بسازیم. در این حالت $\binom{6}{2}=15$ یال برای گراف حاصل می‌شود که این تعداد یال ماکزیمم خواهد بود.

تمرین: گراف G از مرتبه‌ی ۱۰ از سه بخش تشکیل یافته است. این گراف حداکثر چند یال دارد؟ (جواب: $\binom{8}{2}=28$)

مثال: گراف G از مرتبه‌ی ۱۲ فقط دارای دو رأس ایزوله است و از چهار بخش تشکیل یافته است. این گراف حداکثر چند یال می‌تواند داشته باشد؟

حل: از ۱۲ رأسِ گراف G، دو رأس را به‌صورت ایزوله کنار می‌گذاریم و بین دو رأس دیگر یک یال رسم می‌کنیم و با ۸ رأس باقی‌مانده، یک گراف کامل تشکیل می‌دهیم. در این حالت، گراف G دارای ماکزیمم تعداد یال، یعنی $\binom{8}{2}+1=29$ یال است.

گراف G ← K_8 

مثال: گراف G از مرتبه‌ی ۱۴ دارای چهار بخش است و داریم: ۱ = δ. این گراف حداکثر چند یال دارد؟

حل: گراف G طبق فرض رأس ایزوله ندارد و به‌صورت زیر است.

گراف G → K_8 

تعداد یال‌های G : $\binom{8}{2}+3=31$

مثال: گراف G از مرتبه‌ی ۱۸ دارای سه بخش است. اگر در این گراف داشته باشیم: ۲ = δ، در این‌صورت Gحداکثر چند یال می‌تواند باشد؟

حل: طبق فرض، گراف G رأس ایزوله و رأس از درجه‌ی یک ندارد و باید به شکل زیر باشد:

گراف G ← K_{12} 

تعداد یال‌های G : $\binom{12}{2}+6=66+6=72$

مثال: گراف G از مرتبه‌ی P_1 دارای K بخش است. اگر در این گراف داشته باشیم: $\delta = P_2$، در این‌صورت G حداکثر چند یال می‌تواند داشته باشد؟

حل: گراف G باید دارای (K−1) بخش با حداکثر یال و $\delta = P_2$ باشد که (K−1) گراف کامل از مرتبه‌ی(P_2+1) است و یک بخشِ کامل از مرتبه‌ی رأس‌های باقی مانده که تعداد رأس‌های باقی‌مانده برابر است با:

$$P = P_1 - \left[(K-1)\times(P_2+1)\right]$$

حداکثر تعداد یال‌های چنین گرافِ K بخشی برابر است با:

تعداد یال‌های G : $\binom{P}{2}+(K-1)\times\binom{P_2+1}{2}$

تمرین: از گراف‌های کامل برای به‌دست آوردن شرط هم‌بندی و ناهم‌بندی چگونه می‌توان استفاده کرد؟

پی‌نوشت

۱. مرتبه‌ی گراف: تعداد رأس‌های یک گراف را مرتبه‌ی آن گراف می‌گوییم.

۲. درجه‌ی یک رأس: تعداد یال‌هایی که از یک رأس عبور می‌کنند، درجه‌ی آن رأس نامیده می‌شود.

۳. اندازه‌ی گراف: تعداد یال‌های یک گراف را اندازه‌ی آن گراف می‌گوییم.



تاریخچه‌ی مجلات ریاضی ایران(۲)

غلامرضا یاسی‌پور

کلید واژه‌ها: مسائل هندسه، اصل تسهیل، اصل تمثیل، اصل پویایی

اشاره:
از شماره‌ی ۲ الی ۲۷ برهان متوسطه، سلسله مقاله‌هایی با عنوان «تاریخچه‌ی مجلات ریاضی در ایران» به قلم استاد یاسی‌پور در مجله به چاپ می‌رسید که بنا به استقبال خوانندگان محترم و تأیید هیأت تحریریه از شماره‌ی ۶۶ مجله، دنباله‌ی این مقالات در برهان از سر گرفته شد. در این شماره استاد به معرفی مجله‌ی کوانتوم پرداخته و یک مقاله خواندنی و جذاب از آن را انتخاب کرده‌اند.

یکی دیگر از مجلات ریاضی، مجله‌ی «کوانتوم» است مجله‌ای که خوش درخشید، ولی دولت مستعجل بود. از این مجله تنها یک شماره در پاییز ۱۳۷۲ به چاپ رسید و عدم انتشار آن به علت فوت صاحب امتیاز آن بود.

صاحب امتیاز و مدیر مسئول: دکتر محمد رجبی‌طرخورانی، استاد دانشکده‌ی علوم دانشگاه تهران و سردبیر: غلامرضا یاسی‌پور

هیئت تحریریه: محمّد رجبی‌طرخورانی، پرویز شهریاری، سیّدحسین سیّدموسوی، مجید ملکان و غلامرضایاسی‌پور

ویراستار ریاضی: غلامرضایاسی‌پور

ویراستار فیزیک: مجید ملکان

در سرمقاله‌ی مجله چنین آمده است:

«در اواخر دهه‌ی ۱۹۶۰، شش تن از اعضای برجسته‌ی فرهنگستان علوم شوروی، از جمله کاپیتسا و کولموگوروف، طی نامه‌ای به عالی‌ترین مرجع اداره‌ی کشور، پیشنهاد نشر ماهنامه‌ی ریاضی ـ فیزیک کوانت را مطرح کردند. پیشنهاد از جانب بزرگان فن بود و مورد تأییدقرارگرفت. بدین ترتیب نخستین شماره‌ی مجله‌ی کوانت در آغاز سال ۱۹۷۰ منتشر شد.

سردبیری نخستین شماره‌های مجله را دوتن از مهم‌ترین اعضای این فرهنگستان: آندره نیکلایه‌ویچ کولموگوروف و ایساک کنستانتی نوویچ کی‌کواین، به عهده داشتند، و هردو تا آخرین روزهای زندگی خود به این کار ادامه دادند.

هدف از انتشار ماه‌نامه‌ی ریاضی ـ فیزیک کوانت یافتن استعدادهای جوان و شکوفا کردن و پرورش دادن این استعدادها بود.

مجله‌ی کوانت به سرعت جای خود را در میان مجلات ریاضی ـ فیزیک آن‌چنان باز کرد که از طرف یونسکو مورد تأیید قرار گرفت و مقاله‌های آن به زبان‌های فرانسوی، ژاپنی، آلمانی، یونانی، بلغاری و نیز زبان‌های دیگر ترجمه شد.

چاپ نسخه‌ی انگلیسی این مجله به سال ۱۹۹۰ و تحت نام کوانتوم، مجله‌ی دانش‌آموزی ریاضی و علوم و به عنوان نشریه‌ای از انجمن ملی معلمان علوم و دایره‌ی کوانتوم فرهنگستان علوم شوروی و در رابطه با انجمن معلمان فیزیک آمریکا و شورای ملی معلمان ریاضی، در آمریکا آغاز شد.

در مورد نسخه‌ی فارسی مجله در سرمقاله چنین می‌خوانیم:

«و اما نسخه‌ی فارسی این مجله، یعنی همین نسخه‌ای که پیش رو دارید و قرار است به یاری خداوند به صورت فصل‌نامه منتشر شود، از دو بخش اصلی تشکیل شده است. بخش اول آن، شامل مقالات جالب و مفید مجله‌ی کوانتوم آمریکایی است که عیناً به زبان فارسی درآمده و گهگاه مقاله‌ای از کوانت روسی نیز به همراه دارد. بخش دوم آن، شامل مطالب و مواردی است خاص دانش‌آموزان و دانشجویان خودمان. از ویژگی‌های بخش دوم پرداختن به مسائل متناسب با برنامه‌ی دبیرستان‌های ایران و تهیه‌ی شرح احوال و آثار

ریاضی‌دانان و فیزیک‌دانان ایرانی و مسلمان و مطالب مربوط به تعلیم و تربیت ریاضی و فیزیک در این گوشه از جهان است. به‌خصوص در مورد این بخش، به یاری و مساعدت صاحب‌نظران نیاز مبرم داریم و در همین‌جا از آنان دعوت می‌کنیم که به یاریمان برخیزند و از کمکمان دریغ نورزند.»

در این مرحله به ذکر یکی از مقاله‌های مجله، تحت عنوان «هندسه‌ی جزایی یا پیروی از اصول» می‌پردازیم.

هندسه‌ی جزایی یا پیروی از اصول

نمایشنامه‌ی روش‌شناسی در یک پرده

نوشته‌ی د.و.فومین

صحنه تاریک است. آهنگی آرام و شیرین به گوش می‌رسد. چراغ‌ها روشن می‌شوند. سالن پذیرایی در ۲۲۱B، «بیکراستریت[۱]». شرلوک هُلمز[۲] در حال نگریستن به روزنامه‌ی عصر نشسته است. واتسون[۳] وارد می‌شود.

هلمز: عصر به‌خیر، رفیق عزیز. به‌نظر می‌رسد که قصد داری مدتی به‌جای طبابت به هندسه بپردازی.

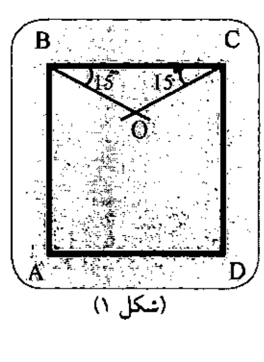
واتسون: چه‌طور فهمیدی؟

هلمز: روزنامه‌ی دیلی‌جوک دیروز، با مسابقه‌ی هندسه‌اش، از جیبت بیرون زده است. معلوم است که وقت زیادی برای حل حداقل یکی از مسائل آن صرف کرده‌ای.

واتسون: اما از کجا فهمیدی که هیچ یک از آن‌ها را حل نکرده‌ام؟ راستش را بخواهی، صددرصد حق به جانب توست ... (می‌نشیند)

هلمز: واتسون عزیز، ناراحت نشو. توجه داشته باش که تمام مسئله‌ها عملاً از یک طریق حل می‌شوند؛ البته، اگر راه صحیح رسیدن به آن‌ها را پیدا کنیم. راستش، هنوز مسائل مسابقه‌ای مورد بحث را ندیده‌ام، اما ... خب، اجازه بده نگاهی به آن‌ها بکنیم.

مسئله‌ی ۱. نقطه‌ی O داخل مربع ABCD مفروض است. زاویه‌های OCB و OBC هردو ۱۵ درجه‌اند. ثابت کنید که مثلث OAD متساوی‌الاضلاع است.



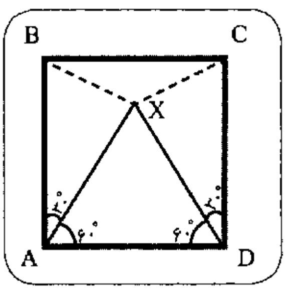
(شکل ۱)

واتسون: (با وحشت دست‌هایش را به طرف جلو حرکت می‌دهد) رازآمیزی این مسئله مرا به یاد شاه ربوده شده می‌اندازد! راستی آن را به‌خاطر داری؟

هلمز: رفیق عزیز، راجع به چه صحبت می‌کنی؟ من، هم الآن پاسخ مسئله را می‌دهم. در این مورد از «اصل آغاز از انتها» استفاده می‌کنیم. امیدوارم از حل مسئله متوجه بشوی که اصل مزبور چیست؟ نقطه‌ی X ی را، که رأس سوم مثلث متساوی‌الاضلاعی است که دو رأس دیگرش A و Dاند، در نظر می‌گیریم.

واتسون: اما دو نقطه از چنین نقاطی موجودند.

هلمز: البته. ولی ما آن را که داخل مربع است اختیار می‌کنیم (شکل ۲). حالا زاویه‌های XBC و XCB را پیدا می‌کنیم. خوب، واتسون، با توجه به پیوستگی علوم دقیقه، رابطه‌ها را در این مورد می‌دانی. انجام دادی؟



(شکل ۲)

واتسون: یک لحظه ... باید از این حقیقت که BAX و XCD مثلث‌هایی متساوی‌الساقین‌اند، استفاده کنیم. اوه! هریک از آن‌ها ۱۵ درجه است. هوم! بعد چه؟

هلمز: این بدان معنی است که نقاط O و X منطبق‌اند. اما دوست عزیز، این مطلب، مطلبی مقدماتی است.

واتسون: عالیه! اما ... این اصلِ شما کمکی به حل مسئله‌ی دوم نمی‌کند.

هلمز: خب، در این صورت از اصل دیگری استفاده می‌کنیم. و بنابراین ...

مسئله‌ی ۲: طول‌های اضلاع چهارضلعی محدب ABCD (در جهت حرکت عقربه‌های ساعت) برابر a، b، c و dاند. ثابت کنید که مساحت ABCD بزرگتر از $\frac{1}{4}(a+b)(c+d)$ نیست.

بله، این مسئله، مسئله‌ای کاملاً متفاوت است ... نابرابری. واتسون، این مسئله ناگهان مرا به یاد معمای پروفسور موریارتی انداخت.

واتسون (رؤیایی): بله، کلکی در این موضوع نهفته بود. او، در صورتی که بخواهیم حق مطلب را ادا کنیم، ریاضی‌دانی برجسته بود... اما هلمز، مثل این که از موضوع منحرف شدی.

هلمز: این تویی که از مطلب پرت افتاده‌ای واتسون. درضمن من

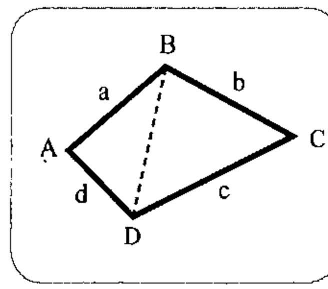
مسئله را حل کردم. ابتدا پرانتزها را برمی‌داریم:

$$\frac{1}{4}\,(a+b)\,(c+d)$$

$$=\frac{1}{4}\,(ad+bc)+\frac{1}{4}\,(ac+bd)$$

واتسون «اصل تسهیل» را به‌خاطر بسپار: ابتدا ساده‌ترین و طبیعی ترین طریق حل مسئله را بررسی کن.

واتسون: بسیار خب، اثبات این موضوع را که مجموع ad + bc کمتر از دو برابر مساحت چهارضلعی مورد بحث نیست، می‌توانم خودم انجام دهم: ad کمتر ازدو برابر مساحت مثلث ABD (شکل ۳) و bc کمتر از دو برابر مساحت مثلث BCD نیست؛ این که هیچ. اما با عبارت ac + bd چه کار می‌توان کرد؟



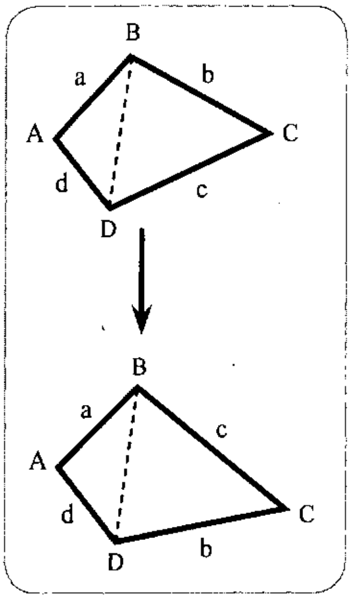
(شکل ۳)

هلمز: در این‌جا «اصل تمثیل» به کارمان می‌آید. دوست عزیز، تمام چیزی که در این مورد لازم داریم، تفکر سازگار و منطقی است. این کار در ریاضیات، به اندازه‌ی جرم‌شناسی، اساسی است. موفقیت در محاسبه‌ی قبلی مرهون چه موردی بود؟ از این حقیقت کمک گرفتی که اضلاع a و d پهلوی یکدیگر قرار گرفته‌اند. همین‌طور اضلاع b و c، درست است؟ بنابراین باید کاری کنی که a را پهلوی c بیاوری.

واتسون: در مورد b و d چی؟

هلمز: خوب فکرکن واتسون: اگر a پهلوی c باشد، در این صورت b نیز پهلوی d خواهد بود. همواره شرایط نالازم را بررسی کن! اما این کار در درجه‌ی دوم اهمیت است و بنابراین: برای این که مساحت چهارضلعی‌مان، هنگامی که ضلع a پهلوی c قرار می‌گیرد، یکسان باقی بماند، با آن چه می‌کنیم؟ ... دوست عزیز، موضوع چیست؟ ... چاقوی جراحی‌ات را همراه نیاورده‌ای؟

واتسون (متوجه نمی‌شود): نه، نیاورده‌ام. چرا این سؤال را ...؟ (به شکل نگاه می‌کند و ناگهان متوجه می‌شود). عالیه! صرفاً ABCD را در امتداد قطر BD قطع می‌کنیم و ... و یکی از تکه‌ها را برمی‌گردانیم (شکل ۴). و بعد، البته، با استدلالی شبیه قبل، مشخص می‌کنیم که ac + bd کمتر از دو برابر مساحت چهارضلعی مورد بحث نیست. با ترکیب آن با نامساوی پیشین، آن‌چه را به دنبال اثباتش بودیم، برقرار می‌کنیم. عالیه!



(شکل ۴)

هلمز: توجه داشته باش که در این‌جا هنگام حل مسئله، زمانی که مفروضاتمان راتغییر دادیم، از «اصل پویایی» نیز استفاده کردیم. این اصل که اصلی کاملاً چشم‌گیر است، به‌صورت زیر است: در مسئله، هر چیزی را که مایل به تغییردادنش هستیم ـ تنظیمش، مفروضاتش، احکامش ـ به شرطی که راه حل مسئله‌ی جدید راه حل مسئله‌ی قدیم را به دستمان دهد، تغییر می‌دهیم. اصل مزبور، به‌خصوص براین است که: مفروضات مسئله را به عنوان مطالبی غیرقابل تغییر درنظر نگیریم. برای مثال، اگر به دنبال دستگیر کردن جنایتکاری هستیم، نباید فراموش کنیم که او موجودی زنده است و می‌تواند آزادانه با «عملکرد»مان تغییر موضع دهد.

واتسون: در این مورد مطلبی است که هنوز خوب متوجه آن نشده‌ام...

هلمز: اجازه بده نگاهی به سومین مسئله‌ی مسابقه بیندازیم، واتسون.

واتسون: هلمز، خواهش می‌کنم نه تنها راه حل، بلکه جمیع مراحل استدلال را بلافاصله برایم توضیح بدهی. تا همین‌جا هم از حیرت فرسوده شده‌ام. (از جایش برمی‌خیزد و به طرف هلمز حرکت می‌کند.)

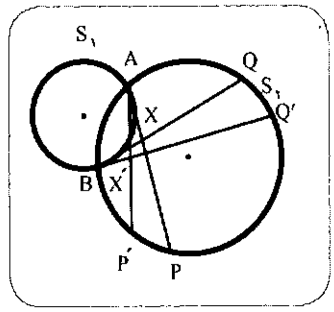
هلمز: سعی‌ام را می‌کنم، دوست عزیز، و بنابراین،

مسئله‌ی ۳: دو دایره‌ی S_1 و S_2 در نقاط A و B برهم عمودند. نقطه‌ی X واقع بر دایره‌ی اول، اما داخل دایره‌ی دوم است. شعاع‌های AX و BX دایره‌ی S_2 را در نقاط P و Q تلاقی می‌کنند. ثابت کنید که قطعه خط PQ قطر دایره‌ی S_2 است.

واتسون: من اصلاً صورت این مسئله را نمی‌فهمم. یعنی چه «دایره‌ها برهم عمودند»؟ مهمل است.

هلمز: ابداً، واتسون. این عبارت صرفاً به این معنی است که

خطوط مماس در نقاط تقاطع دوایر برهم عمودند. اکنون، دقت کن که اصل پویایی چگونه در این مورد به‌کار می‌رود. نقطه‌ی X را در امتداد کمان AB از دایره‌ی S_1 حرکت می‌دهیم ـ این نقطه X' می‌شود و شعاع‌های AX' و BX'، دایره‌ی S_2 را در نقاط P' و Q' قطع می‌کنند ـ نگاه کن، آن را روی این تکه کاغذ رسم می‌کنم (شکل ۵).



(شکل ۵)

روشن است که زوایای $X'AX$ و $X'BX$ مساوی‌اند. به‌همین علت است که اندازه‌های زاویه‌ای کمان‌های PP' و QQ' برابرند. اما این بدان معنی است که اندازه‌ی زاویه‌ای کمان $P'Q'$ مساوی اندازه‌ی زاویه‌ای کمان PQ است.

واتسون (درحالی که سخن هلمز را قطع می‌کند): ولی هلمز، از کجا فکر اثبات آن را به‌دست آوردی؟

هلمز: دوست عزیز، خودت راجع به آن فکر کن: اگر قطعه خط PQ به ازای هر موضع نقطه‌ی X واقع بر کمان AB، قطری از دایره باشد، در این صورت اندازه‌ی زاویه‌ای کمان PQ، هرچه نقطه‌ی X را حرکت دهیم، تغییر نخواهد کرد. اگر چیزی که حکم مسئله است، راست باشد، در این صورت این مطلب نیز به وضوح باید راست باشد. و بار دیگر اصل آغاز از انتها.

و حالا، واتسون، نقطه‌ی X مان را به طرف نقطه‌ی B حرکت می‌دهیم. چه چیزی به دست می‌آوریم؟ در این حالت، اندازه‌ی زاویه‌ای کمان PQ دقیقاً ۱۸۰ درجه خواهد شد.

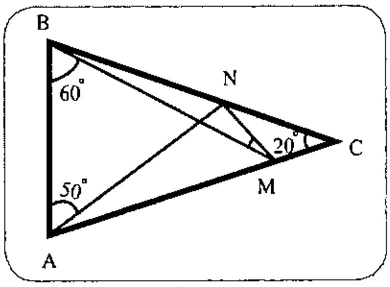
واتسون: آخر چرا این اصل؟ اوه. بله ... از این حقیقت که دوایر مورد بحث در زوایای قائمه تقاطع کرده‌اند، استفاده می‌کنیم. ضمناً، هلمز، اصل دیگری نیز در این مورد موجود است. تمام مفروضات مسئله را به‌کار برید و به خاطر داشته باشید که آن‌ها باید به طریقی مورد استفاده قرار گیرند! این اصل را چه بنامیم؟

هلمز (با متانت): آن را «اصل تکمیل راه حل» می‌نامم.

واتسون: باید بگویم بسیار خوب! اما آدم فکر می‌کند تو در هر جیبت یک اصل داری!

هلمز: نه، دوست عزیزم، من آن‌ها را در سرم دارم. اما باید تذکر بدهم که گاهی، اصلی که هم‌اکنون برایت مطرح شد، در زندگی واقعی کاربردناپذیر است. بعضی از حقایق در نگاه اول مشکوک یا صریحاً متهم‌کننده به‌نظر می‌رسند، اما بعداً مشخص می‌شود که تصادف محض یا تاکتیک‌هایی انحرافی از جانب مقصر اصلی بوده‌اند. مورد نیم‌تاج یاقوت نشان را به‌خاطر داری؟ ... بسیار خب، به هر تقدیر، این هم آخرین مسئله است.

مسئله‌ی ۴. مثلث ABC متساوی‌الساقین، و C زاویه‌ی رأس آن ۲۰ درجه است. نقاط M و N بر ساق‌های AC و BC ی آن چنان درنظر گرفته شده‌اند که زاویه‌ی NAB برابر ۵۰ درجه و زاویه ی MBA برابر ۶۰ درجه است. ثابت کنید زاویه‌ی NMB برابر ۳۰ درجه است (شکل ۶).



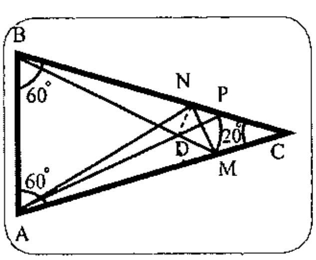
(شکل ۶)

واتسون: من سعی داشتم این زاویه را با استفاده از مثلثات حساب کنم ...

هلمز: دوست عزیز، خواهش می‌کنم نیروهایت را ذخیره کن! شاید بتوانی، هنگامی که من چند دقیقه‌ای را صرف این مسئله می‌کنم، روزنامه‌ات را بخوانی.

(طی پنج یا شش دقیقه‌ی بعد، واتسون هنگامی که هلمز شکل زیر را به دقت مطالعه می‌کند، روزنامه‌اش را می‌خواند. موسیقی آرامی نواخته می‌شود.)

هلمز: خب واتسون، این مسئله در واقع کمی پوست کلفت است. بگذار به نقطه‌ی P واقع بر ضلع BC، چنان که زاویه‌ی PAB برابر ۶۰ درجه باشد، نگاهی بیندازیم. روشن است که خط PM موازی AB است، و مثلث PDM متساوی‌الاضلاع می‌شود (D نقطه‌ای است که قطعات PA و BM در آن تقاطع می‌کنند ـ شکل ۷. چون مثلث BNA متساوی‌الساقین است، طول‌های قطعه خط‌های BA، BN و BD برابرند و زوایای BND و BDN هردو ۸۰ درجه‌اند. از این مطلب به سادگی نتیجه می‌شود که زاویه‌ی NDP برابر ۴۰ درجه است. لذا، مثلث NDP متساوی‌الساقین است و در نتیجه، MN نیمساز زاویه‌ی BMP. بنابراین، زاویه‌ی NMB نصف زاویه‌ی DMP و برابر



(شکل ۷)

۳۰ درجه است. و به این ترتیب اثبات‌مان به اتمام می‌رسد.

واتسون (مبهوت): ولی ... ولی ... چه‌طور؟ چه‌طور به‌یک چنین راه حل ماهرانه‌ای رسیدی؟

هلمز: واتسون عزیز، فکر می‌کنم بتوانم داستان مهیجی در مورد چگونگی پیدا کردن راه حل مورد بحث، به کمک یک دوجین اصل با مهارت انتخاب شده، برایت تعریف کنم... چرا می‌خندی،واتسون؟! البته،بعضی اصل‌ها سهل‌الوصول‌اند. فی‌المثل، «اصل هدف» قابل توجه است: همواره به خاطر داشته باشید که برای رسیدن به هدفتان چه کارهایی برای انجام دادن باقی مانده است. و محققاً، معدودی مطالب کوچک در گوشه و کنار ... به هر تقدیر، دوست من، برای حل یک مسئله، به مطالبی بیش از تنها یک مجموعه قواعد استاندارد تفکر نیاز داریم. به چیزهایی چون تجربه و شهود احتیاج است. تصور می‌کنی کارها این‌قدر ساده‌اند که برای انجام دادنشان، تنها چیزی که لازم داریم به‌خاطر سپردن تعدادی اصل و آموختن طرز به‌کار بردن آن‌ها به‌ترتیبی خاص است؟

خوش‌بختانه، برهان بشری به گونه‌ی اندازه‌ناپذیری وسیع‌تر از این‌هاست ... البته این اصول نیز که در اساس چیزی بیش از کلیشه‌های فکری نیستند، می‌توانند کاربردهایی داشته باشند. واتسون، آدمی نباید از چیزی که عقلایی است تغافل کند!

واتسون (با خستگی روی صندلیش می‌نشیند، و روزنامه‌اش را برمی‌دارد): هی! به این گوش کن هلمز: «شب گذشته، تبهکاران ناشناسی، پس از داخل شدن به دفتر روزنامه‌ی دیلی جوک، صندوق سردبیر روزنامه را شکستند و جایزه‌ی مسابقه‌ی سالانه‌ی هندسه را دزدیدند. این جایزه نوار موبیوس طلایی[۴] به اندازه‌ی واقعی و به قیمت ...» مطلب جالب دیگری ندارد ... اوه، گوش کن! «کارآگاه رابینسون اعلام کرد که پلیس سرنخی در این مورد به دست نیاورده است. سردبیر دیلی جوک به خبرنگاران گفت، روزنامه برای افزایش تعداد مشترکین و اصلاح وضع مادی‌اش، در یکی از شماره‌های آینده مسابقه‌ی حل مسئله‌ی مخصوصی را مطرح خواهد کرد...»

دوست عزیز، پس از تمام چیزهایی که امروز شنیده‌ام، باید این تبهکاران را دستگیر کنی، چه بالاخره، این مورد نیز از موارد پیروی از اصول است!

هنگامی که این آخرین کلمات گفته می‌شود، صحنه تاریک می‌شود و آخرین ضربه‌های آهنگ همراه صحنه، در تاریکی شنیده می‌شود.

***

موارد زیر مسائلی از مسابقه‌ی مخصوص اعلام شده در روزنامه است. به‌خاطر داشته باشید که هریک از آن‌ها شگردی مخصوص خود دارد که آن را می‌توان با استفاده از اصول مطرح شده توسط کارآگاه بزرگ، آسان‌تر یافت.

۱. چهارضلعی ABCD در دایره‌ای محاط است و طول قطعه خط AD برابر مجموع طول‌های قطعات AB و CD است. ثابت کنید که نیم‌سازهای زوایای B و C بر ضلع AD تقاطع می‌کنند.

۲. دزد بی‌دستی می‌خواهد سکه‌ای را از میز پول خردکنی با هول دادن سکه با استفاده از بینی‌اش بر میز، بدون برخورد دادن آن با هیچ یک از سکه‌های میز بدزدد. آیا موفق می‌شود؟ سکه‌ها گردند، به اندازه‌های متفاوت‌اند، و با یکدیگر تماس ندارند.

۳. مربعی به چند مستطیل تقسیم شده است. نسبت ضلع کوچک‌تر به ضلع بزرگ‌تر هریک از این مستطیل‌ها را می‌توان محاسبه کرد. ثابت کنید که مجموع این نسبت‌ها کمتر از ۱ نیست.

پی‌نوشت

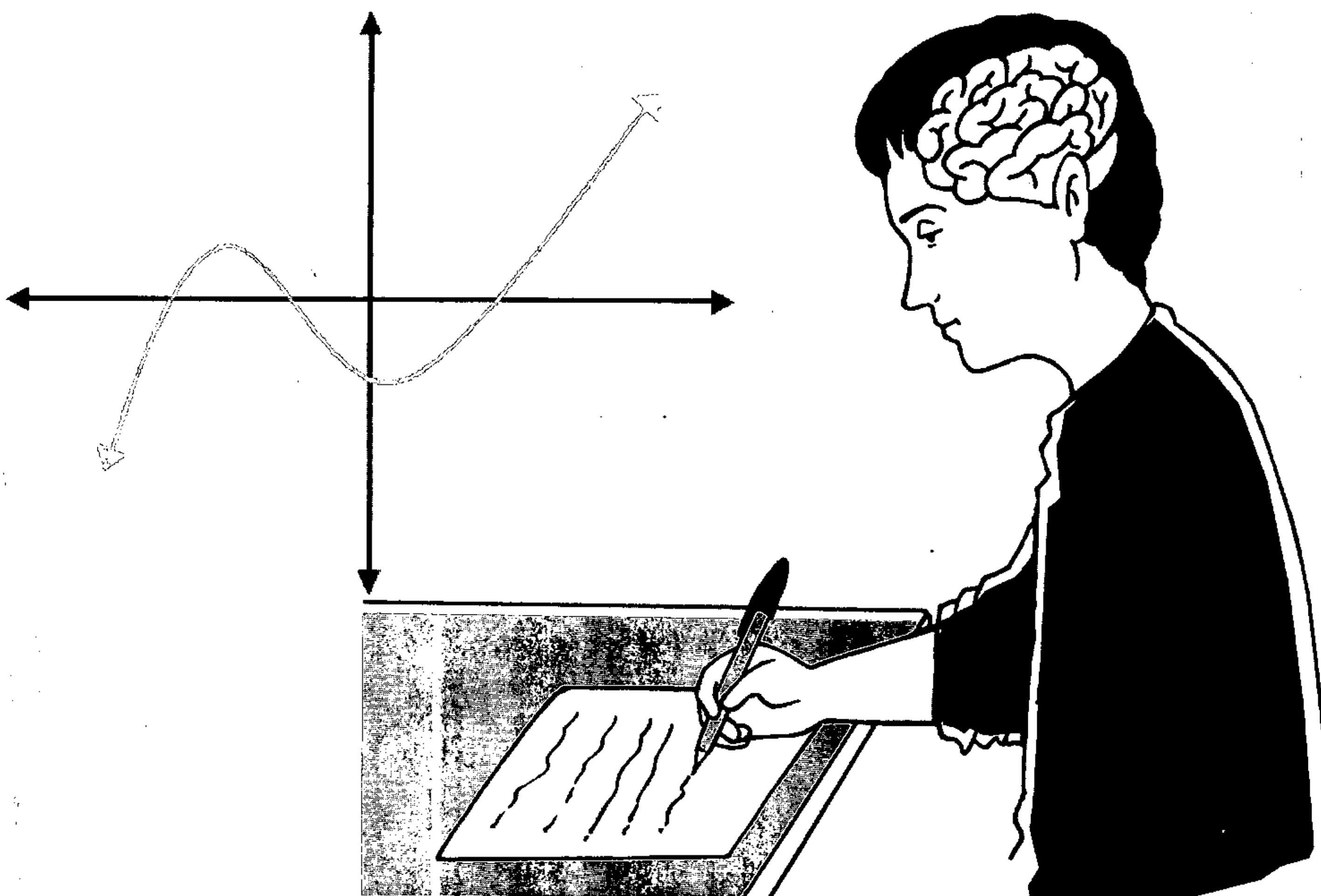
۱. خیابانی که منزل شرلوک هلمز در آن بوده است.
۲. کارآگاه معروف داستان‌های شرلوک هلمز
۳. دکتر واتسون، دوست شرلوک هلمز
۴. نواری که از پیچ دادن یک نوار معمولی و وصل کردن دو سر آن به هم حاصل می‌شود و یک رویه دارد.

نظرما تغییر یافته است و باز هم تغییر می‌یابد و تکامل پیدا می‌کند. به کلام دکارت: «فضا و حرکت را به من بدهید و من دنیایی به شما خواهم داد.» اینشتاین امروز چنین جواب می‌دهد: «آن‌چه خواسته شده است، به واقع زیاد است و حقیقت آن است که اصولاً تقاضای دکارت فاقد مفهوم است: بدون وجود «دنیا» (یعنی بدون وجود ماده)، نه فضایی وجود دارد و نه حرکتی موجود است.»

ریاضی‌دانان نامی

اریک تمپل بل، حسن صفاری





مسائل f(x) ها

احمد قندهاری

کلیدواژه‌ها: تابع، تابع مرکب، مسائل f(x) ها.

هر عبارتی برحسب x را می‌توان به‌صورت f(x) نشان داد؛ مانند:

$f(x)=\sin x+\cos^{۴} x$ ،$f(x)=x^{۲}-۴x+۱$
و $f(x)=x+\sqrt{x^{۲}-۱}$

هر عبارتی برحسب x و y را می‌توان به‌صورت f(x,y) نشان داد، مانند:

$f(x,y)=\sin x+\cos y$ و $f(x,y)=x^{۲}+xy+\frac{۴x}{y}$

هر عبارتی برحسب x و y و z را می‌توان به‌صورت $f(x,y,z)$ نشان داد، مانند:

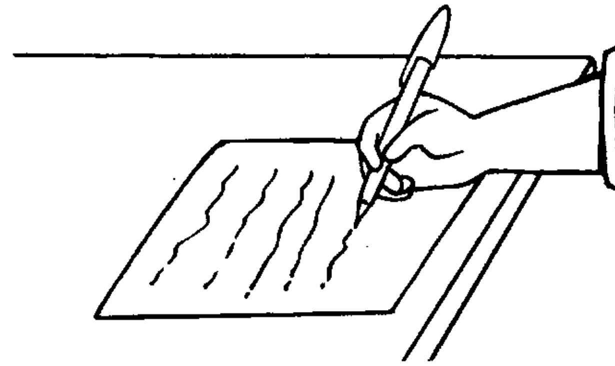
$f(x,y,z)=x^{۲}+y^{۲}+z^{۲}-۵xyz$

و

$f(x,y,z)=\sin(x+y)+\cos(y+z)$

۱. مسئله‌ی اصلی f(x)

یعنی f(x) معلوم است و می‌خواهیم $f(h(x))$ را محاسبه کنیم. h(x) می‌تواند هر عبارتی برحسب x باشد. برای محاسبه‌ی $f(h(x))$، باید در عبارت f(x) به‌جای x، عبارت h(x) را قرار دهیم. باید توجه داشته باشیم که این عمل، یک عمل جای‌گذاری است و به معنی برابری h(x) با x نیست.



مثال ۱. اگر $f(x)=۳x-۴x^۳$، مطلوب است محاسبه‌ی عبارت‌های زیر:

$$f(۲x-۵)\ ,\ f(\frac{۲x+۱}{۲x-۱}), f(x+\sqrt{x^۲+۱}), f(\sin\alpha), f\left(f(x)\right)$$

حل:

$f(x)=۳x-۴x^۳$

۱) $f(۲x-۵)=۳(۲x-۵)-۴(۲x-۵)^۳$

۲) $f(\frac{۲x+۱}{۲x-۱})=۳(\frac{۲x+۱}{۲x-۱})-۴(\frac{۲x+۱}{۲x-۱})^۳$

۳) $f(x+\sqrt{x^۲+۱})=۳(x+\sqrt{x^۲+۱})-۴(x+\sqrt{x^۲+۱})^۳$

۴) $f(\sin\alpha)=۳\sin\alpha-۴\sin^۳\alpha=\sin۳\alpha$

۵) $f\left(f(x)\right)=f(۳x-۴x^۳)=۳(۳x-۴x^۳)-۴(۳x-۴x^۳)^۳$

مثال ۲. اگر داشته باشیم: $f(x,y)=x^۲+۵xy$، مطلوب است محاسبه‌ی عبارت‌های زیر:

$f(۲-\sqrt{۲},\frac{۷}{۱۱})$ و $f(x+y,x-y)$

حل:

$f(x,y)=x^۲+۵xy$

۱) $f(۲-\sqrt{۲},\frac{۷}{۱۱})=(۲-\sqrt{۲})^۲+۵(۲-\sqrt{۲})(\frac{۷}{۱۱})$

۲) $f(x+y,x-y)=(x+y)^۲+۵(x+y)(x-y)$

مثال ۳. اگر $f(x,y,z)=x^۲-۳xyz$ باشد، مطلوب‌است محاسبه‌ی:

$f(a-b,b-c,c-a)$

حل:

$f(x,y,z)=x^۲-۳xyz$

$f(a-b,b-c,c-a)=(a-b)^۲-۳(a-b)(b-c)(c-a)$

۲. مسئله‌ی معکوس f(x)

یعنی $f\left(h(x)\right)$ معلوم است و می‌خواهیم $f(x)$ را محاسبه کنیم. به مثال زیر دقت کنید.

مثال ۱. اگر $f(x+۵)=۴x+۲۳$، آن‌گاه $f(x)$ کدام است؟

الف) $۴x+۱$ ب) $۴x+۲$

ج) $۴x+۳$ د) $۴x+۴$

حل: روش اول:

$x+۵=a$ فرض می‌کنیم $\Rightarrow x=a-۵$

$f(x+۵)=۴x+۲۳$

$f(a)=۴(a-۵)+۲۳ \Rightarrow f(a)=۴a+۳ \Rightarrow f(x)=۴x+۳$

روش دوم: در این روش که به «روش تبدیل» معروف است، در سمت راست عبارت $(x+۵)$ را می‌سازیم. سپس در سراسر مسئله $(x+۵)$ را به x تبدیل می‌کنیم.

$f(x+۵)=۴x+۲۳$

$f(x+۵)=۴(x+۵)+۳$

$(x+۵)\xrightarrow{\text{تبدیل}}x\ ;\ f(x)+۴x+۳$

روش سوم: به x عددی نسبت می‌دهیم: مثلاً $x=۱$. آن‌گاه عبارت $f(x+۵)$ بدین‌صورت خواهد شد:

$f(۶)=۴+۲۳ \Rightarrow f(۶)=۲۷$

می‌گوییم گزینه‌ای درست است که اگر به‌جای x، عدد ۶ را قرار دهیم، حاصل برابر ۲۷ شود. پس گزینه‌ی ج صحیح است. (این روش برای مسائل چند گزینه‌ای به‌کار می‌رود)

مثال ۲. اگر $f(x+\frac{۱}{x})=x^۳+\frac{۱}{x^۳}$، آن‌گاه $f(\frac{۱}{x})$ را بیابید.

حل:

$f(x+\frac{۱}{x})=x^۳+\frac{۱}{x^۳}$

$f(x+\frac{۱}{x})=(x+\frac{۱}{x})^۳-۳x(\frac{۱}{x})(x+\frac{۱}{x})$

$f(x+\frac{۱}{x})=(x+\frac{۱}{x})^۳-۳(x+\frac{۱}{x})$

$(x+\frac{۱}{x})\xrightarrow{\text{تبدیل}}\frac{۱}{x}\ ;\ f(\frac{۱}{x})=\frac{۱}{x^۳}-۳(\frac{۱}{x})=\frac{۱-۳x^۲}{x^۳}$

مثال ۳. اگر $f(x+\frac{۱}{x})=x^۴+\frac{۱}{x^۴}$، آن‌گاه $f(\frac{۱}{۴x})$ را بیابید.

حل:

$f(x+\frac{۱}{x})=x^۴+\frac{۱}{x^۴}$

$f(x+\frac{۱}{x})=(x^۲+\frac{۱}{x^۲})^۲-۲x^۲(\frac{۱}{x^۲})=(x^۲+\frac{۱}{x^۲})^۲-۲$

$f(x+\frac{۱}{x})=\left((x+\frac{۱}{x})^۲-۲\right)^۲-۲$

$(x+\frac{۱}{x})\xrightarrow{\text{تبدیل}}\frac{۱}{۴x}$

$f(\frac{۱}{۴x})=\left((\frac{۱}{۴x})^۲-۲\right)^۲-۲$

مثال ۴. اگر $f(x+y,x-y)=۲xy$، آن‌گاه $f(x,y)$ کدام است؟

الف) $\frac{1}{8}(x^2-y^2)$ ب) $\frac{1}{4}(x^2-y^2)$

ج) $\frac{1}{2}(x^2+y^2)$ د) $\frac{1}{2}(x^2-y^2)$

حل: روش اول: در عبارت f قرار می‌دهیم:

$$f(x+y,x-y)=2xy$$

$$\begin{cases}x+y=a\\x-y=b\end{cases}\Rightarrow x=\frac{a+b}{2},y=\frac{a-b}{2}$$

$$f(a,b)=2(\frac{a+b}{2})(\frac{a-b}{2})\Rightarrow$$

$$f(a,b)=\frac{1}{2}(a^2-b^2)\Rightarrow f(x,y)=\frac{1}{2}(x^2-y^2)$$

روش دوم:

$$f(x+y,x-y)=2xy$$

$$f(x+y,x-y)=\frac{1}{2}\Big((x+y)^2-(x-y)^2\Big)$$

$$\begin{cases}x+y\xrightarrow{\text{تبدیل}}x\\x-y\xrightarrow{\text{تبدیل}}y\end{cases}\Rightarrow f(x,y)=\frac{1}{2}(x^2-y^2)$$

روش سوم: به x و y دو عدد نسبت می‌دهیم:

$$\begin{cases}x=2\\y=1\end{cases}\Rightarrow f(3,1)=2(2)(1)\Rightarrow f(3,1)=4$$

می‌گوییم گزینه‌ای صحیح است که $f(3,1)$ آن برابر ۴ شود. بنابراین گزینه‌ی (ج) قابل‌قبول است.

مثال ۵. اگر $f(x+y,x-y)=2\sin x\cos y$، آن‌گاه $f(x,y)$ را بیابید.

حل: عبارت سمت راست را به حاصل‌جمع تبدیل می‌کنیم:

$$f(x+y,x-y)=2\sin x.\cos y$$

$$f(x+y,x-y)=\sin(x+y)+\sin(x-y)$$

$$\begin{cases}x+y\xrightarrow{\text{تبدیل}}x\\x-y\xrightarrow{\text{تبدیل}}y\end{cases}\Rightarrow f(x,y)=\sin x+\sin y$$

مثال ۶. اگر $f(x+y,x-y)=\cos x+\cos y$، آن‌گاه $f(x,y)$ را بیابید.

حل: عبارت سمت راست را به حاصل‌ضرب تبدیل می‌کنیم:

$$f(x+y,x-y)=\cos x+\cos y$$

$$f(x+y,x-y)=2\cos\frac{x+y}{2}.\cos\frac{x-y}{2}$$

$$\begin{cases}x+y\xrightarrow{\text{تبدیل}}x\\x-y\xrightarrow{\text{تبدیل}}y\end{cases}\Rightarrow f(x,y)=2\cos\frac{x}{2}.\cos\frac{y}{2}$$

مثال ۷. اگر $f(\frac{y}{x})=\frac{1}{x}\sqrt{x^2+y^2}$ و $x<0$، آن‌گاه f(x) را بیابید.

حل: در سمت راست x را به داخل رادیکال می‌بریم و چون $x<0$ است، باید در خارج رادیکال منفی بگذاریم:

$$f(\frac{y}{x})=\frac{1}{x}\sqrt{x^2+y^2}=-\sqrt{\frac{x^2}{x^2}+\frac{y^2}{x^2}}=-\sqrt{1+(\frac{y}{x})^2}$$

$$\frac{y}{x}\xrightarrow{\text{تبدیل}}x\Rightarrow f(x)=-\sqrt{1+x^2}$$

مثال ۸. اگر $f(x+\frac{1}{x})=x^2-\frac{1}{x^2}$ و $x>0$ و $x>\frac{1}{x}$، آن‌گاه f(x) را بیابید.

حل:

$$f(x+\frac{1}{x})=x^2-\frac{1}{x^2}=(x+\frac{1}{x})(x-\frac{1}{x})$$

فرض می‌کنیم $x+\frac{1}{x}=a$

$$\Rightarrow x^2+\frac{1}{x^2}+2=a^2\Rightarrow x^2+\frac{1}{x^2}-2=a^2-4$$

داریم: $x>\frac{1}{x}$

$$\Rightarrow(x-\frac{1}{x})^2=a^2-4\Rightarrow(x-\frac{1}{x})=\sqrt{a^2-4}$$

$$f(x+\frac{1}{x})=(x+\frac{1}{x})(x-\frac{1}{x})$$

$$f(a)=a\sqrt{a^2-4}\Rightarrow f(x)=x\sqrt{x^2-4}$$

۳. مسئله‌ی گسترده‌ی f(x)

در این‌گونه مسائل که به‌صورت

$$af\big(h(x)\big)+bf\big(t(x)\big)=k(x)$$

هستند، می‌خواهیم f(x) را بیابیم. ابتدا باید تبدیلی صورت گیرد تا h(x) و t(x) به یکدیگر تبدیل شوند. سپس دستگاه حاصل را حل می‌کنیم و آن‌گاه f(x) محاسبه می‌شود.

مثال ۱. اگر $3f(x)+2f(-x)=15x$، آن‌گاه f(x) را بیابید.

حل:

$$x\xrightarrow{\text{تبدیل}}-x\Rightarrow 3f(-x)+2f(x)=-15x$$

$$\begin{matrix}3\\-2\end{matrix}\begin{cases}3f(x)+2f(-x)=15x\\3f(-x)+2f(x)=-15x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}9f(x)+6f(-x)=45x\\-6f(-x)-4f(x)=30x\end{cases}$$

$$5f(x)=75x\Rightarrow f(x)=15x$$

مثال ۲. اگر $2f(2x-3)+f(3-2x)=4x$، آن‌گاه $f(x)$ را بیابید.

$$2x-3=a \Rightarrow \begin{cases}3-2x=-a\\ 2x=a+3\end{cases}$$

$$-2\begin{cases}2f(a)+f(-a)=2(a+3)\\ 2f(-a)+f(a)=2(-a+3)\end{cases} \qquad a \xrightarrow{\text{تبدیل}} -a$$

$$\begin{cases}-4f(a)-2f(-a)=-4(a+3)\\ 2f(-a)+f(a)=2(-a+3)\end{cases}$$

$$-3f(a)=-4a-12-2a+6 \Rightarrow -3f(a)=-6a-6$$

$$\Rightarrow f(a)=2a+2 \Rightarrow f(x)=2x+2$$

مثال ۳. اگر $f(\sin x)+2f(\cos x)=2\sin^2 x$، آن‌گاه $f(x)$ را بیابید.

حل:

$$f(\sin x)+2f(\cos x)=2\sin^2 x \qquad x \xrightarrow{\text{تبدیل}} (\frac{\pi}{2}-x)$$

$$f\left(\sin(\frac{\pi}{2}-x)\right)+2f\left(\cos(\frac{\pi}{2}-x)\right)=2\sin^2(\frac{\pi}{2}-x)$$

$$\begin{cases}f(\sin x)+2f(\cos x)=2\sin^2 x\\ -2\,\big|\, f(\cos x)+2f(\sin x)=2\cos^2 x\end{cases}$$

$$\begin{cases}f(\sin x)+2f(\cos x)=2\sin^2 x\\ -2f(\cos x)-4f(\sin x)=-4\cos^2 x\end{cases}$$

$$\Rightarrow -3f(\sin x)=-4\cos^2 x+2\sin^2 x$$

$$-3f(\sin x)=-4(1-\sin^2 x)+2\sin^2 x$$

$$\Rightarrow -3f(\sin x)=6\sin^2 x-4$$

$$\Rightarrow f(\sin x)=-2\sin^2 x+\frac{4}{3} \qquad \sin x \xrightarrow{\text{تبدیل}} x$$

$$f(x)=-2x^2+\frac{4}{3}$$

۴. مسئله‌ی ترکیبی (نوع اول)

در این حالت $f(x)$ و $f(g(x))$ معلوم است و می‌خواهیم $g(x)$ را محاسبه کنیم. با توجه به ساختن $f(g(x))$، $g(x)$ به‌راحتی محاسبه می‌شود.

مثال.اگر $f(x)=2x-5$ و $f(g(x))=4x^6+2x^2-1$، آن‌گاه $g(x)$ را بیابید.

حل: $f(g(x))=2g(x)-5=4x^6+2x^2-1 \Rightarrow$

$$2g(x)=4x^6+2x^2+4 \Rightarrow g(x)=2x^6+x^2+2$$

۵. مسئله‌ی ترکیبی (نوع دوم)

در این مسئله $f(x)$ و $g(f(x))$ معلوم است و می‌خواهیم $g(x)$ را محاسبه کنیم.

مثال: اگر $f(x)=2x+3$ و $g(f(x))=8x+11$، آن‌گاه $f(x)$ را بیابید.

حل: $g(f(x))=g(2x+3)=8x+11$

$$g(2x+3)=4(2x)+11=4(2x+3)-12+11$$

$$g(2x+3)=4(2x+3)-1 \qquad (2x+3)\xrightarrow{\text{تبدیل}} x$$

$$g(x)=4x-1$$

مثال. اگر $f(\frac{x-1}{x+1})=2^x$، آن‌گاه $f(\frac{x-1}{x+1}).f(\frac{x+1}{x-1})$ را بیابید.

حل: $f(\frac{x-1}{x+1})=2^x$

صورت و مخرج کسر را در (۱-) ضرب می‌کنیم:

$$x \xrightarrow{\text{تبدیل}} -x \Rightarrow f(\frac{-x-1}{-x+1})=2^{-x}$$

$$\Rightarrow f(\frac{x+1}{x-1})=2^{-x}$$

$$f(\frac{x-1}{x+1})=2^x \ , \ f(\frac{x+1}{x-1})=2^{-x}$$

$$\Rightarrow f(\frac{x-1}{x+1}).f(\frac{x+1}{x-1})=2^x\times 2^{-x}=2^0=1 \quad (x\neq\pm 1)$$

مثال: اگر $f(x)=x^2-5x+4$ و $g(x)=x^2+5x$، آن‌گاه معادله‌ی $f(g(x))=0$ چند ریشه‌ی حقیقی دارد؟

حل:

$$f(x)=x^2-5x+4 \ , \ f(g(x))=f(x^2+5x)$$

$$f(x)=(x-1)(x-4) \quad x\xrightarrow{\text{تبدیل}}(x^2+5x)$$

$$f(x^2+5x)=(x^2+5x-1)(x^2+5x-4)$$

$$f(x^2+5x)=0 \Rightarrow (x^2+5x-1)(x^2+5x-4)=0$$

$$x^2+5x-1=0, \Delta>0$$

معادله دو ریشه‌ی حقیقی متمایز دارد.

$$x^2+5x-4=0, \Delta>0$$

معادله دو ریشه‌ی حقیقی متمایز دارد.

پس معادله‌ی $f(g(x))=0$ چهار ریشه‌ی حقیقی متمایز دارد.

سؤال: آیا ممکن نیست دو معادله‌ی $x^2+5x-1=0$ و $x^2+5x-4=0$، یک ریشه‌ی مشترک داشته باشند؟ چرا؟



آشنایی با بسته‌ی نرم‌افزاری Mathematica

قسمت اول

کلید واژه‌ها:

بسته‌های نرم‌افزاری Methematica

. Evaluate Cells ،Cells ،Basic mathInput ،Palettes

• مقدمه

بسته‌ی نرم‌افزاری Mathematica حدود ۲۲ سال پیش توسط استفن ولفرم[۱] به عنوان یک نوآوری علمی کارا برای امور تحقیقاتی ارائه شد. وی مؤسس شرکت معتبر نرم‌افزاری ولفرم است که درسال ۱۹۸۷ پایه‌گذاری شد. اولین نسخه‌ی Mathematica در سال ۱۹۸۸ معرفی شد و طی دو دهه، نسخه‌های کامل‌تر این بسته‌ی نرم‌افزاری وارد بازار شد؛ به‌طوری که هم‌اکنون نسخه‌ی ۷ آن در بازار موجود



استفن ولفرام

است.

این بسته‌ی نرم‌افزاری نه تنها به منظور انجام محاسبات ریاضی، بلکه با هدف مدل‌سازی، شبیه‌سازی، تجسم، مستندسازی و پیشرفت و توسعه در زمینه‌های گوناگون علوم فنی و کاربردی طراحی شد. Mathematica سرآغازی برای محاسبات فنی مدرن بود. تا قبل از پیدایش این بسته، بسته‌های متفاوتی وجود داشتند که تنها قادر به انجام محاسبات جبری و عددی مشخص و انجام اعمال گرافیکی محدودی بودند. در حالی‌که با ابداع این نرم‌افزار جدید، کاربران قادر به انجام محاسبات پیشرفته و جامعی شدند.

زمانی‌که نسخه‌ی اول Mathematica به بازار آمد، به‌عنوان یکی از مهم‌ترین ده محصول اول آن سال معرفی شد. چرا که از اهمیت عملکرد آن نمی‌شد چشم پوشید. نخستین نسخه‌ی آن برای استفاده در علوم ریاضی و فیزیک و مهندسی طراحی شده بود، ولی در ادامه و طی سال‌های بعد، در سایر علوم نظیر پزشکی، زیست‌شناسی، علوم اجتماعی و بازرگانی نیز مورد استفاده قرار گرفت. در مهندسی نیز به عنوان ابزاری استاندارد برای طراحی، تولید و توسعه‌ی محصولات موردنظر به کار می‌رود.

Mathematica به شکل اساسی در طول تحصیلات مقدماتی و دانشگاهی و در سطوح متفاوت آموزش از دبیرستان به بعد، به عنوان یک ابزار آموزشی مناسب درسطح جهان مورد استفاده قرار گرفته است. به ویژه به دلیل طراحی ساده، جذاب و قابل فهم آن و امکان دست‌رسی ساده به این نرم‌افزار، دانش‌آموزان دبیرستانی در سراسر جهان به شکل عمومی از آن استفاده می‌کنند. تنوع موجود در این بسته به گونه‌ای است که کاربران از سن ۱۰ سال به بالا می‌توانند حتی برای سرگرمی از آن استفاده کنند.

در حال حاضر این بسته نرم‌افزاری در بسیاری از سازمان‌ها، شرکت‌ها و ارگان‌های دولتی کشور آمریکا و بزرگ‌ترین دانشگاه‌های جهان مورد بهره‌برداری قرار دارد. طی سال‌های اخیر، طراحی این بسته نرم‌افزاری به شکل قابل‌توجهی توسعه یافت، به‌طوری که پس از دو دهه، به‌عنوان یک سیستم تعریف شده برای طیف گسترده‌ای از محاسبات هم‌چنان مورد بهره‌برداری قرار می‌گیرد. در این راستا تصمیم گرفته شد، مجموعه‌ای از مقالات برای آشنایی دانش‌آموزان و خوانندگان گرامی با این بسته‌ی نرم‌افزاری نوشته شود. در این مقالات براساس مطالب موجود در ریاضیات دوره‌ی دبیرستان، چگونگی انجام محاسبات در محیط این بسته‌ی نرم‌افزاری مطرح خواهد شد. ابتدا با توجه به محتوای کتاب‌های ریاضی ۱ و ۲ دبیرستان، به معرفی توابع مقدماتی و نحوه‌ی اجرا و به کارگیری آن‌ها در محیط این بسته می‌پردازیم. در ادامه‌ی این مقالات، در چارچوب دروس حسابان، حساب دیفرانسیل و انتگرال، چگونگی محاسبه توابع، حد، مشتق، انتگرال، رسم منحنی و ... در این بسته آموزش داده می‌شود. به این منظور نسخه‌ی Mathematica 6 در نظر گرفته شده است و تمامی محاسبات ودستورالعمل‌ها در محیط این نسخه از نرم‌افزار معرفی می‌شوند. بسته‌ی نرم‌افزاری Mathematica تحت سیستم عامل ویندوز قابل اجرا است.

نصب نرم‌افزار

به‌منظور نصب Mathematica روی رایانه‌ی شخصی خود، ابتدا سی‌دی حاوی این بسته نرم‌افزاری را در سی‌دی‌خوان قرار دهید و فایل Setup.exe را اجرا کنید تا اجرای مراحل نصب به‌طور خودکار آغاز شود. در ابتدا اطلاعات شما و کلمه‌ی عبور خواسته می‌شود. با اجرای فایل Keygen.exe، می‌توانید پس از قرار دادن شماره‌ی MathID و فشار دکمه‌ی Generate، «شماره‌ی شناسایی»[۲] و «کلمه‌ی عبور»[۳] را اخذ و در قسمت مربوط کپی کنید تا مراحل نصب دنبال شود. پس از اتمام نصب، رایانه‌ی خود را restart کنید.

مشخصات نرم‌افزار

صفحه‌ی اصلی Mathematica شامل گزینه‌های File، Edit، Insert، Format، Cell، Graphics، Evaluation، Palettes، Windows و Help است. توصیه می‌شود هم‌زمان با مطالعه‌ی این توضیحات، برای یادگیری بهتر، هر کدام از توابع و دستورالعمل‌های معرفی شده را روی رایانه‌ی شخصی خود اجرا کنید. به منظور ایجاد یک فایل جدید، گزینه‌ی «New» را در پنجره‌ی «File» انتخاب و اطلاعات موردنظر خود را روی صفحه تایپ و اجرا می‌کنیم. برای ذخیره‌ی اطلاعات، گزینه‌ی «Save» از پنجره File را انتخاب و با یک نام نظیر «Sample» فایل را ذخیره می‌کنیم. تمام یادداشت‌های Mathematica که در صفحه‌ی اصلی درج می‌گردند، به صورت فایلی با پسوند «nb.» در ماشین ذخیره می‌شوند. هم‌چنین، برای باز کردن فایل‌های قبلی در محیط این نرم‌افزار، گزینه‌ی «Open»

از پنجره‌ی File را انتخاب می‌کنیم و فایل موردنظر را می‌یابیم و باز می‌کنیم.

از جمله پنجره‌های قابل توجه در Mathematica، «Palettes» است. در این پنجره، گزینه‌ای به نام «BasicMathInput» وجود دارد که با انتخاب آن، صفحه‌ای شامل نمادهای اصلی در ریاضی، چون توان‌رسانی، کسر، ریشه‌گیری، مشتق‌گیری، انتگرال‌گیری، مجموع، حاصل‌ضرب، ماتریس و ... به همراه اعمال اصلی ریاضی و حروف الفبای یونانی ظاهر می‌شوند. با انتخاب هر یک از این نمادها، عیناً آن نماد در صفحه‌ی اصلی ظاهر می‌شود که باید با پر کردن جاهای خالی، عبارت موردنظر برای محاسبه را آماده کنیم.

چند مثال

مثلاً به‌منظور محاسبه‌ی 5^7، گزینه $\blacksquare^{\square}$ را انتخاب می‌کنیم. با این عمل یک سلول روی صفحه پدید می‌آید، که با یک کروشه‌ی بسته مشخص می‌شود. حال داخل دومربع را در پایه و توان پر می‌کنیم. با دکمه‌ی «Tab» روی صفحه‌ی کلید، به سادگی می‌توان از مربع پایینی به بالایی منتقل شد. پس از تایپ 5^7 با فشار هم‌زمان دکمه‌های «Enter» و«Shift»، نتیجه روی صفحه به صورت ۷۸۱۲۵ مشخص می‌شود. در این حالت ورودی با «In» و نتیجه با «Out» در یک سلول نمایش داده می‌شود. لازم به ذکر است، در Mathematica هر عبارت ورودی جهت محاسبه در یک «سلول»[4] قرار می‌گیرد و پس از اجرا، نتیجه نیز در همان سلول به نمایش درمی‌آید. هر سلول داخل یک علامت به شکل کروشه‌ی بسته قرار دارد. به‌جز دکمه‌های Enter و Shift، برای محاسبه می‌توان از گزینه‌ی «محاسبه‌ی سلول‌ها»[5] در پنجره‌ی Evaluation نیز استفاده کرد.

حال سلول دیگری را ایجاد می‌کنیم تا در آن عبارت $\frac{2}{7}+\frac{3}{4}$ محاسبه شود. ابتدا گزینه‌ی $\frac{\blacksquare}{\square}$ را در پنجره‌ی «BasicMathId» انتخاب و در مربع‌های خالی به ترتیب ۲ و ۷ را تایپ می‌کنیم. سپس جلوی کسر $\frac{2}{7}$ نماد + را تایپ و پس از آن مجدداً روی گزینه‌ی $\frac{\blacksquare}{\square}$ کلیک می‌کنیم و درمربع‌های خالی به ترتیب ۳ و ۴ را تایپ می‌کنیم. از کلید Tab برای انتقال از صورت به مخرج کسر می‌توان استفاده کرد. حال سلول حاصل را با فشار هم‌زمان دکمه‌های Enter و Shift محاسبه می‌کنیم. در این لحظه کسر $\frac{29}{28}$ به عنوان خروجی درصفحه‌ی نمایش ظاهر می‌شود.

ممکن است تمایل داشته باشیم مقدار این کسر را به شکل اعشاری ببینیم. به این منظور کافی است یک سلول جدید زیرهمین کسر با تایپ حرف N و قرار دادن علامت ٪ داخل یک کروشه جلوی آن، ایجاد کنیم. با اجرای دستور N[٪]، نتیجه‌ی کسر فوق به‌صورت ۱/۰۳۵۷۱ در صفحه ظاهر می‌شود. درحالت کلی دستور [ ]N، عبارت قرار گرفته داخل کروشه را به‌صورت عددی و با نمایش اعشاری مشخص می‌کند. در این حالت، ۵ رقم از ارقام قسمت اعشاری نمایش داده می‌شود که می‌توان با قراردادن عددی در کنار عبارت مربوط، تعداد ارقام اعشار موردنظر را مشخص کرد.

به‌طور کلی دستور [n و عبارت]N، مقدار عبارت داخل کروشه را به صورت تقریبی و تا n-۱ رقم اعشار نمایش می‌دهد. هم‌چنین اگر عبارت در سلول یا سلول‌های قبلی وجود داشته باشد، نیازی به تایپ مجدد عبارت نیست و کافی است از علامت ٪ استفاده کرد.

دستور N[٪,n] مقدار عبارت موجود در آخرین سلول را به صورت عددی تا (n-۱) رقم اعشار مشخص می‌کند. برای مثال، اگربخواهیم نتیجه‌ی عبارت $(\frac{9}{7})^4$ را به صورت تقریبی تا ۲۰ رقم اعشار ملاحظه کنیم، ابتدا گزینه‌ی توان‌رسانی را انتخاب و داخل مربع اول، روی گزینه کسر ($\frac{\blacksquare}{\square}$) کلیک می‌کنیم. حال ابتدا ۹، سپس ۷ و در نهایت ۴ را در مربع‌ها تایپ می‌کنیم. با دکمه‌ی Tab سریع‌تر می‌توان به مربع بعدی رفت. پس از اجرای سلول حاوی $(\frac{9}{7})^4$، حاصل این عبارت به صورت $\frac{6561}{2401}$ نمایش داده می‌شود. حال زیر این نتیجه تایپ می‌کنیم: N[٪,۲۰]. با محاسبه‌ی این سلول نتیجه‌ی عبارت به صورت ۲/۷۳۲۶۱۱۴۱۱۹۱۱۷۰۳۴۵۶۹ مشخص می‌شود.

5^7

78125

$\frac{2}{7}+\frac{3}{4}$

$\frac{29}{28}$

N [%]

1.03571

$\left(\frac{9}{4}\right)^4$

$\frac{6561}{2401}$

N [%, 20]

2.7326114119117034569

جذرگیری از جمله اعمال دیگری است که در پنجره‌ی BasicMathInput وجود دارد. فرض کنید که می‌خواهیم $\sqrt{2}$ را با ۱۰ رقم اعشار محاسبه کنیم. به این منظور، ابتدا روی علامت $\sqrt{\blacksquare}$ در این پنجره کلیک می‌کنیم تا عین همین علامت روی صفحه ظاهر شود. سپس درون مربع عدد ۲ را تایپ می‌کنیم. حال برای محاسبه‌ی تقریبی $\sqrt{2}$ آن را درون تابع محاسبه عددی N به صورت $N\left[\sqrt{2},10\right]$

قرار می‌دهیم. با اجرای این سلول، پاسخ ۱/۴۱۴۲۱۳۵۶۲ را دریافت می‌کنیم.

توجه داشته باشید، اگر $\sqrt{2}$ را درون دستورالعمل محاسباتی N[۰,n] قرارندهیم، خود $\sqrt{2}$ در نتیجه‌ی اجرای سلول ظاهر می‌شود. هم‌چنین می‌توان با استفاده از نماد $\sqrt[\square]{\blacksquare}$ در این صفحه، ریشه‌گیری یک عدد را انجام داد. مثلاً برای محاسبه‌ی $\sqrt[5]{3}$ روی این نماد کلیک می‌کنیم و ابتدا ۳ را در مربع زیر رادیکال و سپس ۵ را در مربع داخل فرجه‌ی رادیکال تایپ می‌کنیم. به‌منظور انتقال به مربع دوم از دکمه‌ی Tab استفاده می‌کنیم. حال $\sqrt[5]{3}$ را درون تابع N قرار می‌دهیم و سلول حاصل را به‌صورت $N\left[\sqrt[5]{3}\right]$ با فشار دکمه‌های Enter و Shift محاسبه می‌کنیم. در این لحظه، مقدار ۱/۲۴۵۷۳ به عنوان نتیجه مشخص می‌شود. البته می‌توان با مشخص کردن تعداد ارقام اعشار موردنظر، تقریب این عدد را با رقم‌های بیشتری ملاحظه کرد.

$N[\sqrt{2}, 10]$

1.414213562

$N[\sqrt[5]{3}]$

1.24573

با استفاده از دستور محاسبه‌ی عددی N می‌توان مقدار عدد پی را تا هر تعداد رقم اعشاری محاسبه کرد. به منظور مشاهده‌ی عدد پی با یک دقت معلوم، از نماد Pi استفاده می‌کنیم. به این منظور در صفحه‌ی نمایش تایپ می‌کنیم. N[Pi,50]، و با محاسبه‌ی این سلول مقدار عدد π تا ۴۹ رقم اعشار مشخص می‌شود. اگر فقط سلول حاوی Pi را اجرا کنیم، نتیجه به صورت π در صفحه‌ی نمایش ظاهر می‌شود.

N [Pi, 50]

3.1415926535897932384626433832795028841971693993751

Pi

π

توابع حسابی

تابع جمع[۶]: فرمول کلی این تابع به شکل $Plus[x_1,x_2,...,x_n]$ است. نتیجه‌ی این تابع برابر است با: $x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_n$ ؛ یعنی مجموع اعداد مندرج در داخل کروشه. اگر بخواهیم یک دسته عدد را با یک عدد ثابت جمع کنیم، ابتدا این اعداد را داخل آکلاد تایپ می‌کنیم و بین هر کدام یک کاما قرار می‌دهیم. سپس علامت + و بعد از آن عددی را که باید با مقادیر داخل آکلاد جمع شود، تایپ می‌کنیم. با محاسبه‌ی سلول، حاصل مجموعه اعداد موردنظر حاصل می‌شود.

Plus [2.5, 0.97, 31.29, 0.405]

35.165

{3, 8, −4, −10, 23} +6

{9, 14, 2, −4, 29}

تابع تفریق[۷]: دستور Sabtract[a,b] حاصل a−b را به‌عنوان نتیجه مشخص می‌کند.

مثال:

Subtract [67, 31]

36

تابع ضرب[۸]: دستور Times [x,y,z] حاصل ضرب x، y، z را به صورت xyz مشخص می‌کند.

مثال:

Times [54, 3.1, 7.64, 1.77]

2263.72

تابع تقسیم[۹]: دستور Divide [x,y] نتیجه‌ی تقسیم x بر y را مشخص می‌کند.

لازم به ذکراست، هنگام استفاده از این تابع اگر x بر y بخش‌پذیر نباشد، نتیجه‌ی تقسیم مشخص نمی‌شود. در این حالت می‌توان از دستورمحاسبه‌ی عددی N استفاده کرد و حاصل تقسیم را به شکل اعشاری یافت.

مثال:

Divide [825, 75]

11

N [Divide[19, 7]]

2.71429

تابع توان[۱۰]: دستور Power [x,n] حاصل x^n را مشخص می‌کند. این دستور به صورت x^n نیز می‌تواند بیان شود.

هم‌چنین اگر بخواهیم چند عدد را هم‌زمان به‌توان یکسان برسانیم، فهرست این اعداد را در یک مجموعه قرار می‌دهیم و بعد از آن علامت ^ (نماد توان) و به دنبال آن توان موردنظر را تایپ می‌کنیم.

مثال:

Power [3, 10]

59049

3^10

59049

{4.5, 7, 1.2, 10}^3

{91.125, 343, 1.728, 1000}

تابع جذرگیری[۱۱]: دستور Sqrt [x] جذرعدد x را مشخص

می‌کند. اگر x عددی مربع کامل نباشد، نتیجه‌ی اجرای این دستور به شکل $\sqrt{x}$ مشخص می‌شود. به منظور محاسبه‌ی عددی این مقدار باید از دستور N استفاده کرد. هم‌چنین اگر x عددی منفی باشد، اجرای این دستور به صورت یک عدد موهومی برحسب مضربی از i (که $i^۲=-۱$) نمایش داده می‌شود.

مثال:

Sqrt [81]

9

Sqrt [35]

$\sqrt{35}$

N [Sqrt [35]]

5.91608

Sqrt [-4]

2 i

نکته: حرف اول هر یک از توابع به‌کار رفته در محیط Mathematica باید به صورت بزرگ تایپ شود.

محاسبه‌ی عبارت‌های جبری

تابع **Expand**: دستور[ ] Expand عبارت داخل کروشه را به‌صورت بسط داده شده مشخص می‌کند.

درمثال‌زیر،دوعبارت $(x+y)^۳$ و $(۳x-۵y^۲)^۲+(۴x+۷y^۲)^۲$ محاسبه شده‌اند.

Expand [{x+y}^3]

$\{x^3+3xy^2+y^3\}$

Expand [(3x–5y^2)^2 + (4x + 7y^2)^2]

$25x^2+26xy^2+74y^4$

تابع **Factor**: دستور [ ] Factor، عبارت جبری داخل کروشه را به شکل حاصل‌ضربی از عوامل اول تجزیه می‌کند. در مثال زیر، عبارت‌های $۱+۴x+۴x^۲$، $x^۴-y^۸$، $a^۳-b^۳$ و $۶x^۲+۱۳x-۵$ تجزیه شده‌اند.

Factor [1 + 4x + 4x^2]

$(1+2x)^2$

Factor [x^4–y^8]

$(x-y^2)(x+y^2)(x^2+y^4)$

Factor [a^3-b^3]

$(a-b)(a^2+ab+b^2)$

Factor [6x^2+13x-5]

$(5+2x)(-1+3x)$

پی‌نوشت

۱. Stephen Wolfram
۲. License Number
۳. Password
۴. Cell
۵. Evaluate Cells
۶. Plus
۷. Subtract
۸. Times
۹. Divide
۱۰. Power
۱۱. Sqrt

کشف یک عدد با بازی ریاضی

میر شهرام صدر

با یک بازی ریاضی برای کشف یک عدد آشنا شوید. در این بازی شما می‌توانید از دوست خود بخواهید که عددی را در ذهن خود در نظر بگیرد، سپس با انجام یک الگوریتم می‌توانید آن عدد را کشف کنید. برای مثال، عددی که دوست شما در نظر می‌گیرد می‌تواند مقدار پول توجیبی یا شماره‌ی شناسنامه یا تاریخ تولد یا هر عدد دیگری باشد. در این‌جا با انجام یک بازی ریاضی می‌خواهیم تاریخ تولد دوست خود را کشف کنید.

برای این کار ابتدا از دوست خود بخواهید که تاریخ تولدش را به‌صورت یک عدد شش رقمی در ذهنش تصور کند. برای مثال، عدد شش رقمی متناظر با تاریخ پانزدهم مردادماه سال ۷۳ به‌صورت زیر است:

روز	ماه	سال
۱۵	۰۵	۷۳

سپس از دوست خود بخواهید که الگوریتم زیر را انجام دهد.

مرحله‌ی ۱) عدد شش رقمی را دو برابر کند.

مرحله‌ی ۲) به عدد حاصل از مرحله‌ی ۱، سه واحد بیافزاید.

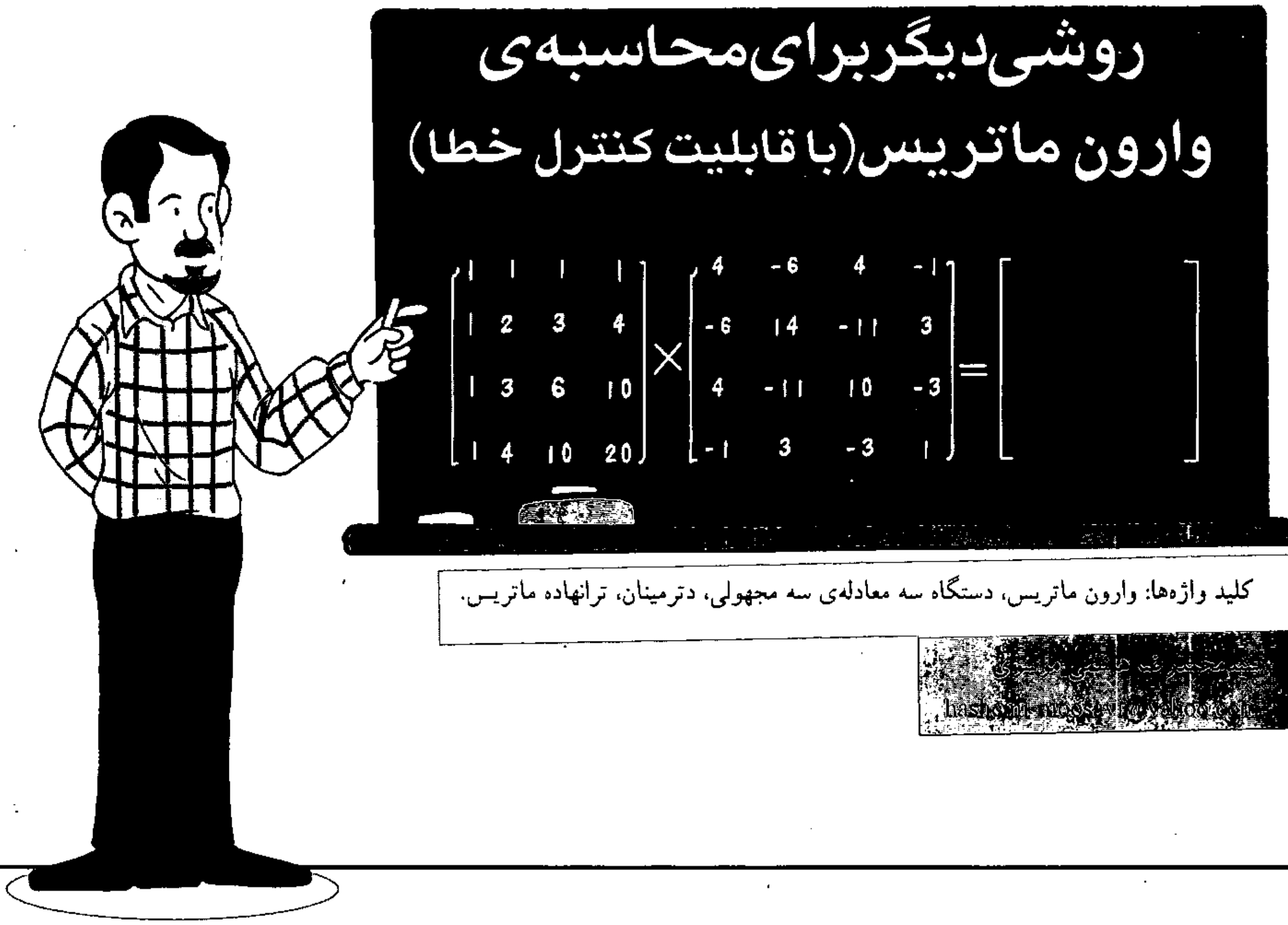
مرحله‌ی ۳) عدد حاصل از مرحله‌ی ۲ را ۵ برابر کند.

مرحله‌ی ۴) از عدد حاصل از مرحله‌ی ۳، شش واحد کم کند.

مرحله‌ی ۵) عدد حاصل از مرحله‌ی ۴ را به شما اعلام کند.

اکنون با حذف رقم یکان عدد اعلام شده، تاریخ تولد دوست خود را می‌یابید.

بقیه در صفحه‌ی ۶۰



روشی دیگر برای محاسبه‌ی وارون ماتریس (با قابلیت کنترل خطا)

کلید واژه‌ها: وارون ماتریس، دستگاه سه معادله‌ی سه مجهولی، دترمینان، ترانهاده ماتریس.

مقاله را با ارائه‌ی روش محاسبه و اثبات وارون ماتریس:

$$A=\begin{bmatrix}a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\\a_3&b_3&c_3\end{bmatrix}$$

آغاز می‌کنیم. همان‌طور که می‌دانیم، وارون ماتریس A را با نماد A^{-1} نمایش می‌دهیم و شرط لازم و کافی برای این‌که ماتریس A وارون‌پذیر باشد، این است که دترمینان A مخالف صفر باشد ($|A|\neq 0$). هم‌چنین می‌دانیم، حاصل‌ضرب وارون A در خودش، ماتریس مربع واحد مرتبه‌ی سوم می‌شود:

$$A^{-1}\times A=I_3$$

به عبارت دیگر داریم:

$$\begin{bmatrix}x_1&y_1&z_1\\x_2&y_2&z_2\\x_3&y_3&z_3\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\\a_3&b_3&c_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

از ضرب وارون A در A^{-1} و متحد قرار دادن ماتریس حاصل و ماتریس مربع واحد مرتبه‌ی سوم، سه دستگاه سه معادله‌ی سه مجهولی برحسب درایه‌های مجهول A^{-1} به ترتیب زیر به‌دست می‌آید:

از تساوی دو ماتریس اخیر سه دستگاه سه معادله‌ی سه مجهولی به شکل زیر حاصل می‌شود، یعنی:

$$\begin{bmatrix}a_1x_1+a_2y_1+a_3z_1&b_1x_1+b_2y_1+b_3z_1&c_1x_1+c_2y_1+c_3z_1\\a_1x_2+a_2y_2+a_3z_2&b_1x_2+b_2y_2+b_3z_2&c_1x_2+c_2y_2+c_3z_2\\a_1x_3+a_2y_3+a_3z_3&b_1x_3+b_2y_3+b_3z_3&c_1x_3+c_2y_3+c_3z_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

دستگاه (۱)
$$\begin{cases}a_1x_1+a_2y_1+a_3z_1=1\\b_1x_1+b_2y_1+b_3z_1=0\\c_1x_1+c_2y_1+c_3z_1=0\end{cases}$$

دستگاه (۲)
$$\begin{cases}a_1x_2+a_2y_2+a_3z_2=0\\b_1x_2+b_2y_2+b_3z_2=1\\c_1x_2+c_2y_2+c_3z_2=0\end{cases}$$

دستگاه (۳)
$$\begin{cases}a_1x_3+a_2y_3+a_3z_3=0\\b_1x_3+b_2y_3+b_3z_3=0\\c_1x_3+c_2y_3+c_3z_3=1\end{cases}$$

بدیهی است، در این‌جا از حل سه دستگاه فوق، درایه‌های ماتریس A^{-1} به‌دست می‌آیند. اکنون سه دستگاه را در یک سیستم حل می‌کنیم



	x_i	y_i	z_i	k_1	k_2	k_3	$\sum c$
(مرحله‌ی ۱)	a_1	a_2	a_3	۱	۰	۰	$a_1+a_2+a_3+1=\delta_1$
	b_1	b_2	b_3	۰	۱	۰	$b_1+b_2+b_3+1=\delta_2$
	c_1	c_2	c_3	۰	۰	۱	$c_1+c_2+c_3+1=\delta_3$
(مرحله‌ی ۲)	$\underbrace{a_1b_2-a_2b_1}_{A_1}$		$\underbrace{a_1b_3-a_3b_1}_{A_2}$	$-b_1$	a_1	۰	$a_1\delta_2-b_1\delta_1=\delta_4$
	$\underbrace{b_1c_2-b_2c_1}_{B_1}$		$\underbrace{b_1c_3-b_3c_1}_{B_1}$	۰	$-c_1$	b_1	$b_1\delta_3-c_1\delta_2=\delta_5$
(مرحله‌ی ۳) $D\neq 0$ شرط لازم و کافی برای وجود وارون	$D=A_1B_2-A_2B_1$			$\underbrace{b_1B_1}_{S_1}$	$\underbrace{-(A_1c_1+a_1B_1)}_{S_2}$	$\underbrace{A_1b_1}_{S_3}$	$A_1\delta_5-B_1\delta_4=\delta_6$

تذکر ۱. ستون Σc برای کنترل هر سطر است و مقدار آن همیشه برابر مجموع سطر مربوطه است. اگر δ_4، δ_5 و δ_6 برابر مجموع عناصر سطر مربوطه‌ی خود نشوند، در محاسبه خطا وجود دارد که این اشتباه باید رفع شود. درواقع، ستون Σc در هر لحظه هر سطر عملیات انجام شده‌ی هر مرحله را کنترل می‌کند و به ما امکان می‌دهد که بلافاصله به خطای موجود در هر سطر پی ببریم و آن را اصلاح کنیم.

تبصره: در مرحله‌ی آخر عملیات (در این‌جا برای ماتریس مربع مرتبه‌ی سوم) می‌توان مقدار دترمینان A را نیز محاسبه کرد. در این‌جا مقدار دترمینان A چنین است:

$$|A|=\frac{D}{b_1}\neq 0$$

تذکر ۲. همان‌طور که گفته شد، مقدار دترمینال A از مرحله‌ی نهایی عملیات به‌دست می‌آید و شرط لازم و کافی برای آن‌که A وارون‌پذیر باشد، آن است که داشته باشیم: $D\neq 0$

از مرحله‌ی ۳، مقادیر z_1، z_2 و z_3 به شکل زیر محاسبه می‌شوند.
از مرحله‌ی ۳ داریم:

$$Dz_i=k_i \quad (D\neq 0)$$

$$z_i=\frac{k_i}{D}\ ;\ i=1:z_1=\frac{k_1}{D}=\frac{b_1B_1}{D}=\frac{S_1}{D},$$

$$i=2:z_2=\frac{S_2}{D},\ i=3:z_3=\frac{A_1b_1}{D}=\frac{S_3}{D}$$

از مرحله‌ی ۲، مقادیر y_1، y_2 و y_3 به شکل زیر محاسبه می‌شوند.
از مرحله‌ی ۲ داریم:

$$A_1y_i+A_2z_i=k'_i$$

$$y_i=\frac{k'_i}{A_1}-A_2\frac{k_i}{DA_1}\ ;$$

$$i=1:y_1=\frac{k'_1}{A_1}-\frac{A_2}{A_1}\frac{k_1}{D}=\frac{-b_1}{A_1}-\frac{A_2}{A_1}\frac{S_1}{D}$$

$$=\frac{-(b_1D+A_2S_1)}{A_1D}=\frac{t_1}{D}$$

$$i=2:y_2=\frac{k'_2}{A_1}-\frac{A_2}{A_1}\frac{k_2}{D}=\frac{a_1}{A_1}-\frac{A_2}{A_1}\frac{S_2}{D}$$

$$=\frac{a_1D-A_2S_2}{A_1D}=\frac{t_2}{D}$$

$$i=3:y_3=\frac{k'_3}{A_1}-\frac{A_2}{A_1}\frac{k_3}{D}=\frac{-A_2}{A_1}\frac{S_3}{D}=\frac{t_3}{D}$$

از مرحله‌ی ۱، مقادیر x_1، x_2 و x_3 به شکل زیر محاسبه می‌شوند. باید توجه داشت، از هر مرحله ساده‌ترین معادله را انتخاب می‌کنیم.
از مرحله‌ی ۱ داریم:

$$a_1x_i+a_2y_i+a_3z_i=k''_i$$

و به‌طور مشابه داریم:

$$i=1:x_1=\frac{U_1}{D},\ i=2:x_2=\frac{U_2}{D},\ i=3:x_3=\frac{U_3}{D}$$

بنابراین، ماتریس وارون A چنین می‌شود:



روش محاسبه

$$A^{-1}=\begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{bmatrix}$$

روش محاسبه‌ی ماتریس وارون A چنین است که ابتدا ترانهاده‌ی A را به‌دست می‌آوریم و سپس ماتریس واحد هم‌مرتبه‌ی A را کنار آن می‌نویسیم.

پس از آن، عملیات روی سطر و ستون را انجام می‌دهیم و از هر مرحله، سه درایه‌ی مجهول ماتریس A^{-1} را به‌دست می‌آوریم. در آخر، به همان‌صورتی که درایه‌های مجهول را نوشته‌ایم، مقدار هر درایه‌ی مجهول را جای‌گزین آن می‌کنیم.

$$A^{-1}=\begin{bmatrix} \frac{U_1}{D} & \frac{t_1}{D} & \frac{S_1}{D} \\ \frac{U_2}{D} & \frac{t_2}{D} & \frac{S_2}{D} \\ \frac{U_3}{D} & \frac{t_3}{D} & \frac{S_3}{D} \end{bmatrix}$$

مثال ۱. وارون ماتریس $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 6 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ را حساب کنید.

حل: وارون ماتریس A را چنین فرض می‌کنیم:

$$A^{-1}=\begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{bmatrix}$$

اکنون ترانهاده‌ی A را به‌دست می‌آوریم و ماتریس واحد مرتبه‌ی سوم را کنار ماتریس حاصل می‌نویسیم. سپس عملیات روی سطرها

	x_i	y_i	z_i	k_1	k_2	k_3	Σc
	۱	۰	۱	۱	۰	۰	۳
(مرحله‌ی ۱)	②	۱	۳	۰	۱	۰	۷
	۴	۶	۲	۰	۰	۱	۱۳
(مرحله‌ی ۲)		۱	۱	−۲	۱	۰	۱
		۸	−۸	۰	−۴	۲	−۲
(مرحله‌ی ۳)			−۱۶	۱۶	−۱۲	۲	−۱۰
(دترمینال A) $\lvert A\rvert=\frac{-16}{2}=-8$				$z_1=\frac{16}{-16}$	$z_2=\frac{-12}{-16}$	$z_3=\frac{2}{-16}$	
				$z_1=-1$			
				$z_2=\frac{3}{4}$			
				$z_3=-\frac{1}{8}$			

را انجام می‌دهیم:

توجه ۱. در هر سطر، مقدار Σc باید برابر مجموع عناصر آن سطر باشد. در غیر این‌صورت، در سطر فوق، یعنی سطری که مجموع عناصرش برابر مقدار Σc نیست، اشتباهی وجود دارد که باید اصلاح شود.

توجه ۲. از مرحله‌ی ۳ درایه‌های ستون آخر ماتریس وارون A به‌دست می‌آید.

با توجه به z_1، z_2 و z_3 و مرحله‌های ۲ و ۱ درایه‌های A^{-1} را حساب می‌کنیم.

حال از مرحله‌ی ۲ معادله‌ی اول آن را که ساده‌تر است، انتخاب و درایه‌های ستون میانی A^{-1} را حساب می‌کنیم. یعنی از مرحله‌ی ۲، مقادیر y_1، y_2 و y_3 را محاسبه می‌کنیم. با توجه به معادله‌ی اول مرحله‌ی ۲ داریم:

$$y_i+z_i=k_i$$

$$i=1: y_1+z_1=k_1\ ;\ y_1-1=-2\ ;\ \boxed{y_1=-1}$$

$$i=2: y_2+z_2=k_2\ ;\ y_2+\frac{3}{4}=1\ ;\ y_2=1-\frac{3}{4}\ ;\ \boxed{y_2=\frac{1}{4}}$$

$$i=3: y_3+z_3=k_3 \Rightarrow y_3-\frac{1}{8}=0 \Rightarrow \boxed{y_3=\frac{1}{8}}$$

در این‌جا از مرحله‌ی ۱، ساده‌ترین معادله را انتخاب و x_1، x_2 و x_3 را نیز محاسبه می‌کنیم. با توجه به معادله‌ی اول مرحله‌ی ۱ داریم:

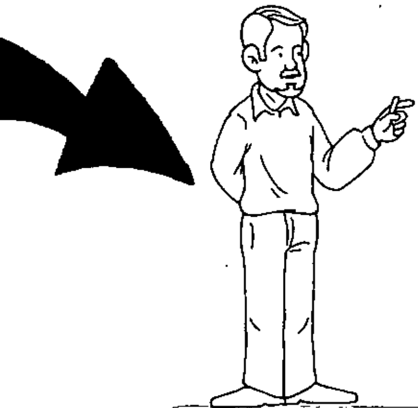
$$x_i+z_i=k_i$$

$$i=1: x_1+z_1=k_1\ ;\ x_1-1=1\ ;\ \boxed{x_1=2}$$

$$i=2: x_2+z_2=k_2\ ;\ x_2+\frac{3}{4}=0\ ;\ \boxed{x_2=-\frac{3}{4}}$$

$$i=3: x_3+z_3=k_3\ ;\ x_3-\frac{1}{8}=0\ ;\ \boxed{x_3=\frac{1}{8}}$$

$$A^{-1}=\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ \frac{-3}{4} & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{-1}{8} \end{bmatrix}$$



در این‌جا ماتریس وارون A یعنی A^{-1} به‌دست می‌آید.

مثال ۲. وارون ماتریس زیر را حساب کنید:

$$A=\begin{bmatrix} ۱ & -۱ & ۲ & ۳ \\ ۰ & ۱ & -۱ & ۱ \\ -۳ & -۲ & ۰ & ۱ \\ -۱ & ۱ & ۳ & ۲ \end{bmatrix}$$

حل: ابتدا ترانهاده‌ی A یعنی A' را به‌دست می‌آوریم. کنار آن ماتریس واحد مرتبه‌ی ۴ را می‌نویسیم و عملیات روی سطرها را انجام می‌دهیم:

	x_i	y_i	z_i	t_i	$K_۱$	$K_۲$	$K_۳$	$K_۴$	Σc
(مرحله‌ی ۱)	۱	۰	−۳	−۱	۱	۰	۰	۰	−۲
	−۱	۱	−۲	۱	۰	۱	۰	۰	۰
	۲	−۱	۰	۳	۰	۰	۱	۰	۵
	۳	۱	۱	۲	۰	۰	۰	۱	۸
(مرحله‌ی ۲)		۱	−۵	۰	۱	۱	۰	۰	−۲
		−۱	۴	−۵	۰	−۲	−۱	۰	−۵
		۵	۲	−۵	۰	۰	−۳	۲	۱
(مرحله‌ی ۳)			−۱	−۵	۱	−۱	−۱	۰	−۷
			−۲۲	۳۰	۰	۱۰	۸	−۲	۲۴
(مرحله‌ی ۴)				−۱۴۰	۲۲	−۳۲	−۳۰	۲	−۱۷۸

توجه: بدون این‌که به عمومیت مسئله خللی وارد شود همیشه می‌توان عناصر میانی ستون اول مرحله ۱ و مرحله ۲ را غیر صفر درنظر گرفت؛ زیرا با جابه‌جایی سطرها یا جمع سطرها این فرض مسلم است.

از مرحله‌ی ۴ نتیجه می‌شود:

$$|A'|=|A|=\frac{-۱۴۰}{(-۱)(۲)(-۱)}=-۷۰$$

$$-۱۴۰t_i=k_i\ ;\ t_i=\frac{k_i}{-۱۴۰}$$

$$i=۱:t_۱=\frac{۲۲}{-۱۴۰}=\frac{-۱۱}{۷۰}\ ;$$

$$i=۲:t_۲=\frac{k_۲}{-۱۴۰}=\frac{-۳۲}{-۱۴۰}=\frac{۸}{۳۵}\ ;$$

$$i=۳:t_۳=\frac{k_۳}{-۱۴۰}=\frac{-۳۰}{-۱۴۰}=\frac{۳}{۱۴}\ ;$$

$$i=۴:t_۴=\frac{k_۴}{-۱۴۰}=\frac{۲}{-۱۴۰}=-\frac{۱}{۷۰}$$

از مرحله‌ی ۳ داریم:

$$-z_i-۵t_i=k_i\Rightarrow z_i+۵t_i=-k_i$$

$$i=۱:z_۱+۵t_۱=-k_۱\ ;\ z_۱+۵t_۱=-۱$$

$$z_۱+۵(-\frac{۱۱}{۷۰})=-۱\ ;\ z_۱=-\frac{۳}{۱۴}, i=۲:z_۲+۵t_۲=-k_۲$$

$$z_۲+۵(\frac{۸}{۳۵})=-(-۱)\ ;\ z_۲=۱-\frac{۸}{۷}\ ;\ z_۲=-\frac{۱}{۷}$$

$$i=۳:z_۳+۵t_۳=-k_۳\ ;\ z_۳+۵(\frac{۳}{۱۴})=-(-۱)\ ;\ z=-\frac{۱}{۱۴}$$

$$i=۴:z_۴+۵t_۴=-k_۴\ ;\ z_۴+۵(-\frac{۱}{۷۰})=۰\ ;\ z_۴=\frac{۱}{۱۴}$$

از معادله‌ی اول مرحله‌ی ۲ داریم:

$$y_i-۵z_i=k_i$$

$$i=۱:y_۱-۵z_۱=k_۱\ ;\ y_۱-۵(-\frac{۳}{۱۴})=۱\ ;$$

$$y_1 = 1 - \frac{15}{14} \; ; \; y_1 = -\frac{1}{14}$$

$$i = 2: y_2 - 5z_2 = k_2 \; ; \; y_2 - 5(-\frac{1}{7}) = 1 \; ; \; y_2 = \frac{2}{7}$$

$$i = 3: y_3 - 5z_3 = k_3 \; ; \; y_3 - 5(-\frac{1}{14}) = 0 \; ; \; y_3 = -\frac{5}{14}$$

$$i = 4: y_4 - 5(\frac{5}{70}) = 0 \; ; \; y_4 = \frac{5}{14}$$

از معادله‌ی اول مرحله‌ی ۱ داریم:

$$x_i - 3z_i - t_i = k_i$$

$$i = 1: x_1 - 3z_1 - t_1 = k_1 \; ;$$
$$x_1 - 3(-\frac{3}{14}) - (-\frac{11}{70}) = 1 \; ; \; x_1 = \frac{1}{5}$$

$$i = 2: x_2 - 3z_2 - t_2 = k_2 \; ;$$
$$x_2 - 3(-\frac{1}{7}) - (\frac{8}{35}) = 0 \; ; \; x_2 = -\frac{1}{5}$$

$$i = 3: x_3 - 3z_3 - t_3 = k_3 \; ;$$
$$x_3 - 3(-\frac{1}{14}) - \frac{3}{14} = 0 \; ; \; x_3 = 0$$

$$i = 4: x_4 - 3z_4 - t_4 = k_4 \; ;$$
$$x_4 - 3(\frac{5}{70}) - (-\frac{1}{70}) = 0 \; ; \; x_4 = \frac{1}{5}$$

* توجه: این روش برای تعیین وارون هر ماتریس مربع قابل تعمیم است که در این مختصر به همین دو مثال اکتفا می‌کنیم.

بنابراین، در این‌جا تمام درایه‌های A^{-1} به‌دست می‌آید و کافی است مقادیر درایه‌های مجهول را جانشین کنیم؛ یعنی:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & t_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & t_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 & t_3 \\ x_4 & y_4 & z_4 & t_4 \end{bmatrix};$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{-1}{14} & \frac{-3}{14} & \frac{-11}{70} \\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{7} & \frac{-1}{7} & \frac{8}{35} \\ 0 & \frac{-5}{14} & \frac{-1}{14} & \frac{3}{14} \\ \frac{1}{5} & \frac{5}{14} & \frac{1}{14} & \frac{-1}{70} \end{bmatrix}$$

مثال ۳. نسبت دو ماتریس زیر را به‌دست آورید.

$$\frac{B}{A} = \frac{\begin{bmatrix} -1 & 2 & -3 \\ -2 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & -1 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -3 \end{bmatrix}} = ?$$

حل: حاصل نسبت را X درنظر می‌گیریم. بنابراین داریم:

$$\frac{B}{A} = X \; ; \; B = AX$$

برای محاسبه‌ی X کافی است طرفین رابطه‌ی اخیر را در وارون A (از طرف چپ) ضرب کنیم، یعنی:

$$A^{-1}B = A^{-1}AX \; ; \; A^{-1}B = I_3X \; ; \; X = A^{-1}B$$

بنابراین، نسبت فوق برابر با حاصل‌ضرب وارون مخرج در صورت (از طرف چپ) است. همان‌طور که دیده می‌شود، مسئله‌ی نسبت دو ماتریس نیز به محاسبه‌ی وارون ماتریس مخرج منتهی می‌شود. در این‌جا برای حل مسئله کافی است ابتدا وارون ماتریس A را محاسبه و سپس در ماتریس B ضرب کنیم.

* توجه: این روش برای هر ماتریس مربع n×n نیز قابل تعمیم است.

ادب ریاضی

تئوری مقدماتی اعداد باید یکی از بهترین موضوع‌ها برای تعلیم اولیه‌ی ریاضیات باشد. چندان اطلاع قبلی نمی‌خواهد، موضوعش ملموس و مأنوس است، طریقه‌های استدلال که به‌کار می‌گیرد، ساده و تعدادشان کم است و از لحاظ تحریک کنجکاوی طبیعی آدمی در علوم ریاضی‌مانند ندارد.

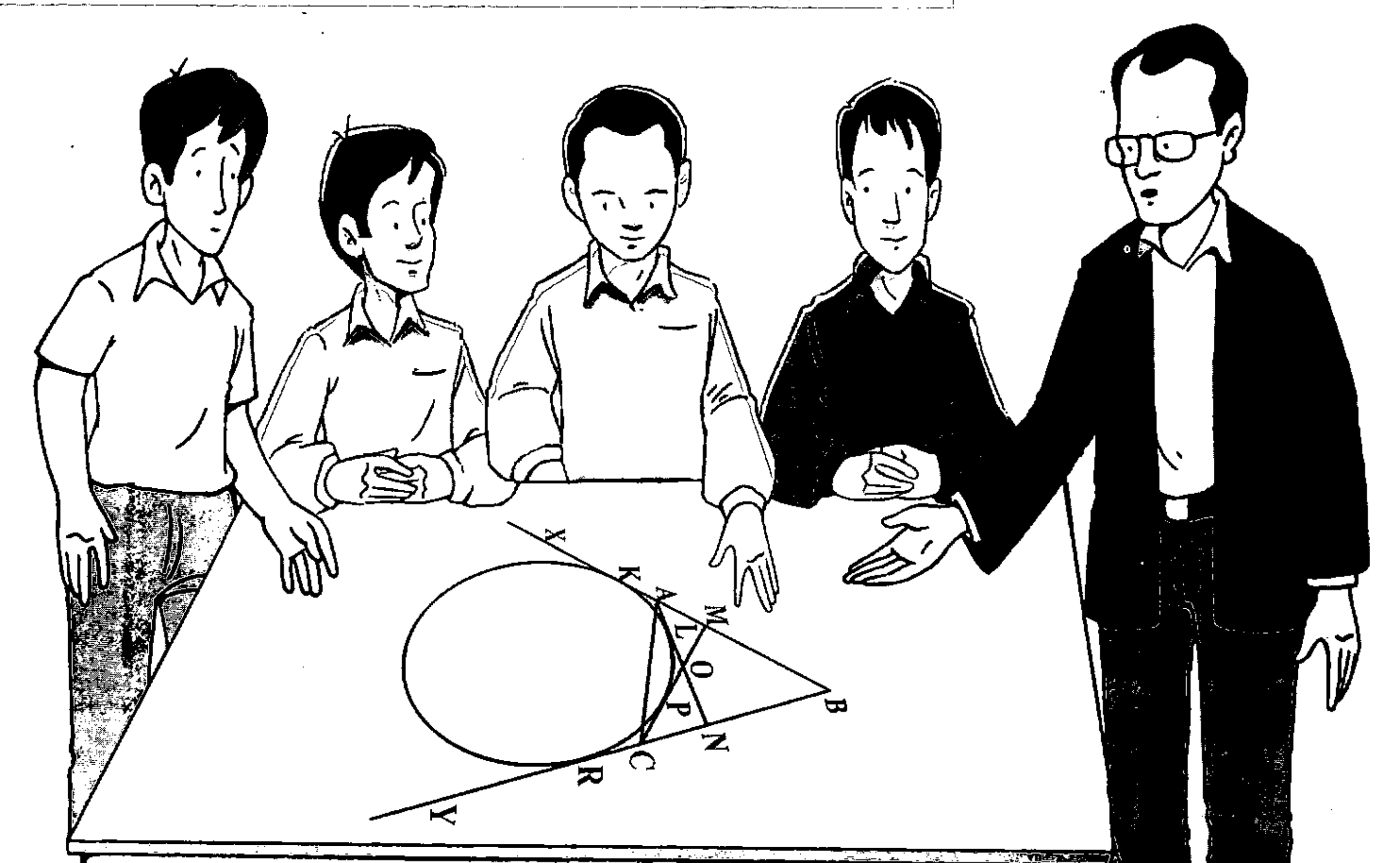
یک ماه تعلیم فهیمانه تئوری اعداد دو بار آموزنده‌تر و مفیدتر و حداقل ده بار سرگرم‌کننده‌تر از همان مدت تعلیم حسابان برای مهندسین می‌باشد.
(هاردی)

منبع:
تئوری مقدماتی اعداد/ دکتر غلام‌حسین مصاحب

گزیده‌ای از مسائل المپیادهای ریاضی لنینگراد

هوشنگ شرقی

کلید واژه‌ها: المپیاد لنینگراد، صورت مسائل المپیادهای لنینگراد، حل مسائل المپیادهای لنینگراد.



«سن پترزبورگ» نام پایتخت روسیه‌ی تزاری بود که پس از انقلاب ۱۹۱۷ و تغییر رژیم، به «لنینگراد» تغییر نام یافت. تا قبل از فروپاشی این اتحادیه (شوروی) و تجزیه‌ی آن به کشورهای گوناگون، المپیادهای ریاضی به‌طور مستقل درهریک از جمهوری‌ها برگزار می‌شد و برگزیدگان در قالب تیم‌هایی در المپیاد سراسری اتحاد شوروی شرکت می‌کردند. تیم نهایی المپیاد ریاضی این کشور نیز از دل این رقابت‌ها انتخاب می‌شد. با این توضیحات می‌توان حدس زد که سطح سؤالات این آزمون‌ها بسیار قوی بوده است و همین طور هم بود.

درباره‌ی تاریخچه‌ی المپیاد ریاضی در شوروی سابق و روسیه و جمهوری‌های استقلال‌یافته‌ی بعدی بسیار می‌توان نوشت و امیدوارم در فرصتی دیگر بتوانم به طور مستقل به این موضوع بپردازم. ولی همین‌قدر باید گفت که کشور شوروی از بنیان‌گذاران المپیاد بین‌المللی ریاضی در سال ۱۹۵۹ بود و از نخستین دوره تا زمان فروپاشی، در تمام المپیادها شرکت داشت. همواره هم جزو ۱۰ تیم برتر این رقابت‌ها بود. تنها در فاصله‌ی سال‌های ۱۹۶۳ تا ۱۹۶۷ این کشور در پنج دوره‌ی متوالی مقام نخست این رقابت‌ها را از آن خود کرد و در مجموع چهارده بار (تا سال ۱۹۹۳ که با نام اتحاد شوروی شرکت کرده است) مقام نخست و شش بار مقام دوم را کسب کرد!

پس از فروپاشی شوروی سابق نیز، کشور روسیه و سایر جمهوری‌های شوروی سابق توانسته‌اند موفقیت‌های بسیاری در المپیاد بین‌المللی ریاضی به‌دست آورند. مسائلی که درجریان رقابت‌های این جمهوری‌ها طی سال‌های متمادی مطرح شده‌اند، منبع عظیمی از مسائل ناب ریاضی هستند که متأسفانه دست‌رسی کاملی به آن‌ها وجود ندارد. ای کاش می‌شد مجموعه‌ی همه‌ی آن‌ها را جمع‌آوری و طبقه‌بندی کرد و در اختیار علاقه‌مندان قرار داد. کتاب «المپیادهای ریاضی لنینگراد» که مجموعه‌ی مسائل مسابقات ریاضی این شهر از سال ۱۹۶۱ تا سال ۱۹۹۳ را در برمی‌گیرد، یک مجموعه‌ی عالی از مسائل کم‌نظیر ریاضی است که به‌راستی و بی‌اغراق باید آن را غنیمت شمرد و در واقع جزو معدود منابع منتشرشده‌ی مسائل ریاضی شوروی سابق است. این کتاب که توسط دیمیتری ولادمیرویچ فومین و آلکسی کرچنکو نگارش یافته، تاکنون

به ده‌ها زبان زنده‌ی دنیا ترجمه شده و مورد استفاده‌ی میلیون‌ها نفر از علاقه‌مندان رشته‌ی ریاضی قرار گرفته است. در کشور ما نیز این کتاب به زبان فارسی ترجمه شده است و مترجم آن کسی نیست جز استاد پرویز شهریاری که زحمت ترجمه‌ی بسیاری از کتاب‌های المپیاد ریاضی را نیز متحمل شده‌اند. نگارنده به‌خوبی به یاد دارد، از هنگامی که نخستین چاپ این کتاب در سال ۱۳۷۴ منتشر شد، تاکنون بارها و بارها آن‌را به دانش‌آموزان داوطلب شرکت در المپیاد ریاضی معرفی کرده است و یقین دارد که یکی از بهترین منابع سؤال است و شاید برترین آن‌ها باشد. از جمله امتیازات این مجموعه مسائل آن است که چون مسابقات المپیاد ریاضی در لنینگراد (و در دیگر شهرهای شوروی سابق) در همه‌ی سطوح دبیرستانی برگزار می‌شده است، بنابراین مسائلی مناسب همه‌ی سنین دارد و می‌تواند هر دانش‌آموز علاقه‌مند را با مسائل خود ساعت‌ها به چالش بکشاند. نکته‌ی جالب توجه آن است که بعضی از مسائل کتاب که برای دانش‌آموزان سال ششم و هفتم این شهر (معادل اول و دوم راهنمایی کشور خودمان) مطرح شده‌اند، مسائل بسیار دشواری هستند که حل آن‌ها برای بسیاری از دانش‌آموزان دبیرستان‌ها می‌تواند کاملاً چالش‌برانگیز باشد! وقتی تصمیم گرفتم بعضی از مسائل این المپیادها را برای این شماره انتخاب کنم، حیفم آمد که آن را به یک شماره و چند مسئله محدود کنم و تصمیم گرفتم طی چند شماره‌ی پیاپی به این مسائل بپردازم. در این شماره پنج مسئله از مسائل ویژه‌ی کلاس‌های دهم در سال ۱۹۹۰ را انتخاب و مطرح می‌کنم و در شماره‌های بعد به مسائل دیگری می‌پردازم. سعی کرده‌ام مسائلی را انتخاب کنم که حل یا راهنمایی آن‌ها در کتاب مزبور وجود نداشته باشد. امیدوارم که خوانندگان مجله از این مسائل لذت کافی ببرند و قبل از ملاحظه‌ی راه حل آن‌ها، خود نیز سعی کنند با آن ها، ولو اندک زمانی به چالش بپردازند. من خود طی سال‌های متمادی از این مسائل به‌راستی لذت برده‌ام و امیدوارم برای شما نیز چنین باشد. در انتها ذکر این نکته هم بد نیست که پس از فروپاشی شوروی سابق، نام شهر لنینگراد دوباره به سن پترزبورگ تغییر یافته است و المپیاد ریاضی آن با این نام هم‌چنان برگزار می‌شود.

صورت مسائل

۱. آیا می‌توان با استفاده از رقم‌های ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ و ۶ (و از هرکدام یک بار) عددی شش‌رقمی و بخش‌پذیر بر ۱۱ درست کرد؟

۲. چند جمله‌ای f با ضریب‌های درست داده شده است. می‌دانیم f(۲) بر ۵ و f(۵) بر ۲ بخش‌پذیر است. ثابت کنید f(۷) بر ۱۰ بخش‌پذیر است.

۳. برای عدد حقیقی و مثبت x می‌دانیم:

$$x^n = x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1$$

ثابت کنید: $(n > 1) \quad 2 - \frac{1}{n} < x < 2$

۴. برای عددهای طبیعی a و b می‌دانیم a^2+ab+1 بر b^2+ab+1 بخش‌پذیر است. ثابت کنید: $a=b$.

۵. نقطه‌ی دل‌خواه P را روی ضلع BC از مربع ABCD انتخاب کرده‌ایم. دایره‌ای که از سه نقطه‌ی A، B و P می‌گذرد، قطر BD را در نقطه‌ی دیگر Q قطع می‌کند. دایره‌ای که از سه نقطه‌ی C، P و Q می‌گذرد، BD را در نقطه‌ی دیگر R قطع می‌کند. ثابت کنید A، R و P بر یک امتدادند.

حل مسائل

۱. این نخستین و آسان‌ترین مسائل است!

مجموع این رقم‌ها را در نظر بگیرید:

$$1+2+3+4+5+6=\frac{6\times 7}{2}=21$$

امّا می‌دانیم که باقی‌مانده‌ی تقسیم هر عدد بر ۱۱، برابر است با باقی‌مانده‌ی تقسیم عددی که از جمع و تفریق یک درمیان ارقام این عدد بر ۱۱ (از سمت راست) به‌دست می‌آید؛ یعنی:

$$\overline{abcdef} \overset{11}{\equiv} f-e+d-c+b-a$$

و اگر بخواهیم این عدد بر ۱۱ بخش‌پذیر باشد، باید داشته باشیم:

$$f-e+d-c+b-a=11m \Leftrightarrow \overline{abcdef} \overset{11}{\equiv} 0$$

اگر $m=0$ باشد، نتیجه می‌شود: $f+d+b=a+c+e$. یعنی مجموع سه تا از رقم‌ها مساوی مجموع سه‌تای دیگر باشد و با توجه به این که مجموع هر شش رقم مساوی ۲۱ است، چنین چیزی ممکن نیست. (چرا؟)

به‌ازای $m=1$ نیز، با توجه به مجموع رقم‌ها، نتیجه می‌شود:

$$\begin{cases} f+d+b-(e+c+a)=11 \\ f+d+b+(e+c+a)=21 \end{cases} \Rightarrow f+d+b=16$$

$$e+c+a=5$$

که این هم ممکن نیست. (چرا؟) برای $m>1$ نیز به سادگی مشخص می‌شود که امکان‌پذیر نیست. لذا پاسخ منفی است.

۲. ابتدا لم زیر را اثبات می‌کنیم.

اگر چندجمله‌ای f(x) با ضرایب صحیح مفروض باشد، $f(b)-f(a)$ بر $b-a$ بخش‌پذیر است.

اثبات لم آسان است.

$$f(x) = C_n x^n + C_{n-1}x^{n-1} + \dots + C_1 x + C_0$$

$$f(b) - f(a) =$$

$$C_n(b^n - a^n) + C_{n-1}(b^{n-1} - a^{n-1}) + \dots + C_1(b-a)$$

و با توجه به اتحاد

$$b^m - a^m = (b-a)(b^{m-1} + ab^{m-2} + \dots + a^{m-1})$$

بدیهی است که همه‌ی پرانتزها عامل $b-a$ را دارند و درنتیجه: $b-a \mid f(b) - f(a)$.

اکنون با توجه به لم فوق داریم:

$$7-2 \mid f(7) - f(2) \Rightarrow 5 \mid f(7) - f(2), 5 \mid f(2)$$

$$\Rightarrow 5 \mid f(7) \quad (*)$$

$$7-5 \mid f(7) - f(5) \Rightarrow 2 \mid f(7) - f(5), 2 \mid f(5)$$

$$\Rightarrow 2 \mid f(7) \quad (**)$$

و با توجه به دو رابطه‌ی * و ** بدیهی است که: $10 = 2 \times 5 \mid f(7)$

؛ یعنی $f(7)$ بر ۱۰ بخش‌پذیر است.

۳. معادله را به‌صورت زیر تغییر می‌دهیم:

$$f(x) = x^n - (x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1) = 0$$

حال از قضیه‌ی موسوم به قضیه‌ی بولتزانو استفاده می‌کنیم:

قضیه: اگر f تابعی پیوسته در بازه‌ی $[a,b]$ باشد و داشته باشیم: $f(a) > 0$ و $f(b) < 0$ یا $f(a) < 0$ و $f(b) > 0$، آن‌گاه معادله‌ی $f(x) = 0$ در بازه‌ی $[a,b]$ لااقل یک ریشه‌ی حقیقی دارد.

اکنون می‌نویسیم:

$$f(x) = x^n - \frac{x^n - 1}{x-1}$$

$$= \frac{x^{n+1} - x^n - x^n + 1}{x-1} = \frac{x^{n+1} - 2x^n + 1}{x-1}$$

$$= \frac{x^n(x-2) + 1}{x-1}$$

$$f(2) = 1 > 0$$

$$f(2 - \frac{1}{n}) = \frac{(2-\frac{1}{n})^n(-\frac{1}{n}) + 1}{1 - \frac{1}{n}}$$

و چون $n > 1$ پس، $1 - \frac{1}{n} > 0$ و به کمک قضیه‌ی استقرای ریاضی می‌توان ثابت کرد: $(2 - \frac{1}{n})^n > n$ (برای گذر استقرایی از بسط دوجمله‌ای نیوتون استفاده کنید). بنابراین:

$$n - (2 - \frac{1}{n})^n < 0$$

و از آن جا:

$$\frac{n - (2 - \frac{1}{n})^n}{n} < 0$$

و درنتیجه:

$$(-\frac{1}{n})(2 - \frac{1}{n})^n + 1 < 0$$

بنابراین:

$$f(2 - \frac{1}{n}) < 0$$

و طبق قضیه‌ی بولتزانو:

$$2 - \frac{1}{n} < x < 2$$

۴. از ویژگی‌های رابطه‌ی بخش‌پذیری (عادکردن) استفاده می‌کنیم:

$$\left.\begin{array}{l} b^2 + ab + 1 \mid a^2 + ab + 1 \\ b^2 + ab + 1 \mid b^2 + ab + 1 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$b^2 + ab + 1 \mid b(a^2 + ab + 1) - a(b^2 + ab + 1) = b - a$$

$$\Rightarrow b^2 + ab + 1 \mid b - a$$

ولی روشن است که اگر $a,b \in \mathbb{N}$ باشند، داریم:

$$\Rightarrow b^2 + ab + 1 > b - a$$

(زیرا $b^2 \geq b$). پس باید $b - a = 0$ باشد و از آن‌جا: $a=b$.

۵. بدون آن‌که دایره‌ی محیطی مثلث CPQ را رسم کنیم، ثابت می‌کنیم که نقطه‌ی برخورد BD و AP (نقطه‌ی R') و سه نقطه‌ی C، P و Q رئوس یک چهارضلعی محاطی اند. بنابراین دایره‌ی محیطی مثلث CPQ از R' می‌گذرد و R' همان R است. درنتیجه A، R و P بر یک استقامت‌اند.

مطابق شکل، دو مثلث CBQ و ABQ به حالت (ض‌زض) همنهشت‌اند ($\hat{B}_1 = \hat{B}_2 = 45^\circ$، AB=BC و BQ=BQ). بنابراین: $\hat{C}_1 = \hat{A}_1 + \hat{A}_2$ و نیز داریم:

$$\hat{A}_2 = \hat{B}_2 = \frac{\widehat{PQ}}{2} \Rightarrow \hat{A}_2 = 45^\circ \Rightarrow \hat{C}_1 = \hat{A}_1 + 45^\circ \quad (1)$$

در مثلث $AR'B$ نیز زاویه‌ی خارجی R'_1 برابر است با:

$$\hat{R'}_1 = \hat{B}_1 + \hat{A}_1 = 45^\circ + \hat{A}_1 \quad (2)$$

$$(1) \text{ و } (2) \Rightarrow \hat{C}_1 = \hat{R'}_1 \text{ و}$$

$$\hat{R'}_1 + \hat{R'}_2 = 180^\circ \Rightarrow \hat{C}_1 + \hat{R'}_2 = 180^\circ$$

بنابراین، چهارضلعی $CQR'P$ محاطی است و طبق آن‌چه که گفتیم، دایره‌ی محیطی مثلث CPQ از R' می‌گذرد. لذا نقطه‌ی برخورد آن با BD همان R' و R' بر R منطبق است. یعنی حکم اثبات شده است.

رویکرد هندسی ـ رویکرد جبری در آموزش هندسه (۱۲)

محمد هاشم رستمی



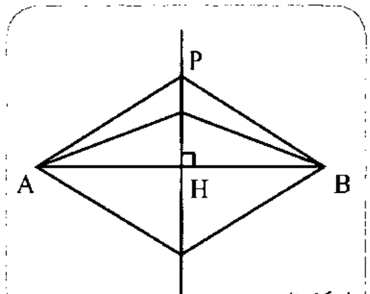
کلید واژه‌ها: عمود منصف پاره‌خط، نیم‌ساز، مکان هندسی.

به منظور استفاده‌ی عده‌ی بیشتری از دانش‌آموزان از این رویکرد در حل مسئله‌های هندسه، به ارتباط این دو رویکرد در حل مسئله‌های هندسه در صفحه می‌پردازیم. به‌این ترتیب با دستگاه مختصات دکارتی در صفحه سروکار خواهیم داشت.

ویژگی‌های عمود منصف یک پاره‌خط در یک صفحه

قضیه: ثابت کنید عمود منصف هر پاره‌خط واقع در یک صفحه، مکان هندسی نقطه‌ای از آن صفحه است که از دو سر آن پاره‌خط به یک فاصله قرار دارد.

یعنی:



(شکل۱)

۱. هر نقطه‌ای که روی عمود منصف این پاره‌خط باشد، از دو سر این پاره‌خط به یک فاصله است.

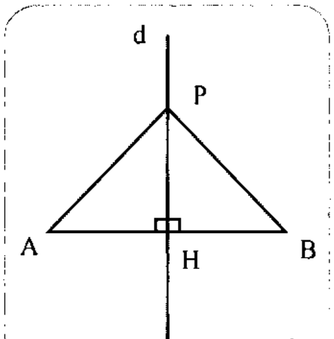
۲. هر نقطه‌ای که از دو سر این پاره‌خط به یک فاصله باشد، روی عمود منصف این پاره‌خط قرار دارد.

این قضیه را با دو روش هندسی و جبری ـ مختصاتی ثابت می‌کنیم.

الف) اثبات به روش هندسی

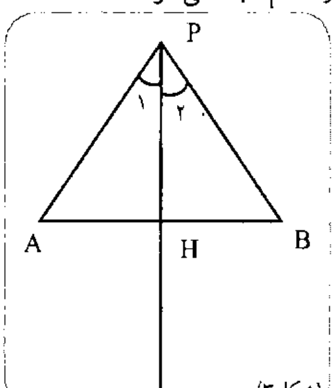
۱. عمود منصف پاره‌خط AB را d و نقطه‌ی برخورد آن با پاره‌خط AB را که در واقع همان وسط پاره‌خط AB است، H می‌نامیم. از نقطه‌ی دل‌خواه P واقع بر خط d (عمود منصف پاره‌خط AB)، به دو نقطه‌ی A و B وصل می‌کنیم. می‌خواهیم ثابت کنیم که: PA= PB. دو مثلث PAH و PBH همنهشت‌اند، زیرا داریم:

$$\begin{cases} AH = BH \\ PH = PH \\ P\hat{H}A = P\hat{H}B = ۹۰^\circ \end{cases}$$



(شکل۲)

بنابراین ضلع‌های سوم این دو مثلث با هم برابرند؛ یعنی: PA=PB و حکم ثابت می‌شود.



(شکل۳)

۲. نقطه‌ی P و پاره‌خط AB در یک صفحه چنان واقع‌اند که داریم: PA=PB. می‌خواهیم ثابت کنیم که نقطه‌ی P روی عمودمنصف پاره‌خط AB است. برای اثبات نیم‌ساز زاویه‌ی درونی از مثلث PAB را رسم می‌کنیم و پای این نیم‌ساز را H می‌نامیم. دو مثلث PHA و PHB به حالت (ض‌ز‌ض) همنشهت هستند، زیرا داریم:

$$\begin{cases} PA = PB \\ A\hat{P}H = B\hat{P}H \qquad \hat{P}_۱ = \hat{P}_۲ \\ PH = PH \end{cases}$$

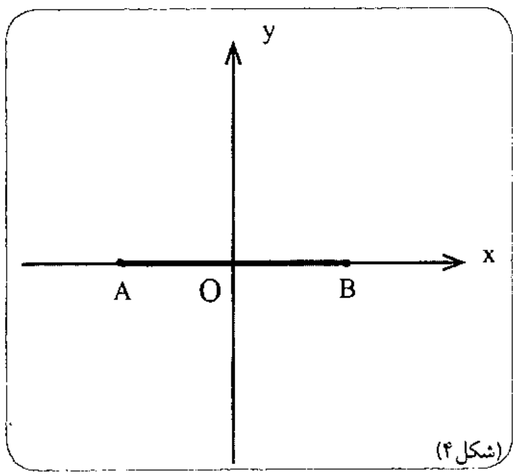
در نتیجه AH=BH . یعنی H وسط پاره‌خط AB است. از طرف دیگر: $A\hat{H}P=B\hat{H}P$ که چون $A\hat{H}P+B\hat{H}P=۱۸۰^\circ$ است، پس: $A\hat{H}P=B\hat{H}P=۹۰^\circ$. یعنی PH بر AB عمود است. در نتیجه PH عمودمنصف پاره‌خط AB و حکم مسئله درست است.

ب) راه حل جبری ـ مختصاتی

صورت مسئله را بار دیگر بیان می‌کنیم:

قضیه: ثابت کنید عمود منصف هر پاره‌خط واقع در یک صفحه، مکان هندسی نقطه‌ای از آن صفحه است که از دو سر آن پاره‌خط به یک فاصله است.

اثبات: اندازه‌ی پاره‌خط AB را ۲a فرض می‌کنیم. مهم‌ترین کار در روش حل جبری ـ مختصاتی انتخاب دستگاه مختصات مناسبی است که راه حل مسئله را به ساده‌ترین صورت، ممکن سازد.



(شکل۴)

در این مسئله، محور xها را روی خط AB و محور yها را روی عمودمنصف پاره‌خط AB اختیار می‌کنیم. نقطه‌ی برخورد این دو محور نقطه‌ی o (که همان نقطه‌ی H در راه حل هندسی است)، مبدأ مختصات است. نقطه‌ی دل‌خواه P را روی عمودمنصف پاره‌خط AB که در این‌جا همان محور yهاست، اختیار می‌کنیم و مختصات این نقطه را $P=(۰\,,y)$ در نظر می‌گیریم. از P به A و B وصل می‌کنیم. می‌خواهیم ثابت کنیم، برای هر نقطه‌ی P از عمودمنصف پاره‌خط AB داریم: PA=PB. با توجه به این‌که در این دستگاه مختصات قائم $A=(-a\,,۰)$ و $B=(a\,,۰)$ است، داریم:

$$PA=PB \Rightarrow \sqrt{(-a-۰)^{۲}+(۰-y)^{۲}}$$
$$=\sqrt{(a-۰)^{۲}+(۰-y)^{۲}} \Rightarrow \sqrt{a^{۲}+y^{۲}}$$
$$=\sqrt{a^{۲}+y^{۲}} \Rightarrow a^{۲}+y^{۲}=a^{۲}+y^{۲}$$

این تساوی همواره برقرار است. بنابراین همواره PA=PB است.

پس هر نقطه واقع بر عمودمنصف پاره‌خط AB از دوسر این پاره‌خط، یعنی از دو نقطه‌ی A و B، به یک فاصله است.

اکنون ثابت می‌کنیم هر نقطه‌ای که از دو سر پاره‌خط AB به یک فاصله باشد، روی عمودمنصف این پاره‌خط واقع است. بدین ترتیب که اگر $P=(x\,,y)$ نقطه‌ای واقع در صفحه‌ی مختصات قائم ذکر شده در بالا باشد و از دو سر پاره‌خط AB ($A=(-a\,,۰)$ و $B=(a\,,۰)$) به یک فاصله باشد، خواهیم داشت:

$$P=(x,y)\,,\,A=(-a,۰)\,,\,B=(a,۰)\,,\,PA=PB$$
$$\Rightarrow \sqrt{(x+a)^{۲}+(y-۰)^{۲}}=\sqrt{(x-a)^{۲}+(y-۰)^{۲}}$$
$$\Rightarrow (x+a)^{۲}+y^{۲}=(x-a)^{۲}+y^{۲}$$
$$\Rightarrow (x+a)^{۲}-(x-a)^{۲}=۰$$
$$\Rightarrow ۴ax=۰\,,\,a\neq ۰ \Rightarrow x=۰ \Rightarrow p=(۰\,,y)$$

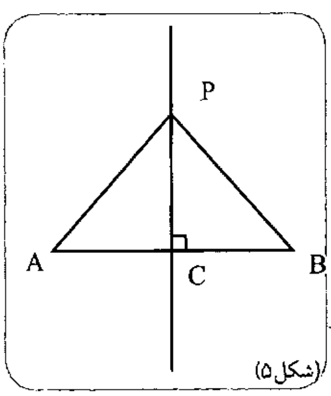
یعنی نقطه‌ی P روی محور yها واقع است که همان عمودمنصف پاره‌خط AB محسوب می‌شود. بنابراین، به روش تحلیلی نیز ثابت کردیم که عمودمنصف هر پاره‌خط واقع در یک صفحه، مکان هندسی نقطه‌ای از آن صفحه است که از دو سر آن پاره‌خط به یک فاصله است؛ زیرا:

الف) هر نقطه مانند P که روی عمودمنصف پاره‌خط AB باشد، از دو نقطه‌ی A و B به یک فاصله است؛ یعنی PA=PB.

ب) هر نقطه‌ای که از دو سر پاره‌خط AB به یک فاصله باشد (یعنی PA=PB)، روی عمودمنصف پاره‌خط AB است.

نکته: به طوری‌که دیده می‌شود، اثبات این قضیه به‌روش جبری ـ مختصاتی، ساده‌تر از اثبات آن به روش هندسی است. اینک به چند مثال توجه کنید.

مثال ۱. ثابت کنید هر نقطه مانند P روی عمودمنصف پاره‌خط AB، از نقاط A و B به یک فاصه است (مسئله‌ی ۱۹ صفحه‌ی ۲۷ کتاب هندسه‌ی ۱).



(شکل۵)

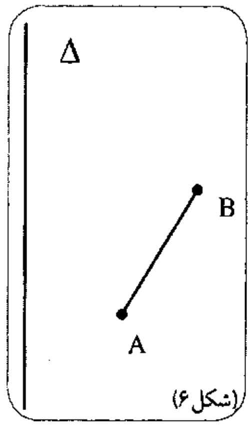


حل: این مثال قسمت اول مسئله‌ی ابتدای مقاله است که با دو روش هندسی و جبری ـ مختصاتی حل شده است.

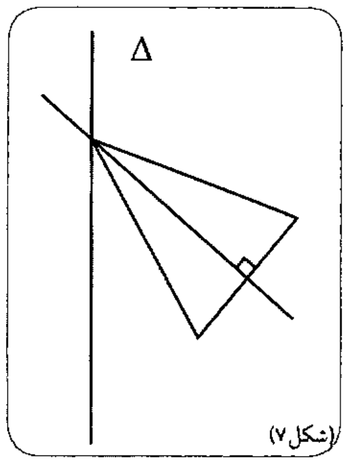
مثال ۲. دو نقطه‌ی A و B و خط Δ در یک صفحه داده شده‌اند، نقطه‌ای روی خط Δ بیابید که از دو نقطه‌ی A و B به یک فاصله باشد.

حل: الف) رویکرد هندسی

می‌دانیم، مکان هندسی نقطه‌ای از یک صفحه که از دو سر یک پاره‌خط به یک فاصله است، عمودمنصف آن پاره‌خط است. بنابراین نقطه‌ی جواب مسئله، هم باید روی عمودمنصف پاره‌خط AB باشد و هم باید روی خط Δ باشد. پس این نقطه محل برخورد این دو خط است، در نتیجه، برای حل مسئله عمودمنصف پاره‌خط AB را رسم می‌کنیم و آن را d می‌نامیم. نقطه‌ی برخورد خط d با خط Δ که آن را M می‌نامیم، جواب مسئله است. یعنی اگر از M به A و B وصل کنیم، داریم:
MA=MB.



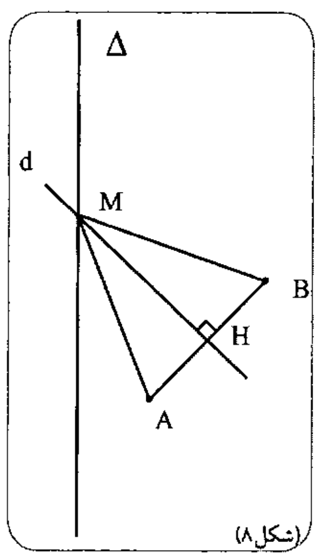
(شکل ۶)



(شکل ۷)

بحث در تعداد جواب مسئله

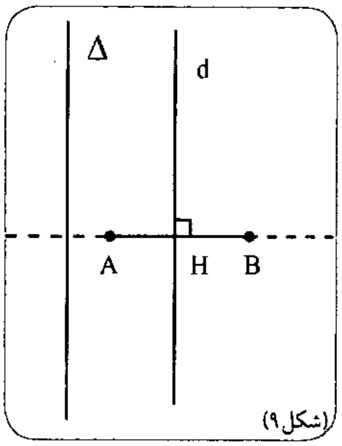
۱. اگر خط d عمودمنصف پاره‌خط AB، با خط Δ متقاطع باشد، مسئله تنها یک جواب دارد که همان نقطه‌ی M است. این در صورتی است که راستای خط AB عمود بر راستای Δ نباشد (شکل ۸). به بیان دیگر، اگر خط AB خط Δ را قطع کند و بر آن عمود هم نباشد.



(شکل ۸)

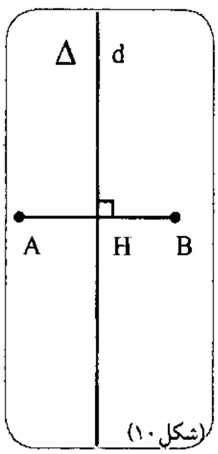
۲. اگر خط d عمودمنصف پاره‌خط AB، موازی خط Δ باشد، مسئله جواب ندارد. این در صورتی است که راستای خط AB بر خط Δ عمود باشد (شکل ۹).

نکته: در این حالت راستای AB راستای Δ را قطع می‌کند، اما دو راستا بر هم عمودند.



(شکل ۹)

۳. اگر خط d عمودمنصف پاره‌خط AB منطبق بر خط Δ باشد، مسئله بی‌شمار جواب دارد. زیرا هر نقطه از خط Δ که همان خط d است، جواب مسئله محسوب می‌شود (شکل ۱۰). البته این در صورتی است که خود خط Δ عمودمنصف پاره‌خط AB باشد.

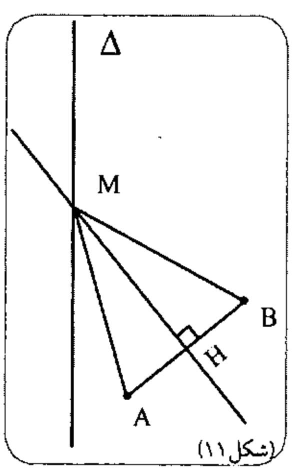


(شکل ۱۰)

روشی‌دیگر برای حل هندسی مثال ۲

مسئله را حل شده فرض می‌گیریم، یعنی فرض می‌کنیم نقطه‌ی M، نقطه‌ی جواب مسئله باشد؛ یعنی نقطه‌ای باشد که از دو نقطه‌ی A و B به یک فاصله است (MA=MB). چون مکان هندسی نقاطی از صفحه که از دو نقطه‌ی A و B به‌یک فاصله هستند، خط عمودمنصف پاره‌خط AB است، پس نقطه‌ی M یکی از نقطه‌های عمودمنصف پاره‌خط AB است.
یعنی عمودمنصف پاره‌خط AB از این نقطه می‌گذرد. به‌عبارت دیگر، نقطه‌ی M محل برخورد عمودمنصف پاره‌خط AB و خط Δ است.

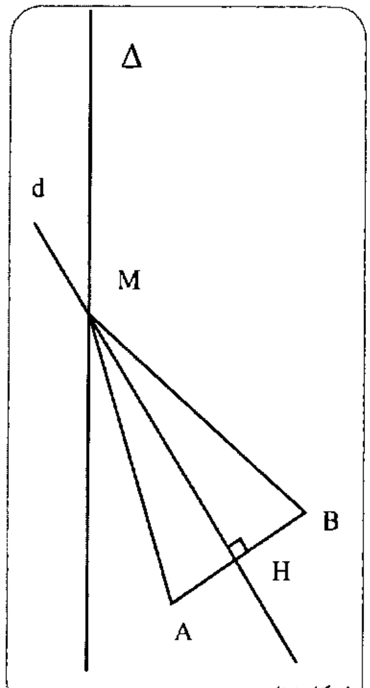




(شکل ۱۱)

از این جا روش حل مسئله مشخص می‌شود. بدین ترتیب که برای تعیین نقطه‌ی M، عمودمنصف پاره‌خط AB را رسم می‌کنیم و آن را

d می‌نامیم. نقطه‌ی برخورد این خط و خط Δ را نقطه‌ی M می‌نامیم که این نقطه جواب مسئله است. زیرا اگر از این نقطه به A و B وصل کنیم، داریم: MA=MB. بحث مربوط به تعداد جواب برای مسئله همانند بحث روش قبلی است.



(شکل۱۲)

نکته: روش مسأله را حل شده فرض کردن: یکی از راهبردهای مهم در حل مسئله‌ها، به‌ویژه حل مسئله‌های هندسه و به‌ویژه در مواردی است که حل کردن مسئله با داده‌های موجود آسان نباشد و به داده‌های بیشتری نیاز داشته باشیم. تا به کمک آن‌ها بتوانیم مسئله را حل کنیم؛ برای مثال:

«مثلثی رسم کنید که اندازه‌ی سه میانه‌ی آن داده شده است.»

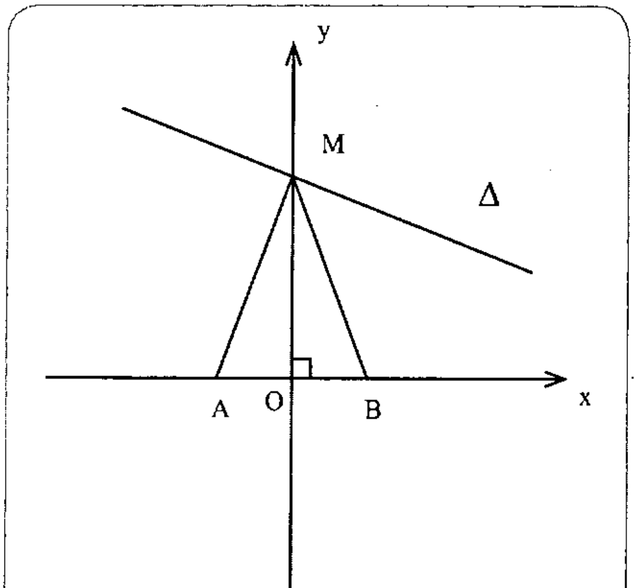
حل این مسئله و مسئله‌های مشابه دیگری که با این روش حل می‌شوند، در جلدهای ۱۱، ۱۲ و ۱۳ دایرةالمعارف که به رسم شکل‌های هندسی با روش هندسی اختصاص دارند، وجود دارد.

ب) حل با رویکرد جبری ـ مختصاتی

مسئله را بار دیگر بیان می‌کنیم:

دو نقطه‌ی A و B و خط Δ در یک صفحه داده شده‌اند، نقطه‌ای روی خط Δ بیابید که از دو نقطه‌ی A و B به یک فاصله باشد.

برای اثبات، دستگاه مختصات قائم xoy را در صفحه‌ای که A و B و خط Δ قرار دارد، به‌گونه‌ای انتخاب می‌کنیم که محور xها روی خط AB و مبدأ مختصات وسط پاره‌خط AB باشد، در این دستگاه مختصات، اگر $A=(x_1, 0)$ و $B=(-x_1, 0)$ اختیار شود، معادله‌ی عمودمنصف پاره‌خط AB ـ که در واقع محور yهاست ـ عبارت است از: $x=0$ معادله‌ی خط Δ در این دستگاه مختصات به‌صورت کلی $ax+by+c=0$ خواهد بود. در این صورت، مختصات نقطه‌ی M که محل برخورد عمودمنصف پاره‌خط AB و خط Δ است، از دستگاه دو معادله‌ی دو مجهولی زیر به‌دست می‌آید.



(شکل۱۳)

$$\begin{cases} x=0 \\ ax+by+c=0 \end{cases} \Rightarrow by+c=0$$

$$\Rightarrow y=-\frac{c}{b} \Rightarrow M=(0,-\frac{c}{b})$$

این نقطه که نقطه‌ای از خط Δ است،از دو نقطه‌ی A و B به یک فاصله است؛ زیرا داریم: $M=(0,-\frac{c}{b}), A=(x_1,0), B=(-x_1,0)$

$$\Rightarrow MA=\sqrt{x_1^2+\frac{c^2}{b^2}}, MB=\sqrt{x_1^2+\frac{c^2}{b^2}}$$

$$\Rightarrow MA=MB$$

نکته: اگر دستگاه مختصات قائم xoy درصفحه‌ی گذرنده بر A و B و Δ را به‌صورت دل‌خواه در نظر بگیریم، حل مسئله با رویکرد جبری ـ مختصاتی مشکل‌تر خواهد شد. زیرا در این صورت





نقطه‌های A و B به مختصات $A=(x_۱ , y_۱)$ و $B=(x_۲ , y_۲)$ و خط Δ به معادله‌ی کلی $ax+by+c=۰$ خواهد بود. برای تعیین نقطه‌ی M، محل برخورد عمودمنصف پاره‌خط AB با خط Δ، نخست باید معادله‌ی خط d، عمودمنصف پاره‌خط AB را بنویسیم.

داریم:

$$m/AB=\frac{y_۲-y_۱}{x_۲-x_۱}\Rightarrow m/d=-\frac{۱}{m_{AB}}$$
$$=-\frac{x_۲-x_۱}{y_۲-y_۱}$$

وسط پاره‌خط AB $H=(\frac{x_۱+x_۲}{۲},\frac{y_۱+y_۲}{۲})$, $y-y_۱=m(x-x_۱)$

$$\Rightarrow d: y-\frac{y_۱+y_۲}{۲}=-\frac{x_۲-x_۱}{y_۲-y_۱}(x-\frac{x_۱+x_۲}{۲})$$

معادله‌ی عمودمنصف پاره‌خط AB

اکنون باید پاسخ دستگاه دومعادله‌ی دو مجهولی زیر را که همان نقطه‌ی M جواب مسئله است، به‌دست آوریم.

$$\begin{cases}\Delta: ax+by+c=۰\\ d: y-\frac{y_۱-y_۲}{۲}=-\frac{x_۲-x_۱}{y_۲-y_۱}(x-\frac{x_۱+x_۲}{۲})\end{cases}$$
$$\Rightarrow M=(\cdots,\cdots)$$

این مطلب را با یک مثال نشان می‌دهیم:

مثال: نقطه‌ای روی خط $\Delta: ۲x+y+۱=۰$ به‌دست آورید که از دو نقطه‌ی $A=(۳,-۱)$ و $B=(۱,۵)$ به یک فاصله باشند.

حل: عمودمنصف پاره‌خط AB را d می‌نامیم و معادله‌ی آن را می‌نویسیم. آن‌گاه مختصات نقطه‌ی برخورد خط d و خط Δ را به‌دست می‌آوریم. داریم:

$$A=(۳,-۱), B=(۱,۵), m_{AB}=\frac{y_۲-y_۱}{x_۲-x_۱}$$
$$=\frac{۵+۱}{۱-۳}=-۳\Rightarrow m_d=\frac{-۱}{m_{AB}}=\frac{۱}{۳}\quad ,$$

وسط پاره‌خط AB

$$H=(\frac{۳+۱}{۲},\frac{-۱+۵}{۲})=(۲,۲)\Rightarrow y-y_۱$$
$$=m(x-x_۱)\Rightarrow y-۲=\frac{۱}{۳}(x-۲)\Rightarrow y=\frac{۱}{۳}x+\frac{۴}{۳}$$

معادله‌ی عمودمنصف پاره‌خط AB

$$\begin{cases}d: y=\frac{۱}{۳}x+\frac{۴}{۳}\\ \Delta: ۲x+y+۱=۰\end{cases}\Rightarrow ۲x+\frac{۱}{۳}x+\frac{۴}{۳}+۱=۰$$
$$\Rightarrow\frac{۷}{۳}x=-\frac{۷}{۳}\Rightarrow x=-۱\Rightarrow y=۱\Rightarrow M=(-۱,۱)$$

جواب مسئله

درستی جواب مسئله را می‌توان با محاسبه‌ی اندازه‌ی پاره‌خط‌های MA و MB و مساوی بودن آن‌ها مشخص کرد.

$$A=(۳,-۱)\quad,\quad B=(۱,۵)\quad,\quad M=(-۱,۱)$$
$$\Rightarrow MA=\sqrt{(۳+۱)^۲+(-۱-۱)^۲}=\sqrt{۲۰}=۲\sqrt{۵}$$
$$MB=\sqrt{(۱+۱)^۲+(۵-۱)^۲}=\sqrt{۲۰}=۲\sqrt{۵}$$
$$\Rightarrow MA=MB=۲\sqrt{۵}$$

پس نقطه‌ی M از دو نقطه‌ی A و B به یک فاصله است.

ادب ریاضی

نقطه......................................

۱. آن‌چه در هیچ جهتی قابل تقسیم نیست، اما دارای موقعیتی است.

(ارسطو، قرن چهارم قبل از میلاد)

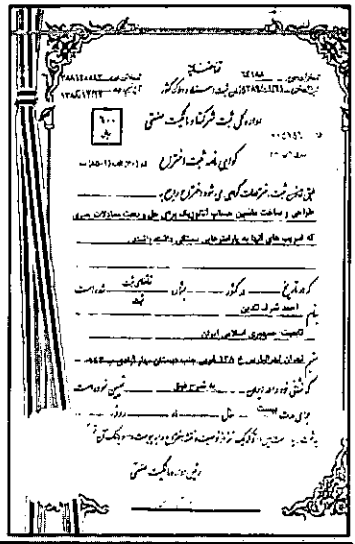
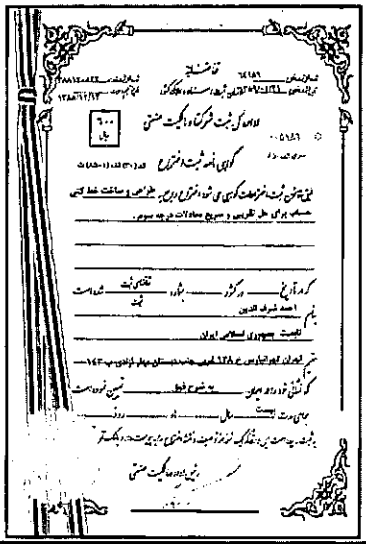
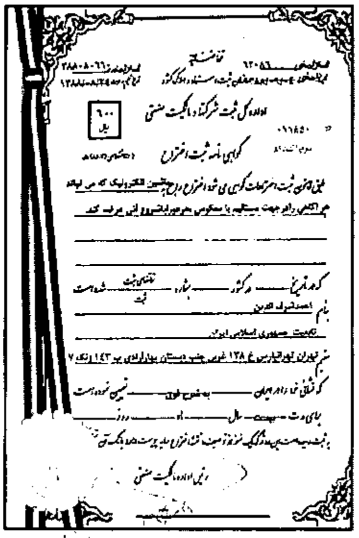
۲. نقطه چیزی است که دارای هیچ جزئی نیست. حد خط نقطه است.

(اقلیدوس، قرن سوم قبل از میلاد)

۳. وجود یک اتم برای تحقق یافتن یک نقطه‌ی ریاضی کفایت می‌کند.

(کوشی ۱۸۳۲)

۴. نقطه: مفهوم است و تعریف‌نشدنی است.

درباره‌ی یکی از نظرهای هوشمندانه‌ی ابوالوفای بوزجانی در هندسه

دکتر احمد شرف‌الدین

کلید واژه‌ها: محمدبن محمدبن یحیی، مرکز یک کمان از دایره.

اشاره

استاد احمد شرف‌الدین، چه در سال‌هایی که در دبیرستان تدریس می‌کرد و چه هنگامی که استاد دانشگاه بود، همواره در کنار دبیران ریاضی حضور داشت؛ چرا که همواره برای آن‌ها مقاله‌های آموزنده و جذاب می‌نوشت.

در این شماره‌ی «مجله‌ی برهان»، مقاله‌ی تازه‌ای از ایشان به چاپ رسانده‌ایم. در مقاله‌ی حاضر، آقای شرف‌الدین با استدلال دقیق هندسی، نظر ابوالوفای بوزجانی را در ترسیم یک ساختمان هندسی تأیید می‌کند. به‌علاوه، در انتهای این مقاله عناوین اختراعات ثبت شده آقای دکتر شرف‌الدین را خواهیم آورد.

در این نوشتار، ابتدا مختصری از مقام علمی بوزجانی می‌نویسیم و سپس درباره‌ی نظری که این دانشمند در مورد تعیین دقیق جای مرکز یک کمان دایره عرضه کرده است، شرح می‌دهیم.

ابوالوفا محمدبن محمدبن یحیی، از بزرگ‌ترین ریاضی‌دانان و منجمان ایرانی است. او در سال ۳۲۸ هجری قمری در «بوزجان» از نواحی تربت‌جام به دنیا آمد. بوزجان از شهرهای عالم‌پرور خراسان بوده است. بوزجانی تا ۲۰ سالگی در زادگاه خود، علم عدد و هندسه را نزد عمو و دایی‌اش آموخت. سپس برای ادامه‌ی تحصیلات به بغداد رفت. در آن روزگار، بغداد از مراکز بسیار مهم علم بود. بوزجانی تا پایان عمر خود، یعنی سال ۳۸۸ ه.ق، در بغداد به مطالعه و تحقیق در ریاضیات و نجوم پرداخت.

بوزجانی سهم ارزشمندی در بسط مثلثات دارد. وی قضیه‌های مهمی در مثلثات کروی کشف کرده است. البته با کمال تأسف، بعضی آثار ارزنده‌ی او، هم‌چون حاشیه‌ای بر هندسه‌ی اقلیدس و حساب دیوفانتوس، و نیز زیج او به‌نام «زیج واضح» مفقود شده‌اند و تنها رساله‌هایی در هندسه، حساب و نجوم از او باقی مانده است.

درباره‌ی کتاب «اعمال هندسی» بوزجانی

از جمله آثار علمی باارزش بوزجانی، کتابی است در هندسه. نام این کتاب چنین است:

«کتاب فی ما یحتاج الیه الصّانع من اعمال الهندسه»؛ یعنی «کتاب درباره‌ی آن‌چه از اعمال هندسی مورد احتیاج صنعتگران است». کتاب «اعمال هندسی» بوزجانی، توسط استادان، زنده یاد دکتر ابوالقاسم قربانی و آقای محمدعلی شیخان به فارسی با عنوان «بوزجانی‌نامه» تحریر شده است. این تحریر با کوشش و دقت انجام گرفته است و خدمت ارزنده‌ای محسوب می‌شود.



تعیین جای دقیق مرکز یک کمان از دایره

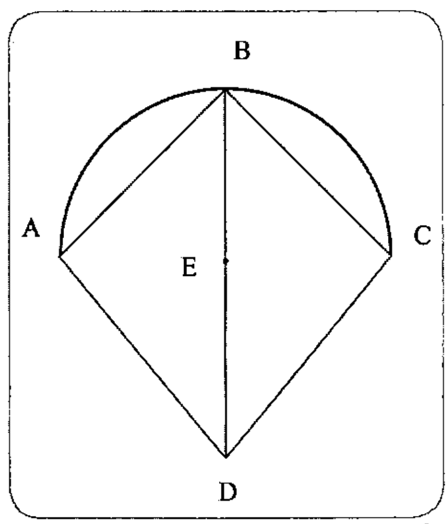
در باب اول کتاب «بوزجانی‌نامه» مسئله‌ی زیر عرضه شده است:

● **تعیین مرکز یک قوس از دایره**

● راه‌حل: قوس AC از دایره‌ای را درنظر می‌گیریم وسط آن را نقطه‌ی B می‌نامیم. سپس از نقطه‌ی A عمودی به AB و از نقطه‌ی C عمودی بر CB اخراج می‌کنیم. این دو عمود در نقطه‌ای مانند D یکدیگر را قطع می‌کنند. وسط پاره‌خط DB مرکز دایره‌ی مطلوب است.

تبصره: مؤلف چنین نوشته، ولی بهتر است نقطه‌ی B را به‌طور دل‌خواه اختیار کرد.

در ادامه با توضیحاتی ثابت می‌کنیم که نظر بوزجانی درست است. یعنی ثابت می‌کنیم، وسط کمان AC مناسب‌ترین نقطه است که سبب می‌شود، جای مرکز کمان AC با دقت بیشتری مشخص شود.
مقدار خطای مطلق در اندازه‌گیری طول‌های دو وتر AM و CM



شکل ۱

در شکل ۲، مرکز کمان AC و طول آن را به‌ترتیب O و R می‌نامیم. نقطه‌ی دل‌خواه M از کمان AC را درنظر می‌گیریم. اندازه‌های دو زاویه‌ی AOM و COM را به‌ترتیب با ۲a و ۲b نشان می‌دهیم. وسط‌های دو وتر AM و CM را به‌ترتیب E و F می‌نامیم. طول‌های دو وتر AM و CM را برحسب R، a و b حساب می‌کنیم.

$$\overline{AM} = ۲R\sin a$$
$$\overline{CM} = ۲R\sin b$$

مقدار خطای مطلق در اندازه‌گیری طول‌های دو وتر AM و CM را e می‌نامیم. خطای نسبی در اندازه‌گیری دو وتر یاد شده به‌ترتیب عبارت‌اند از:

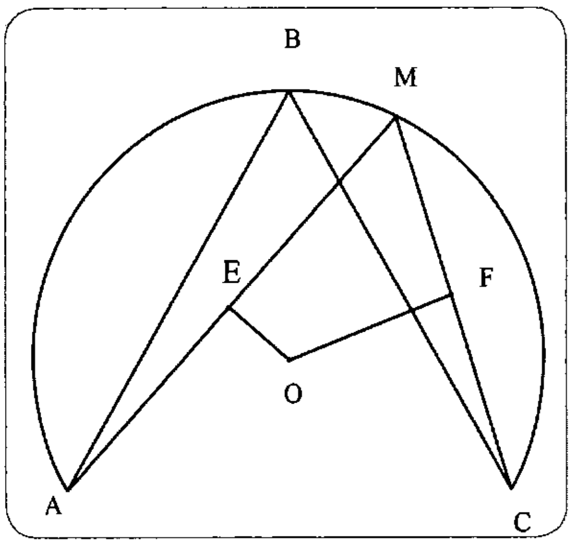
$$\frac{e}{\overline{AM}}, \frac{e}{\overline{eM}}$$

بنابراین، خطای نسبی در اندازه‌گیری طول خط شکسته‌ی ACB چنین است:

$$\frac{e}{۲R\sin a}+\frac{e}{۲R\sin b}$$

اگر نقطه‌ی B، وسط کمان AC باشد، خطای نسبی اندازه‌گیری طول خط شکسته‌ی ACB چنین است:

$$\frac{۲e}{۲R\sin\frac{a+b}{۲}}$$



شکل ۲

جای مرکز کمان AB هنگامی با دقت تعیین می‌شود که خطای نسبی در اندازه‌گیری خط شکسته AMC کمترین مقدار باشد. برای تأمین این منظور باید نامساوی زیر مسلم باشد:

$$\frac{e}{۲R\sin a}+\frac{e}{۲R\sin b}>\frac{۲e}{۲R\sin\frac{a+b}{۲}}$$

یعنی باید نامساوی زیر برقرار باشد:

$$\frac{۱}{\sin a}+\frac{۱}{\sin b}>\frac{۲}{\sin\frac{a+b}{۲}}$$

چنین داریم:

$$\overline{AM} = ۲R\sin a$$
$$\overline{CM} = ۲R\sin b$$

مقدار خطای مطلق در اندازه‌گیری طول‌های دو وتر AM و CM را e می‌نامیم. خطای نسبی در اندازه‌گیری طول‌های دو وتر یاد شده

به‌ترتیب عبارت‌اند از: $\frac{e}{AM}$ و $\frac{e}{CM}$. بنابراین، خطای نسبی در اندازه‌گیری طول خط شکسته ACM چنین است:

$$\frac{e}{۲R\sin a}+\frac{e}{۲R\sin b}$$

اگر نقطه‌ی B وسط کمان AC باشد، خطای نسبی در اندازه‌گیری خط شکسته ACB چنین است:

$$\frac{e}{۲R\sin\frac{a+b}{۲}}$$

جای مرکز کمان AB هنگامی با دقت تعیین می‌شود که خطای نسبی در اندازه‌گیری خط شکسته AMC کمترین مقدار باشد. برای تأمین این منظور باید نامساوی زیر مسلم باشد:

$$\frac{e}{۲R\sin a}+\frac{e}{۲R\sin b}>\frac{۲e}{۲R\sin\frac{a+b}{۲}}$$

یعنی باید نامساوی زیر برقرار باشد:

$$\frac{۱}{\sin a}+\frac{۱}{\sin b}>\frac{۲}{\sin\frac{a+b}{۲}}$$

اکنون درستی نامساوی زیر را، وقتی a و b در فاصله‌ی (π و ۰) باشند، ثابت می‌کنیم:

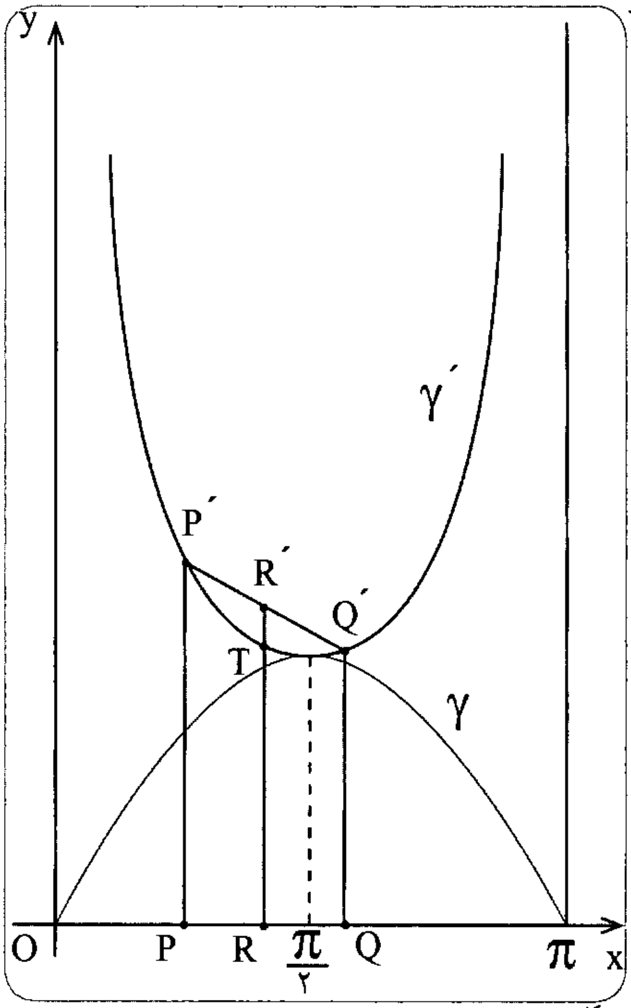
در شکل ۳، منحنی γ نمایشگر تابع $y=\sin x$ است و منحنی γ′ نمایشگر تابع $y=\frac{۱}{\sin x}$. (نمودار تابع $y=\sin x$ در فاصله‌ی $[۰,\pi]$ رسم شده است و نمودار تابع $y=\frac{۱}{\sin x}$، در فاصله‌ی $(۰,\pi)$).

در شکل ۳ داریم: $\overline{OP}=a$، $\overline{OQ}=b$ و $\overline{OR}=\frac{a+b}{۲}$. سه خط PP′، RR′ و QQ′ عمود بر خط Ox هستند؛ پس: $\overline{PP'}=\frac{۱}{\sin a}$، $\overline{QQ'}=\frac{۱}{\sin b}$، $\overline{RR'}=\frac{۱}{۲}(\sin\frac{۱}{a}+\sin\frac{۱}{b})$ و $\overline{RT}=\sin\frac{۱}{\frac{a+b}{۲}}$.

چون گودی منحنی γ′ به سوی بالاست، پس: $\overline{RP'}>RT$. از رابطه‌ی اخیر نتیجه می‌شود:

$$\frac{۱}{۲}(\frac{۱}{\sin a}+\frac{۱}{\sin b})>\sin\frac{۱}{\frac{a+b}{۲}}$$

دو نقطه‌ی P و Q را به دل‌خواه در فاصله‌ی (π و ۰) اختیار می‌کنیم. از دو نقطه‌ی یاد شده، عمودهایی بر خط Ox اخراج می‌کنیم و نقطه‌های برخورد آن‌ها را با منحنی γ′، به‌ترتیب P′ و Q′ می‌نامیم. از نقطه‌ی R وسط پاره‌خط PQ، عمودی بر خط Ox اخراج می‌کنیم و نقطه‌های برخورد آن را با منحنی γ′ و خط P′Q′، به‌ترتیب R′



شکل ۳

و T می‌نامیم. چون گودی (تقعّر) منحنی γ′ به سوی بالاست، نتیجه می‌شود:

$$\overline{RR'}>\overline{RT}$$

از سوی دیگر در ذوزنقه‌ی PQQ′P′ چنین داریم:

$$\overline{PP'}+\overline{QQ'}=۲\overline{RR'}$$

از دو رابطه‌ی اخیر نامساوی زیر به‌دست می‌آید:

$$\frac{۱}{\sin(OP)}+\frac{۱}{\sin(OQ)}>\frac{۲}{\sin(OR)}$$

این رابطه همان رابطه‌ی مطلوب زیر است:

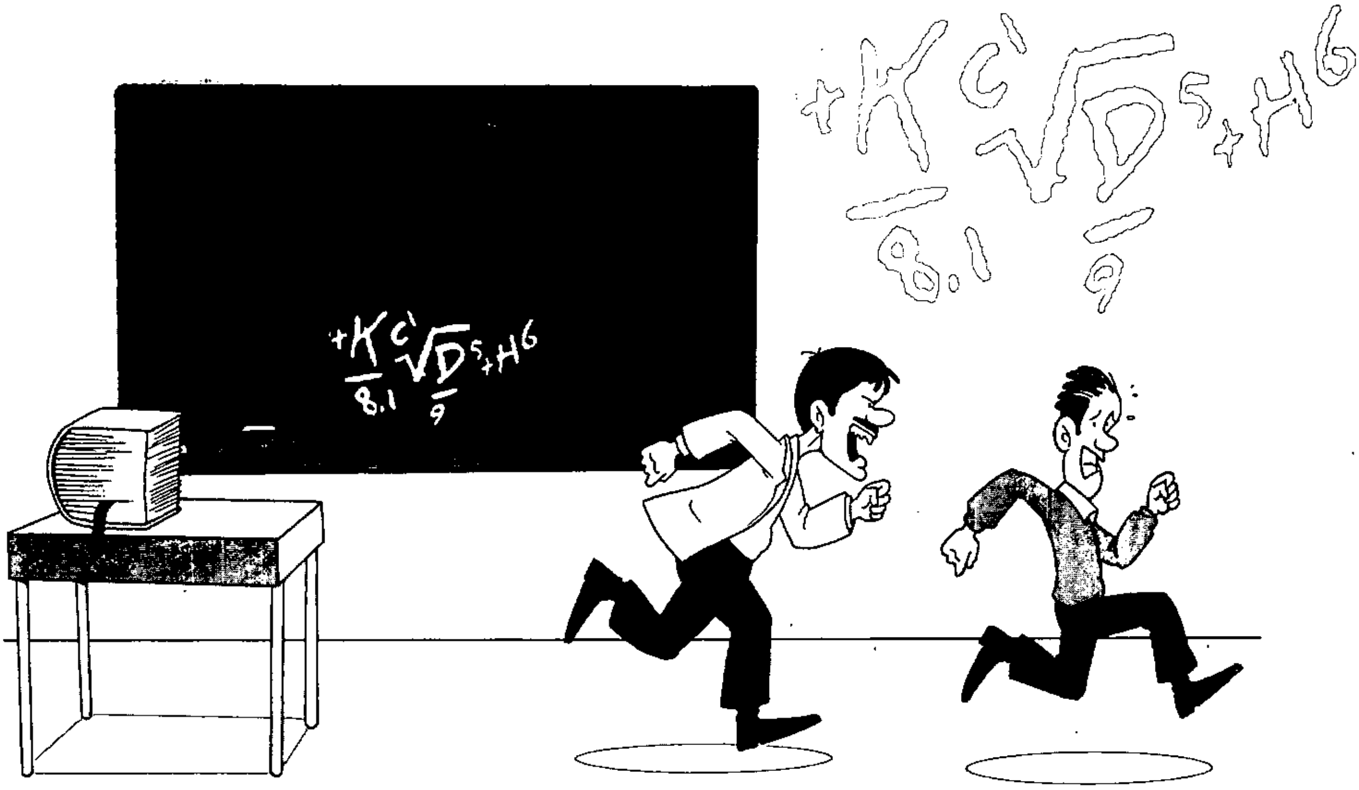
$$\frac{۱}{\sin a}+\frac{۱}{\sin b}>\frac{۲}{\sin\frac{a+b}{۲}}$$

عناوین اختراعات دکتر احمد شرف‌الدین

۱. طراحی و ساخت خط‌کش حساب برای حل تقریبی و سریع معادلات درجه سوم.

۲. ماشین الکترونیک که می‌تواند هر آگاهی را در جهت مستقیم یا معکوس، هر دو را با شروع آنی عرضه کند.

۳. طراحی و ساخت ماشین حساب آنالوژیک برای حل و بحث معادلات جبری که ضریب‌های آن‌ها به پارامترهایی بستگی داشته باشند.



اثبات بازگشتی یا اثبات از آخر به اول

عنایت‌الله راستی‌زاده

کلید واژه‌ها: اثبات بازگشتی، نابرابری‌ها، میانگین حسابی و هندسی، روابط برگشت‌پذیر.

اشاره

در مقاله‌ی حاضر، پس از توضیح روش اثبات بازگشتی، نمونه مسائل متنوعی طرح و حل شده‌اند. مثال‌ها از مباحث هندسه، جبر و مثلثات انتخاب شده‌اند تا بتوان فراگیربودن استفاده از این روش را در اغلب شاخه‌های ریاضی دبیرستانی نشان داد.

در این روش اثبات که بیشتر برای بررسی درستی نابرابری‌ها به‌کار می‌رود، درستی حکم را می‌پذیریم و با انجام محاسبات لازم، نابرابری یا گزاره‌ی حکم را تا آن‌جا ساده می‌کنیم که به گزاره‌ای برسیم که بدیهی است یا درستی آن را از قبل می‌دانیم. در صورتی که مراحل انجام شده برگشت‌پذیر باشند، درستی روش اثبات تأیید شده است.

مثال ۱. ثابت کنید برای هر عدد حقیقی دل‌خواه و مثبت a، نابرابری زیر همیشه برقرار است:

$$a+\frac{1}{a}\geq 2$$

اثبات: اگر حکم مسئله برقرار باشد، آن‌گاه با ضرب طرفین نابرابری در a ($a>0$)، داریم:

$$a^2+1\geq 2a$$

دراین‌صورت: $a^2-2a+1\geq 0$ پس: $(a-1)^2\geq 0$. رابطه‌ی اخیر به‌وضوح برقرار است و تمام روابط فوق برگشت‌پذیر هستند. پس حکم برقرار است. درواقع:

$$(a-1)^2\geq 0\Rightarrow a^2-2a+1\geq 0$$

$$\Rightarrow a^2+1\geq 2a\xrightarrow{\div a}a+\frac{1}{a}\geq 2$$

مثال ۲. ثابت کنید برای هر دو عدد حقیقی و دل‌خواه x و y، نابرابری زیر همواره برقرار است:

$$x^2+y^2+1\geq x+y+xy$$

اثبات: درستی حکم را می‌پذیریم و به‌ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

$$2x^2+2y^2+2\geq 2x+2y+2xy$$

$$\Rightarrow x^2+x^2+y^2+y^2+1+1-2x-2y-2xy\geq 0$$

$$\Rightarrow (x^2-2x+1)+(y^2-2y+1)+(x^2-2xy+y^2)\geq 0$$

$$\Rightarrow (x-1)^2+(y-1)^2+(x-y)^2\geq 0$$

رابطه‌ی اخیر بدیهی است (زیرا جمع سه مقدار نامنفی همواره نامنفی است) و تمام مراحل انجام شده بازگشت‌ناپذیر هستند. لذا طبق روش اثبات بازگشتی حکم مسئله برقرار است. (لزومی به بازنویسی پاسخ یعنی نوشتن اثبات از آخر به اول نیست.)

تذکر: گاهی در برگه‌ی امتحانی دانش‌آموزان دیده می‌شود که پاسخ از آخر به اول مجدداً نوشته شده است. این کار خطاست (به شرطی که ذکر شود، مراحل انجام شده بازگشت‌پذیر هستند) یا این‌که تنها اثبات مستقیم (و نه بازگشتی) را بنویسیم؛ مانند نمونه‌ی زیر:

مثال ۳. ثابت کنید برای هر دو عدد حقیقی و مثبت x و y، نابرابری زیر همیشه برقرار است:

$$\frac{1}{2}(x+y)\ge\sqrt{xy}$$

اثبات: چون $(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2$ همواره بزرگ‌تر یا مساوی صفر است، لذا: $x+y-2\sqrt{xy}\ge 0$. در این‌صورت: $x+y\ge 2\sqrt{xy}$ و با تقسیم طرفین نامساوی بر ۲ خواهیم داشت:

$$\frac{1}{2}(x+y)\ge\sqrt{xy}$$

تذکر: نامساوی اخیر را به‌نام نامساوی بین میانگین حسابی و هندسی می‌شناسیم.

مثال ۴. ثابت کنید:

$$\frac{1+\sin x}{\cos x}=\frac{\cos x}{1-\sin x};(x\ne k\pi+\frac{\pi}{2})$$

اثبات: درستی تساوی را می‌پذیریم و طرفین وسطین می‌کنیم:

$$(1+\sin x)(1-\sin x)=(\cos x)(\cos x)$$

پس طبق اتحاد مزدوج: $1-\sin^2 x=\cos^2 x$ که این هم یعنی $\sin^2 x+\cos^2 x=1$ و تساوی اخیر نیز به وضوح برقرار است. مراحل برگشت‌پذیرند و لذا حکم برقرار است.

مثال ۵. ثابت کنید هرگاه x و y دو عدد حقیقی مثبت و معکوس هم باشند، آن‌گاه:

$$(1+x)(1+y)\ge 4$$

اثبات: با پذیرفتن درستی حکم داریم:

$$1+x+y+xy\ge 4, xy=1\Rightarrow x+y+2\ge 4\Rightarrow x+y\ge 2$$

اما: $xy=1$، پس: $y=\frac{1}{x}$. بنابراین $x+\frac{1}{x}\ge 2$ و درستی این رابطه را نیز از قبل می‌دانیم. با توجه به برگشت‌پذیر بودن تمام مراحل انجام شده، حکم برقرار است.

مثال ۶. ثابت کنید:

$$x^3+y^3\ge x^2y+xy^2\ (x>0,y>0)$$

اثبات: به روش بازگشتی داریم:

$$(x+y)^3-3xy(x+y)\ge x^2y+xy^2$$

$$\Rightarrow (x+y)^3-3xy(x+y)-x^2y-xy^2\ge 0$$

$$\Rightarrow (x+y)^3-3xy(x+y)-(x+y)xy\ge 0$$

$$\Rightarrow (x+y)\big((x+y)^2-4xy\big)\ge 0\Rightarrow (x+y)^2-4xy\ge 0$$

$$\Rightarrow x^2+y^2+2xy-4xy\ge 0\Rightarrow x^2-2xy+y^2\ge 0$$

$$\Rightarrow (x-y)^2\ge 0$$

رابطه‌ی اخیر بدیهی است و تمام روابط (مراحل) برگشت‌پذیرند، لذا حکم اولیه برقرار است.

مثال ۷. ثابت کنید نصف محیط مثلث، از طول هر ضلع آن بزرگ‌تر است.

اثبات: می‌خواهیم ثابت کنیم:

$$\frac{a+b+c}{2}>a,\frac{a+b+c}{2}>b,\frac{a+b+c}{2}>c$$

(اثبات یکی از این سه کفایت می‌کند.)

ثابت می‌کنیم: $\frac{a+b+c}{2}>a$. با ضرب طرفین در ۲ (درستی حکم را پذیرفتیم!) داریم: $a+b+c>2a$

لذا: $b+c>2a-a$

پس: $b+c>a$

و این آخری را در هندسه ثابت کرده‌اید! (قضیه‌ی حمار؛ مجموع هر دو ضلع از طول ضلع سوم بزرگ‌تر است). مراحل اثبات بازگشت‌پذیرند، بنابراین حکم ثابت می‌شود.

در مثال بعدی، به اثبات یک تساوی رادیکالی به روش بازگشتی خواهیم پرداخت.

مثال ۸. ثابت کنید: $\frac{1}{2}(\sqrt{30}-\sqrt{2})=\sqrt{8-\sqrt{15}}$

به روش بازگشتی (پذیرش حکم) داریم:

$$\frac{1}{4}(\sqrt{30}-\sqrt{2})^2=8-\sqrt{15}$$

$$\Rightarrow\frac{1}{4}(30+2-2\sqrt{60})=8-\sqrt{15}$$

$$32-2\sqrt{60}=32-4\sqrt{15}\Rightarrow 2\sqrt{60}=4\sqrt{15}$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{4\times 15}=4\sqrt{15}$$

پس: $4\sqrt{15}=4\sqrt{15}$

مراحل بازگشت‌پذیرند، لذا تساوی اولیه برقرار است.

در دو مثال بعدی، به اثبات دو نامساوی مثلثاتی به روش بازگشتی می‌پردازیم.

مثال ۹. ثابت کنید:

$$2\tan^2\theta+1\ge 2\tan\theta(\sin\theta+\cos\theta),\ \theta\ne k\pi+\frac{\pi}{2}$$

اثبات: اگر حکم برقرار باشد، آن‌گاه:



$$\tan^2\theta+\tan^2\theta+\sin^2\theta+\cos^2\theta\geq 2\tan\theta\sin\theta$$
$$+2\tan\theta\cos\theta$$

$$\Rightarrow(\tan^2\theta-2\tan\theta\sin\theta+\sin^2\theta)$$

$$+(\tan^2\theta-2\tan\theta\cos\theta+\cos^2\theta)\geq 0$$

$$\Rightarrow(\tan\theta-\sin\theta)^2+(\tan\theta-\cos\theta)^2\geq 0$$

درستی آخرین نابرابری بدیهی است و تمام مراحل بازگشت‌پذیرند، پس نامساوی حکم برقرار است.

مثال ۱۰. ثابت کنید:

$$\sin^4\theta+\cos^4\theta\geq\frac{1}{2}\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$$

اثبات: با پذیرش حکم و توجه به اتحاد زیر داریم:

$$a^4+b^4=(a^2+b^2)^2-2a^2b^2$$

بنابراین:

$$(\sin^2\theta+\cos^2\theta)^2-2\sin^2\theta\cos^2\theta\geq\frac{1}{2}$$

چون: $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$، پس:

$$1-2\sin^2\theta\cos^2\theta\geq\frac{1}{2}\xrightarrow{\times 2}2-4\sin^2\theta\cos^2\theta\geq 1$$

$$-4\sin^2\theta\cos^2\theta\geq -1\Rightarrow\sin^2\theta\cos^2\theta\leq\frac{1}{4}$$

$$\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)\rightarrow\sin\theta\cos\theta\leq\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow 2\sin\theta\cos\theta\leq 1, 1=\sin^2\theta+\cos^2\theta$$

$$\Rightarrow\sin^2\theta+\cos^2\theta-2\sin\theta\cos\theta\geq 0$$

$$\Rightarrow(\sin\theta-\cos\theta)^2\geq 0$$

رابطه‌ی اخیر بدیهی است و مراحل از آخر به اول برقرارند (برگشت‌پذیرند). لذا طبق روش اثبات بازگشتی، نامساوی مسئله برقرار است. امیدواریم این ده مثال آن‌قدر متنوع بوده باشند که فراگیر بودن این روش را در اثبات‌ها نشان دهد. با وجود این، اگر علاقمند به حل چند مسئله‌ی خاص هستید پیشنهاد می‌شود مسئله‌های زیر را هم ببینید.

سه مسئله‌ی ویژه

مسئله‌ی ۱. می‌دانیم اگر $1+a\geq 0$ و $n\in N$ آن‌گاه: $(1+a)^n\geq 1+na$.

با استفاده از مطلب فوق و روش اثبات بازگشتی ثابت کنید:

$$n\left(\frac{n}{2}\right)^{n-1}\leq\left(\frac{n+1}{2}\right)^n (n\in N)$$

اثبات: فرض می‌کنیم حکم درست است. دراین‌صورت:

$$\frac{n^n}{2^{n-1}}\leq\frac{(n+1)^n}{2^n}\Rightarrow 2\times n^n\leq(n+1)^n\Rightarrow 2\leq\frac{(n+1)^n}{n^n}$$

$$\Rightarrow\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\geq 2\Rightarrow\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\geq 2$$

که می‌توان آخرین نامساوی را به‌صورت $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\geq 1+n\left(\frac{1}{n}\right)$ نوشت و این رابطه با توجه به راهنمایی صورت مسئله و انتخاب $a=\frac{1}{n}$ همواره درست است.

چون همه‌ی نتایج به‌دست آمده برگشت‌پذیر هستند، پس حکم اولیه برای هر عدد طبیعی درست است.

مسئله‌ی ۲. اگر a، b و c طول اضلاع یک مثلث باشند، نشان دهید:

$$3(ab+bc+ca)\leq(a+b+c)^2\leq 4(ab+bc+ca)$$

اثبات: نابرابری $3(ab+bc+ca)\leq(a+b+c)^2$ به‌سادگی قابل اثبات و برای هر a، b و c (حتی اگر طول اضلاع مثلث نباشند) برقرار است و از آن می‌گذریم.

حال نشان می‌دهیم:

$$(a+b+c)^2\leq 4(ab+bc+ca)\qquad(1)$$

فرض کنیم، حکم درست است:

$$a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc\leq 4ab+4bc+4ac$$

$$\Rightarrow a^2+b^2+c^2\leq 2ab+2ac+2bc$$

$$\Rightarrow a^2+b^2+c^2\leq ab+ab+ac+ac+bc+bc$$

$$\Rightarrow a^2+b^2+c^2\leq a(b+c)+b(a+c)+c(a+b)\quad(2)$$

برای اثبات درستی رابطه‌ی (۲) دقت کنیم که a، b و c سه ضلع یک مثلث هستند. در هر مثلث مجموع اندازه هر دو ضلع از اندازه‌ی ضلع سوم بزرگ‌تر است، لذا:

$$\left.\begin{array}{l}a<b+c\Rightarrow a^2<a(b+c)\\ b<a+c\Rightarrow b^2<b(a+c)\\ c<a+b\Rightarrow c^2<c(a+b)\end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow a^2+b^2+c^2<a(b+c)+b(a+c)+c(a+b)$$

پس رابطه‌ی (۲) درست است.

می‌توان نشان داد تمام روابط از (۲) به (۱) برگشت‌پذیر هستند. بنابراین رابطه (۱) برقرار است، یعنی:

$$(a+b+c)^2\leq 4(ab+ac+bc)$$

مسئله‌ی ۳. ثابت کنید:

$$\frac{5^n}{1+5^{2n}}\geq\frac{5^{n+1}}{1+5^{2n+2}}\quad(n\in N)$$

اثبات: فرض کنیم حکم درست است. پس:

$$5^n(1+5^{2n+2}) \ge 5^{n+1}(1+5^{2n}) \Rightarrow 1+5^{2n+2} \ge 5(1+5^{2n})$$

$$1+5^{2n+2} \ge 5+5^{2n+1} \Rightarrow 5^{2n+2}-5^{2n+1} \ge 4$$

$$\Rightarrow 5^{2n+1}(5-1) \ge 4 \Rightarrow 5^{2n+1} \ge 1$$

رابطه‌ی اخیر برای هر n طبیعی درست است و تمامی روابط برگشت‌پذیر هستند. پس طبق روش اثبات بازگشتی حکم برقرار است.

حالا این مسئله‌ها را خودتان حل کنید:

۱. ثابت کنید: $\sqrt{5}+\sqrt{6} > \sqrt{3}+\sqrt{8}$

۲. ثابت کنید هرگاه: $x>0$ و $y<0$. آن‌گاه: $\frac{x}{y}+\frac{y}{x} \le -2$

۳. ثابت کنید: $(\tan\theta+\cot\theta)^2 \ge 4$ و $(\theta \ne \frac{k\pi}{2})$

۴. شخصی ادعا کرد که «هر عدد با ثلث خودش برابر است» و استدلال کرد که:

$$a=\frac{1}{3}a \to 3a=a$$

و چون تساوی خاصیت جابه‌جایی دارد، پس: $a=3a$.

درنتیجه:

$$\begin{cases}3a=a\\ a=3a\end{cases} \Rightarrow 3a+a=a+3a \Rightarrow 4a=4a \Rightarrow a=a$$

و این آخری همواره برقرار است. بگویید کجای اثبات اشکال دارد؟!

۵. ثابت کنید: $|x|+|y| \ge \sqrt{x^2+y^2}$

۶. مثلث ABC در رأس A قائمه است. اگر AH ارتفاع وارد بر وتر باشد، ثابت کنید:

$$\frac{1}{AH^2}=\frac{1}{AB^2}+\frac{1}{AC^2}$$

۷. اگر $n \ge 3$ و n عددی طبیعی باشد، ثابت کنید:

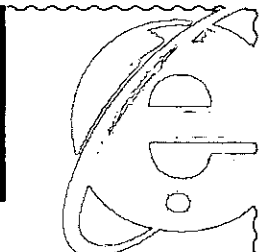
$$\frac{(n+1)^2}{2^{n+1}} < \frac{n^2}{2^n}$$

۸. اگر a، b و c سه عدد حقیقی مثبت باشند و $a<b+c$، ثابت کنید:

$$\frac{a}{1+a} < \frac{b}{1+b}+\frac{c}{1+c}$$



معرفی سایت‌های ریاضی جهان



احسان یارمحمدی

Mathpro Press

نشانه‌ی اینترنتی سایت: http://www.mathpropress.com

سایت Mathpro Press به مسائل و فهرست‌های پیکارجو و ارزنده‌ی ریاضی اختصاص دارد. در این سایت اطلاعات آنلاین در مورد مسائل ریاضی، کتاب‌های ریاضی و مجلات ریاضی عرضه می‌شود. صفحه‌ی اصلی سایت دربردارنده‌ی پنج عنوان عمده‌ی زیر است که هریک از آن‌ها شامل زیر عنوان‌های گوناگون و حاوی مطالب متنوع است:

♦ **کتاب‌ها (Books)**

☐ کتاب‌فروشی Mathpro Press (کتب منتشر شده یا توزیع شده به‌وسیله‌ی Mathpro Press)

Mathpro Press (Books Published or distributed by Mathpro Press)

☐ چگونه کتاب را از ما سفارش بگیرید.

(How to order books from us.)

☐ خلاصه‌ای از کتاب‌های مسائل ریاضی.

(Compendium of mathematics problems books)

☐ کتاب‌های مسائل جدید.

(Recent problem books)

☐ کتاب‌هایی درباره‌ی المپیادهای بین‌المللی ریاضی

(Books about the international mathematical Olympiads)

♦ **مسائل (Problems)**

☐ Mathpro آنلاین (یک مجموعه قابل جست‌وجو آنلاین دربرگیرنده بیش از ۲۰،۰۰۰ مسئله‌ی ریاضی)

Mathpro Online (An online searchable collection of over 20,000 math problems)

☐ وب‌سایت‌هایی درباره‌ی رقابت‌های ریاضی

(Web sites about Mathematics competitions)

☐ مسائل گردآوری شده از استنلی روبینوویتز، ۱۹۶۳ تا ۲۰۰۵

(Collected problems of Stanley Robinowitz 1963-2005)

☐ رقابت‌های ریاضی در ایالات‌متحده

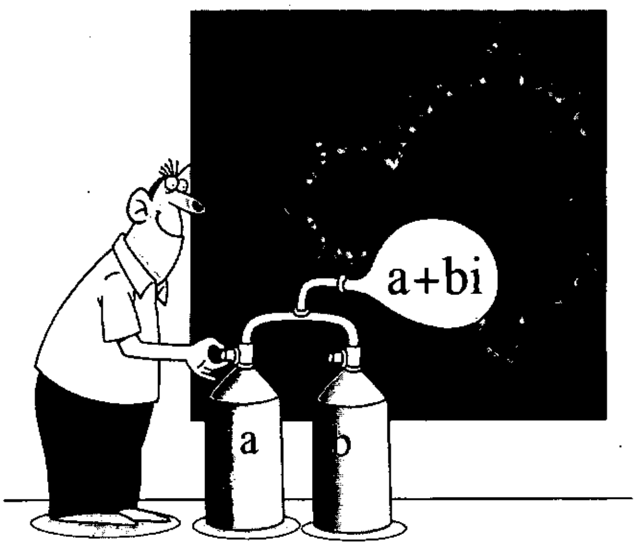
(Mathematics competitions in the United States)

بقیه در صفحه‌ی ۴۹

اعداد موهومی

غلامرضا یاسی‌پور

کلید واژه‌ها: اعداد موهومی، اعداد مختلط، اعداد حقیقی، نمودار آرگان، مزدوج عدد مختلط، گسترش اعداد مختلط.



محققاً می‌توان اعداد را تصور کرد. گاهی اوقات فکر می‌کنم در حساب پس‌اندازم یک میلیون پوند دارم، و بحثی در میان نیست که این عدد «عددی موهومی» است. امّا کاربرد ریاضی موهومی کاری با این رؤیاهای روزانه ندارد.

تصور می‌رود که برچسب «موهومی» ابتدا توسط رِنه دِکارتِ[1] فیلسوف و ریاضی‌دان، در شناخت جواب‌های غریب معادلاتی به کار رفت که به طور قطع اعدادی معمولی نبودند. امّا آیا اعداد موهومی موجودند یا خیر؟ این پرسشی بود که بر ذهن فیلسوفان، زمانی که بر کلمه‌ی موهومی متمرکز می‌شدند، سنگینی می‌کرد.

برای ریاضی‌دانان، موجود بودن اعداد موهومی، از اهمیت برخوردار نیست. این اعداد به اندازه‌ی ۵ یا π جزئی از زندگی روزمره‌ی ما هستند. گرچه ممکن است این اعداد به خرید رفتن‌هایمان کمک نکنند، اما چون از طراح هواپیما یا مهندس برق در موردشان سؤال کنیم، در خواهیم یافت که اهمیتی حیاتی دارند. با جمع یک عدد حقیقی و یک عدد موهومی با یکدیگر، چیزی را به دست می‌آوریم که «عدد مختلط»[2] نامیده می‌شود، و به نظر می‌رسد از لحاظ فلسفی کمتر مشکل ساز باشد. نظریّه‌ی اعداد مختلط، با ریشه‌ی دوم ۱- ارتباط دارد. بنابراین، کدام عدد است که چون مربع شود، ۱- را به دست می‌دهد؟

هنگامی که عدد ناصفری را در نظر بگیریم و آن را در خودش ضرب کنیم (یعنی مربع کنیم)، همواره عددی مثبت را به‌دست می‌آوریم. این موضوع وقتی اعداد مثبت را مربع می‌کنیم باورپذیر است، اما آیا در صورتی که اعداد منفی را مربع کنیم نیز صادق است؟ برای امتحان، می‌توان ۱- یا ۱+ را به کار برد. در این صورت، حتی اگر قاعده‌ی دبیرستانی «ضرب دو منفی، مثبت تشکیل می‌دهد» را از یاد برده باشیم، ممکن است به خاطر داشته باشیم که پاسخ (۱-)×(۱-) برابر با ۱ است. اما درصورتی که بیندیشیم (۱-)×(۱-) برابر ۱- است، می‌توانیم هر طرف این رابطه را بر ۱- تقسیم کنیم، و به نتیجه‌ی ۱=۱- برسیم که یاوه است. بنابراین، باید نتیجه بگیریم: ۱=(۱-)×(۱-) که جوابی مثبت است.

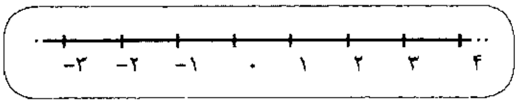
همین استدلال را می‌توان در مورد هر عدد منفی دیگری غیر از ۱- نیز به کار برد. بنابراین، هر عدد حقیقی، چون مربع شود، نتیجه هیچ‌گاه نمی‌تواند منفی باشد.

مهندسی $\sqrt{-1}$

حتّی مهندسان ـ دار و دسته‌ای بس عملی ـ کاربردهایی برای اعداد مختلط یافته‌اند. زمانی که مایکل فارادی "Michael Faraday" در دهه‌ی ۱۸۳۰، جریان متناوب را کشف کرد، اعداد موهومی واقعیّتی فیزیکی به‌دست آوردند. در این حال، به جای i حرف j برای نمایش $\sqrt{-1}$ به کار می‌رود، زیرا i به جای جریان الکتریکی به کار می‌رود.

این موضوع، موجب بروز تردیدهایی در سال‌های اوّلیه‌ی اعداد مختلط در قرن شانزدهم شد. اما زمانی که بر آن فائق آمدند، پاسخ به دست آمده، ریاضیات را از قید و بند اعداد معمولی آزاد کرد. بدین ترتیب افق‌های وسیعی از پژوهش در مقابل محققان باز شد که پیش از این حتی خوابش را هم نمی‌دیدند. گسترش اعداد مختلط، «تکمیل اعداد حقیقی» به دستگاهی به‌طور طبیعی کامل‌تر است.

ریشه‌ی دوم ۱-



پیش از این، در صورتی که محدود به محور اعداد حقیقی باشیم، ملاحظه کردیم، از آن‌جا که مربّع هیچ عددی نمی‌تواند منفی باشد، ریشه‌ی دوم ۱- موجود نیست. بنابراین اگر اعداد را هم‌چنان بر

محور اعداد حقیقی در نظر بگیریم، ممکن است کار را تمام شده بدانیم، و به موهومی نامیدن این اعداد شامل $\sqrt{-۱}$ ادامه دهیم و کار دیگری با آن‌ها نداشته باشیم. یا این گام جسارت آمیز را برداریم که $\sqrt{-۱}$ را به عنوان موجود جدیدی که آن را با i نمایش می‌دهیم، بپذیریم.

اعداد موهومی، با همین عمل ذهنی ساده، پا به حیات می‌گذارند. این را که آن‌ها چیست‌اند، نمی‌دانیم، اما به‌وجودشان اعتقاد داریم. دست کم می‌دانیم $i^۲ = -۱$. بنابراین، در دستگاه اعداد جدیدمان، جمیع یاران قدیمی، از قبیل اعداد حقیقی

$۱, ۲, ۳, ۴, \pi, e, \sqrt{۲}, \sqrt{۳}$

را، همراه با دوستان تازه‌ای که شامل i هستند، از قبیل

$۱+۲i, -۳+i, ۲+۳i, ۱+i\sqrt{۲}, \sqrt{۳}+۲i, e+\pi i$

و غیره، خواهیم داشت.

گام حساس ضروری مورد بحث، در آغاز قرن نوزدهم و زمانی برداشته شد که از محور اعداد یک بُعدی، به سوی صفحه‌ی اعداد دو بُعدی ناآشنایی حرکت کردیم.

جمع و ضرب

اکنون که در ذهنمان اعداد مختلط، یعنی اعدادی به‌صورت a+bi را داریم، با آن‌ها چه می‌توان کرد؟ این اعداد نیز درست مانند اعداد حقیقی، می‌توانند با هم جمع، و درهم ضرب شوند. جمع‌شان را با جمع اجزای مربوطه و متناسب آن‌ها انجام می‌دهیم. بنابراین، ۲+۳i چون با ۸+۴i جمع شود (۲+۸)+(۳+۴)i را با نتیجه‌ی ۱۰+۷i به‌دست می‌دهد.

ضرب نیز تقریباً به همین سادگی است. اگر بخواهیم ۲+۳i را در ۸+۴i ضرب کنیم، ابتدا هر جفت نماد را در هم ضرب می‌کنیم:

$(۲+۳i)\times(۸+۴i) = (۲\times۸)+(۲\times۴i)+(۳i\times۸)+(۳i\times۴i)$

و عبارات حاصل را یعنی ۱۶، ۸i، ۲۴i و $۱۲i^۲$ (درعبارت اخیر به جای $i^۲$ عدد ۱- را قرار می‌دهیم) با هم جمع می‌کنیم. بنابراین، نتیجه‌ی ضرب می‌شود:

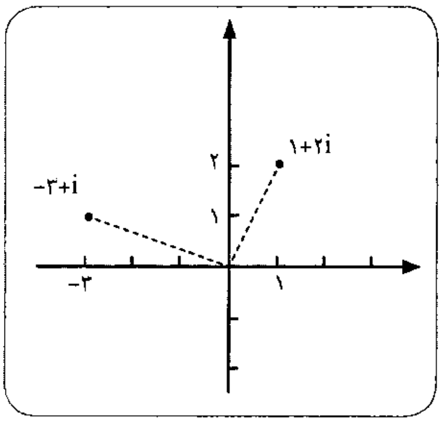
(۱۶-۱۲)+(۸i+۲۴i)

که برابر با مختلط ۴+۳۲i است.

در مورد اعداد مختلط، جمیع قواعد معمولی حساب برقرار و تفریق و تقسیم همواره امکان‌پذیر است؛ غیر از تقسیم بر عدد مختلط ۰+۰i که این کار در مورد صفر در اعداد حقیقی نیز مجاز نیست. در واقع اعداد مختلط، از جمیع ویژگی‌های اعداد حقیقی، جز یکی، برخوردارند؛ این که آن‌ها را نمی‌توانیم مانند اعداد حقیقی، به مثبت و منفی تقسیم‌بندی کنیم.

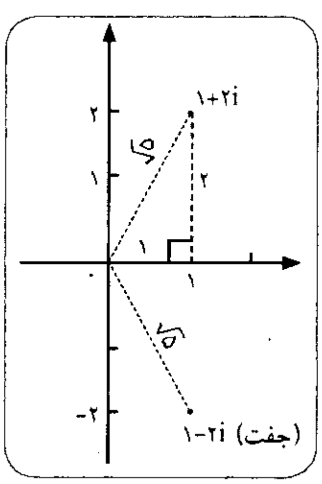
نمودار آرگان

دو بُعدی بودن اعداد مختلط را می‌توان به گونه‌ای واضح، با نمایش آن‌ها بر یک نمودار ملاحظه کرد. اعداد مختلط ۳+i- و ۱+۲i را می‌توانیم روی نموداری به نام «آرگان» رسم کنیم. روش تصویری کردن اعداد مختلط توسط ژان روبر آرگان[۳]، ریاضی‌دان سوئیسی، ارائه شد؛ گرچه در حوالی همان سال‌ها دیگران نیز مفهومی مشابه را ارائه دادند.



هر عدد مختلط، زوج یا جفت[۴]، موسوم به «مزدوج»[۵] آن دارد. به این ترتیب، زوج ۱+۲i عدد ۱-۲i است که از تغییر دادن علامت واقع در جلوی مؤلفه‌ی دوم به‌دست می‌آید. جفت ۱-۲i نیز به همین ترتیب، ۱+۲i است. بنابراین زوجیت مورد بحث، رابطه‌ای صادقانه است.

جمع و ضربِ با هم و در هم جفت‌ها، همواره عددی حقیقی به‌دست می‌دهد. با جمع ۱+۲i و ۱-۲i عدد ۲ را حاصل می‌کنیم، و با ضرب آن‌ها ۵ را به دست می‌آوریم. این ضرب، جالب‌تر نیز هست. زیرا پاسخ ۵، مربع «طول» عدد مختلط ۱+۲i است که با طول جفتش نیز برابر است. به‌طریق دیگر، می‌توانیم طول عدد مختلط را به صورت زیر تعریف کنیم:



طول W = $\sqrt{(W \times \text{جفتِ } W)}$

با بررسی این مطلب در مورد ۳+i-، درمی‌یابیم که طول (۳+i-) برابر است با $\sqrt{(-۳+i)\times(-۳-i)}=\sqrt{(۹+۱)}$ بنابراین طول (۳+i-) برابر است با $\sqrt{۱۰}$.

تفکیک اعداد مختلط از راز و رمز، به مقدار زیادی مرهون سِر ویلیام روآن همیلتون[۶]، مهم‌ترین ریاضی‌دان ایرلند در قرن نوزدهم است. وی دریافت که در این نظریّه، عملاً به i نیازی نیست. زیرا این موجود، تنها به عنوان جا نگه‌دار عمل می‌کند و می‌توان آن را به گوشه‌ای افکند. همیلتون عدد مختلط را به صورت «جفت مرتّب»ی از اعداد حقیقی (a,b) در نظر گرفت که کیفیت دوبُعدی خود را نشان می‌دهند. و به $\sqrt{-۱}$ مرموز متوسل نمی‌شوند. در این صورت، عاری از i، جمع به صورت

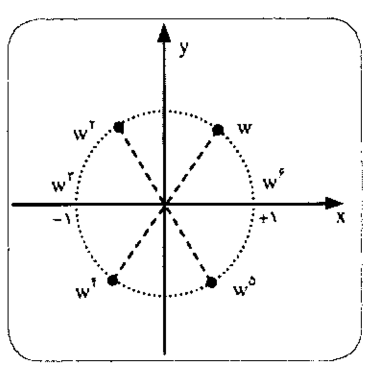
$$(۲,۳)+(۸,۴)=(۱۰,۷)$$

درمی‌آید و به گونه‌ای با وضوح کمتر، ضرب می‌شود:

$$(۲,۳)\times(۸,۴)=(۴,۳۲)$$

کامل بودن دستگاه اعداد مختلط زمانی آشکارتر می‌شود که به «n امین ریشه‌ی واحد» بیندیشیم (از نظر ریاضی‌دانان «واحد» یا «یکه»[۷] به معنی «یک» است). این ریشه‌ها جواب‌های معادله‌ی $z^n=۱$ هستند. در این مورد، $z^۶=۱$ را برای نمونه اختیار می‌کنیم. دو ریشه‌ی $z=۱$ و $z=-۱$ بر محور حقیقی موجودند (زیرا $۱^۶=۱$ و $(-۱)^۶=۱$)، اما در حالی که مطمئناً باید شش ریشه داشته باشیم. بقیه کجا هستند؟ همه‌ی این شش ریشه نیز، مانند دو ریشه‌ی حقیقی، دارای طولی واحدند و بر دایره‌ای به مرکز مبدأ و شعاع واحد یافت می‌شوند.

علاوه بر این موارد، اگر به $W=\frac{۱}{۲}+\frac{\sqrt{۳}}{۲}i$ که ریشه‌ی واقع در



ربع اول است، نگاهی بیفکنیم، ریشه‌های متوالی (در حرکت در جهت خلاف حرکت عقربه‌های ساعت) چنین به‌دست می‌آیند:

$$w^۲,w^۳,w^۴,w^۵,w^۶=۱$$

که بر رأس‌های یک شش ضلعی منتظم قرار دارند. درحالت کلی، هر یک از n ریشه‌ی واحد بر این دایره واقع‌اند و بر گوشه‌ها یا «رأس‌ها»ی یک n ضلعی منتظم قرار دارند.

گسترش اعداد مختلط

هنگامی که ریاضی‌دانان اعداد مختلط را به دست آوردند، به‌طور غریزی تعمیمات آن را جست‌وجو کردند. اعداد مختلط دو بُعدی هستند، اما خاص بودن ۲ از کجا آمده است؟ همیلتون، سال‌ها در جست‌وجوی اعداد سه بُعدی بود و به جمع و ضرب آن‌ها می‌پرداخت، اما تنها زمانی که به اعداد چهار بُعدی روی آورد، توفیق یافت. اندکی پس از این، اعداد چهار بُعدی مزبور، خود به هشت بُعدی (موسوم به اعداد کِیلی[۸]) تعمیم یافتند. بسیاری به اندیشه‌ی تداوم امکان این ماجرا به جست‌وجوی اعداد شانزده بُعدی رفتند، اما ۵۰ سال بعد از شاهکار با اهمیت همیلتون، ناممکن بودنشان به‌اثبات رسید.

چند تاریخچه

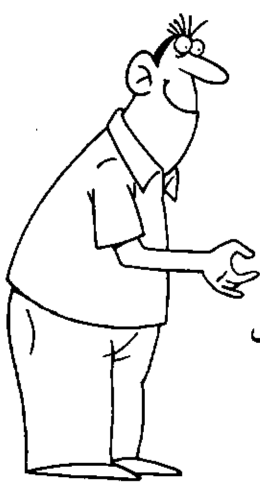
۱۷۷۲ میلادی: رافائل بمبلی به مقابله با اعداد موهومی [illegible]

۱۷۷۷ میلادی: برای اولین بار، اویلر از نماد i برای نمایش ریشه‌ی دوم عدد ۱- استفاده کرد.

۱۸۰۶ میلادی: نمایش نموداری آرگان، منجر به نام «نمودار آرگان»، شد.

۱۸۱۱ میلادی: کارل فردریش گاوس به کار با توابع متغیّرهای عدد مختلط پرداخت.

۱۸۳۷ میلادی: همیلتون، اعداد مختلط را به عنوان جفت‌های مرتب اعداد حقیقی در نظر گرفت.



مَخلَص کلام

اعداد ناحقیقی با کاربردهای حقیقی

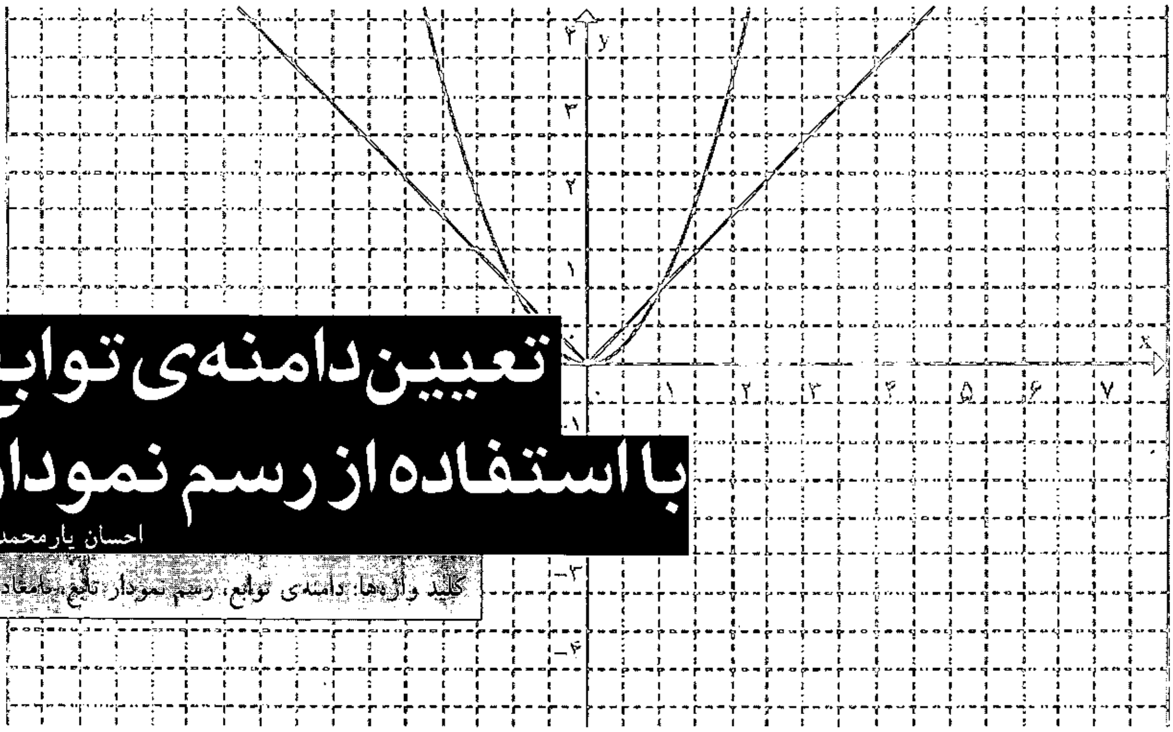
پی‌نوشت

۱. René Descartes
۲. Complex number
۳. Jean Robert Argand
۴. Mate
۵. Conjugate
۶. Sir William Rowan Hamilton
۷. Unity
۸. Cayley

تعیین دامنه‌ی توابع با استفاده از رسم نمودار

احسان یارمحمدی

کلید واژه‌ها: دامنه‌ی توابع، رسم نمودار تابع، نامعادله.



برای تعیین دامنه‌ی[1] توابع[2] با توجه به نوع توابع و نیز ساختار و ساختمان آن‌ها، راهکارها و روش‌هایی برای حل هر یک متناسب با نوع توابع وجود دارد. اما در پاره‌ای از موارد ممکن است طی انجام محاسبات برای تعیین دامنه‌ی توابع، به معادلات[3] و نامعادلات دشواری برخورد کنیم که شامل عبارات جبری نامتجانس با یکدیگر یا تلفیقی از عبارات جبری[4] و متعالی[5] باشند و در ادامه قادر نباشیم آن‌ها را با روش‌های متعارف و متداول حل کنیم. اگر هم مایل باشیم آن‌ها را با قواعد و روش‌های جاری به سرانجام برسانیم، راهی بس دشوار را پیش روی خویش قرار داده‌ایم. به همین علت در این مقاله روشی مبتنی بر رسم نمودار را که به درک شهودی شایسته نیاز دارد، ارائه خواهیم داد. در این روش، هر یک از ریاضی‌پژوهان و خوانندگان باید شناخت و اطلاعات ارزنده و بسنده‌ای از توابع پایه‌ای و نمودارهای متناظر با آن‌ها، اصول و اسلوب انتقال نمودارها و رسم نمودار توابع در حالت کلی داشته باشند تا بتوانند به واسطه‌ی آن، نگرشی پویاتر را در قبال این مقاله داشته باشند.

فرض بر این است که هنگام تعیین دامنه‌ی توابع، با عباراتی برخورد می‌کنیم که بتوانیم اجزای سازنده‌ی آن‌ها را به دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ با ظاهری که قادر باشیم نمودار آن‌ها را تداعی کنیم[6]، تبدیل سازیم و در نهایت یکی از حالت‌های، $f(x)=g(x)$, $f(x)\neq g(x)$, $f(x)> g(x)$, $f(x)\geq g(x)$, $f(x)\leq g(x)$ و $f(x)< g(x)$ به‌وجود خواهد آمد. بنابراین برای حل هر یک از معادلات یا نامعادلات یاد شده به روش زیر عمل می‌کنیم:

گام اول: نمودارهای توابع $f(x)$ و $g(x)$ را به‌صورت دقیق و مرتب در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم.

گام دوم: با بهره‌گیری از درک شهودی، نمودارهای توابع $f(x)$ و $g(x)$ را باهم مقایسه می‌کنیم تا ببینیم با توجه به نمودارهاچه‌مقدار یا مقادیری برای x مناسب و صحیح است که در هر یک از معادلات و یا نامعادلات $f(x)>g(x)$، $f(x)<g(x)$، $f(x)\geq g(x)$ و $f(x)\leq g(x)$ ، $f(x)=g(x)$, $f(x)\neq g(x)$ صدق کند.

مثال ۱ـ دامنه‌ی تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\frac{\sqrt{۴-x^۲}}{\sqrt{x-|x|}}$ کدام یک از گزینه‌های زیر است؟

الف) $\{\ \}$ ب) $[-۲,۲]$

ج) $\mathbb{R}$ د) $\{-۲,۲\}$

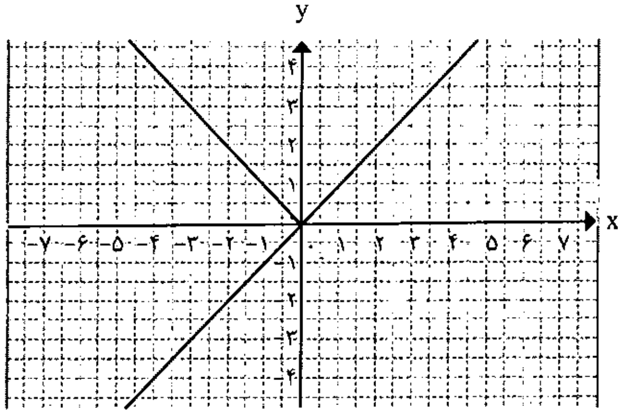
جواب: گزینه‌ی (الف) صحیح است، زیرا:

$$\sqrt{۴-x^۲}\geq ۰\Rightarrow ۴-x^۲\geq ۰\Rightarrow x^۲\leq ۴\Rightarrow -۲\leq x\leq ۲$$

$$\sqrt{x-|x|}>۰\Rightarrow x-|x|>۰\Rightarrow x>|x|\Rightarrow$$

$$f(x)=x\ \&\ g(x)=|x|$$

اکنون نمودارهای توابع $f(x)=x$ و $g(x)=|x|$ را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم.



با توجه به نمودارهای توابع $f(x)=x$ و $g(x)=|x|$ در می‌یابیم، هیچ مقداری برای x یافت نمی‌شود که در نامعادله‌ی $x>|x|$ صدق کند.

مثال ۲ـ دامنه‌ی تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2-|x|}}{\sqrt{x-\lfloor x\rfloor}}$ کدام یک از گزینه‌های زیر است؟

الف) $(\mathbb{R}-\mathbb{Z})-\{x \mid x\in(-2,2)\}$

ب) $\{\ \}$

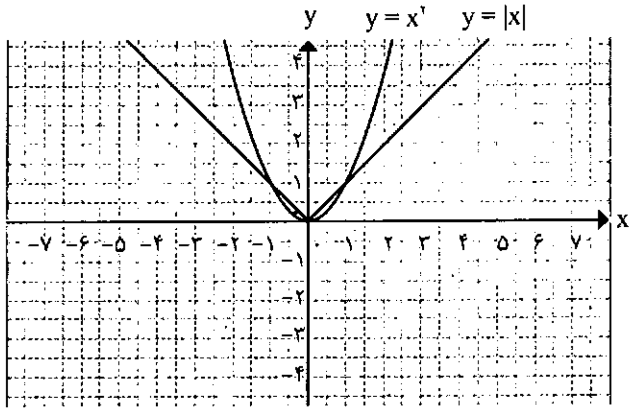
ج) $\mathbb{R}-\mathbb{Z}$

د) $(\mathbb{R}-\mathbb{Z})-\{x \mid x\in(-1,1)\}$

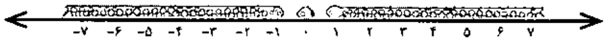
جواب: گزینه‌ی (د) صحیح است، زیرا:

$$\sqrt{x^2-|x|}\geq 0 \Rightarrow x^2-|x|\geq 0 \Rightarrow x^2\geq |x|$$
$$\Rightarrow f(x)=x^2 \ \&\ g(x)=|x|$$

اکنون نمودارهای توابع $f(x)=x^2$ و $g(x)=|x|$ را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم.

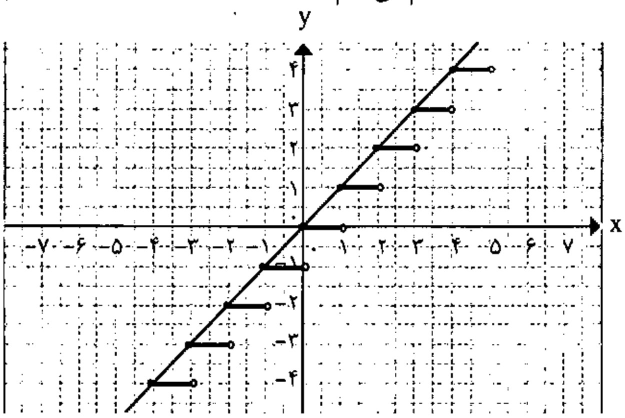


با توجه به نمودارهای توابع $f(x)=x^2$ و $g(x)=|x|$ در می‌یابیم، مقادیری برای x یافت می‌شوند که در نامعادله‌ی $x^2\geq|x|$ صدق می‌کنند. این مقادیر روی محور اعداد زیر نمایش داده شده‌اند.

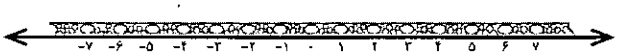


$$\sqrt{x-\lfloor x\rfloor}>0 \Rightarrow x-\lfloor x\rfloor>0 \Rightarrow x>\lfloor x\rfloor \Rightarrow$$
$$f(x)=x \ \&\ g(x)=\lfloor x\rfloor$$

اکنون نمودارهای توابع $f(x)=x$ و $g(x)=\lfloor x\rfloor$ را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم.



با توجه به نمودارهای توابع $f(x)=x$ و $g(x)=\lfloor x\rfloor$ نیز در می‌یابیم، مقادیری برای x یافت می‌شوند که در نامعادله‌ی $x>\lfloor x\rfloor$ صدق می‌کنند. این مقادیر روی محور اعداد زیر نمایش داده شده‌اند.



اکنون دامنه‌ی تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2-|x|}}{\sqrt{x-\lfloor x\rfloor}}$ را که از اشتراک دامنه‌ی صورت کسر با مخرج آن حاصل می‌شود، می‌توان روی محور اعداد زیر مشخص کرد.



مثال ۳ـ دامنه‌ی تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\dfrac{x^2+|x|+1}{\sqrt{\lfloor x\rfloor-\ln(x)}}$ کدام یک از گزینه‌های زیر است؟

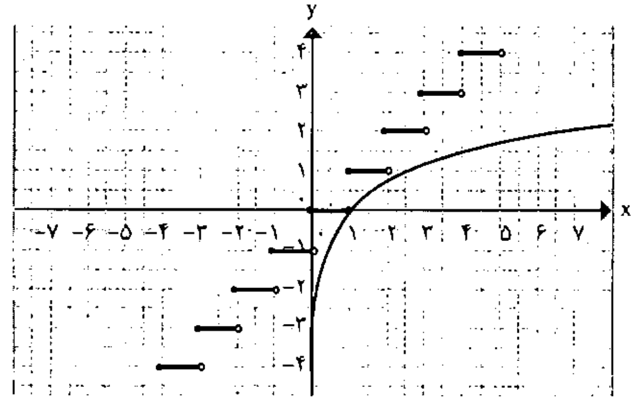
الف) $\{\ \}$ ب) IR-Z

ج) $(0,+\infty)$ د) IR

جواب: گزینه‌ی (ج) صحیح است، زیرا:

$$\sqrt{\lfloor x\rfloor-\ln(x)}>0 \Rightarrow \lfloor x\rfloor-\ln(x)>0 \Rightarrow \lfloor x\rfloor>\ln(x)$$
$$\Rightarrow f(x)=\lfloor x\rfloor \,\&\, g(x)=\ln(x)$$

در ضمن می‌دانیم که دامنه‌ی تابع $g(x)=\ln(x)$ برابر با بازه‌ی باز $(0,+\infty)$ است. اکنون نمودارهای توابع $f(x)=\lfloor x\rfloor$ و $g(x)=\ln(x)$ را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم.



با توجه به نمودارهای توابع $f(x)=\lfloor x\rfloor$ و $g(x)=\ln(x)$ در می‌یابیم که تمام مقادیر حقیقی $x\in(0,+\infty)$ در نامعادله‌ی $\lfloor x\rfloor>\ln(x)$ صدق می‌کند.

مثال ۴ـ دامنه‌ی تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\dfrac{|x|+\lfloor x^2\rfloor}{\lfloor x\rfloor-|x|}$ کدام یک از گزینه‌های زیر است؟

الف) IR ب) $IR-Z^+$

ج) $\{\ \}$ د) $IR-Z^-$

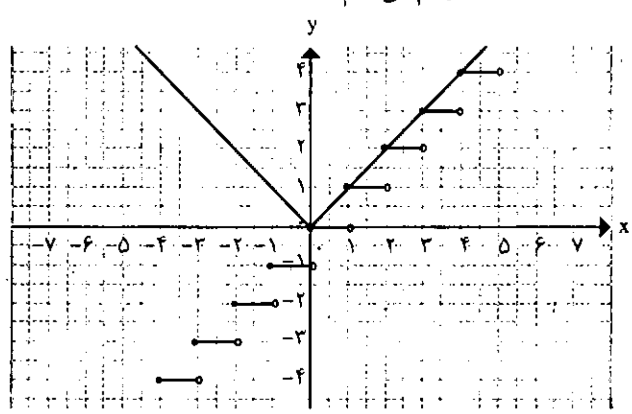
جواب: گزینه‌ی (ب) صحیح است، زیرا:

$$\lfloor x\rfloor-|x|\neq 0 \Rightarrow \lfloor x\rfloor\neq|x|$$

بنابراین باید مقادیری برای x تعیین کنیم و آن‌ها را از مجموعه‌ی اعداد حقیقی خارج سازیم.

پس:
$$\lfloor x\rfloor-|x|=0 \Rightarrow \lfloor x\rfloor=|x| \Rightarrow$$
$$f(x)=\lfloor x\rfloor \,\&\, g(x)=|x|$$

اکنون نمودارهای توابع $f(x)=\lfloor x\rfloor$ و $g(x)=|x|$ را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم.



با توجه به نمودارهای توابع $f(x)=\lfloor x\rfloor$ و $g(x)=|x|$ در می‌یابیم که تمام مقادیر $x\in(IR-Z^+)$ در نامساوی $\lfloor x\rfloor\neq|x|$ صدق می‌کنند.

مثال ۵ـ دامنه‌ی تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\dfrac{\sqrt[3]{x^2-1}}{\sqrt{\lfloor x\rfloor-x^2}}$ کدام یک از گزینه‌های زیر است؟

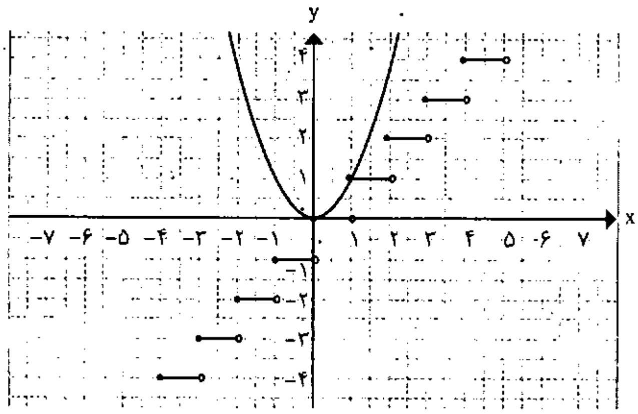
الف) IR ب) $IR-\{0\}$

ج) $\{\ \}$ د) $IR-Z$

جواب: گزینه‌ی (ج) صحیح است، زیرا:

$$\sqrt{\lfloor x\rfloor-x^2}>0 \Rightarrow \lfloor x\rfloor-x^2>0 \Rightarrow \lfloor x\rfloor>x^2 \Rightarrow$$
$$f(x)=\lfloor x\rfloor \,\&\, g(x)=x^2$$

اکنون نمودارهای توابع $f(x)=\lfloor x\rfloor$ و $g(x)=x^2$ را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم.



با توجه به نمودارهای توابع $f(x)=\lfloor x\rfloor$ و $g(x)=x^2$ در می‌یابیم، هیچ مقدار برای x یافت نمی‌شود که در نامعادله‌ی $\lfloor x\rfloor>x^2$ صدق کند.

مثال ۶ـ دامنه‌ی تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^3-|x|}}{\sqrt{\sqrt{x}-x}}$ کدام یک از گزینه‌های زیر است؟

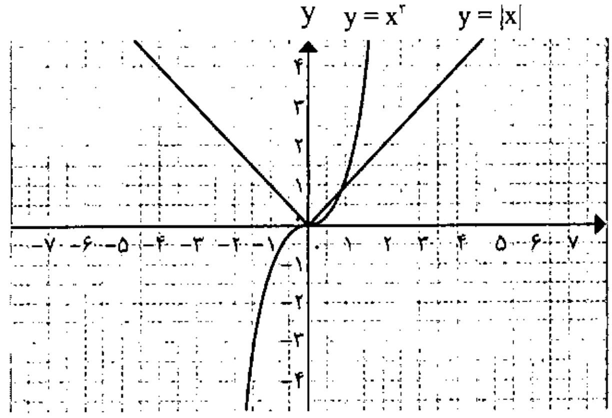
الف) $\{\ \}$ ب) $[1,+\infty)$

ج) IR د) $(-1,1)$

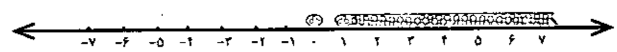
جواب: گزینه‌ی (الف) صحیح است، زیرا:

$$\sqrt{x^3-|x|}\geq 0 \Rightarrow x^3-|x|\geq 0 \Rightarrow$$
$$x^3\geq|x| \Rightarrow f(x)=x^3 \,\&\, g(x)=|x|$$

اکنون نمودارهای توابع $f(x)=x^3$ و $g(x)=|x|$ را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم.

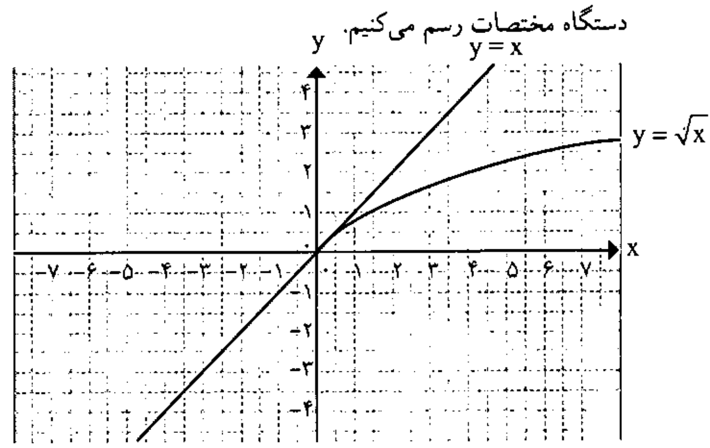


با توجه به نمودارهای توابع $f(x)=x^{۳}$ و $g(x)=|x|$ در می‌یابیم، مقادیری برای x یافت می‌شوند که در نامعادله‌ی $x^{۳} \geq |x|$ صدق می‌کنند. این مقادیر روی محور اعداد زیر نمایش داده شده‌اند.

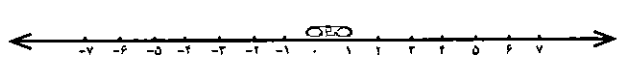


$$\sqrt{\sqrt{x}-x} > ۰ \Rightarrow \sqrt{x}-x > ۰ \Rightarrow \sqrt{x} > x$$
$$\Rightarrow f(x)=\sqrt{x} \,\&\, g(x)=x$$

اکنون نمودارهای توابع $f(x)=\sqrt{x}$ و $g(x)=x$ را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم.



با توجه به نمودارهای توابع $f(x)=\sqrt{x}$ و $g(x)=x$ در می‌یابیم، مقادیری برای x یافت می‌شوند که در نامعادله‌ی $\sqrt{x} > x$ صدق می‌کنند. این مقادیر روی محور اعداد زیر نمایش داده شده‌اند.



اکنون دامنه‌ی تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^{۳}-|x|}}{\sqrt{\sqrt{x}-x}}$ را که از اشتراک دامنه‌ی صورت کسر با مخرج آن حاصل می‌شود، می‌توان روی محور اعداد زیر مشخص کرد.



مثال ۷ـ دامنه‌ی تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\dfrac{x^{۳}-|x|+\sqrt{x}}{\sqrt{\lfloor x \rfloor - e^{x}}}$ کدام یک از گزینه‌های زیر است؟

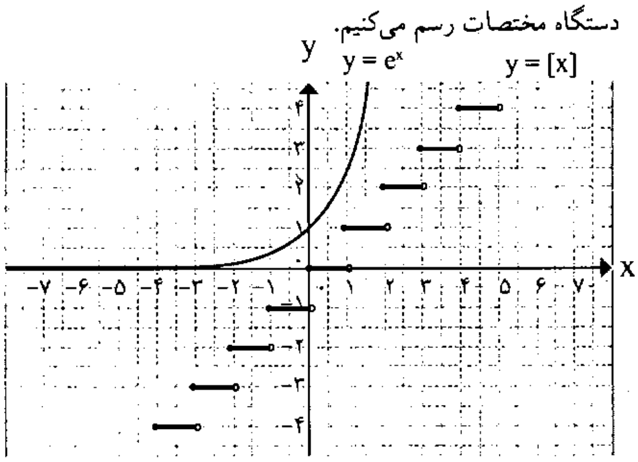
الف) $\{۰،۱\}$ ب) IR

ج) $IR-\mathbb{Z}$ د) $\{\ \}$

جواب: گزینه‌ی (د) صحیح است، زیرا:

$$\sqrt{\lfloor x \rfloor - e^{x}} > ۰ \Rightarrow \lfloor x \rfloor - e^{x} > ۰ \Rightarrow \lfloor x \rfloor > e^{x}$$
$$\Rightarrow f(x)=\lfloor x \rfloor \,\&\, g(x)=e^{x}$$

اکنون نمودارهای توابع $f(x)=\lfloor x \rfloor$ و $g(x)=e^{x}$ را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم.



با توجه به نمودارهای توابع $f(x)=\lfloor x \rfloor$ و $g(x)=e^{x}$ در می‌یابیم، هیچ مقدار برای x یافت نمی‌شود که در نامعادله‌ی $\lfloor x \rfloor > e^{x}$ صدق کند.

مثال۸ـ دامنه‌ی تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\dfrac{\left|\lfloor x \rfloor - x\right|}{\sqrt{\lfloor -x \rfloor - |x|}}$ کدام یک از گزینه‌های زیر است؟

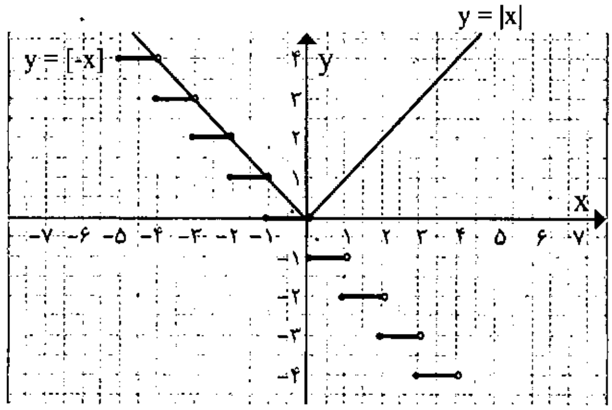
الف) $[۰,+\infty)$ ب) $IR-Z^{+}$

ج) $\{\ \}$ د) $IR-Z^{-}$

جواب: گزینه‌ی (ج) صحیح است، زیرا:

$$\sqrt{\lfloor -x \rfloor - |x|} > ۰ \Rightarrow \lfloor -x \rfloor - |x| > ۰ \Rightarrow \lfloor -x \rfloor > |x|$$
$$\Rightarrow f(x)=\lfloor -x \rfloor \,\&\, g(x)=|x|$$

اکنون نمودارهای توابع $f(x)=\lfloor -x \rfloor$ و $g(x)=|x|$ را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم.



با توجه به نمودارهای توابع $f(x)=\lfloor -x \rfloor$ و $g(x)=|x|$ درمی‌یابیم، هیچ مقدار برای x یافت نمی‌شود که در نامعادله‌ی $|x|>\lfloor -x \rfloor$ صدق کند.

تمرین: دامنه‌ی هر یک از توابع زیر را مشخص کنید.

۱) $f(x)=\dfrac{\sqrt{|x|-x}}{\sqrt{\lfloor x \rfloor - x}}$

۲) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2-|x|}}{\sqrt{1-x^2}}$

۳) $f(x)=\sqrt{\dfrac{1}{\ln(x)-\lfloor x \rfloor}}$

۴) $f(x)=\dfrac{\lfloor x^3+x^2-|x|+1 \rfloor}{\sqrt{x-\sqrt{x}}}$

۵) $f(x)=\dfrac{|x+1|-|x+2|}{|x|-\lfloor -x \rfloor}$

۶) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x-|x|}}{\sqrt{e^x-\lfloor x \rfloor}}$

۷) $f(x)=\dfrac{2^x+\lfloor \sqrt{x} \rfloor}{|x|-x^3}$

۸) $f(x)=\dfrac{x^4+|\lfloor x-2 \rfloor|}{\sqrt{\sqrt{x}-x^3}}$

منابع

۱ــ حسابان (رشته‌های ریاضی و فیزیک). مؤلفان: محمدحسن بیژن‌زاده، غلامعلی فرشادی و یدالله ایلخانی‌پور. شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران. ۱۳۸۸.

۲ــ ریاضیات (۱). مؤلفان: اسماعیل بابلیان، میرزا جلیلی، رضا شهریاری و علیرضا مدقالچی. شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران. ۱۳۸۸.

زیرنویس

1. Domain 2. Functions 3. Equations 4. Algebraic 5. Transcendental

۶. البته ممکن است با مواردی روبه‌رو شویم که قادر نباشیم به صورت آنی نمودار آن‌ها را تداعی کنیم. در این حالت با توجه به روش‌هایی که برای رسم نمودار فرا گرفته‌ایم، نمودار مربوطه را رسم می‌کنیم.

ادامه‌ی مطلب صفحه‌ی ۴۱

♦ مجلات (Journals)

☐ فهرست مجلات ریاضی مقدماتی
(List of elementary mathematics journals)

☐ لیست مجلات با ستون‌های مسائل ریاضی
(List of journals with mathematical problem columns)

☐ مجلات ریاضی که کتاب‌های ریاضی را مرور می‌کنند.
(Mathematics journals that review mathematics books.)

☐ مجلات با ستون‌های مسائل آنلاین
(Journals with online problem columns)

♦ اطلاعات (Info)

☐ لغت‌نامه‌ی ریاضی آنلاین
(Online mathematics dictionary)

☐ واژه‌نامه‌ی آنلاین نمادگذاری تخصصی
(Online glossary of technical notation)

☐ راهنمای ریاضی ایالتی
(state mathematics guidelines)

☐ برنامه‌های تابستانی ریاضی/اردوگاه‌های تابستانی برای دانش‌آموزان دبیرستان
(Mathematics summer programs/Summer camps for high school students)

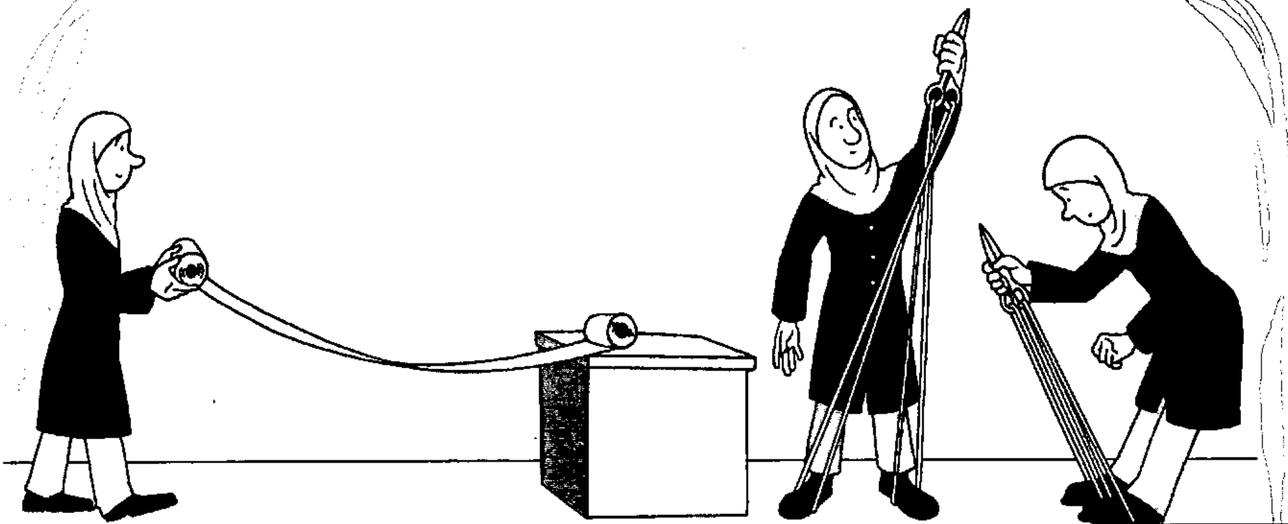
♦ درباره‌ی ما (About Us)

☐ درباره‌ی
(About Mathpro Press) Mathpro press

☐ درباره‌ی لوگوی ما (About our logo)

☐ چگونه با ما تماس بگیرید (How to contact us)

☐ فراخوان مؤلفان (Authors wanted)



سرگرمی برای اندیشه‌پروری و ذهن‌ورزی

نویسنده: مارتین گاردنر / مترجم: حسن نصیرنیا

کلیدواژه‌ها: پی. ای. ام دیراک، قیچی دیراک، حرکت‌های چرخشی، فرمیون.

قیچی دیراک

پی.ای.اِم دیراک[1] یکی از نوابغ بزرگ خلاق در نظریه‌ی کوانتوم جدید بود. در این مقاله می‌خواهیم معمای توپولوژیک دل‌پذیری را که با استفاده از یک قیچی و مقداری نخ ارائه می‌شود، معرفی کنیم. دیراک، هنگامی که در دهه‌ی سال‌های ۲۰ عمر خود بود، این معما را ابداع کرد تا به کمک آن، به‌شرح یکی از عجیب‌ترین خواص الکترون بپردازد.

اگر یک صندلی را ۳۶۰ درجه بچرخانیم، نسبت به همه‌ی اشیای درون اتاق به وضع نخست برمی‌گردد. اما اگر یک الکترون ۳۶۰ درجه چرخانده شود، به همان وضع پیشین برنمی‌گردد. برای این که الکترون نسبت به همه‌ی اشیای پیرامونش به وضع نخست بازگردد، لازم است یک دور کامل دیگر ــ یعنی روی هم ۷۲۰ درجه ــ چرخانده شود.

درک این مطلب بدون وارد شدن به مبحث ریاضیات پیشرفته‌ی مکانیک کوانتوم امکان‌پذیر نیست. دیراک که دریافته بود، دانشجویان مبتدی او در فهم این چنین ویژگی خارق‌العاده‌ی برخی ذرات خاص دچار زحمت هستند، شیوه‌ای ملموس برای نمایش دادن آن اندیشید. من نخستین بار در سال ۱۹۵۹ از قیچی دیراک، که نام معمای او بود، آگاهی یافتم و در آن هنگام مطالب ستون «بازی‌های ریاضی» مجله‌ی Scientific American را تنظیم می‌کردم. در آن سال نامه‌ای برای دیراک نوشتم و پاسخ مختصر و مفید او به نامه‌ام که از دانشگاه کمبریج ارسال شده بود را دریافت کردم. اکنون یکی از دارایی‌های گران‌قدر من است:

آقای گاردنر عزیز

متأسفم از این که به سبب مشغله‌ی فراوان نتوانستم پاسخ‌نامه‌ی شما را زودتر بدهم. نخستین بار در سال ۱۹۲۹ به تفکر در مسئله‌ی نخ‌ها پرداختم و از آن برای نشان دادن یک ویژگی حرکت‌های چرخشی استفاده کردم؛ و آن این‌که دوبار چرخش یک جسم حول یک محور، می‌تواند با حرکت پیوسته از طریق یک مجموعه حرکاتی صورت گیرد که هریک به وضعیت اصلی ــ وضعیتی که در آن اصلاً حرکتی وجود نداشته است ــ منجر شود.

این یک نتیجه از این ویژگی چرخش‌هاست که گشتاور زاویه‌ای یک جسم چرخان می‌تواند نصف یک کوانتوم باشد، ولی نمی‌تواند هیچ کسر دیگری از یک کوانتوم باشد.

ارادتمند پی.ای. اِم. دیراک

آخرین جمله‌ی دیراک به این حقیقت اشاره دارد که چرخش سریع همه‌ی ذرات، موسوم به «فرمیون»[2]، بسته به جهت چرخش آن‌ها، برابر به علاوه یا منهای ۱/۲ است. متأسفانه در این مقاله جای آن نیست که درباره‌ی رمز و راز چرخش سریع ذره یا آن‌گونه که جیمزبلیش[3] در رمان‌های علمی ــ تخیلی‌اش، ضمن کار با اسباب ضدگرانشی «چرخش سرسام‌آور» نام می‌گذارد، بحث کنیم. به‌طور کلی، چرخش سریع ــ مانند چرخش یک فرفره ــ پدیده‌ی مبهمی است و نمی‌توان آن را با اصطلاحات فیزیک کلاسیک مجسم کرد یا شرح داد.

برای نشان دادن معمای دیراک، یک قیچی و دو قطعه نخ هریک به طول تقریبی ۳ متر نیاز دارید. هر قطعه نخ را از یکی از دو سوراخ

دسته‌ی قیچی بگذرانید و دو انتهای آن را گره بزنید تا دوحلقه تشکیل شود. هم‌چنان که درشکل می‌بینید، پاهای خود را درون دو حلقه‌ی درست شده بگذارید و قیچی را تا مقابل صورت خود بالا بیاورید. به این ترتیب، چهار رشته نخ کشیده و بدون تاب خواهید داشت که رابط میان قیچی و کف اتاق خواهند بود.

حال قیچی را به حالت قائم طوری بگیرید که نوک آن به‌طرف سقف باشد. سپس در همین حالت قیچی را حول محور قائم، درست به زاویه‌ی ۳۶۰ درجه (خواه در جهت حرکت عقربه‌های ساعت، خواه در جهت عکس آن) بچرخانید تا رشته‌های نخ به هم تابیده شوند.

آیا می‌توانید ترتیبی اتخاذ کنید که بدون چرخاندن قیچی در هریک از دو جهت مذکور، تاب نخ‌ها از هم باز شود؟ شما می‌توانید برای انجام این کار هر نقل و انتقالی که می‌خواهید در هوا به قیچی بدهید، مشروط بر این که قیچی همواره در فضا در همان جهت اولیه باقی بماند و نخ‌ها از زیرپاهایتان درنیایند. پاسخ پرسش بالا این است که باز کردن تاب نخ‌ها امکان‌پذیر نیست. ممکن است بتوانید نحوه‌ی تاب‌خوردگی نخ‌ها را عوض کنید، ولی هرچه با نخ‌ها و قیچی کلنجار روید، نمی‌توانید آن‌هارا به وضعیت نخست بازگردانید.

پس از این که متقاعد شدید که این کار عملی نیست، مجموعه‌ی نخ‌ها و قیچی را به شکل نخست درآورید. حال قیچی را در هر جهتی که می‌خواهید دو دور کامل (۷۲۰ درجه) بچرخانید. خواه باور کنید، خواه باور نکنید، بدون ایجاد چرخش بیشتر، قیچی و نخ‌ها به همان وضعیت نخست بازمی‌گردند! از دیدگاه یک توپولوژیست، این به معنای آن است که پس از دو دور کامل چرخاندن قیچی، ساخت توپولوژیک قیچی و نخ‌ها، نسبت به شما و همه‌چیز موجود در اتاق، تغییر نیافته است. برای آگاهی از راه حل شگفت‌انگیز این معما به «پاسخ» مراجعه کنید.

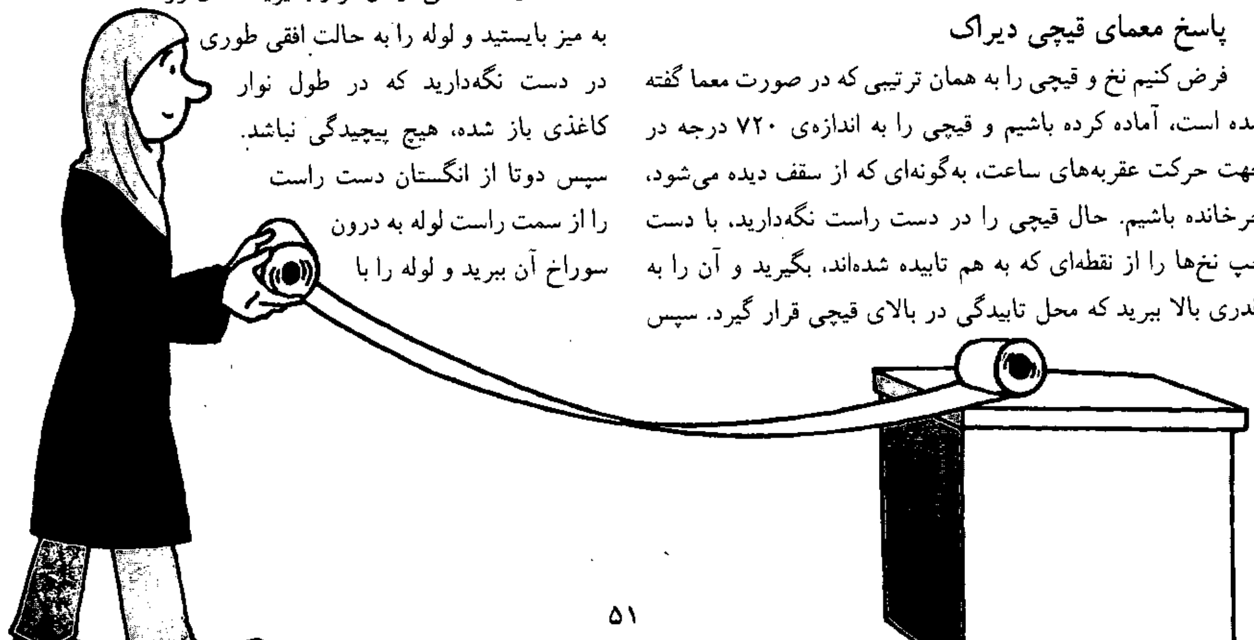
پاسخ معمای قیچی دیراک

فرض کنیم نخ و قیچی را به همان ترتیبی که در صورت معما گفته شده است، آماده کرده باشیم و قیچی را به اندازه‌ی ۷۲۰ درجه در جهت حرکت عقربه‌های ساعت، به‌گونه‌ای که از سقف دیده می‌شود، چرخانده باشیم. حال قیچی را در دست راست نگه‌دارید، با دست چپ نخ‌ها را از نقطه‌ای که به هم تابیده شده‌اند، بگیرید و آن را به قدری بالا ببرید که محل تابیدگی در بالای قیچی قرار گیرد. سپس حلقه‌ی تاب را از بالای قیچی بگذرانید تا روی بازوی راست شما بیفتد. قیچی را در دست چپ بگیرید. آن‌گاه با رها کردن حلقه‌ی نخ، قیچی را با دست راست از گیر آزاد کنید. حال اگر قیچی را بلند کنید، وضعیت قیچی و نخ‌ها به حالت اول بازمی‌گردد و تابیدگی از میان می‌رود!

برای اثبات معما لازم نیست حتماً از قیچی استفاده کنید؛ چه، هر شیء دیگری که برگزینید می‌تواند وافی به مقصود باشد. و هم چنین هر تعداد رشته نخ را (مشروط بر آن‌که دست کم از دو رشته کم‌تر نباشد) بخواهید، می‌توانید به شیء انتخابی ببندید و سرهای آزاد نخ‌ها را هم به هر نقطه‌ای از سقف ببندید. برای مثال، فرض کنید شیء انتخابی یک قهوه‌جوش باشد که دسته‌ی آن را با دوازده رشته نخ کشسان به هرجایی از دیوار، سقف یا کف اتاق بسته‌اید. اگر قهوه‌جوش را حول محوری به اندازه‌ی ۳۶۰ درجه بچرخانید، با هیچ گونه دستکاری نمی‌توان رشته نخ‌های کشسان را از تاب درآورد. اما اگر آن را به‌جای ۳۶۰ درجه، ۷۲۰ درجه بچرخانید، امکان بازگرداندن آن به وضعیت اول همواره میسر است.

در پاراگراف بعد گونه‌ی دیگری از تجربه‌ی فوق را بررسی می‌کنیم که برای برخی، روشن می‌سازد که چگونه می‌توان شیئی را که توسط یک کابل یا یک لوله‌ی لاستیکی به دیوار متصل شده است، پشت سرهم آن‌قدر چرخاند ـ بی‌آن که کابل تاب بخورد ـ تا اتصال باز شود. همین‌طور تجربه‌ی زیر می‌تواند مبین این مشاهده‌ی بسیار جالب باشد که چگونه شخص در حال تاب یا واتاب دادن رشته‌ی سیم برق یا لوله‌ی لاستیکی، با مشکل پیچ و تاب خوردن آن‌ها (رشته‌ی سیم و کابل) دست به گریبان است.

یک دستمال توالت لوله‌ای بردارید. انتهای آزاد دستمال را زیر یک کتاب سنگین واقع بر روی میز قرار دهید. در حالی که دستمال لوله‌ای کاغذ در دست را باز می‌کنید، از میز دور شوید و به فاصله‌ی مشخصی از آن قرار بگیرید. حال رو به میز بایستید و لوله را به حالت افقی طوری در دست نگه‌دارید که در طول نوار کاغذی باز شده، هیچ پیچیدگی نباشد. سپس دوتا از انگشتان دست راست را از سمت راست لوله به درون سوراخ آن ببرید و لوله را با



آن دور انگشت نگه‌دارید. آن‌گاه لوله را شل کنید (اندکی به طرف میز بروید) و با دست چپ، کاغذ را به اندازه‌ی یک دور کامل از لوله بازکنید، بی‌آن‌که کاغذ پاره شود یا لوله بچرخد. به این ترتیب در نوار کاغذی حد فاصل لوله و کتاب یک پیچیدگی ایجاد می‌شود.

حال همین عمل را بار دیگر تکرارکنید. با این تفاوت که نقش انجام شده توسط دست چپ را به دست راست و نقش انجام شده توسط دست راست را به دست چپ واگذار کنید. پس از باز کردن یک دور کامل کاغذ با دست راست، یک پیچ دیگر (معکوس با پیچ قبلی) در طول نوار ایجاد می‌شود و سرانجام طول نوار افزایش می‌یابد و پیچ قبلی از میان می‌رود. تاکنون هیچ چرخشی به حلقه نداده‌ایم. حال اگر بخواهیم به وضعیت نخست برگردیم، کافی است لوله را دو دورکامل حول محورش به عقب بپیچانیم. با تکرار این روند، می‌توانیم در طول نوار به هر تعداد بار که بخواهیم پیچیدگی ایجاد کنیم، بی‌آن که کاغذ را پاره کرده باشیم.

حال می‌خواهیم به شرح این موضوع بپردازیم که چگونه این تجربه‌ها به «خصوصیت چرخش‌ها مربوط می‌شوند؛ به این معنی که دوبار چرخش (کامل) یک جسم حول یک محور می‌تواند به‌تدریج در آن تغییر شکل ایجاد کند و این کار از طریق یک مجموعه چرخش‌هایی که هریک به‌وضعیت اولیه ـ وضعیتی که در آن ابداً هیچ چرخشی مشهود نیست ـ منجر می‌شود، صورت می‌گیرد» (نگاه کنید به نامه‌ی دیراک، در قسمت صورت معما).

در آزمایش ما، به قطعه‌هایی از کاغذ توالت که همواره روی لوله قرار می‌گیرند، دو چرخش کامل داده می‌شود. در سایر قطعه‌های کاغذ که نزدیک لوله قرار دارند، حرکت‌های دیگری ایجاد می‌شود؛ اما در پایان تجربه، هریک به وضعیت اصلی درمی‌آید. هم‌چنین، اگر قطعه‌های متفاوت نوار کاغذی را کوچک فرض کنیم، حرکت ایجاد شده درهریک از آن‌ها، در مقایسه با قطعه‌های مجاور بسیار مشابه خواهد بود. باز اگر هم‌چنان در طول نوار به سوی کتاب پیش برویم، درمی‌یابیم که رشته‌های حرکت‌های موردنظر دیراک به هیچ حرکتی منجر نخواهد شد.

از آن‌جا که چرخش در حول یک محور عمود بر راستای نوار کاغذ صورت می‌گیرد، تجربه اصلاً تعجب‌آور به‌نظر نمی‌رسد. ولی البته راستای نخست نوار حائز اهمیت نیست؛ چه نوار کاغذ را می‌توان فراتر از میز امتداد داد و به نقطه‌ای روی دیوار ـ که عمود بر محور چرخش لوله است ـ چسباند.

الگوی نخ‌های دیراک با آن‌چه که توپولوژیست‌ها «کلاف‌های تاری» می‌نامند، هم‌خوانی دارد. برای دست‌یابی به اطلاعات بیشتر در این زمینه که چگونه معمای قیچی دیراک با کلاف‌های تاری و مکانیک کوانتوم ارتباط می‌یابد، رجوع کنید به مقاله‌ی «کلاف تاری و نظریه‌ی کوانتوم»[۴] نوشته‌ی هربرت برنشتین و آنتونی فیلیپ در شماره‌ی ژوئیه‌ی ۱۹۸۱ از مجله‌ی Scientific American و هم‌چنین به نامه‌های ارسالی خوانندگان درباره‌ی این مطلب که در شماره‌های اکتبر و نوامبر همان سال مجله درج شده است. در شماره‌ی دسامبر ۱۹۷۵ همان مجله، در ستون «دانشمند آماتور»، شرحی در مورد کاربرد عملی قیچی دیراک در ساختن اسباب مکانیکی ابتکاری درج شده است که در آن یک کابل، پیوسته در گردش است بی‌آن که پیچ و تاب بردارد.

در مورد دیراک روایت‌های شنیدنی بسیاری نقل کرده‌اند که یکی از بهترین آن‌ها به خواهر یوجین ویگنر[۵]، برنده‌ی جایزه‌ی فیزیک نوبل مربوط می‌شود. معروف است که اندکی پس از ازدواج دیراک با خواهر ویگنر، دیراک میزبان دوستی قدیمی بود که از جریان ازدواج او اطلاعی نداشت. خوب است ادامه‌ی داستان از قول جورج گاموف[۶] درکتابش موسوم به «سی‌سالی که فیزیک را تکان داد» بشنویم. گاموف می‌نویسد: «مهمان متوجه حضور زنی در منزل دیراک شد که چای آورد و بعد روی کاناپه نشست ... سپس دیراک با هیجان گفت: اوه، من فراموش کردم او را به تو معرفی کنم! او خواهر ویگنر است.»

گاموف در جای دیگر گزارشی از دیدار دیراک با پیترکاپیتسا[۷]، فیزیک‌دان نامدار روسی می‌دهد. دیراک که محو تماشای طرح لباس دست‌بافت خانم کاپیتسا شده بود، چند ساعت پس از ترک دوستش، با عجله برگشت و خود را به منزل میزبان رساند تا به خانم کاپیتسا بگوید که در این مدت درباره‌ی جنبه‌های توپولوژیک لباس او فکر کرده و راه دیگری برای بافتن طرح آن لباس یافته است. پس از این که دیراک آن شیوه‌ی بافتن را به او نشان می‌دهد، خانم کاپیتسا به مهمان می‌گوید که الحق با این شیوه، او گلابتون‌دوزی را دوباره اختراع کرده است.

داستان آخر ما باز از گاموف است که به وقت پرسش و پاسخ بعد از یکی از سخنرانی‌های دیراک مربوط می‌شود. یکی از حاضران در جلسه‌ی سخن‌رانی برمی‌خیزد و می‌گوید: «من نمی‌فهمم که شما چه طور آن فرمول سمت چپ تخته‌ی سیاه را استنتاج کردید.»

دیراک پاسخ می‌دهد: «این پرسش شما یک قضیه است، نه سؤال. سؤال بعدی، لطفاً.»

پی‌نوشت

۱. Paul Adrien Maurice Dirac
۲. Fermion
۳. James Blish
۴. Fiber bundles and quantum theory
۵. Eugene Wigner
۶. George Gamow
۷. Peter Kapitza



مقدمه

یکی از اساسی‌ترین علل پیشرفت بشر را می‌توان «برقراری ارتباطات با هم‌نوعان» دانست. یک جنبه‌ی اصلی این قابلیت، توانایی ارتباط از طریق «نوشتن» است. در بعضی موقعیت‌ها، کسانی می‌خواستند اطلاعات خود را فقط به عده‌ی محدودی برسانند. آنان اسراری داشتند که می‌خواستند فاش نشود. به همین دلیل، دنبال طرح‌هایی بودند که از طریق آن‌ها بتوانند مکاتبه‌های خود را از دید عمومی نامفهوم سازند. روش‌های کلی به انجام رساندن چنینً مقصودی، یعنی پنهان داشتن مفهوم پیام‌ها، مبحثی را تشکیل می‌دهد که آن را با عنوان «رمزنگاری» می‌شناسیم.

پیش از پیدایش پست و تلگراف، ارسال پیام از طریق قاصد خصوصی انجام می‌گرفت. در این شیوه هم باز لازم بود که از روش‌های پنهان‌سازی و رمزنگاری پیام استفاده شود؛ زیرا امکان دستگیر شدن قاصد یا خیانت وی وجود داشت.

در روزگار کنونی نیز که ارسال پیام از طریق الکتریکی یا بی‌سیم انجام می‌شود، برای هرکسی این امکان وجود دارد که با انتخاب فرکانس مناسب، پیام ارسالی را دریافت و رونوشتی از آن تهیه کند. در چنین موردی هم، اگر فرستنده قصد پنهان کردن محتوای پیام را داشته باشد، باید از نوعی شیوه‌ی پنهان‌سازی یا رمزنگاری استفاده کند.

اما همان‌طور که فرستنده‌ی پیام می‌کوشد اطلاعات خود را از هر کس به جز گیرنده‌ی موردنظر پنهان دارد، کسانی هم هستند که به کشف محتوای پیام بسیار علاقه‌مندند و چه بسا این افراد از همان کسانی باشند که فرستنده تلاش دارد، اطلاعات خود را از ایشان پنهان دارد. البته تلاش چنین کسانی برای آشکار کردن رازی که پیام حاوی آن است، بدون داشتن اطلاعاتی درباره‌ی جزئیات عمل رمزنگاری ممکن است تلاشی بیهوده باشد. در هر صورت تلاشی که از این راه و باهدف خواندن پیام‌های سرّی انجام می‌پذیرد، زیر عنوان مبحثی به نام «رمزگشایی» قرار می‌گیرد.

رمزنگاری و رمزگشایی

• سید محمدرضا هاشمی موسوی
hasem_moosavi@yahoo.com

کلیدواژه‌ها: رمزنگاری، رمزگشایی، [illegible]، رمز ابجدی.

در تاریخ، به مواردی برمی‌خوریم که رمزگشایی سبب موفقیت‌های بسیاری در امور سیاسی، نظامی، تاریخی و ... هم‌چنین فعالیت‌های ضدجاسوسی بوده است. هدف از تدوین مقاله‌ی حاضر، آشنا کردن خواننده با بعضی از شیوه‌های بنیادی رمزگشایی است. کار از شرح یک فرایند رمزنگاری شروع می‌شود و به شیوه‌هایی که بتوان با آن‌ها بدون داشتن اطلاعی درباره‌ی آن فرایند، به بازسازی و گشودن

رمز پرداخت، ختم می‌شود. البته باید به این نکته توجه داشت که با درک نحوه‌ی تحلیل در رمزگشایی می‌توان روش‌هایی برای بهبود رمزنگاری یافت؛ یعنی روش‌هایی برای رفع آن نواقص رمزنگاری که در رمزگشایی مورد استفاده قرار گرفته‌اند. چنین بهبودی مسئله‌ی جدیدی را برای رمزگشا به‌دنبال می‌آورد. این بهبود که به صورت پی‌درپی انجام گرفته است، در حقیقت تاریخ پیشرفت «رمزشناسی» بوده است. رمزشناسی عنوانی است که برای نشان دادن هر دو مفهوم رمزنگاری و رمزگشایی به کار می‌رود.

فرایندهای تحلیلی که در رمزگشایی به کار می‌روند، بااستفاده از روش‌هایی صورت می‌گیرند که بعضی از آن‌ها ریاضی‌اند، بعضی مربوط به زبان‌اند. بعضی ماهیت مهندسی دارند و بعضی هم به راحتی قابل توصیف نیستند؛ مانند شانس، حس ششم و غیره.

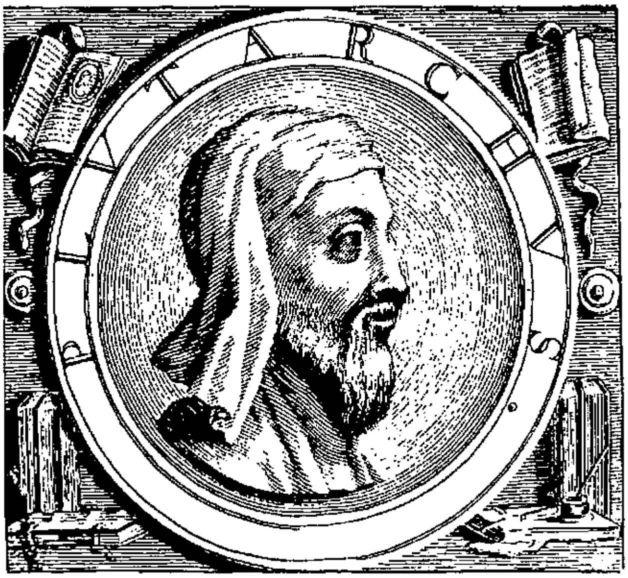
این توضیح لازم است که سیستم‌های رمزنگاری که در این جا بررسی می‌شوند، هم مقدماتی‌اند و هم به‌طور کامل شناخته شده‌اند. از آن‌جا که سیستم‌های رمزنگاری قراردادی هستند، ممکن است خواننده با درک این سیستم‌ها و ابتکار عمل لازم، بتواند سیستم‌های رمزنگاری پیچیده‌تری را طراحی کند. البته مهم‌ترین نوع پیشرفت‌های جدید با متداول شدن ماشین‌های الکترومکانیکی و الکترونیکی حاصل شده‌اند و به سیستم‌های رمزنگاری ماهیت پیچیده‌تری بخشیده‌اند. بنابراین، شیوه‌های گشودن رمز چنین سیستم‌هایی نیز باید به‌همان نسبت پیچیده‌تر و پیشرفته‌تر باشد.

توصیه‌ی اساسی که می‌تواند برای خواننده مفید باشد، این است که به دقت روش‌های رمزنگاری و رمزگشایی را مطالعه کند و با تمرین‌های مناسب، هر یک از روش‌ها را به طور کامل فرا گیرد. زیرا اگر کار و تمرینی انجام نشود، مطالب فرا گرفته شده به سرعت فراموش می‌شوند. هم‌چنین، همیشه سعی کنید که با فراگرفتن یک روش به دنبال تعمیم و یا روش‌های ساده‌تر و یا حتی پیچیده‌تر غیر از آن روش باشید، تا همه‌ی روش‌ها را در برابر فراموشی و دیگر خطرات حفظ آن، ایمن سازید.

تاریخچه‌ی مختصر رمزنویسی

از ۴۰۰۰ سال پیش، در هیروگلیف‌های مصری، آثاری از رمز به معنی اخص آن پیدا شد. از هندی‌ها، ایرانی‌ها، اسپارتی‌ها، آشوری‌ها و بابلی‌ها هم نمونه‌هایی تاریخی از رمزنگاری موجود است.

آن‌طورکه از نوشته‌های پلوتارک، مورخ یونانی برمی‌آید، اولین ماشین رمز را می‌توان به اسپارت‌ها منتسب کرد که عبارت بود از نوار چرمی و یک چوب استوانه‌ای شکل. کاربرد آن به این صورت بود که مطلبی را روی نوار چرمی می‌نوشتند و فقط وقتی این نوار (با عرض مشخصی) روی استوانه‌ی چوبی (با قطر مشخصی) پیچیده



می‌شد، آن مطلب قابل خواندن بود.

اولین رمز جدولی در آثار یونانی‌ها دیده شده است. جاسوسان یونانی در ایران، پیام‌های خود را روی سرتراشیده‌ی غلامان و بردگان می‌نوشتند و پس از بلندشدن مو، آن‌ها را به یونان روانه می‌کردند.

با پیدایش اسلام، حکما و ریاضی‌دانان مسلمان به طور جدی به امر رموز اهتمام ورزیدند، زیرا رمز و کاربرد آن حتی در قرآن هم مشاهده می‌شود. حروف مقطعه‌ی قرآن که ابتدای بعضی از سوره‌ها آمده، مانند یک کلید رمز مقابل چشم مسلمین قرار داشته است. هم‌چنین، نمونه‌های دیگر شبه رمز هم در قرآن به چشم می‌خورند؛ مثل «کل فی فلک» که مقلوب همین عبارت است. مسلمانان فن آزمایی‌های زیادی برای حل آن به خرج داده‌اند. برای مثال، شیعیان از اتصال این حروف مقطعه جمله‌ی «صراط علی حق نسکه» را ساخته‌اند. سایر حکما از همان قدیم به این واقعیت پی‌برده بودند که بعضی از سوره‌ها که دارای حروف رمز هستند، درصد تکرار آن حروف در کل سوره از سایر حروف بیشتر است. ازاین واقعیت امروزه به عنوان یکی از شگردهای شکستن رمز استفاده می‌کنند.

سیستم رمز دیگری که به نام «رمز ابجدی» (ابجد صغیر و ابجد کبیر[1]) مرسوم بوده، به ظاهر پیش از اسلام میان اعراب رواج داشته است و از آن برای به‌خاطر سپردن اعداد و ارقام استفاده می‌کردند. یکی از حکمای اسلامی به نام شهاب‌الدین عبدالله قلقشندی که به موضوع رمزها پرداخته، در کتاب معروف خود «صبح الاعشی» که در واقع یک دایرةالمعارف عظیم چند جلدی است، در مورد تاریخ رمز فصلی را آورده است. وی از شش نوع سیستم رمزی نام می‌برد که از این قرارند:

۱. قراردادن حروف به جای یکدیگر؛
۲. پشت و رو نوشتن کلمات؛

۳. تحریف و قلب (به عکس کردن) حروف و کلمات؛

۴. تبدیل حروف به ارقام از طریق رمز ابجدی؛

۵. معادل کردن هر حرف با تعدادی حروف که به حساب ابجدی با یکدیگر برابر باشند؛

۶. معادل کردن هر حرف یا نام مرد یا پرنده یا شیء دیگر و ...

در آثار ثعالبی و هم‌چنین ابن خلدون نیز مطالبی درباره‌ی رمز به چشم می‌خورد. از نویسندگان که بگذریم، تاریخ اسلام رمزشکنانی نیز در دامان خود پرورانده است؛ از جمله منهاجی که از او به عنوان یکی از حلّالین رموز نام برده می‌شود. فراهیدی (۱۷۵ـ۱۰۰ هـ.ق.) نیز در کتاب خود به نام «کتاب المعّما»، شرح می‌دهد که چگونه توانسته است یک نامه‌ی رمزی متعلق به امپراتور «بیزانس» را، با حدس این که نامه احتمالاً با «بسم‌الله» یا شبیه به آن آغاز می‌شود، بشکند (این طریق، امروزه نیز با عنوان رمزشکنی سخت رواج دارد و استفاده از قرائن و اشارات، یکی از روش‌های متداول برای شکستن رمزهاست).

در تاریخ تشیع، از قول ائمه‌ی معصومین (علیهم‌السلام) هم مواردی از کاربرد رمز دیده می‌شود. برای مثال، گفته شده است که امام جعفر صادق (علیه‌السلام) هر بار که می‌خواسته است از «بنی العباس» با کنایه نام ببرد، از آن به صورت «اولاد سابع» یاد می‌کرده که کلمه‌ی سابعَ مقلوب عباس است.

بعد که علوم غریبه در میان متصوفه و اطبا، ریاضی‌دانان و کیمیاگران رواج گرفت، برای آن‌که فوت و فن کار محفوظ بماند، به‌طور وسیعی از رمزنویسی استفاده شد. دامنه‌ی این کار به ادبیات و شعر نیز کشیده شد و امروزه ما با ذخیره‌ی پرباری از انواع کنایه، مجاز، معما، رمز و ... در ادبیات سروکار داریم که در آن نام معشوقه، ماده‌ی تاریخ و ... به رمز کشیده شده است و بیشتر جنبه‌ی تفنّنی و تذوق دارد؛ مانند این شعر:

گــر زنــام یــار مــن خــواهــی نــشــان
رو تو قلب قلب را بر قلب قلب زن

یا مانند این بیت:

عـاشـق بی پا و سـر در تـپه‌ی بی‌پایان عـشـق
چون حدیث وصل آمد از سر و جان درگذشت

بر اثر مراوده‌ی مسلمین با مسیحیان به‌خصوص در جنگ‌های صلیبی، از میان فنونی که به اروپا راه یافت، یکی هم فن رمزنویسی بود. در قرون وسطای اروپا اول بار به نام شارلمانی در فن رمزنویسی برمی‌خوریم که به فرماندهان خود دستور می‌داد، مجموعه‌ی کامل الفبای رمز را حفظ کنند و در مکاتبات خود از آن بهره بگیرند.

در قرن شانزدهم، یکی از نظریه‌پردازان «حساب احتمال» در

اروپا، به نام کاردانو، اولین رمزهای «خود کلید» را ابداع کرد. در سال ۱۸۸۰، اولین دستگاه رمزشکن مکانیکی توسط مارکیز ساخته شد و بعدها سازمان‌های زیرزمینی اروپایی سیستم‌های رمزی متفاوتی را وضع کردند؛ مانند نهضت کاربو ناریست‌ها که از انقلابیون فرانسه بودند، یا فراماسون‌ها، و جنبش نهیلیستی و آنارشیستی روسیه (به سرکردگی با کونین و کریپتوکین).

اولین ماشین‌های به رمز نوشتن الکترونیکی در سال ۱۹۱۷ توسط دپارتمان توسعه و تحقیق شرکت «آمریکن تلفن‌اند تلگراف» طراحی شد. امروزه انواع به رمزنویس مخابراتی و ارتباطی، گستردگی فوق‌العاده‌ای یافته‌اند. به خصوص پس از دو جنگ جهانی اول و دوم، دیگر رمزنویسی از امری ذوقی، سرگرم‌کننده و معمایی به ضرورتی برای بسیاری از رشته‌های ارتباطی حکومتی مانند ارتش و دیپلماسی، و حتی بازرگانی، تندیویسی و ... تبدیل شده است و انواع کدبوک‌ها، در زمینه‌های گوناگون کاربرد دارند.

به لحاظ علمی، تجزیه و تحلیل رمز جزو شاخه‌ای از ریاضیات عالی (محاسبات عددی) است و فارغ‌التحصیلان ریاضیات پیشرفته،

پی‌نوشت

(۱) ابجد کبیر:

ا	ب	ج	د	...	ظ	غ
۱	۲	۳	۴		۹۰۰	۱۰۰۰

تفریح اندیشه

گله‌ی گاوی، شامل گاوهای نر و ماده، از چهار دسته‌ی: سیاه، سفید، خالخال و قهوه‌ای تشکیل شده است.

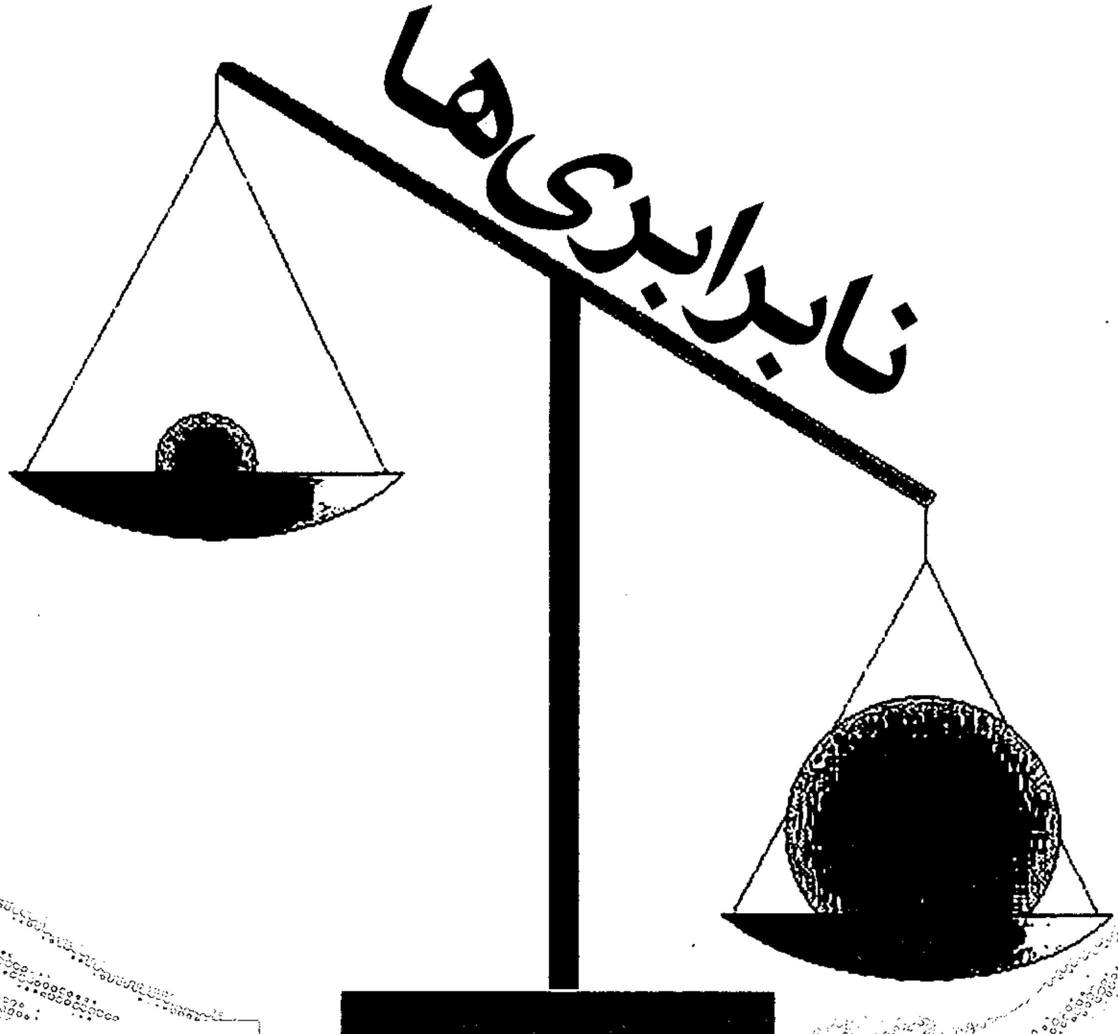
بین گاوهای نر؛ تعداد گاوهای سفید نصف به‌علاوه‌ی ثلث تعداد گاوهای سیاه و بیشتر از گاوهای قهوه‌ای است، تعداد گاوهای سیاه ربع به‌علاوه‌ی خمس تعداد گاوهای خالخال و بیشتر از گاوهای قهوه‌ای است؛ تعداد گاوهای خالخال سدس به‌علاوه‌ی سبع تعداد گاوهای سفید و بیشتر از گاوهای قهوه‌ای است.

بین گاوهای ماده؛ تعداد گاوهای سفید ثلث به‌علاوه‌ی ربع تعداد تمام گاوهای سیاه گله است؛ تعداد گاوهای سیاه ربع به‌علاوه‌ی خمس تعداد گاوهای خالخال تمام گله است؛ تعداد گاوهای خالخال خمس به‌علاوه‌ی سُدس تعداد تمام گاوهای قهوه‌ای گله است؛ تعداد گاوهای قهوه‌ای سُدس به‌علاوه‌ی سبع تعداد تمام گاوهای سفید گله است.

تعداد هر دسته از گاوهای سفید، سیاه، قهوه‌ای و خالخال نر و ماده‌ی گله را تعیین کنید.

پاسخ در صفحه‌ی ۶۴

نابرابری‌ها



کلید واژه‌ها: خواص نابرابری‌ها، نامعادله‌ها، مسائل نابرابری‌ها

خواص نابرابری‌ها

۱. به طرفین نابرابری می‌توان عددی اضافه یا کم کرد:

$$a > b \Rightarrow a \pm c > b \pm c$$

۲. طرفین هر نابرابری را می‌توان در عدد مثبتی ضرب یا بر عدد مثبتی تقسیم کرد:

$$\begin{cases} a > b \\ m > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} am > bm \\ \frac{a}{m} > \frac{b}{m} \end{cases}$$

۳. اگر طرفین هر نابرابری را در عدد منفی ضرب یا برعددی منفی تقسیم کنیم، جهت نابرابری عوض می‌شود.

$$\begin{cases} a > b \\ k < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ak < bk \\ \frac{a}{k} < \frac{b}{k} \end{cases}$$

۴. طرفین هر نابرابری را می‌توان به توان عدد فرد رساند یا از طرفین آن ریشه‌ی فرد گرفت.

$$\underset{n \in N}{a > b} \Rightarrow \begin{cases} a^{2n+1} > b^{2n+1} \\ \sqrt[2n+1]{a} > \sqrt[2n+1]{b} \end{cases}$$

۵. اگر دو طرف نابرابری مثبت باشند، می‌توان طرفین را به توان عددی فرد یا زوج رساند یا از طرفین ریشه‌ی فرد یا زوج گرفت.

$$\underset{n \in N}{a > b > 0} \Rightarrow \begin{cases} a^{2n} > b^{2n} \\ \sqrt[2n]{a} > \sqrt[2n]{b} \end{cases}$$

۶. $a^{2n} > b^{2n} \Rightarrow |a| > |b|$

۷. $\begin{cases} a > b > 0 \\ b < a < 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$

۸. $a > 0 > b \Rightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$

۹. دو نابرابری هم‌جهت را می‌توان نظیر به نظیر با هم جمع کرد:

$$\begin{cases} a > b \\ c > d \end{cases} \Rightarrow a + c > b + d$$

۱۰. هرگاه طرفین دو نابرابری هم‌جهت مثبت باشند، می‌توان آن‌ها را نظیر به نظیر درهم ضرب کرد.

$$\begin{cases} a > b > 0 \\ c > d > 0 \end{cases} \Rightarrow ac > bd$$

$$11)\ 0 < a < 1 \Rightarrow \begin{cases} a > a^2 > a^3 \ldots \\ a < \sqrt{a} < \sqrt[3]{a} \ldots \end{cases}$$

$$12)\ a > 0; a + \frac{1}{a} \geq 2$$

$$13)\ a < 0; a + \frac{1}{a} \leq -2$$

$$14)\ a, b \neq 0; (a^2 + b^2)\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right) \geq 4$$

$$15)\ a, b, c \neq 0; (a^2 + b^2 + c^2)\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right) \geq 9$$

۱۶) $a, b, c, d, \ldots > 0$ و $a_1, a_2, a_3, \ldots a_n > 0$

آن‌گاه داریم:

الف) $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$

ب) $\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$

ج) $\frac{a+b+c+d}{4} \geq \sqrt[4]{abcd}$

در حالت کلی داریم:

د) $\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1.a_2.a_3.\ldots.a_n}$

چند نابرابری در نامعادله‌ها

$$1)\ \begin{cases} x^2 \leq a^2 \\ a > 0 \end{cases} \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$$

مثال ۱. $(2x - 1)^2 \leq 25 \Rightarrow -5 \leq 2x - 1 \leq 5$

$\Rightarrow -4 \leq 2x \leq 6 \Rightarrow -2 \leq x \leq 3$

مثال ۲.

$$2)\ \begin{cases} x^2 \geq a^2 \\ a > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq a \\ x \leq -a \end{cases}$$

$$(2x-5)^2 \geq 49 \Rightarrow \begin{cases} 2x - 5 \geq 7 \\ 2x - 5 \leq -7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x \geq 12 \\ 2x \leq -2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x \geq 6 \\ x \leq -1 \end{cases}$$

$$3)\ \begin{cases} a^2 \leq x^2 \leq b^2 \\ 0 < a < b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a < x < b \\ -b < x < -a \end{cases}$$

مثال ۳.

$$9 \leq (2x-3)^2 \leq 25 \Rightarrow \begin{cases} 3 \leq 2x - 3 \leq 5 \\ -5 \leq 2x - 3 \leq -3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 6 \leq 2x \leq 8 \\ -2 \leq 2x \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3 \leq x \leq 4 \\ -1 \leq x \leq 0 \end{cases}$$

مسئله‌ی ۱. ثابت کنید برای هر $a, b, c \in R$ داریم:

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + ac + bc$$

می‌دانیم که:

$$\begin{cases} (a-b)^2 \geq 0 \\ (b-c)^2 \geq 0 \\ (c-a)^2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 - 2ab \geq 0 \\ b^2 + c^2 - 2bc \geq 0 \\ c^2 + a^2 - 2ac \geq 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 \geq 2ab \\ b^2 + c^2 \geq 2bc \\ c^2 + a^2 \geq 2ac \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 \geq 2ab + 2ac + 2bc$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + ac + bc$$

مسئله‌ی ۲. اگر $a, b, c > 0$، ثابت کنید:

$$(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc$$

حل:

$$\begin{cases} (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0 \\ (\sqrt{b} - \sqrt{c})^2 \geq 0 \\ (\sqrt{c} - \sqrt{a})^2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + b - 2\sqrt{ab} \geq 0 \\ b + c - 2\sqrt{bc} \geq 0 \\ c + a - 2\sqrt{ac} \geq 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a+b\geq 2\sqrt{ab}\\ b+c\geq 2\sqrt{bc}\\ c+a\geq 2\sqrt{ac}\end{cases}$$

این سه نامساوی را درهم ضرب می‌کنیم (بنا به شماره‌ی ۱۰):

$$(a+b)(b+c)(c+a)\geq 8\sqrt{a^2b^2c^2}$$

$$(a+b)(b+c)(c+a)\geq 8abc$$

مسئله‌ی ۳. در مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABC، $\hat{A}=90^\circ$، a وتر و b و c اضلاع زاویه‌ی قائمه‌اند. ثابت کنید: $a^3>b^3+c^3$.

حل: داریم:

$a>b$ (در $b^2>0$ ضرب می‌کنیم) $\Rightarrow ab^2>b^3$

$a>c$ (در $c^2>0$ ضرب می‌کنیم) $\Rightarrow ac^2>c^3$

دو رابطه را جمع می‌کنیم:

$ab^2+ac^2>b^3+c^3 \Rightarrow a(b^2+c^2)>b^3+c^3$ و داریم:

$$a^2=b^2+c^2$$

$$\Rightarrow a(a)^2>b^3+c^3 \Rightarrow a^3>b^3+c^3$$

مسئله‌ی ۴. با شرط $a,b,c>0$ ثابت کنید:

$$P=(a+b+c)(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c})\geq 9$$

حل:

$$P=1+\frac{a}{b}+\frac{a}{c}+\frac{b}{a}+1+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+\frac{c}{b}+1$$

$$P=(\frac{a}{b}+\frac{b}{a})+(\frac{a}{c}+\frac{c}{a})+(\frac{b}{c}+\frac{c}{b})+3$$

(بنا به شماره‌ی ۱۲):

$$\begin{cases} (\frac{a}{b}+\frac{b}{a})\geq 2\\ (\frac{a}{c}+\frac{c}{a})\geq 2\\ (\frac{b}{c}+\frac{c}{b})\geq 2\end{cases}$$

$$\Rightarrow (\frac{a}{b}+\frac{b}{a})+(\frac{a}{c}+\frac{c}{a})+(\frac{b}{c}+\frac{c}{b})\geq 6$$

$$\Rightarrow (\frac{a}{b}+\frac{b}{a})+(\frac{a}{c}+\frac{c}{a})+(\frac{b}{c}+\frac{c}{b})+3\geq 9 \Rightarrow P\geq 9$$

مسئله‌ی ۵. با شرط $a,b>0$ ثابت کنید:

$$\frac{a^3+b^3}{2}\geq (\frac{a+b}{2})^3$$

حل: فرض می‌کنیم نامساوی مسئله همواره درست باشد. پس داریم:

$$\frac{a^3+b^3}{2}\geq (\frac{a+b}{2})^3$$

$$\Rightarrow \frac{a^3+b^3}{2}\geq \frac{(a+b)^3}{8} \Rightarrow 4(a^3+b^3)\geq (a+b)^3$$

$$\Rightarrow 4(a+b)(a^2+b^2-ab)\geq (a+b)^3$$

$$\Rightarrow 4(a^2+b^2-ab)\geq (a+b)^2$$

$$\Rightarrow 4a^2+4b^2-4ab\geq a^2+b^2+2ab$$

$$\Rightarrow 3a^2+3b^2-6ab\geq 0$$

$$3(a^2+b^2-2ab)\geq 0 \Rightarrow 3(a-b)^2\geq 0$$

این نامساوی همواره درست است. و چون مراحل بالا همگی برگشت‌پذیر هستند فرض ما درست است.

مسئله‌ی ۶. با شرط $a,b,c>0$، ثابت کنید:

$$a^3+b^3+c^3\geq 3abc$$

حل: به‌راحتی می‌توان ثابت کرد:

$$a^3+b^3+c^3-3abc$$
$$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)$$

راهنمایی: اگر دو پرانتز سمت راست را درهم ضرب کنید، پس از جمع جبری، عبارت سمت چپ به‌دست می‌آید.

از طرف دیگر، در مسئله‌ی ۱ ثابت کردیم:

$$a^2+b^2+c^2\geq ab+ac+bc$$

پس:

$$a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc\geq 0$$

و عبارت $(a+b+c)$ هم مثبت است. پس:

$$a^3+b^3+c^3-3abc\geq 0 \Rightarrow a^3+b^3+c^3\geq 3abc$$

مسئله‌ی ۷. با شرط $a,b>0$، ثابت کنید:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\geq \frac{4}{a+b}$$

حل: فرض می‌کنیم نامساوی مسئله همواره درست باشد؛ پس داریم:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\geq \frac{4}{a+b}$$

دو طرف نامساوی را در مقدار مثبت $ab(a+b)$ ضرب می‌کنیم. خواهیم داشت:

$$b(a+b)+a(a+b)\geq 4ab$$

$$\Rightarrow (a+b)(a+b)\geq 4ab$$

$$\Rightarrow (a+b)^2\geq 4ab$$

$$\Rightarrow a^2+b^2+2ab\geq 4ab \Rightarrow a^2+b^2-2ab\geq 0$$

$$\Rightarrow (a-b)^2\geq 0$$

این نامساوی همواره درست است. و چون مراحل بالا همگی برگشت‌پذیر هستند پس فرض ما درست است.

مسئله‌ی ۸. با شرط $x\neq 0$، بیشترین و کمترین مقدار $P=\frac{4x}{x^2+1}$ را بیابید.

الف) فرض می‌کنیم $x > 0$. صورت و مخرج کسر را بر x تقسیم می‌کنیم:

(شماره‌ی ۱۳)
$$P = \frac{4}{x + \frac{1}{x}},$$

$$x > 0\ ;\ x + \frac{1}{x} \ge 2$$

پس مینیمم مخرج کسر ۲ است.

درنتیجه:
$$\text{Max}P = \frac{4}{2} = 2$$

ب) فرض می‌کنیم $x < 0$، صورت و مخرج کسر را بر x تقسیم کنیم:

(شماره‌ی ۱۴)
$$P = \frac{4}{x + \frac{1}{x}},$$

$$x < 0\ ;\ x + \frac{1}{x} \le -2$$

پس ماکزیمم مخرج کسر ۲- است.

درنتیجه:
$$\text{Min}P = \frac{4}{-2} = -2$$

آزمون ۱. اگر $a > b$ و $b \ne 0$، آن‌گاه کدام‌یک از نامساوی‌های زیر همواره درست است؟

۱) $a^2 > ab$ ۲) $a^3 > a^2b$

۳) $ab^2 > b^3$ ۴) $a^4 > b^4$

حل: گزینه‌ی ۳. چون $b \ne 0$ پس $b^2 > 0$. طرفین نامساوی $a > b$ را در $b^2 > 0$ ضرب می‌کنیم. درنتیجه: $ab^2 > b^3$. پس گزینه‌ی ۳ درست است.

آزمون ۲. اگر $a > b$ و $c > d$، آن‌گاه کدام‌یک از نامساوی‌های زیر همواره درست است؟

۱) $ac > bd$ ۲) $\frac{a}{c} > \frac{b}{d}$

۳) $a + b > b + c$ ۴) $a - d > b - c$

حل: گزینه‌ی ۴. (بنا به شماره‌ی ۹) داریم:

$$\begin{cases} a > b \\ c > d \end{cases} ;\ a + c > b + d\ ;\ a - d > b - c$$

آزمون ۳. اگر $a + b + c = 0$ و $A = ab + ac + bc$، آن‌گاه:

۱) $A > 0$ ۲) $A < 0$

۳) $A \ge 0$ ۴) $A \le 0$

حل: گزینه‌ی ۴.

داریم: $\underbrace{(a+b+c)^2}_{0} = \underbrace{a^2 + b^2 + c^2}_{0\text{ یا }+} + 2\underbrace{(ab + ac + bc)}_{A}$

برای این‌که تساوی برقرار باشد، باید $A \le 0$

آزمون ۴. اگر $a, b, c, d > 0$ و $A = a^4 + b^4 + c^4 + d^4$ و $B = \sqrt{abcd}$ آن‌گاه همواره داریم:

۱) $A \ge 4B$ ۲) $A \ge 4B^2$

۳) $A \ge 4B^4$ ۴) $A \ge 4B^3$

حل: گزینه‌ی ۲

(بنا به قسمت ج، شماره‌ی ۱۶) با شرط $x, y, z, t > 0$، داریم:

$$\frac{x + y + x + t}{4} \ge \sqrt[4]{xyzy}, x = a^4, y = b^4, z = c^4, t = d^4$$

$$\Rightarrow \frac{a^4 + b^4 + c^4 + d^4}{4} \ge \sqrt[4]{a^4b^4c^4d^4} \Rightarrow \frac{A}{4} \ge abcd$$
$$\Rightarrow A \ge 4abcd \Rightarrow A \ge 4B^2$$

تفریح اندیشه

ادامه‌ی مطلب صفحه‌ی ۲۱

برای اثبات درستی این ادعا، فرض کنیم عدد شش‌رقمی متناظر با تاریخ تولد دوستتان به‌صورت $\overline{abcdef}$ باشد. بنابراین داریم:

$$\overline{abcdef} = a \times 10^5 + b \times 10^4 + c \times 10^3 + d \times 10^2 + e \times 10 + f$$

در این‌جا مراحل الگوریتم را انجام می‌دهیم.

مرحله‌ی ۱)

$$2\overline{abcdef} = 2a \times 10^5 + 2b \times 10^4 + 2c \times 10^3 + 2d \times 10^2 + 2e \times 10 + 2f$$

مرحله‌ی ۲)

$$2\overline{abcdef} + 3 = 2a \times 10^5 + 2b \times 10^4 + 2c \times 10^3 + 2d \times 10^2 + 2e \times 10 + 2f + 3$$

مرحله‌ی ۳)

$$5(2\overline{abcdef} + 3) = a \times 10^6 + b \times 10^5 + c \times 10^4 + d \times 10^3 + e \times 10^2 + f \times 10 + 15$$

مرحله‌ی ۴)

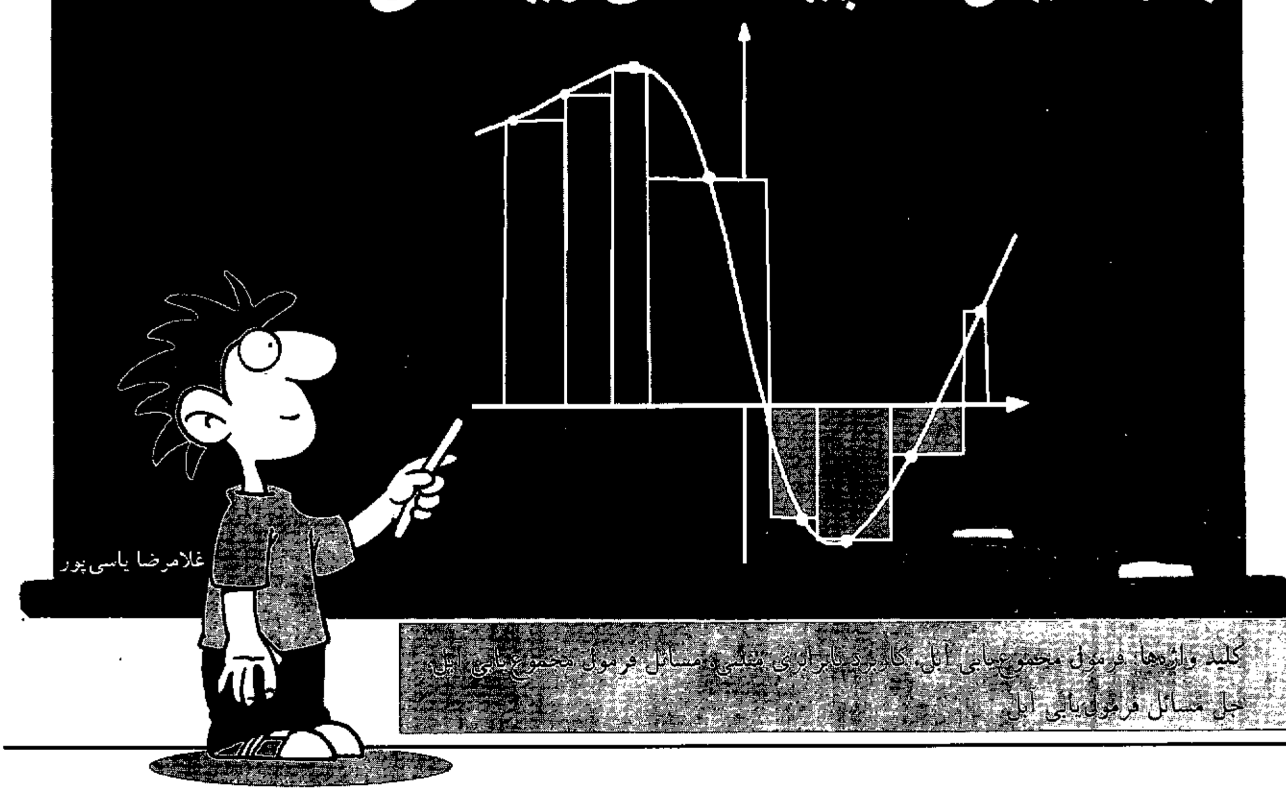
$$5(2\overline{abcdef} + 3) - 6 = a \times 10^6 + b \times 10^5 + c \times 10^4 + d \times 10^3 + e \times 10^2 + f \times 10 + 9$$

مرحله‌ی ۵) در این مرحله عدد هفت‌رقمی حاصل به‌صورت $\overline{abcdef9}$ توسط دوستتان اعلام می‌شود.

اکنون با حرف رقم یکان (که همیشه ۹ است) شما می‌توانید تاریخ تولد دوست خود را به‌صورت $\overline{abcdef}$ کشف کنید.

درضمن حتماً به دوست خود توصیه کنید که یک ماشین‌حساب به همراه داشته باشد.

با راهیان المپیادهای ریاضی ۱۸



غلامرضا یاسی‌پور

کلیدواژه‌ها: فرمول مجموع‌یابی آبل، کاربرد نابرابری مثلثی و مسائل فرمول مجموع‌یابی آبل، حل مسائل فرمول‌یابی آبل

فرمول مجموع‌یابی آبل

بسیاری از دستاوردهای ریاضیات پیوسته، از قبیل نابرابری‌های کلاسیک مربوط به انتگرال‌ها، معمولاً از مشابه‌های گسسته‌شان، با استفاده از فرایندی حدی استنتاج می‌شوند. اما گاهی اتفاق می‌افتد که مفاهیم مربوط به ریاضیات پیوسته آشناتر از نظایر گسسته‌شان باشند.

هدف این مقاله بررسی مشابه گسسته‌ی فرمول انتگرال‌گیری جزء به جزء، یعنی فرمول مجموع‌یابی آبل است، که به‌صورت زیر بیان می‌شود:

فرض می‌کنیم a_1، a_2، ...، a_n و b_1، b_2، ...، b_n دو دنباله‌ی متناهی اعداد باشند، در این صورت:

$$a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n=(a_1-a_2)b_1$$
$$+(a_2-a_3)(b_1+b_2)+\cdots+(a_{n-1}-a_n)$$
$$(b_1+b_2+\cdots+b_{n-1})$$
$$+a_n(b_1+b_2+\cdots+b_n)$$

شباهت این موضوع با انتگرال‌گیری جزء به جزء در صورتی آشکار می‌شود که به خاطر بیاوریم انتگرال‌گیری متناظر با مجموع‌یابی جمع جملات است، در حالی‌که دیفرانسیل‌گیری متناظر با تفریق جمله‌های متوالی است.

خط چند ضلعی $P_0P_1\ldots P_n$ را چنان در نظر می‌گیریم که:

$$\angle P_0P_1P_2=\angle P_1P_2P_3=\cdots=\angle P_{n-2}P_{n-1}P_n$$

در حالی‌که همه را در جهت ساعتگرد اندازه‌گیری کرده‌ایم. اگر:

$$P_0P_1>P_1P_2>\cdots>P_{n-1}P_n$$

نشان دهید P_0 و P_n نمی‌توانند منطبق باشند.

برای حل مسأله، مختصات مختلطی را با مبدأ در P_0 و محور xهای P_0P_1 در نظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم α زاویه‌ی بین هر دو قطعه‌ی متوالی باشد، و:

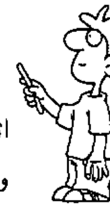
$$a_1>a_2>\cdots>a_n$$

طول‌های این قطعات باشند. اگر قرار دهیم $z=e^{i(\pi-\alpha)}$، آن‌گاه مختص P_n عبارت است از:

$$a_1+a_2z+\cdots+a_nz^{n-1}$$

باید ثابت کنیم این عدد برابر صفر نیست. با استفاده از فرمول مجموع‌یابی آبل، به‌دست می‌آوریم:

$$a_1+a_2z+\cdots+a_nz^{n-1}=(a_1-a_2)+$$
$$(a_2-a_3)(1+z)+\cdots+a_n(1+z+\cdots+z^{n-1})$$



اگر α صفر باشد، این مقدار عددی اکیداً حقیقی و مثبت است، و اثبات کامل است. اما اگر چنین نباشد، آن را در $1-z$ ضرب می‌کنیم و به‌دست می‌آوریم:

$$(a_1-a_2)(1-z)+(a_2-a_3)(1-z^2)+\cdots+a_n(1-z^n)$$

این عبارت نمی‌تواند صفر باشد، در واقع، از آن‌جا که $|z|=1$، بنا به نابرابری مثلثی داریم:

$$\left|(a_1-a_2)z+(a_2-a_3)z^2+\cdots+a_nz^n\right|$$
$$<\left|(a_1-a_2)z\right|+\left|(a_2-a_3)z^2\right|+\cdots+\left|a_nz^n\right|$$
$$=(a_1-a_2)+(a_2-a_3)+\cdots+a_n$$

و نتیجه حاصل می‌شود.

مسأله‌های زیر را نیز می‌توان با استفاده از فرمول مجموع‌یابی فوق حل کرد.

۱. با استفاده از فرمول مجموع‌یابی آبل، مجموع‌های زیر را محاسبه کنید.

الف) $1+2q+3q^2+\cdots+nq^{n-1}$

ب) $1+4q+9q^2+\cdots+n^2q^{n-1}$

۲. اعداد:

$$a_1\ge a_2\ge\cdots\ge a_n>0$$

و:

$$b_1\ge b_2\ge\cdots\ge b_n>0$$

در

$$a_1\ge b_1\,,\ a_1+a_2\ge b_1+b_2\,,\ \cdots\,,$$
$$a_1+a_2+\cdots+a_n\ge b_1+b_2+\cdots+b_n$$

صدق می‌کنند. ثابت کنید به ازای هر عدد صحیح و مثبت k داریم:

$$a_1^k+a_2^k+\cdots+a_n^k\ge b_1^k+b_2^k+\cdots+b_n^k$$

۳. فرض می‌کنیم c، b، a، و d اعدادی نامنفی و چنان باشند که:

$$a\le 1,\ a+b\le 5,$$
$$a+b+c\le 14,\ a+b+c+d\le 30$$

ثابت کنید:

$$\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d}\le 10$$

۴. فرض می‌کنیم a_1، a_2، ...، a_n اعدادی نامنفی و چنان باشند که، به ازای هر k،

$$a_1a_2\cdots a_k\le\frac{1}{(2k)!}$$

ثابت کنید:

$$a_1+a_2+\cdots+a_n\ge\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}$$

۵. فرض می‌کنیم x_1، x_2، ...، x_n و $y_1\ge y_2\ge\cdots\ge y_n$ دو دنباله از اعداد مثبت و چنان باشند که:

$$x_1\ge y_1\,,\ x_1x_2\ge y_1y_2\,,\cdots,\ x_1x_2\cdots x_n\ge y_1y_2\cdots y_n$$

ثابت کنید:

$$x_1+x_2+\cdots+x_n\ge y_1+y_2+\cdots+y_n$$

حل مسئله‌ها

۱. الف) با به‌کار بردن فرمول مجموع‌یابی آبل به‌دست می‌آوریم:

$$1+2q+3q^2+\cdots+nq^{n-1}=(1-2)+(2-3)(1+q)$$
$$+(3-4)(1+q+q^2)+\cdots+((n-1)-n)$$
$$(1+2+\cdots+q^{n-2})+n(1+q+q^2+\cdots+q^{n-1})$$
$$=-(\frac{q-1}{q-1}+\frac{q^2-1}{q-1}+\frac{q^3-1}{q-1}+\cdots+\frac{q^{n-1}-1}{q-1})$$
$$+n\frac{q^n-1}{q-1}=-\frac{1}{q-1}(1+q+q^2+\cdots+q^{n-1}-n)$$
$$+n\frac{q^n-1}{q-1}=-\frac{1}{q-1}(\frac{q^n-1}{q-1}-n)+n\frac{q^n-1}{q-1}\frac{nq^n}{q-1}$$
$$-\frac{q^n-1}{(q-1)^2}$$

ب) با به‌کار بردن دوباره‌ی فرمول مجموع‌یابی‌آبل خواهیم داشت:

$$1+4q+9q^2+\cdots+n^2q^{n-1}$$
$$=(1-4)+(4-9)(1+q)+(9-16)(1+q+q^2)$$
$$+(1+q+q^2)+\cdots+((n-1)^2-n^2)(1+q+\cdots+q^{n-2})$$
$$+n^2(1+q+\cdots+q^{n-1})$$

با جمع سری‌های هندسی به‌دست آمده، داریم:

$$=-(3\frac{q-1}{q-1}+5\frac{q^2-1}{q-1}+7\frac{q^3-1}{q-1}+\cdots$$
$$+(2n-1)\frac{q^{n-1}-1}{q-1})+n^2\frac{q^n-1}{q-1}=(\frac{q-1}{q-1}+\frac{q^2-1}{q-1}$$
$$+\frac{q^3-1}{q-1}+\cdots+\frac{q^{n-1}-1}{q-1})-2(2\frac{q-1}{q-1}+3\frac{q^2-1}{q-1}$$
$$+4\frac{q^3-1}{q-1}+\cdots+n\frac{q^{n-1}-1}{q-1})+n^2\frac{q^n-1}{q-1}$$
$$=\frac{1}{q-1}(1+q+\cdots+q^{n-1}-n)$$

$$-\frac{2}{q-1}\left(1+2q+\cdots+nq^{n-1}-\frac{n(n+1)}{2}\right)+n^2\frac{q^n-1}{q-1}$$

با استفاده از قسمت الف مسئله، درمی‌یابیم که این عبارت برابر است با:

$$\frac{1}{q-1}\left(\frac{q^n-1}{q-1}-n\right)-\frac{2}{q-1}\left(\frac{nq^n}{q-1}-\frac{q^n-1}{(q-1)^2}-\frac{n(n+1)}{2}\right)$$
$$+n^2\frac{q^n-1}{q-1}=\frac{n^2q^n}{q-1}-\frac{(2n-1)q^n+1}{(q-1)^2}+\frac{2q^n-2}{(q-1)^3}$$

منبع

Yaglom, A.M., Yaglom, I.M. Ncelementarnye zadaci v elementarnom izlozenii (Non-elementary problems in an elementary exposition), Gosudarstv. Izdat. Tehn. Teor. Lit., Moscow, 1954.

۲. می‌توان نوشت:

$$a_i^k-b_i^k=(a_i-b_i)(a_i^{k-1}+a_i^{k-2}b_i+\cdots+a_ib_i^{k-2}+b_i^{k-1})$$

برای ساده‌کردن محاسبات قرار می‌دهیم:

$$c_i=a_i-b_i$$

و:

$$d_i=a_i^{k-1}+a_i^{k-2}b_i+\cdots+a_ib_i^{k-2}+b_i^{k-1}$$

فرض مسئله مستلزم این است که:

$$c_1+c_2+\cdots+c_j\ge 0$$

به ازای هر i:

$$d_i\ge d_{i+1}>0$$

و مورد اخیر، از آن‌جا که a_i و b_i دنباله‌هایی مثبت و نزولی‌اند، نتیجه می‌دهد:

$$a_1^k-b_1^k+a_2^k-b_2^k+\cdots+a_n^k-b_n^k=c_1d_1$$
$$+c_2d_2+\cdots+c_nd_n=(d_1-d_2)c_1+(d_2-d_3)$$
$$(c_1+c_2)+\cdots+d_n(c_1+c_2+\cdots+c_n)\ge 0$$

و نابرابری به اثبات می‌رسد.

منبع

Busneag, D., Mafei, I.,V.,Teme pentru cercurile Si concursurile de matematica ale elevilor (Lectures for students mathematics circles and competitions), Scrisul romanesc, Craiova, 1983.

۳. گزاره‌ی عمومی‌تری را اثبات می‌کنیم.

اگر a_1، a_2، ...، a_n مثبت باشند،

$$0\le b_1\le b_2\le\cdots\le b_n$$

و به ازای جمیع مقادیر $k\le n$ داشته باشیم:

$$a_1+a_2+\cdots+a_k\le b_1+b_2+\cdots+b_k$$

در این‌صورت:

$$\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}+\cdots+\sqrt{a_n}\le\sqrt{b_1}+\sqrt{b_2}+\cdots+\sqrt{b_n}$$

حالت خاص مسئله‌ی اصلی، به ازای $n=4$ با قرار دادن:

$$b_k=k^2, k=1,2,3,4$$

به‌دست می‌آید.

اکنون به اثبات دستاورد فوق می‌پردازیم. داریم:

$$\frac{a_1}{\sqrt{b_1}}+\frac{a_2}{\sqrt{b_2}}+\cdots+\frac{a_n}{\sqrt{b_n}}$$
$$=a_1\left(\frac{1}{\sqrt{b_1}}-\frac{1}{\sqrt{b_2}}\right)+(a_1+a_2)\left(\frac{1}{\sqrt{b_2}}-\frac{1}{\sqrt{b_3}}\right)$$
$$+(a_1+a_2+a_3)\left(\frac{1}{\sqrt{b_3}}-\frac{1}{\sqrt{b_4}}\right)+\cdots$$
$$+(a_1+a_2+\cdots+a_n)\frac{1}{\sqrt{b_n}}$$

تفاضل‌های واقع در پرانتزها همه مثبت‌اند. با به‌کاربردن فرض درمی‌یابیم که این عبارت کمتر از یا برابر با مورد زیر است:

$$b_1\left(\frac{1}{\sqrt{b_1}}-\frac{1}{\sqrt{b_2}}\right)+(b_1+b_2)\left(\frac{1}{\sqrt{b_2}}-\frac{1}{\sqrt{b_3}}\right)$$
$$+\cdots+(b_1+b_2+\cdots+b_n)\frac{1}{\sqrt{b_n}}$$
$$=\sqrt{b_1}+\sqrt{b_2}+\cdots+\sqrt{b_n}$$

بنابراین:

$$\frac{a_1}{\sqrt{b_1}}+\frac{a_2}{\sqrt{b_2}}+\cdots+\frac{a_n}{\sqrt{b_n}}\le\sqrt{b_1}+\sqrt{b_2}+\cdots+\sqrt{b_n}$$

با استفاده از این نتیجه و نابرابری «کوشی ـ شوارتز»، به دست می‌آوریم:

$$(\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}+\cdots+\sqrt{a_n})^2$$

$$=\left(\sqrt[4]{b_1}\cdot\sqrt{\frac{a_1}{\sqrt{b_1}}}+\sqrt[4]{b_2}\cdot\sqrt{\frac{a_2}{\sqrt{b_2}}}+\cdots+\sqrt[4]{b_n}\cdot\sqrt{\frac{a_n}{\sqrt{b_n}}}+\right)^2$$

$$\le(\sqrt{b_1}+\sqrt{b_2}+\cdots+\sqrt{b_n})\left(\frac{a_1}{\sqrt{b_1}}+\frac{a_2}{\sqrt{b_2}}+\cdots+\frac{a_n}{\sqrt{b_n}}\right)$$

$$\le(\sqrt{b_1}+\sqrt{b_2}+\cdots+\sqrt{b_n})^2$$

که نتیجه می‌دهد:

$$\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}+\cdots+\sqrt{a_n}\le\sqrt{b_1}+\sqrt{b_2}+\cdots+\sqrt{b_n}$$

(آزمون انتخابی IMO رومانی، ۱۹۷۷، طرح از V.Cârtoaje)

۴. داریم:

$$a_1+a_2+\cdots+a_n$$
$$=\left(1-\frac{1}{2}\right)(1\cdot 2a_1)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)(3\cdot 4a_2)$$
$$+\cdots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}\right)((2n-1)\cdot 2na_n)$$
$$=\left(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)(1\cdot 2a_1)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}-\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\right)$$
$$(1\cdot 2a_1+3\cdot 4a_2)+\cdots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}\right)(1\cdot 2a_1+3\cdot 4a_2$$
$$+\cdots+(2n-1)\cdot 2na_n)$$

با استفاده از نابرابری AM.GM و فرض مسئله درمی‌یابیم که:

$$1\cdot 2a_1\ge 1$$
$$1\cdot 2a_1+3\cdot 4a_2\ge 2,\ldots,1\cdot 2a_1+3\cdot 4a_2+\cdots$$
$$+(2n-1)\cdot 2na_n\ge n$$

در نتیجه:

$$a_1+a_2+\cdots+a_n\ge\left(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)$$
$$+2\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\frac{1}{6}\right)+\cdots+n\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}\right)$$
$$=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}$$
$$=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n}$$
$$-2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)$$
$$=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}$$

و کار به سامان می‌رسد.

۵. می‌خواهیم نابرابری‌های شامل حاصل‌ضرب‌ها را به نابرابری‌های شامل مجموع‌ها تبدیل کنیم. به این منظور از نابرابری AM-GM استفاده می‌کنیم. داریم:

$$\frac{x_1}{y_1}+\frac{x_2}{y_2}+\cdots+\frac{x_k}{y_k}\ge k\sqrt[k]{\frac{x_1}{y_1}\frac{x_2}{y_2}\cdots\frac{x_k}{y_k}}\ge k$$

که آخرین نابرابری آن از فرض به‌دست می‌آید.

با بازگشت به نابرابری اصلی، داریم:

$$x_1+x_2+\cdots+x_n=\frac{x_1}{y_1}y_1+\frac{x_2}{y_2}y_2+\cdots+\frac{x_n}{y_n}y_n$$
$$=\frac{x_1}{y_1}(y_1-y_2)+\left(\frac{x_1}{y_1}+\frac{x_2}{y_2}\right)(y_2-y_3)+\cdots$$
$$+\left(\frac{x_1}{y_1}+\frac{x_2}{y_2}+\cdots+\frac{x_n}{y_n}\right)y_n$$

با استفاده از نابرابری‌های تبدیل شده در ابتدای این راه حل، برای عامل اول در هر جمله، این نکته را درمی‌یابیم که این عبارت بزرگ‌تر از یا برابر است با:

$$1(y_1-y_2)+2(y_2-y_3)+\cdots+ny_n$$
$$=y_1+y_2+\cdots+y_n$$

و اثبات به انجام می‌رسد.

تفریح اندیشه

پاسخ

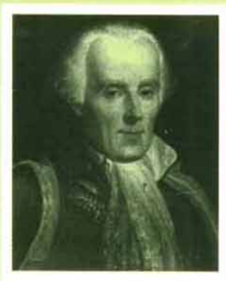
تعداد گاوهای نر سفید، سیاه، خالخال و قهوه‌ای را به X، Y، Z و T و تعداد گاوهای ماده از رنگ‌های مزبور را به‌ترتیب به x، y، z و t نمایش می‌دهیم. معادلات زیر را خواهیم داشت:

$$X-T=\frac{5}{6}Y \quad \text{و} \quad Y-T=\frac{9}{20}Z \quad \text{و} \quad Z-T=\frac{13}{42}X$$
$$x=\frac{7}{12}(Y+y) \quad \text{و} \quad y=\frac{9}{20}(Z+z) \quad \text{و} \quad z=\frac{11}{30}(T+t) \quad \text{و}$$
$$t=\frac{13}{42}(X+x) \quad \text{و}$$

از حل دستگاه معادلات سیال بالا نتیجه خواهد شد:

$$X=10366482k,\ Y=7460514k \ \text{و},\ Z=7358060k$$
$$T=4149387k \ \text{و}$$
$$x=7206360k \quad \text{و}\ y=4893246k \ \text{و}\ z=3515820k$$
$$t=5439213k \ \text{و}$$

که k عدد صحیح مثبت است، تعداد جواب‌های مسئله بیشمار است. کوچک‌ترین آن‌ها به‌ازای k=۱ حاصل می‌شود.



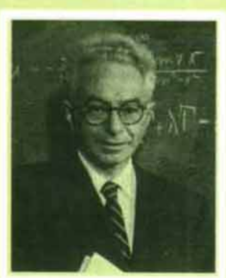
نیمی از یک مفهوم ریاضی، ابداع علامتی مناسب برای آن است.

پیرسیمون لاپلاس



انتگرال گیری معمولی تنها خاطره‌ای است از مشتق گیری.

آگوستوس دمرگان



حساب دیفرانسیل و انتگرال، حاصل تلاش هنری فکر است که دو هزار و پانصد سال در جریان بوده است.

ریچارد کورانت

رشد برهان

۶۸

مجله‌ی ریاضی

دوره‌ی آموزش متوسطه

دوره‌ی بیستم/ زمستان۱۳۸۹/ شماره‌ی ۲/ ٦٤ صفحه/ ۵۰۰۰ ریال
فصلنامه‌ی آموزشی، تحلیلی و اطلاع‌رسانی
www.roshdmag.ir

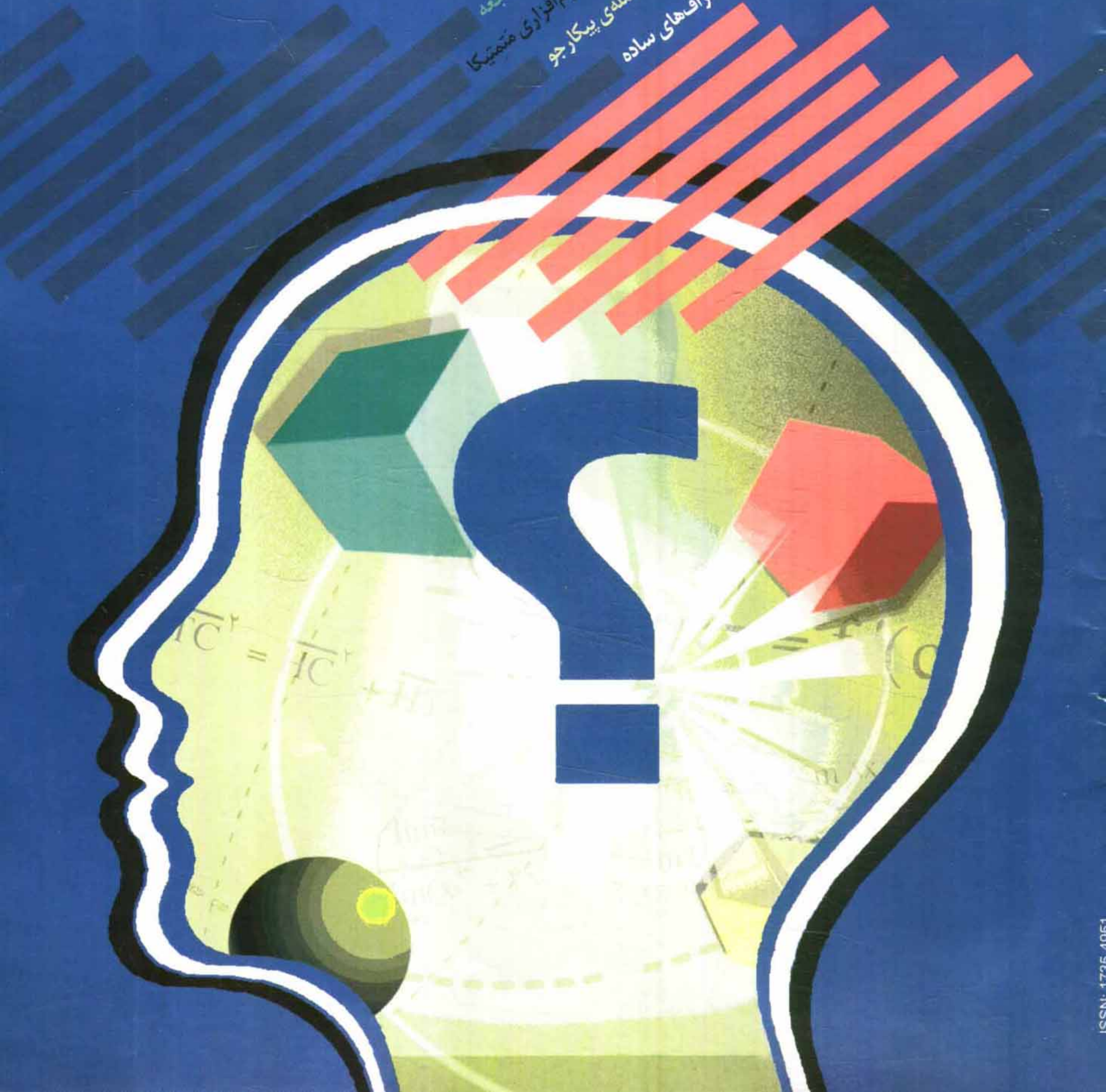
وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی
دفتر انتشارات کمک‌آموزشی

نظریه‌ی هفت فاجعه

آشنایی با بسته نرم‌افزاری متمتیکا

چند مسئله‌ی پیکارجو

ماتریس مجاورت گراف‌های ساده



ISSN: 1735-4951

فراخوان

فرا رسیدن بیستمین سالگرد
انتشار مجله‌ی ریاضی رشد برهان متوسطه



به یاری خداوند متعال؛ با انتشار شماره ی ۷۰ مجله ی ریاضی رشد برهان متوسطه در تابستان ۱۳۹۰ هـ.ش، بیستمین سالگرد تولد این مجله را پشت سر می گذاریم. در این مدت، همیشه از همکاری و همراهی شما دوستان بهره‌مند بوده‌ایم و تلاش داشته‌ایم تا به نوعی قدردان همراهی‌تان باشیم.
باپیشنهاد هیئت تحریریه‌ی مجله و تأیید مسئولین دفترانتشارات کمک‌آموزشی بر آن شدیم که به‌منظور یادآوری تلاش‌ها و زحمات همه‌ی دوستان، در گذر این زمان "ویژه‌نامه‌ای" را منتشرکنیم و در آن، به ثبت خاطرات و نوشته‌های شما پردازیم. تک‌نگاشت‌های ارسالی شما که به نحوی آشنایی، میزان مطالعه، استفاده در محیط درس و کلاس و هر آن‌چه که می‌تواند جوانان امروز را به تجربه‌های ناب شما پیوند دهد، به غنای این ویژه‌نامه می‌افزاید.

- مهلت ارسال مقالات؛ حداکثر تا ۸۹/۱۰/۳۰
- رایانامه: Borhanm@roshdmag.ir



بسم الله الرحمن الرحیم

وزارت آموزش‌وپرورش
سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی
دفتر انتشارات کمک آموزشی

رشد برهان ۶۸
مجله‌ی ریاضی
دوره‌ی آموزش متوسطه

فصلنامه ی آموزشی، تحلیلی و اطلاع رسانی
دوره‌ی بیستم/شماره‌ی ۲/زمستان ۱۳۸۹

سال همت مضاعف، کار مضاعف

● **وبگاه:** www.roshdmag.ir

● **رایانامه:** Borhanm@roshdmag.ir

● **پیام‌گیر نشریات رشد:** ۸۸۳۰۱۴۸۲ ـ ۰۲۱

نشانی دفتر مجلّه: تهران، صندوق پستی ۱۵۸۷۵/۶۵۸۵

● **تلفن دفتر مجله:** ۸۸۳۰۵۸۶۲ ـ ۰۲۱

● **تلفن امور مشترکین:** ۷۷۳۳۶۶۵۶ ـ ۷۷۳۳۶۶۵۵ ـ ۰۲۱

● **شمارگان:** ۱۲۰۰۰ نسخه

● **چاپ:** شرکت افست (سهامی عام)

رشد برهان متوسطه، تمامی دبیران محترم و دانش‌آموزان عزیز را در زمینه‌های زیر به همکاری دعوت می‌کند:

● نگارش مقاله‌های کمک درسی (شرح و بسط رفع مشکلات مبحث درسی کتاب‌های ریاضی دوره‌ی متوسطه و پیش‌دانشگاهی)

● طرح مسائل کلیدی به همراه حل آن‌ها (برای دانش‌آموزان)

● طرح مسائل مسابقه‌ای به همراه حل آن‌ها (برای دانش‌آموزان)

● طرح معماهای ریاضی

● نگارش یا ترجمه‌ی مقاله‌های عمومی ریاضی (مانند تاریخ ریاضیات، زندگینامه‌ی علمی و اجتماعی ریاضی دانان، نکته‌های تازه و لطیف ریاضیات، آموزش ریاضیات، آموزش رایانه و...)

حرف اول

واژه‌ی زمستان چه تصاویر، معانی و برداشت‌هایی را به ذهن شما می‌آورد؟
سرما؟ برف؟ درخت؟ صف‌های طولانی؟ تظاهرات؟ کاپشن؟ امام؟ شهید؟ انقلاب؟ امتحان؟ بخاری؟ پیروزی؟ همدلی؟ وحدت؟ ایمان؟ و...

برای بسیاری از ماها، در بین این کلمات شاید کلماتی چون امام، انقلاب، پیروزی و شهید بیشتر با واژه‌ی زمستان هم‌خوانی داشته باشند و حتی به نوعی درهم تنیده شده باشند. می‌دانید چرا؟

دلیل آن را باید شما در کتاب‌ها خوانده باشید، و یا ممکن است پدر و مادرتان برایتان تعریف کرده باشند؛ بلی؛ انقلاب اسلامی در زمستان ۱۳۵۷ به پیروزی رسید!

ای کاش در زمستان آن سال حضور داشتید تا گرمای وجود امام را که پس از ۱۵ سال دوری از وطن به ایران بازگشت لمس می‌کردید. واقعاً جای همه‌ی شما خالی بود!

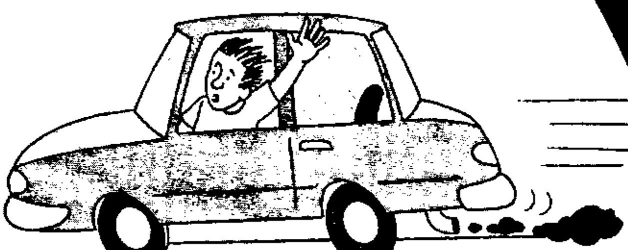
ای کاش بودید و آن همه وحدت و همدلی را می‌دیدید، و ای کاش شهیدانِ به خون خفته‌ی انقلاب نیز حضور داشتند تا پیروزی انقلاب را به امام تبریک می‌گفتند.

وقتی امام آمد، دیگر سرما معنا نداشت، چه، گرمای وجود و حضور ایشان چنان انرژی و ایمانِ مضاعفی به همه‌ی اقشار جامعه بخشیده بود که به فاصله‌ی ده روز [دهه فجر] یزید و یزیدیان شکست کامل خوردند و انقلاب اسلامی به پیروزی رسید.

آن روزها من نیز مانند دیگر دانش‌آموزان دبیرستانی، درس و کلاس را به میدان نبرد میان حق و باطل و صفِ تظاهرات علیه طاغوت برده بودیم و خیابان‌ها و میدان‌ها، حیاط مدرسه‌مان شده بود. ای کاش می‌توانستم احساس آن سرِکلاس درس حاضر شدن‌ها را که سرشار از احساس غرور و سربلندی و امید به آینده بود برای شما عزیزانم بازگو کنم.

عزیزانِ من! سنگر آن روزِ ما دانش‌آموزان خیابان‌ها و کوچه‌های شهرمان بود و اسلحه‌ی ما مشت‌های گره کرده‌مان و ایمان به راه امام؛ اما امروز! سنگر شما حضور با نشاط و پویا در مدارس برای تهذیب نفس، تولید علم و پیشرفت علمی کشور و اسلحه‌ی شما قلم، کاغذ، کتاب و توجه کامل به رهنمودهای رهبر فرهیخته و عزیزمان است. ان‌شاءا... راه شهیدان همواره ادامه یابد و پاسدار خون آن‌ها باشیم.

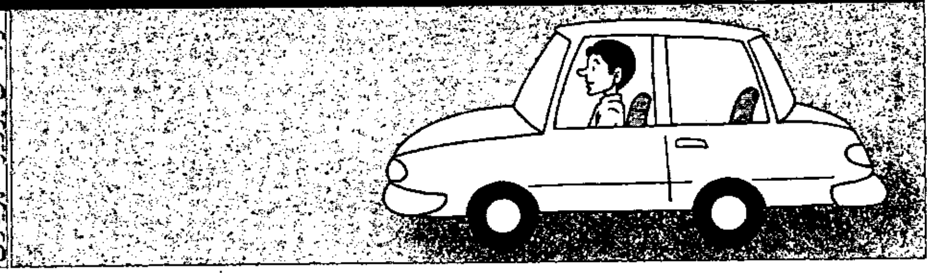
سردبیر



نظریه‌ی فاجعه

قسمت اول

ترجمه‌ی پرویز شهریاری



تولد ستاره‌ی جدید، باز شدن گل یا به وجود آمدن شهر، پیشامدهایی عادی هستند، ولی در واقع، هر یک از آن‌ها تعادلی را که قبلا برقرار بوده است، به صورتی ناگهانی به هم می‌زنند. تمامی عالم افلاکی در حرکت تکاملی خود، دم به دم با جهش‌هایی از یک حالت تعادلی به حالت تعادلی دیگر منتقل می‌شود. کارهای پروفسور رنه‌توم، ریاضی‌دان فرانسوی، می‌تواند در درک این جهش‌ها به ما کمک کند.

«نظریه‌ی ویژگی‌های نگاشت‌های قابل دیفرانسیل گیری» را، اگر در اصطلاح‌ها تجربه‌ی کافی نداشته باشیم، می‌توان به ترتیب دیگری هم بیان کرد، مثلا برای امان دادن به گوش، که ناچار به شنیدن اصطلاحی به این دور و درازی نباشد، می‌توان از اصطلاح کوتاه «نظریه‌ی فاجعه‌ها» استفاده کرد.

بیان آسان‌تر می‌شود، ولی معنا و مفهوم آن چیست؟ چه بسا که این کوتاه کردن اصطلاح، خواننده را به گمراهی و ذهن او را به طرف زلزله یا آتش‌سوزی، سقوط هواپیما یا ورشکستگی مالی بکشاند. ولی در این مقاله، به هیچ موضوعی از این قبیل، برخورد نخواهید کرد. در این‌جا درباره‌ی گلوله‌ای که در یک شیار خمیده می‌غلتد و قرصی که به کمک نیروهای وارد بر آن در حال تعادل است و با به هم خوردن و ناپایداری تعادل، حالت خود را از دست می‌دهد و ... صحبت می‌شود.

در این نظریه، به هر وضعی که موجب دگرگونی تندی در حالت یک دستگاه بشود و هر به هم خوردگی ناگهانی که در تداوم جریان یک روند به وجود آید، فاجعه گفته می‌شود.

پرفسور رنه‌توم به خصوص به مفهوم کلی و انتزاعی خود، روی نظریه‌ی فاجعه‌ها کار کرده است. نظریه‌ی فاجعه‌ها، شاخه‌ای از آنالیز ریاضی است.

این‌جا با رسم سروکار داریم، نه با ریاضیات

در این مقاله، کاری با دستگاه‌های پیچیده‌ی ریاضی نداریم، و اگر در بعضی موارد به مفهوم‌هایی از ریاضیات متوسل می‌شویم، می‌توان آن را نوعی سرگرمی در ترسیم به شمار آورد.

یکی از این مفهوم‌ها، مفهوم تابع است. برای خواننده‌ای که در کارخود از دستگاه‌های ریاضی استفاده نمی‌کند، با شنیدن این اصطلاح بلافاصله متوجه یک شکل می‌شود: دو محور مختصات و یک منحنی، که نماینده‌ی نمایش تغییرات یک تابع است.

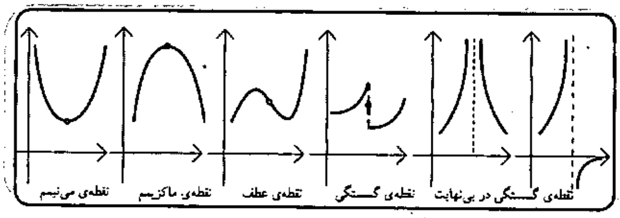
این تصور به طور کلی درست است، با وجود این، باید آن را دقیق‌تر کرد. وقتی که ریاضی‌دانان واژه‌ی «تابع» را به کار می‌برند، مقصودشان هرگونه تناظری است که بین کمیت‌های متغیر برقرار باشد، وقتی که یکی از آن‌ها (که آن را متغیر مستقل، یا آوند یا آرگومان تابع می‌نامند و به x نمایش می‌دهند) متناظر با دیگری (که آن را متغیر تابع یا مقدار تابع می‌نامندو به y نشان می‌دهند) باشد.

مقداری از آوند را انتخاب و جای آن را روی محور افقی دستگاه مختصات معین می‌کنیم. سپس مقداری از تابع را که متناظر با این مقدار آوند است، روی محور قائم مشخص می‌کنیم. روی صفحه‌ی مختصات، نقطه‌ای را با این مختصات نشانه می‌گذاریم. اگر پشت سر

هم، مقادیر تازه و تازه‌تری از آوند را در نظر بگیریم، روی صفحه‌ی مختصات، یک منحنی به دست می‌آوریم که معرف تابع به صورت عینی آن است، یعنی قانون تناظر بین متغیرهای مستقل و تابع را به صورتی قابل رؤیت نشان می‌دهد.

منحنی یک تابع، ممکن است شامل نقطه‌های خاصی باشد. ممکن است منحنی در ابتدا رو به پایین و سپس رو به بالا حرکت کند. دو قسمت انتهای سقوط و ابتدای رشد، در نقطه‌ی مینیمم به هم می‌رسند. برعکس هم می‌تواند باشد؛ منحنی ابتدا اوج بگیرد و سپس رو به حضیض رود. نقطه‌ی برخورد آخرین قسمت رو به اوج با نخستین قسمت رو به حضیض را ماکزیمم گویند. ممکن است خمیدگی منحنی ابتدا به طرفی و سپس به طرف دیگر باشد. جایی را که منحنی در آن جهت خمیدگی خود را تغییر می‌دهد، نقطه‌ی عطف گویند.

بالاخره، منحنی یک تابع ممکن است دچار گسستگی‌هایی بشود. برای مثال، منحنی در ارتفاعی پاره می‌شود و به صورت



نقطه‌های خاص در توابع یک متغیره

جهشی، حرکت خود را از نقطه‌ی پایین‌تر یا بالاتری ادامه می‌دهد. یا همان‌طور که آوند به مقداری نزدیک می‌شود، منحنی تابع به سمت بی‌نهایت (در جهت مثبت یا منفی) می‌رود و به ازای این مقدار آوند، پاره می‌شود و ما شاهد آن هستیم که چگونه منحنی از بی‌نهایت (گاه بی‌نهایت مثبت و گاه بی‌نهایت منفی) بازمی‌گردد.

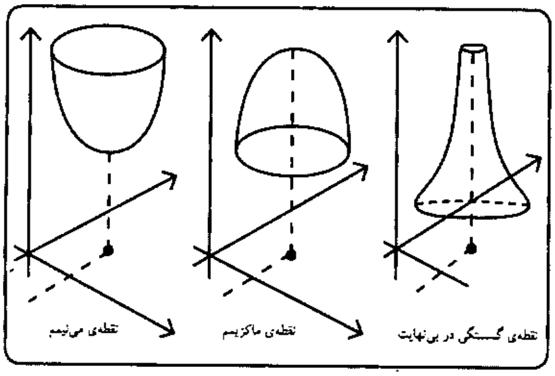
بازهم اندکی رسم

برای نمایش هر یک از تابع‌هایی که تا این‌جا بررسی کردیم، هر بار، تنها دو محور مختصات را در نظر داشتیم: یکی برای مقادیر آوند، و دیگری برای مقادیر تابع.

ولی در ریاضیات به تابع‌هایی هم می‌پردازند که شامل چند و مثلاً دو آوند هستند. در این مورد، برای نشان دادن مقادیر آوندها به دو محور نیاز داریم. در این حالت، هر جفت مقدار آوندها، متناظر است با مقدار معینی از تابع.

برای روشن شدن وضع، محور سومی به این دو محور اضافه و مقادیر تابع را روی آن جدا می‌کنیم. سه مختص (دو آوند و یک مقدار تابع)، نقطه‌ای از فضا را مشخص می‌کنند. با انتخاب انواع ممکن ترکیب‌های دو آوند، و پیدا کردن نقطه‌ی متناظر آن‌ها در فضا، سطحی به دست می‌آید که همان شکل عینی تابع دو متغیری است.

روی این سطح‌ها هم ممکن است به نقطه‌های خاص برخورد کنیم. نقطه‌ی مینیمم، نقطه‌ی ماکزیمم و گسستگی در بی‌نهایت.



نقطه‌های خاص در توابع دو متغیره

تصویرهای بالا معنای این اصطلاح‌ها را روشن می‌کند.

احتیاط کنید! یخ‌بندان است

می‌توان با انتخاب سطح‌های عجیب و غریبی از تابع‌های دو متغیری، مجموعه‌ی بزرگی از دیدنی‌های نادر را تشکیل داد.

برای مثال، این یکی از نمونه‌های بسیار جالب است: آیا موجی را دیده‌اید که به شیب ملایم ساحل برخورد می‌کند؟ نام دقیق این «موج‌ها» «مجموعه‌ی تابع‌های بسل» است. یا این کنده‌ی کج و کوله‌ی درخت را در نظر بگیرید که سطح مدول تابع گامای اولر است.

اگر در هر شکلی، تصویری هندسی از یک تابع چند متغیری می‌بینید و اگر با دیدن هر تابع، متوجه پدیده‌ای فیزیکی می‌شوید که به وسیله‌ی این تابع شرح داده می‌شود، در این صورت طبیعی است که هر ویژگی شکل، انعکاسی از ویژگی جریان پدیده‌ای باشد و برعکس: هر جریان نامتعارف و غیرعادی یک پدیده در تصویری عجیب و غریب منعکس شود که نماینده‌ی یک تابع است. در حالت خاصی که پدیده‌ی مفروض با یک متغیر شرح داده می‌شود، به نقطه‌های خاص منحنی نمایش تغییرات تابع برمی‌خوریم.

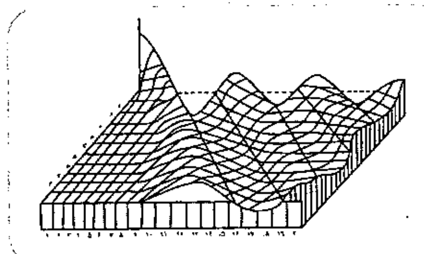
برای مثال، ترمز کردن اتومبیل را در نظر می‌گیریم. منحنی حرکت آن را رسم می‌کنیم. زمان را روی محور افقی و فاصله‌ی متناظری را که اتومبیل طی کرده است، روی محور قائم نشان می‌دهیم. به عبارت دیگر، مسافت را تابعی از زمان در نظر می‌گیریم. روشن است که منحنی به سمت یک خط افقی می‌رود.

اتومبیل بعد از پیمودن مسافت معینی می‌ایستد.

مسافتی که بعد از ترمز کردن طی شده است، تا حد زیادی به ناهمواری جاده بستگی دارد. هر چه این ناهمواری بیشتر باشد، این مسافت کمتر است. همان‌طور که دیده می‌شود، ناهمواری جاده برای

روند مورد نظر ما، یک متغیر واقعی است. در نتیجه، آن را هم به عنوان آوندی از تابع خود (فاصله‌ای که اتومبیل طی کند) در نظر می‌گیریم.

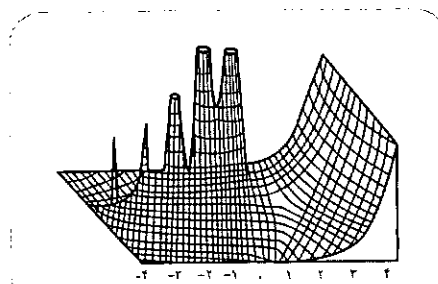
بنابراین، تغییرات تابع را باید در یک دستگاه مختصات سه بعدی نمایش دهیم. روی یکی از محورها، زمان را قرار می‌دهیم، روی دیگری، ناهمواری جاده و روی سومی، فاصله‌ای را که در زمان معین و با ناهمواری معین جاده پیموده می‌شود (سرعت اولیه‌ی اتومبیل را در همه‌ی حالت‌ها، یکسان گرفته‌ایم).



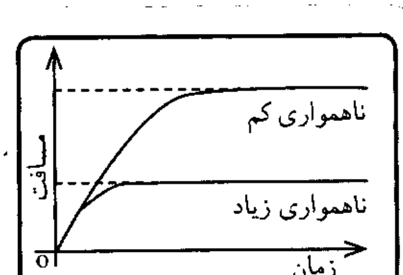
مجموعه‌ی تابع‌های بسل

به سطحی که نمایش این تابع دو متغیری است، با دقت نگاه کنید. می‌بینید که وقتی ناهمواری را صفر بگیریم، اتومبیل هیچ تمایلی به ایستادن، یا حتی کند شدن ندارد. مثل این که حدی برای حرکت خیالی آن وجود ندارد و مقطع سطح ما بالا و بالاتر می‌رود (اتومبیل ما با سرعتی ثابت پیوسته به پیش می‌رود).

بوی فاجعه به روشنی در این جا به مشام می‌رسد! رانندگی با اتومبیلی که روی چهار چرخ خود می‌لغزد، ممکن نیست!

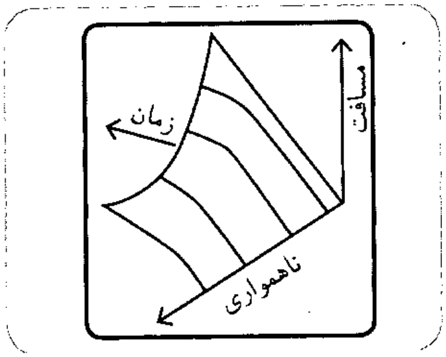


سطح مدول تابع گامای اولر



منحنی حرکت اتومبیلی که ترمز کرده است، به ناهمواری جاده بستگی دارد.

اگر ناهمواری جاده در تمامی طول مسیر ناهمسان باشد، سطح ما پیچیده‌تر به نظر می‌آید. تغییر اساسی وقتی پیش می‌آید که مثلاً



در اینجا مسافتی را که اتومبیل در حال ترمز پیموده است، به صورت تابعی از دو متغیر زمان و ناهمواری جاده نشان داده‌ایم.

اتومبیل به قسمتی از جاده برخورد کند که یخ‌بندان باشد، زیرا بلافاصله حالت ترمز به حالت لغزیدن تبدیل می‌شود. در سطحی که مسافت پیموده شده به وسیله‌ی اتومبیل، سرعت و شتاب آن را نشان می‌دهد، شکستگی و انقطاع پیش می‌آید، یعنی همان ویژگی‌هایی که پیش‌تر درباره‌ی آن‌ها صحبت کردیم.

پدیده‌ای در برابر ماست که می‌تواند به فاجعه به معنای طبیعی و عادی آن بینجامد و در عین حال، مثالی از فاجعه به معنای ریاضی آن است. واقعیت این است که نظریه‌ی فاجعه‌ها (اگر بخواهیم آن را به صورت‌های عینی توضیح دهیم) تعمیمی از نظریه‌ی ویژگی‌های تابع، به خصوص ویژگی‌های پیچیده‌ای مثل شکستگی و ناپیوستگی منحنی‌ها و سطح‌هایی است که معرف رفتار تابع هستند.

آزمایشی با نیروسنج

در نقطه‌های دور افتاده‌ی آنالیز ریاضی فرونمی‌رویم و خود را به شاخه‌ی عینی‌تری از ریاضیات، یعنی نظریه‌ی کنترل، محدود می‌کنیم.

برای شروع به آزمایشی می‌پردازیم. موضوع آزمایش، یک نیروسنج معمولی است. قلاب نیروسنج را می‌گیرید و آن را با نیرویی می‌کشید، عقربه‌ی آن روی نشانه‌ای که متناظر با تغییر طول فنر است، می‌ایستد.

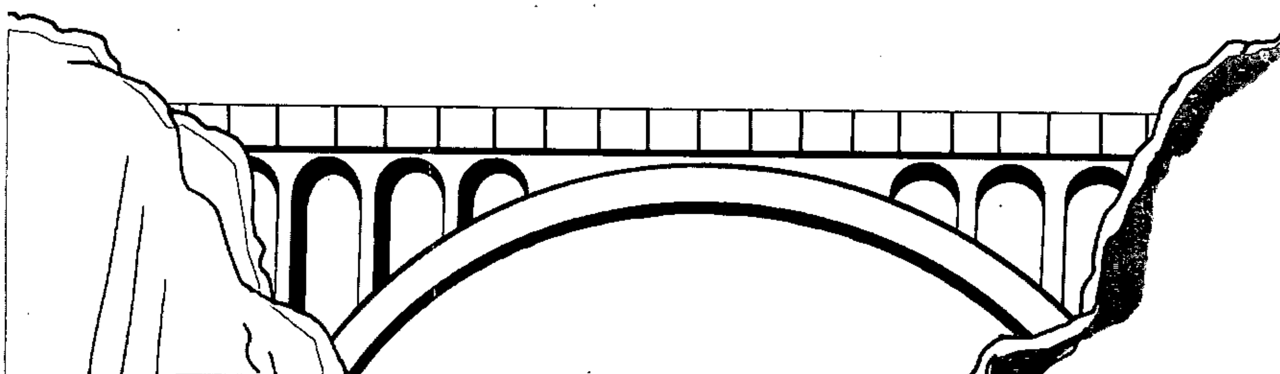
مقدار نیرویی که بر قلاب وارد می‌کنید و آن را می‌کشید، معرف تأثیری بیرونی بر یک چیز و طول فنر، معرف حالت درونی آن چیز است.

در نظریه‌ی کنترل، معمولاً از کمیت‌های متغیر درونی که حالت یک چیز را نشان می‌دهند و متغیرهای بیرونی یا کنترل کننده، یعنی کمیت‌هایی که حالت یک چیز به آن‌ها بستگی دارد، صحبت می‌کنند.

حالا نیروی وارد بر قلاب را کمی بیشتر کنید، عقربه‌ی نیروسنج کمی پایین‌تر می‌آید.

آیا درستی این حکم، طبیعی به نظر نمی‌رسد که: تغییر کوچک کمیت‌های متغیر بیرونی، موجب تغییر کوچکی در کمیت‌های درونی می‌شود؟ ولی واقعیت این است که این حکم همیشه درست نیست!

ادامه دارد



نکاتی درباره‌ی معادلات درجه‌ی دوم به بالا

احمد قندهاری

نکته‌ی ۱

در هر معادله‌ی درجه‌ی سوم که به صورت $x^۳ + px + q = ۰$ باشد، داریم.

$\Delta = ۴p^۳ + ۲۷q^۲$

الف) $p > ۰$ یا $\Delta > ۰$

درنتیجه معادله یک ریشه‌ی حقیقی مخالف علامت q دارد.

ب) $\Delta < ۰$

درنتیجه معادله یک ریشه‌ی حقیقی مخالف علامت q و دو ریشه‌ی حقیقی موافق علامت q دارد.

ج) $\Delta = ۰$

درنتیجه معادله یک ریشه‌ی ساده‌ی مخالف علامت q و یک ریشه‌ی مضاعف موافق علامت q دارد.

ریشه‌ی مضاعف $= \sqrt[۳]{\frac{q}{۲}}$

ریشه‌ی ساده $= -۲\sqrt[۳]{\frac{q}{۲}}$

مسئله‌ی ۱: در معادله‌ی $x^۳ - ۳x + (m - ۲) = ۰$، حدود m را چنان بیابید که معادله سه ریشه‌ی حقیقی داشته باشد.

حلّ:

$x^۳ - ۳x + (m - ۲) = ۰$

$p = -۳ \quad q = m - ۲$

باید $\Delta < ۰ \Rightarrow ۴p^۳ + ۲۷q^۲ < ۰$

$\Rightarrow ۴(-۲۷) + ۲۷(m - ۲)^۲ < ۰$

$\Rightarrow -۴ + (m - ۲)^۲ < ۰$

$\Rightarrow (m - ۲)^۲ < ۴ \Rightarrow -۲ < m - ۲ < ۲$

$\Rightarrow ۰ < m < ۴$.

مسئله‌ی ۲: به ازای چه مقادیر m، معادله‌ی زیر یک ریشه‌ی حقیقی مثبت و دو ریشه‌ی حقیقی منفی دارد.

$x^۳ - ۳x + (m - ۵) = ۰$

حل: باید

$q < ۰, \Delta < ۰$

$p = -۳, q = m - ۵$

$$\begin{cases}\Delta < ۰ \\ q < ۰\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}۴p^۳ + ۲۷q^۲ < ۰ \\ q < ۰\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}۴(-۲۷) + ۲۷(m - ۵)^۲ < ۰ \\ m - ۵ < ۰\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}(m-5)^2 < 4 \Rightarrow \\ m < 5\end{cases} \begin{cases}-2 < m-5 < 2 \Rightarrow \\ \Rightarrow m < 5\end{cases}$$

$$\begin{cases}3 < m < 7 \\ m < 5\end{cases} \Rightarrow 3 < m < 5$$

روابط بین ضرایب و ریشه‌ها در معادله‌ی $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$

اگر γ, β, α ریشه‌های این معادله باشند، داریم:

$$\begin{cases}\alpha + \beta + \gamma = -\frac{b}{a} \\ \alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma = \frac{c}{a} \\ \alpha.\beta.\gamma = -\frac{d}{a} \\ \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} = -\frac{c}{d}\end{cases}$$

مسئله‌ی ۳: اگر ریشه‌های معادله‌ی $x^3 - 9x^2 + mx - 15 = 0$ تصاعد عددی بسازند، مقدار m را بیابید.

حل:

γ, β, α تصاعد عددی بسازند $\Rightarrow 2\beta = \alpha + \gamma$

داریم: $\alpha + \beta + \gamma = -\frac{b}{a}$

$$2\beta + \beta = 9 \Rightarrow 3\beta = 9 \Rightarrow \beta = 3$$

$$\beta = 3 \Rightarrow 27 - 81 + 3m - 15 = 0$$

$$3m = 69 \Rightarrow m = 23$$

مسئله‌ی ۴: اگر ریشه‌های معادله‌ی زیر تصاعد هندسی بسازند، مقدار m را بیابید.

$$x^3 - 7x^2 + (m-1)x - 8 = 0$$

حل: γ, β, α تصاعد هندسی بسازند؛ $\beta^2 = \alpha.\gamma$

داریم: $\alpha.\beta.\gamma = -\frac{d}{a} \Rightarrow \beta^2.\beta = 8 \Rightarrow \beta^3 = 8 \Rightarrow \beta = 2$

$$\beta = 2 \Rightarrow 8 - 28 + 2(m-1) - 8 = 0$$

$$2(m-1) = 28 \Rightarrow m - 1 = 14 \Rightarrow m = 15$$

مسئله‌ی ۵: اگر γ, β, α ریشه‌های معادله‌ی زیر باشند و داشته باشیم $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = -2$، آن‌گاه مقدار m را بیابید.

$$x^3 + (m-1)x^2 + 1 = 0$$

حل: داریم: $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} = -\frac{c}{d}$ ، $c = 0$

$$-\gamma + \frac{1}{\gamma} = 0 \Rightarrow \frac{-\gamma^2 + 1}{\gamma} = 0 \Rightarrow \gamma^2 = 1 \Rightarrow \gamma = \pm 1$$

$$\gamma = 1 \longrightarrow 1 + m - 1 + 1 = 0 \Rightarrow m = -1$$

$$\gamma = -1 \longrightarrow -1 + m - 1 + 1 = 0 \Rightarrow m = 1$$

توجه $m = 1$ غیرقابل قبول است، زیرا اگر $m = 1$ آن‌گاه معادله به صورت $x^3 + 1 = 0$ است. در این صورت $x = -1$ یعنی معادله فقط یک ریشه دارد.

مسئله‌ی ۶: اگر γ, β, α ریشه‌های معادله‌ی زیر باشند و داشته باشیم $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 35$، آن‌گاه مقدار m را بیابید.

$$x^3 - 9x^2 + (m-1)x - 15 = 0$$

حل: $\alpha + \beta + \gamma = -\frac{b}{a} = 9$ ؛ دو طرف را به توان ۲ می‌رسانیم، داریم:

$$\underbrace{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}_{35} + 2(\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma) = 81$$

$$35 + 2(\frac{c}{a}) = 81 \Rightarrow 35 + 2(m-1) = 81$$

$$2(m-1) = 46 \Rightarrow m - 1 = 23 \Rightarrow m = 24$$

مسئله‌ی ۷: اگر γ, β, α ریشه‌های معادله‌ی زیر باشند و داشته باشیم $\frac{1}{\alpha^3} + \frac{1}{\beta^3} + \frac{1}{\gamma^3} = -\frac{3}{2}$، آن‌گاه مقدار m را بیابید.

$$x^3 - 5x^2 + (m-1) = 0$$

حل: $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} = -\frac{c}{a} = 0$ ؛ داریم:

بنا به اتحاد اولر: $\frac{1}{\alpha^3} + \frac{1}{\beta^3} + \frac{1}{\gamma^3} = 3(\frac{1}{\alpha})(\frac{1}{\beta})(\frac{1}{\gamma})$

$$-\frac{3}{2} = 3(\frac{1}{\alpha.\beta.\gamma}) \Rightarrow -\frac{1}{2} = (\frac{1}{-\frac{d}{a}}) \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{m-1}$$

$$\Rightarrow m - 1 = 2 \Rightarrow m = 3$$

مسئله‌ی ۸: اگر γ, β, α ریشه‌های معادله‌ی زیر باشند و $k = \frac{\alpha+\beta}{\gamma} + \frac{\beta+\gamma}{\alpha} + \frac{\gamma+\alpha}{\beta}$، آن‌گاه مقدار k را بیابید.

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

حل:

$$k = \frac{\alpha+\beta}{\gamma} + \frac{\beta+\gamma}{\alpha} + \frac{\gamma+\alpha}{\beta}$$

$$k + 3 = \frac{\alpha+\beta}{\gamma} + 1 + \frac{\beta+\gamma}{\alpha} + 1 + \frac{\gamma+\alpha}{\beta} + 1$$

$$k + 3 = \frac{\alpha+\beta+\gamma}{\gamma} + \frac{\beta+\gamma+\alpha}{\alpha} + \frac{\gamma+\alpha+\beta}{\beta}$$

$$k + ۲ = (\alpha + \beta + \gamma)(\frac{۱}{\alpha} + \frac{۱}{\beta} + \frac{۱}{\gamma})$$

$$k + ۲ = (-\frac{b}{a})(-\frac{c}{d}) \Rightarrow k + ۲ = \frac{bc}{ad} \Rightarrow k = \frac{bc}{ad} - ۲$$

مسئله‌ی ۹: اگر α, β, γ ریشه‌های معادله‌ی $x^۳ + px + q = ۰$ باشند، حاصل $k = \frac{\alpha^۲}{\beta\gamma} + \frac{\beta^۲}{\alpha\gamma} + \frac{\gamma^۲}{\alpha\beta}$ را بیابید.

حل: $\alpha + \beta + \gamma = -\frac{b}{a} = ۰$

رابطه‌ی (۱) بنا به اتحاد اولر: $\alpha^۳ + \beta^۳ + \gamma^۳ = ۳\alpha\beta\gamma$

بنابه رابطه‌ی (۱) $k = \frac{\alpha^۲}{\beta\gamma} + \frac{\beta^۲}{\alpha\gamma} + \frac{\gamma^۲}{\alpha\beta} = \frac{\alpha^۳ + \beta^۳ + \gamma^۳}{\alpha\beta\gamma}$

$$k = \frac{۳\alpha\beta\gamma}{\alpha\beta\gamma} \Rightarrow k = ۳$$

نکته‌ی ۲

هر معادله که به صورت $ax^{۳n} + bx^n + c = ۰$، $n \in N$ باشد، با فرض $x^n = y$، تعداد و علامت ریشه‌های معادله‌ی اصلی قابل بررسی است.

مسئله‌ی ۱۰: معادله‌ی $x^۶ - ۳x^۲ + ۱ = ۰$ چند ریشه با چه علامت‌هایی دارد؟

حل: $x^۲ = y$ و $x^۶ - ۳x^۲ + ۱ = ۰ \Rightarrow y^۳ - ۳y + ۱ = ۰$

$$p = -۳\ ,\ \ q = ۱$$

$$\Delta = ۴p^۳ + ۲۷q^۲ = ۴(-۲۷) + ۲۷(۱) = -۸۱ < ۰$$

پس معادله‌ی y سه ریشه دارد. چون $q = ۱$ پس یک ریشه منفی و دو ریشه مثبت‌اند، یعنی ریشه‌های این معادله چنین است:

$$y_۱ < ۰ < y_۲ < y_۳$$

داریم : $x^۲ = y \begin{cases} x^۲ = y_۱ \quad \text{غ‌ق‌ق} \\ x^۲ = y_۲ \Rightarrow x = \pm\sqrt{y_۲} \\ x^۲ = y_۳ \Rightarrow x = \pm\sqrt{y_۳} \end{cases}$

پس معادله‌ی اصلی چهار ریشه‌ی اصلی متمایز دارد.

نکته‌ی ۳

هر معادله که به صورت $ax^{۲n} + bx^۲ + c = ۰, n \in N$ باشد، با فرض $x^n = y$ به معادله‌ی درجه‌ی دوم تبدیل می‌شود که قابل حل است.

مسئله‌ی ۱۱: معادله‌ی $x^{۱۶} - ۹۷x^۸ + ۱۲۹۶ = ۰$ را حل کنید.

حل: $x^۸ = y$ فرض می‌شود.

$$x^{۱۶} - ۹۷x^۸ + ۱۲۹۶ = ۰\ \ ,\ \ x^۸ = y$$

$$\Rightarrow y^۲ - ۹۷y + ۱۲۹۶ = ۰$$

$$\Rightarrow y = \frac{-b \pm \sqrt{b^۲ - ۴ac}}{۲a} = \frac{۹۷ \pm \sqrt{۹۴۰۹ - ۵۱۸۴}}{۲}$$

$$y = \frac{۹۷ \pm \sqrt{۴۲۲۵}}{۲} = \frac{۹۷ \pm ۶۵}{۲} \Rightarrow \begin{cases} y_۱ = \frac{۹۷ + ۶۵}{۲} = ۸۱ \\ y_۲ = \frac{۹۷ - ۶۵}{۲} = ۱۶ \end{cases}$$

$$x^۸ = y \Rightarrow \begin{cases} x^۸ = ۸۱ \Rightarrow x = \pm\sqrt[۸]{۸۱} = \pm\sqrt[۸]{۳^۴} = \pm\sqrt{۳} \\ x^۸ = ۱۶ \Rightarrow x = \pm\sqrt[۸]{۱۶} = \pm\sqrt[۸]{۲^۴} = \pm\sqrt{۲} \end{cases}$$

نکته‌ی ۴

اگر در معادله‌ای مجموع ضرایب صفر باشد، آن معادله بر $(x - ۱)$ بخش‌پذیر است.

در حالت کلّی اگر $x = a$ یک ریشه‌ی معادله‌ای باشد، آن معادله بر $(x - a)$ بخش‌پذیر است.

مسئله‌ی ۱۲: معادله‌ی $x^۳ - ۱۰x^۲ + mx - ۱۴ = ۰$ مفروض است. اگر $x = ۲$ یکی از ریشه‌های معادله باشد، معادله را حل کنید.

حل: چون $x = ۲$ یکی از ریشه‌های معادله است، پس $x = ۲$ در معادله صدق می‌کند.

توجه:

$$x = ۲ \longrightarrow ۸ - ۴۰ + ۲m - ۱۴ = ۰$$

$$\Rightarrow ۲m = ۴۶ \Rightarrow m = ۲۳$$

$$m = ۲۳\ ;\ x^۳ - ۱۰x^۲ + ۲۳x - ۱۴ = ۰$$

چون $x = ۲$ یکی از ریشه‌های این معادله است، معادله را بر $(x - ۲)$ تقسیم می‌کنیم.

$$x^۳ - ۱۰x^۲ + ۲۳x - ۱۴ \ \big|\ \underline{x - ۲}$$
$$۰ \qquad\qquad x^۲ - ۸x + ۷$$

$$x^۳ - ۱۰x^۲ + ۲۳x - ۱۴ = (x - ۲)(x^۲ - ۸x + ۷) = ۰$$

$$x = ۲,\ x^۲ - ۸x + ۷ = ۰ \Rightarrow x = ۱, x = ۷$$

نکته‌ی ۵

اگر در معادله‌ی زیر مجموع ضرایب توان‌های فرد x مساوی مجموع ضرایب توان‌های زوج x به اضافه‌ی عدد ثابت باشد، آن‌گاه یک ریشه‌ی معادله (۱-) و معادله بر (x + ۱) بخش‌پذیر است.

$ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + ... + k = 0, n \in N$

مسئله‌ی ۱۳: معادله‌ی $x^3 - 8x^2 + 11x + 20 = 0$ را حل کنید.

حل:

عدد ثابت + مجموع ضرایب توان‌های زوج x = مجموع ضرایب توان‌های فرد x

$1 + 11 = -8 + 12 \Rightarrow 12 = 12$

پس عبارت معادله بر (x + ۱) بخش‌پذیر است.

$$x^3 - 8x^2 + 11x + 20 \;\big|\; x + 1 \quad \text{quotient: } x^2 - 9x + 20, \quad \text{remainder: } 0$$

$$x^3 - 8x^2 + 11x + 20 = 0 \Rightarrow (x + 1)(x^2 - 9x + 20) = 0$$

$$x + 1 = 0 \Rightarrow x_1 = -1$$

$$x^2 - 9x + 20 = 0 \Rightarrow x = \frac{9 \pm \sqrt{81 - 80}}{2} = \frac{9 \pm 1}{2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_2 = \frac{9 + 1}{2} = 5 \\ x_3 = \frac{9 - 1}{2} = 4 \end{cases}$$

نکته‌ی ۶

اگر ریشه‌های معادله‌ی زیر، عضو Z باشند، آن‌گاه عدد k بر هر یک از ریشه‌ها بخش‌پذیر است. به عبارت دیگر، ریشه‌های معادله عضو مجموعه‌ی مقسوم‌علیه‌های جبری (k) است.

$x^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + ... + k = 0 \quad (n \in N)$

مسئله‌ی ۱۴: اگر ریشه‌های معادله‌ی $x^3 - 3x^2 - 4x + 12 = 0$، عضو Z باشند، معادله را حل کنید.

حل: بنا به درس ریشه‌های معادله عضو مجموعه‌ی مقسوم‌علیه‌های جبری عدد (۱۲) است.

$\{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12\}$ = مجموعه‌ی مقسوم‌علیه‌های عدد ۱۲

نکات ۴ و ۵ درس در این معادله برقرار نیست، پس (۱±) ریشه‌های معادله نیست.

از ۲ = x شروع می‌کنیم.

$x = 2; \quad 8 - 12 - 8 + 12 = 0$

پس ۲ = x یکی از ریشه‌های معادله است. عبارت معادله را بر (x − ۲) تقسیم می‌کنیم.

$$x^3 - 3x^2 - 4x + 12 \;\big|\; x - 2 \quad \text{quotient: } x^2 - x - 6, \quad \text{remainder: } 0$$

$$x^3 - 3x^2 - 4x + 12 = (x - 2)(x^2 - x - 6) = 0$$

$$x_1 = 2, \quad x^2 - x - 6 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_2 = 3 \\ x_3 = -2 \end{cases}$$

نکته‌ی ۷

اگر ریشه‌های معادله‌ی زیر به صورت $\frac{p}{q}$، $q \neq 0$ باشد، (p و q عضو Zاند)، آن‌گاه p یکی از مقسوم‌علیه‌های (k) و q یکی از مقسوم‌علیه‌های عدد (a) است.

$ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + ... + k = 0$

مسئله‌ی ۱۵: اگر ریشه‌های معادله $8x^3 - 36x^2 + 46x - 15 = 0$ عضو مجموعه‌ی Q، یعنی به صورت $\frac{p}{q}$ باشند، معادله را حل کنید.

حل: عدد ۱۵ بر $\pm 1, \pm 3, \pm 5, \pm 15$ و عدد ۸ بر $\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8$ بخش‌پذیر است.

$$x = \frac{3}{2} \longrightarrow 27 - 81 + 69 - 15 = 0$$

پس یک ریشه‌ی معادله $x = \frac{3}{2}$ است. در نتیجه، عبارت معادله بر $(x - \frac{3}{2})$ بخش‌پذیر است.

$$A = 8x^3 - 36x^2 + 46x - 15 \;\big|\; x - \frac{3}{2} \quad \text{quotient: } 8x^2 - 24x + 10, \quad \text{remainder: } 0$$

$$A = (x - \frac{3}{2})(8x^2 - 24x + 10) = 0$$

$$x - \frac{3}{2} = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{3}{2}$$

$$8x^2 - 24x + 10 = 0 \Rightarrow x = \frac{12 \pm \sqrt{144 - 80}}{8} = \frac{12 \pm 8}{8}$$

$$\begin{cases} x_2 = \frac{12 + 8}{8} = \frac{20}{8} = \frac{5}{2} \\ x_3 = \frac{12 - 8}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

پس $\frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{1}{2}$ ریشه‌های این معادله‌اند.

نکته‌ی ۸

اگر مشتق معادله‌ای همواره مثبت یا همواره منفی باشد، آن معادله یک ریشه‌ی حقیقی دارد که علامت آن مخالف علامت عدد ثابت معادله است.

مسئله‌ی ۱۶: معادله‌ی $x^5+2x^3+\sqrt{3}x+\sqrt{5}=0$ چند ریشه با چه علامتی دارد؟

حل:
$$f(x)=x^5+2x^3+\sqrt{3}x+\sqrt{5}$$
$$f'(x)=5x^4+6x^2+\sqrt{3}>0\Rightarrow$$

معادله یک ریشه‌ی حقیقی دارد.

عدد ثابت معادله، $\sqrt{5}$ است، پس معادله یک ریشه‌ی حقیقی منفی دارد.

نکته‌ی ۹

به کمک فاکتورگیری از راه دسته‌بندی، بعضی از معادله‌ها قابل حل‌اند.

مسئله‌ی ۱۷: معادله‌ی $x^5-3x^4-16x+48=0$ را حل کنید.

حل:
$$x^5-3x^4-16x+48=0$$
$$x^4(x-3)-16(x-3)=0$$
$$(x-3)(x^4-16)=0$$
$$\Rightarrow\begin{cases}x-3=0\Rightarrow x=3\\ x^4-16=0\Rightarrow x^4=16\Rightarrow x=\pm 2\end{cases}$$

نکته‌ی ۱۰

به کمک اتحاد اولر، برخی از معادله‌ها قابل حل‌اند.

مسئله‌ی ۱۸: معادله‌ی زیر را حل کنید.
$$(x^2-2)^3+(2x^2-5)^3+(7-3x^2)^3=0$$

حل:
$$a=x^2-2,b=2x^2-5,c=7-3x^2$$
$$a+b+c=x^2-2+2x^2-5+7-3x^2=0$$
$$\Rightarrow a^3+b^3+c^3=3abc$$

پس با فرض $A=(x^2-2)^3+(2x^2-5)^3+(7-3x^2)$ داریم:

$$A=3(x^2-2)(2x^2-5)(7-3x^2)=0$$
$$\Rightarrow\begin{cases}x^2-2=0\Rightarrow x=\pm\sqrt{2}\\ 2x^2-5=0\Rightarrow x^2=\frac{5}{2}\Rightarrow x=\pm\sqrt{\frac{5}{2}}\\ 7-3x^2=0\Rightarrow x^2=\frac{7}{3}\Rightarrow x=\pm\sqrt{\frac{7}{3}}\end{cases}$$

نکته‌ی ۱۱

پرانتزهایی که توان زوج دارند، مثبت یا صفرند.

مسئله‌ی ۱۹: معادله‌ی زیر چند ریشه‌ی حقیقی دارد؟
$$(x^2-4x+3)^{10}+5(x^2-3x+2)^4+(x^2-1)^2=0$$

حل:
$$\begin{aligned}x^2-4x+3=0&\Rightarrow\\ x^2-3x+2=0&\Rightarrow\\ x^2-1=0&\Rightarrow\end{aligned}\begin{cases}x=1,x=3\\ x=1,x=2\\ x=1,x=-1\end{cases}\Rightarrow x=1$$

پس این معادله یک ریشه‌ی حقیقی دارد.

نکته‌ی ۱۲

اگر معادله‌ای دارای ریشه‌ی مضاعف $x=a$ باشد، آن‌گاه $x=a$ یکی از ریشه‌های ساده‌ی مشتق آن است.

مسئله‌ی ۲۰: به ازای چه مقادیر m، معادله‌ی زیر ریشه‌ی مضاعف دارد؟
$$x^7-7x+(m-2)=0$$

حل: مشتق معادله: $7x^6-7=0\Rightarrow x^6=1$

$$x=1,x=-1$$
$$x=1\longrightarrow 1-7+m-2=0$$
$$\Rightarrow m=8$$
$$x=-1\longrightarrow -1+7+m-2=0$$
$$\Rightarrow m=-4$$

نکته‌ی ۱۳

اگر ریشه‌های معادله‌ی $ax^4+bx^2+c=0$ تصاعد عددی بسازند، داریم $9b^2=100ac$.

مسئله‌ی ۲۱: m را چنان بیابید تا ریشه‌های معادله‌ی $mx^4 - 10x^2 + m = 0$ تصاعد عددی بسازند.

حل:

$9b^2 = 100ac \Rightarrow 9(100) = 100m^2$

$\Rightarrow m^2 = 9 \Rightarrow m = \pm 3$

نکته‌ی ۱۴

در حل بعضی از معادله‌ها، قسمتی از عبارت معادله را y فرض می‌کنیم. پس از حل معادله برحسب y، ریشه‌های اصلی معادله قابل بررسی‌اند.

مسئله‌ی ۲۲: معادله‌ی $(2x^2 - 3x - 5)(2x^2 - 3x - 2) = 6$ چند ریشه‌ی حقیقی دارد؟

حل: فرض می‌کنیم $2x^2 - 3x = y$

$(\underbrace{2x^2 - 3x}_{y} - 5)(\underbrace{2x^2 - 3x}_{y} - 2) = 4$

$(y - 5)(y - 2) = 4 \Rightarrow y^2 - 7y + 10 = 4$

$\Rightarrow y^2 - 7y + 6 = 0$

مجموع ضرایب صفر است. $\Rightarrow \begin{cases} y_1 = 1 \\ y_2 = 6 \end{cases}$

الف) $2x^2 - 3x = y_1 \Rightarrow 2x^3 - 3x = 1$

$\Rightarrow 2x^2 - 3x - 1 = 0 \Rightarrow \Delta > 0$ دو ریشه‌ی حقیقی دارد

ب) $2x^2 - 3x = y_2 \Rightarrow 2x^3 - 3x = 6$

$2x^2 - 3x - 6 = 0 \Rightarrow \Delta > 0 \Rightarrow$ دو ریشه‌ی حقیقی

پس این معادله چهار ریشه‌ی حقیقی متمایز دارد.

نکته‌ی ۱۵

معادلاتی که به یکی از صورت‌های زیر باشند، بی‌شمار ریشه دارند.

$[p] + [-p] = -1 \qquad [p] + [-p] = 0$

برای مثال، معادله‌های $[x^2 - 2x] + [-x^2 + 2x] = 0$ بی‌شمار ریشه دارند.

زیرا: اگر $x \in Z \Rightarrow (x^2 - 2x) \in Z$

$\Rightarrow [(x^2 - 2x)] + [-(x^2 - 2x)] = 0$

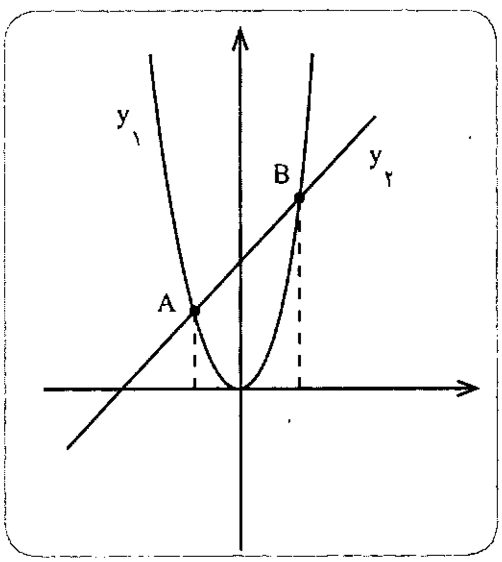
نکته‌ی ۱۶

در بررسی تعداد ریشه‌های برخی از معادله‌ها، قسمتی از معادله را y_1 و بقیه را با علامت مخالف y_2 می‌نامیم. تعداد نقاط برخورد نمودارهای دو تابع y_1 و y_2 برابر تعداد ریشه‌های معادله‌ی اصلی است.

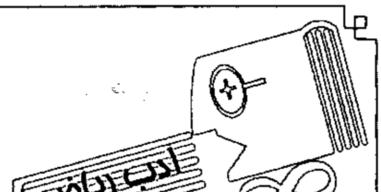
مسئله‌ی ۲۳: معادله‌ی $x^{20} - x - 2 = 0$ چند ریشه دارد؟

حل: فرض می‌کنیم $y_2 = x + 2, y_1 = x^{20}$

به طوری که شکل نشان می‌دهد، نمودارهای y_1 و y_2 یکدیگر را در دو نقطه قطع می‌کنند. پس معادله‌ی $x^{20} - x - 2 = 0$، دو ریشه‌ی حقیقی دارد که عبارت‌اند از x_A و x_B.



***

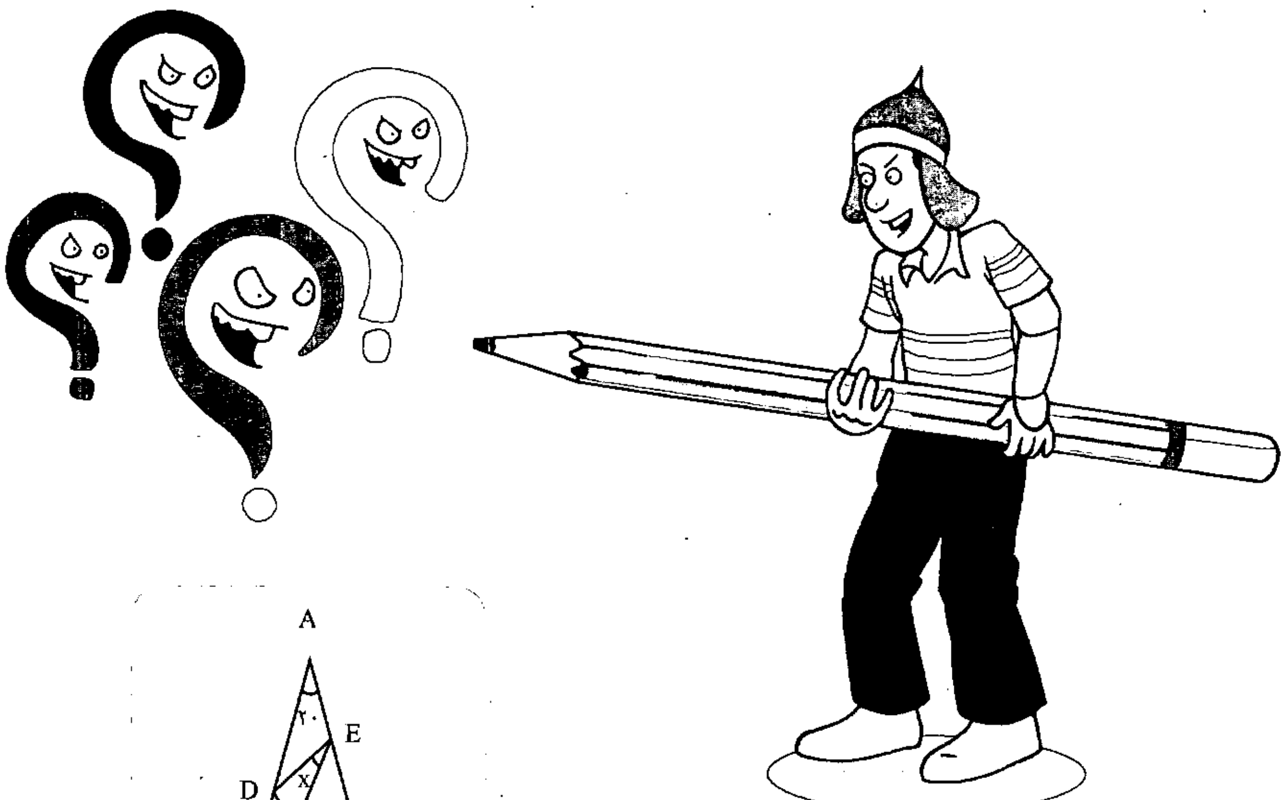


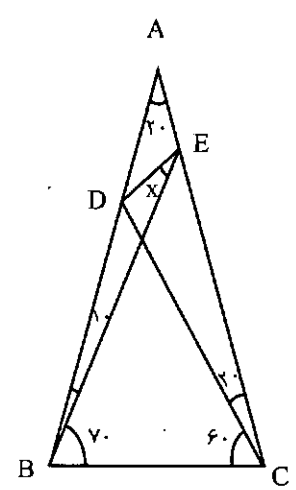
باید طبیعت ریاضیات را آشکار و مطرح کنیم؛ ریاضی علمی محض و علمی کاربردی، نظامی از ابزارهای مختلف برای اعمال و تصمیم‌گیری‌هاست، همچنین باید حوزه‌ی زیبایی‌شناسی آن را بنمایانیم و سرانجام، آن را به‌عنوان یکی از عمده‌ترین موضوع‌های تدریس و یادگیری در عصر جدید بشناسانیم.

چندمسئله‌ی پیکارجو

درباره‌ی تعیین زوایا در شکل‌های هندسی و ارائه‌ی راه حل‌هایی برای آن‌ها

هوشنگ شرقی





اشاره

چند روز پیش، آقای امیری سردبیر مجله، حل مسئله‌ای را از من خواست. قبلاً هم سابقه‌ی این کار را داشت و یک بار مسئله‌ای از نظریه‌ی اعداد و نظریه‌ی احتمال را به من داد که حل آن در نهایت به نگارش چند مقاله در مجله‌ی برهان انجامید. این بار مسئله‌ی او مسئله‌ای از هندسه به این صورت بود: در شکل مقابل ABC مثلث متساوی‌الساقین است و زاویه‌ی رأس آن 20° است و در نتیجه:

$$\hat{B} = \hat{C} = 80^\circ$$

پاره‌خط‌های BE , CD چنان رسم شده‌اند که:

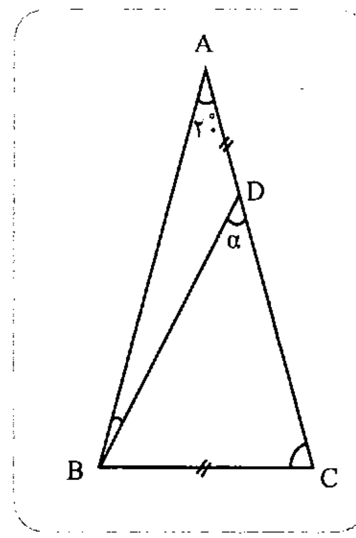
$$D\hat{C}E = 20^\circ, D\hat{B}E = 10^\circ$$

اندازه‌ی زاویه‌ی $D\hat{E}B = x$ را به دست آورید.

من با مسائلی از این دست قبلاً هم در منابع گوناگونی روبه‌رو شده بودم. بنابراین نخستین کاری که کردم مراجعه به این منابع و دیدن مسائل مشابه بود. در کتاب بازآموزی و بازشناخت هندسه (از انتشارات مدرسه) ترجمه‌ی عبدالحسین مصحفی مسئله‌ای شبیه این هست. منتها در آن‌جا دو زاویه‌ی کناری مجاور به دو ساق مثلث، به جای ۱۰ و ۲۰ درجه، ۲۰ و ۳۰ درجه هستند. خواستم راه حل آن را در این مورد هم به کار ببندم، ولی خیلی توفیقی به دست نیاوردم. ناچار مسئله را به روش مثلثاتی حل کردم و جواب را به دست آوردم که شرح آن را خواهم داد. $x = 20^\circ$ به دست آمد، ولی خیلی مایل بودم که روشی کاملاً هندسی برای آن به دست آورم. پس از مدتی تفحص روی مسئله به مسئله‌ای مشابه که آن را قبلاً دیده بودم برخوردم. بین این مسئله و مسئله‌ی معروف‌تر مقابل ارتباطی دوسویه

وجود داشت:

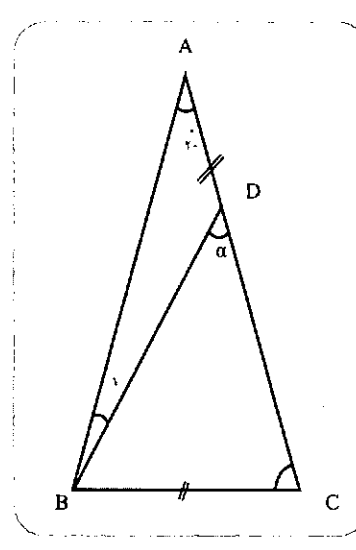
در شکل زیر $AB = AC$ و $\hat{A} = ۲۰°$ و $AD = BC$ اندازه‌ی زاویه‌ی α چیست؟



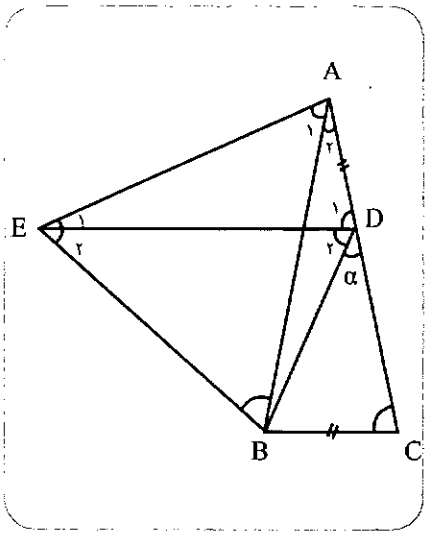
البته راه حل این مسئله را قبلاً دیده بودم و می‌دانستم ولی آنچه با آن سروکار داشتم عکس این مسئله بود و نه خود آن و این کار را کمی دشوارتر می‌کرد. با راهنمایی همکار پیشکسوت در درس هندسه، آقای میرحبیب‌اللّهی، که به راستی از نخبگان این رشته هستند، این قسمت هم حل و کار تمام شد. این جدال دو سه روزه با این مسئله به من انگیزه‌ی نگارش این مقاله را داد که در آن هم به این دو مسئله و ارتباط آن‌ها با یکدیگر بپردازم و هم چند مسئله‌ی مشابه را مطرح کنم که این مسئله‌ها دسته‌ی بسیار خوبی از مسائل پیکارجوی هندسه را تشکیل می‌دهند.

مسئله‌ی ۱: در شکل زیر $AB = AC$ و $\hat{A} = ۲۰°$ و $AD = BC$. اندازه‌ی زاویه‌ی $B\hat{D}C = \alpha$ را به دست آورید.

حل:



روش اول: مثلث ADE را هم‌نهشت با مثلث ABC به‌صورت زیر رسم و E را به B وصل می‌کنیم. مطابق شکل می‌توان نوشت:



$\hat{A}_۱ + \hat{A}_۲ = \hat{D}_۱ = \hat{B} = \hat{C} = ۸۰°, \hat{A}_۲ = ۲۰°$

$\Rightarrow \hat{A}_۱ = ۶۰°, AE = AB$

بنابراین، مثلث ABE متساوی‌الساقین است و چون یک زاویه‌ی $۶۰°$ دارد، پس متساوی‌الاضلاع است و لذا داریم:

$EB = AE = DE, \quad \hat{E}_۱ + \hat{E}_۲ = ۶۰°, \quad \hat{E}_۱ = \hat{A}_۲ = ۲۰°$

$\Rightarrow \hat{E}_۲ = ۴۰°$

پس مثلث EBD متساوی‌الساقین است و زاویه‌ی رأس آن $۴۰°$ است و بنابراین:

$$E\hat{D}B = E\hat{B}D = \frac{۱۸۰° - ۴۰°}{۲} = ۷۰°$$

$\Rightarrow \hat{D}_۲ = ۷۰°, \hat{D}_۱ = ۸۰°,$

$\alpha = ۱۸۰° - (۸۰° + ۷۰°) = ۳۰°$

روش دوم: مطابق شکل، نیمساز زاویه‌ی $\hat{A}$ را رسم و روی BC مثلث متساوی‌الاضلاع EBC را بنا می‌کنیم. می‌توان نوشت:

$\hat{A}_۱ = \hat{A}_۲ = ۱۰°, \hat{C}_۱ = ۸۰° - \hat{C}_۲ = ۲۰°$

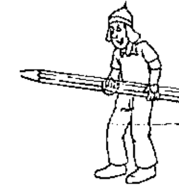
$EC = BC = AD, AC = AB$

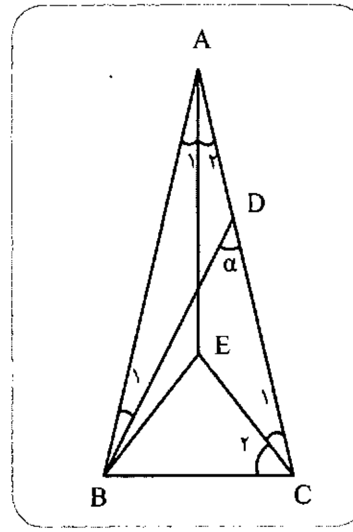
$\Rightarrow \Delta ABD \cong \Delta AEC$ (زض‌ز) $\Rightarrow \hat{B}_۱ = \hat{A}_۲ = ۱۰°$

$\hat{\alpha} = \hat{A}_۱ + \hat{A}_۲ + \hat{B}_۱ = ۳۰°$

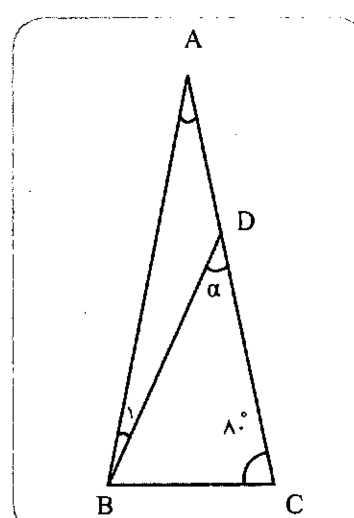
روش سوم (روش مثلثاتی):

راه حل مثلثاتی، یک راه حل قابل اطمینان در تمام این‌گونه





مسائل است. در این روش معمولاً به کمک قضیه‌ی سینوس‌ها (در هر مثلث نسبت هر ضلع به سینوس زاویه‌ی مقابل مقداری ثابت است: $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$) و اطلاعات مسئله سعی می‌کنیم با حذف ضلع‌ها از معادله‌های نوشته شده، به یک معادله‌ی مثلثاتی برسیم و از آن‌جا زاویه‌ی مجهول را به دست آوریم. یادآور می‌شویم که در این روش، آشنایی با اتحادهای مثلثاتی و روش‌های مختلف ساده کردن عبارت‌های مثلثاتی الزامی است. برای مثال در همین مسئله، ابتدا قضیه‌ی سینوس‌ها را در دو مثلث ABD و BDC می‌نویسیم:



$$\Delta ABD: \frac{AD}{\sin B_1}=\frac{BD}{\sin 20}, \alpha=\hat{B}_1+20^\circ$$

$$\Rightarrow \hat{B}_1=\alpha-20^\circ \Rightarrow \frac{AD}{\sin(\alpha-20)}=\frac{BD}{\sin 20}$$

$$\frac{AD}{BD}=\frac{\sin(\alpha-20)}{\sin 20}(1)$$

$$\Delta BDC: \frac{BC}{\sin\alpha}=\frac{BD}{\sin 80},$$

$$BC=AD \Rightarrow \frac{AD}{BD}=\frac{\sin\alpha}{\sin 80}(2)$$

$$(1),(2) \Rightarrow \frac{\sin(\alpha-20)}{\sin 20}=\frac{\sin\alpha}{\sin 80}$$

$$\Rightarrow \frac{\sin(\alpha-20)}{\sin\alpha}=\frac{\sin 20}{\sin 80}, \sin 80=\cos 10,$$

$$\sin 20=2\sin 10\cos 10$$

$$\Rightarrow \frac{\sin 20}{\sin 80}=\frac{\sin 20}{\cos 10}=2\sin 10$$

$$\Rightarrow \frac{\sin(\alpha-20)}{\sin\alpha}=2\sin 10, \frac{\sin(\alpha-20)+\sin\alpha}{\sin(\alpha-20)}$$

$$=\frac{2\sin 10+1}{2\sin 10-1}=\frac{\sin 10+\frac{1}{2}}{\sin 10-\frac{1}{2}}=\frac{\sin 10+\sin 30}{\sin 10-\sin 30}$$

و به کمک دستورهای تبدیل عبارت‌های مثلثاتی از جمع به ضرب در دو طرف تساوی، خواهیم داشت:

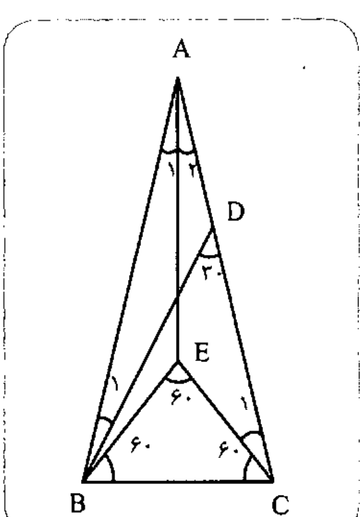
$$\frac{2\sin(\alpha-10)\cos(-10)}{2\sin(-10)\cos(\alpha-10)}=\frac{2\sin 20\cos(-10)}{2\sin(-10)\cos 20}$$

$$\Rightarrow tg(\alpha-10)=tg 20 \Rightarrow \alpha-10=20$$

$$\Rightarrow \alpha=30^\circ$$

مسئله‌ی ۲ (عکس مسئله‌ی ۱): در شکل زیر می‌دانیم $AB=AC$ و $\hat{A}=20^\circ$ و $B\hat{D}C=30^\circ$ ثابت کنید: $AD=BC$

اثبات:



روش اول (روش مثلثاتی):

$$\Delta ABD: \frac{AD}{\sin B_1}=\frac{BD}{\sin A}, B\hat{D}C=\hat{A}+\hat{B}_1$$

$$\Rightarrow \hat{B}_1 = 10 \Rightarrow \frac{AD}{\sin 10^\circ} = \frac{BD}{\sin 20^\circ}$$

$$\Rightarrow AD = \frac{BD.\sin 10}{\sin 20} = \frac{BD.\sin 10}{2\sin 10\cos 10} = \frac{BD}{2\cos 10}(1)$$

$$\Delta BDC: \frac{BC}{\sin D_1} = \frac{BD}{\sin C} \Rightarrow \frac{BC}{\sin 30^\circ} = \frac{BD}{\sin 80}$$

$$\Rightarrow BC = \frac{BD\sin 30}{\sin 80^\circ} = \frac{BD\times\frac{1}{2}}{\cos 10} = \frac{BD}{2\cos 10}(2)$$

$$(1),(2) \Rightarrow AD = BC$$

روش دوم (روش هندسی):

نیمساز زاویه‌ی $\hat{A}$ را رسم و مثلث متساوی‌الاضلاع BEC را روی BC بنا می‌کنیم.

$$B\hat{D}C = \hat{A} + \hat{B}_1 \Rightarrow \hat{B}_1 = 10^\circ, \hat{A}_1 = \hat{A}_2 = 10^\circ$$

$$\Rightarrow \hat{A}_2 = \hat{B}_1, \hat{C}_1 = \hat{A} = 20^\circ, AC = AB$$

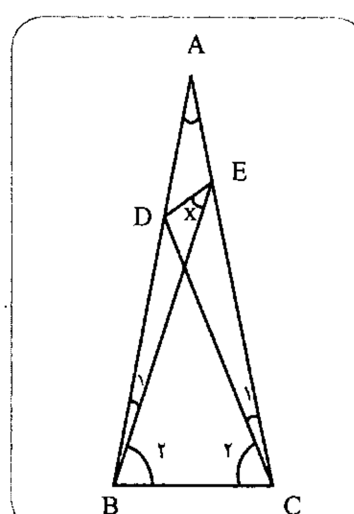
$\Rightarrow \Delta ACE \cong ABD$ (ز‌ض‌ز) $\Rightarrow CE = AD,$

$$BE = CE = BC \Rightarrow AD = BC$$

مسئله‌ی ۳ (مسئله‌ی اصلی): در شکل زیر $AB = AC$ و $\hat{B}_1 = 10^\circ$ و $\hat{C}_1 = 20^\circ$ و $\hat{A} = 20^\circ$؛ مطلوب است تعیین اندازه‌ی زاویه‌ی $D\hat{E}B = x$.

حل: روش اول (روش مثلثاتی):

قضیه‌ی سینوس‌ها را در مثلث‌های BDE، CDE و BCD می‌نویسیم:



$$\Delta BDE: \frac{BD}{\sin x} = \frac{DE}{\sin 10}(1)$$

$$\Delta BDC: \frac{BD}{\sin 60} = \frac{CD}{\sin 80}(2)$$

$$\Delta CDE: \frac{DE}{\sin 20} = \frac{CD}{\sin(x+30)}(3)$$

$$(\Delta CBE: B_2 = 70^\circ, \hat{C} = 80^\circ, \hat{E} = 30^\circ)$$

از تلفیق روابط فوق خواهیم داشت:

$$(1),(2) \Rightarrow \frac{BD}{DE}\times\frac{CD}{BD} = \frac{\sin x}{\sin 10}\times\frac{\sin 80}{\sin 60}$$

$$\Rightarrow \frac{CD}{DE} = \frac{\sin x\sin 80}{\sin 10\sin 60}, \frac{CD}{DE} = \frac{\sin(x+30)}{\sin 20}$$

$$\Rightarrow \frac{\sin x\sin 80}{\sin 10\sin 60} = \frac{\sin(x+30)}{\sin 20} \Rightarrow \frac{\sin(x+30)}{\sin x}$$

$$= \frac{\sin 80\sin 20}{\sin 10\sin 60} = \frac{\overbrace{(2\sin 10\cos 10)}^{\sin 20}\overbrace{(\cos 10)}^{\sin 80}}{\sin 10\sin 60} = \frac{2\cos^2 10}{\sin 60}$$

$$\Rightarrow \frac{\sin x\cos 30 + \cos x\sin 30}{\sin x} = \frac{4\cos^2 10}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow \cos 30 + \frac{1}{2}\cot g x = 4\frac{\cos^2 10}{\sqrt{3}} \Rightarrow$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\cot g x = \frac{4\cos^2 10}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\cot g x = 4\cos^2 10$$

$$\Rightarrow \cot g x = \frac{8\cos^2 10 - 3}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow \cot g x = \frac{8(\frac{1+\cos 20}{2}) - 3}{\sqrt{3}} = \frac{4\cos 20 + 1}{\sqrt{3}}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{4\sqrt{3}}{3}\cos 20 = tg 30 + 4 tg 30\cos 20$$

$$= \frac{\sin 30 + 4\sin 30\cos 20}{\cos 30}$$

$$= \frac{\sin 30 + 4\times\frac{1}{2}(\sin 50 + \sin 10)}{\cos 30}$$

$$= \frac{\sin 30 + 2\sin 50 + 2\sin 10}{\cos 30}$$

$$= \frac{\sin 30 + \sin 10 + \sin 50 + \sin 10 + \sin 50}{\cos 30}$$

$$= \frac{2\sin 20\cos 10 + 2\sin 30\cos 20 + \sin 50}{\cos 30}$$

$$= \frac{2\sin 20\cos 10 + 2\times\frac{1}{2}\times\sin 70 + \sin 50}{\cos 30}$$

$$= \frac{۲\sin ۲۰ \cos ۱۰ + \sin ۷۰ + \sin ۵۰}{\cos ۳۰}$$

$$= \frac{۲\sin ۲۰ \cos ۱۰ + ۲\sin ۶۰ \cos ۱۰}{\cos ۳۰}$$

$$= \frac{۲\cos ۱۰(\sin ۶۰ + \sin ۲۰)}{\cos ۳۰}$$

$$= \frac{۲\cos ۱۰ \times ۲\sin ۴۰ \cos ۲۰}{\cos ۳۰}$$

$$= \frac{۴\cos ۱۰ \cos ۵۰ \cos ۲۰}{\cos ۳۰}$$

حال با توجه به اتحاد مثلثاتی زیر:

$$\cos ۳\alpha = ۴\cos\alpha \cos(۶۰ - \alpha)\cos(۶۰ + \alpha)$$

و با ضرب صورت و مخرج کسر در $\cos ۷۰$ خواهیم داشت:

$$\cot g x = \frac{۴\cos ۱۰ \cos ۵۰ \cos ۷۰ \cos ۲۰}{\cos ۳۰ \cos ۷۰}$$

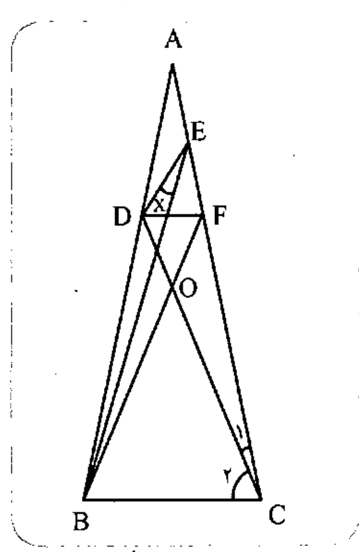
$$= \frac{\cos ۳۰ \cos ۲۰}{\cos ۳۰ \cos ۷۰} = \frac{\cos ۲۰}{\cos ۷۰} = \frac{\cos ۲۰}{\sin ۲۰} = \cot g ۲۰$$

$$\Rightarrow x = ۲۰^\circ$$

ملاحظه می‌شود که این راه حل قدری طولانی و دور از ذهن است. راه حل بهتر، روش هندسی است که در زیر ارائه می‌شود. گفتنی است که باید از نتیجه‌ی مسئله‌ی ۲ استفاده شود.

روش دوم (روش هندسی):

از نقطه‌ی D خطی موازی BC رسم می‌کنیم تا AC را در F قطع کند و F را به B وصل می‌کنیم. روشن است که DFCB ذوزنقه‌ی متساوی‌الساقین است و در نتیجه قطرهای آن با هم برابرند و $OC = OB$ و $OD = OF$ و چون $\hat{C}_۱ = ۲۰^\circ$ و $\hat{C}_۲ = ۶۰^\circ$، پس مثلث OBC و نیز مثلث OFD هر دو متساوی‌الاضلاع هستند.



در نتیجه: $OB = OC = BC$ و $OF = OD = DF$ و نیز با توجه به برابری $\hat{A} = F\hat{B}D = ۲۰^\circ$ نتیجه می‌شود: $AF = BF$ و چون داریم: $\Delta BEC: B\hat{E}C = ۱۸۰^\circ - (\hat{C} + E\hat{B}C) = ۳۰^\circ$ پس طبق نتیجه‌ی مسئله‌ی ۲ داریم: $AE = BC$. اکنون با توجه به این نابرابرها می‌توان نوشت:

$$EF = AF - AE = BF - BC = BF - OB$$
$$= OF = DF$$

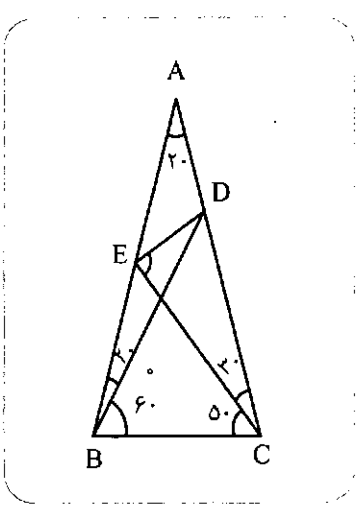
و با توجه به برابری $EF = DF$ نتیجه می‌شود که مثلث EFD در رأس F متساوی‌الساقین است و در نتیجه:

$$F\hat{E}D = E\hat{D}F = \frac{۱۸۰ - ۸۰}{۲} = ۵۰^\circ \Rightarrow x = ۲۰^\circ$$

حال به چند مسئله‌ی مشابه دیگر می‌پردازیم:

مسئله‌ی ۴: در شکل زیر مثلث ABC در رأس A متساوی‌الساقین است و $\hat{A} = ۲۰^\circ$ و مطابق شکل $D\hat{B}E = ۲۰^\circ$ و $D\hat{C}E = ۳۰^\circ$. مطلوب است تعیین اندازه‌ی زاویه‌ی $D\hat{E}C$.

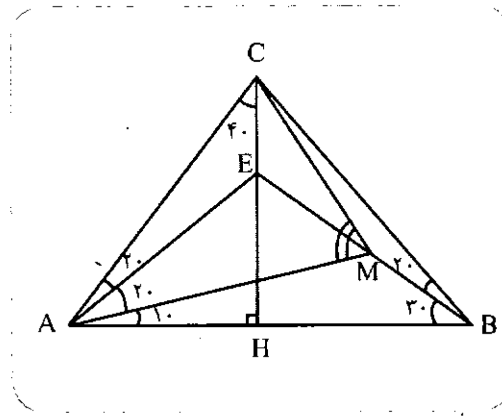
این مسئله شباهت زیادی به مسئله‌ی ۳ دارد و راه حل‌های هندسی و مثلثاتی آن نیز بسیار شبیه به آن است. بنابراین، هر دو راه حل را به عنوان تمرین به خوانندگان واگذار می‌کنیم (پاسخ: ۸۰°)



مسئله‌ی ۵: در درون مثلث ABC، نقطه‌ی M را در نظر گرفته‌ایم و برای آن داریم: $M\hat{B}A = ۳۰^\circ$ و $M\hat{A}B = ۱۰^\circ$. به شرط $A\hat{C}B = ۸۰^\circ$ و $AC = BC$ مقدار زاویه‌ی $A\hat{M}C$ را پیدا کنید. (المپیاد ریاضی یوگسلاوی، ۱۹۸۳)

حلّ: محل برخورد ارتفاع CH از مثلث متساوی‌الساقین ABC را با امتداد خط راست BM، نقطه‌ی E می‌گیریم. می‌توان نوشت:

$$\Delta ACE \cong \Delta BCE$$
$$\Rightarrow E\hat{B}C = E\hat{A}C = ۵۰ - ۳۰ = ۲۰^\circ,$$
$$EA = EB \Rightarrow E\hat{A}B = E\hat{B}A = ۳۰^\circ$$



$$\Rightarrow E\hat{A}M = ۲۰°, ACE = \frac{۱}{۲}A\hat{C}B = ۴۰°$$

$$A\hat{M}E = M\hat{A}B + M\hat{B}A = ۱۰° + ۳۰° = ۴۰°$$

یعنی مثلث‌های AME و ACE به حالت دو زاویه و ضلع بین هم‌نهشت‌اند و در نتیجه داریم:

$$AM = AC \Rightarrow A\hat{M}C = M\hat{C}A = \frac{۱۸۰° - ۴۰°}{۲} = ۷۰°$$

تمرین: مسئله را به روش مثلثاتی حل کنید (راهنمایی: به معادله‌ی مثلثاتی $\frac{\sin\alpha}{\sin ۴۰} = \frac{\sin(۲۲۰ - \alpha)}{\sin ۲۰}$ برسید).

مسئله‌ی ۶: نقطه‌ی p را روی ضلع BC از مثلث ABC طوری انتخاب کرده‌ایم که $PC = ۲PB$. اگر $A\hat{P}C = ۶۰°$ و $A\hat{B}C = ۴۵°$ باشد، اندازه‌ی $A\hat{C}B$ را به دست آورید. (المپیاد ریاضی آلمان شرقی ۱۹۶۴)

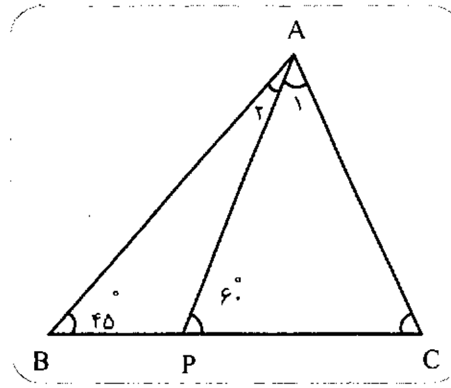
حلّ (روش مثلثاتی):

$$\Delta APC: \frac{AC}{\sin ۶۰°} = \frac{AP}{\sin C} = \frac{PC}{\sin A_۱}$$

$$\Delta APB: \frac{AB}{\sin ۱۲۰°} = \frac{AP}{\sin ۴۵} = \frac{PB}{\sin A_۲}$$

$$\Rightarrow \frac{PC}{\sin(۱۲۰ - C)} = \frac{AP}{\sin C}, \frac{PB}{\sin ۱۵°} = \frac{AP}{\sin ۴۵},$$

$$PC = ۲PB$$



$$\Rightarrow \frac{\sin(۱۲۰ - C)\sin ۴۵°}{\sin C.\sin ۱۵°} = ۲$$

$$\Rightarrow \frac{\sin(۱۲۰ - C)}{\sin C} = \frac{۲\sin ۱۵}{\sin ۴۵}$$

$$= \frac{۲ \times \frac{\sqrt{۶} - \sqrt{۲}}{۴}}{\frac{\sqrt{۲}}{۲}} = \sqrt{۳} - ۱$$

$$\Rightarrow \frac{\sin(۱۲۰ - C) + \sin C}{\sin(۱۲۰ - C) - \sin C} = \frac{\sqrt{۳}}{\sqrt{۳} - ۲}$$

$$\Rightarrow \frac{۲\sin ۶۰ \cos(۶۰ - C)}{۲\sin(۶۰ - C)\cos ۶۰} = \frac{\sqrt{۳}}{\sqrt{۳} - ۲}$$

$$\Rightarrow tg۶۰ \cot g(۶۰ - C) = \frac{\sqrt{۳}}{\sqrt{۳} - ۲}$$

$$\Rightarrow \cot g(۶۰ - C) = \frac{۱}{\sqrt{۳} - ۲} = -(۲ + \sqrt{۳})$$

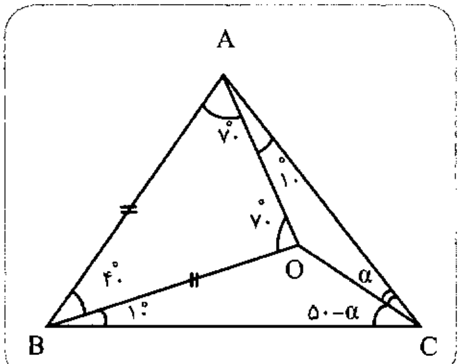
$$\Rightarrow \cot g(C - ۶۰) = ۲ + \sqrt{۳} = \cot g ۱۵°$$

$$\Rightarrow C - ۶۰° = ۱۵° \Rightarrow \hat{C} = ۷۵°$$

تمرین: مسئله را به روش هندسی حل کنید (راهنمایی: قرینه‌ی C نسبت به AP را $C_۱$ بنامید و $C_۱$ را به A و B وصل کنید و نشان دهید مثلث $BC_۱P$ قائم‌الزاویه است).

مسئله‌ی ۷: در مثلث متساوی‌الساقین ABC به رأس A، $\hat{A} = ۸۰°$ نقطه‌ی O را داخل مثلث طوری در نظر گرفته‌ایم که $AB = OB$ و $O\hat{B}C = ۱۰°$ باشد. اندازه‌ی زاویه‌ی $O\hat{C}A$ را به دست آورید.

حلّ: مطابق شکل روشن است که چون $O\hat{B}C = ۱۰°$ پس $O\hat{B}A = ۴۰°$ و چون $OB = AB$ پس $O\hat{A}B = B\hat{O}A = \frac{۱۸۰ - ۴۰}{۲} = ۷۰°$ و در نتیجه $O\hat{A}C = ۱۰°$.
حال، قضیه‌ی سینوس‌ها را در مثلث‌های OBC و OAC و OAB می‌نویسیم:



$$\frac{OC}{\sin 10} = \frac{OB}{\sin(50 - \alpha)}, \frac{OC}{\sin 10} = \frac{OA}{\sin \alpha},$$

$$OB = AB = AC, \frac{OB}{\sin 70} = \frac{OA}{\sin 40} \Rightarrow$$

$$\frac{\sin(50 - \alpha)}{\sin \alpha} = \frac{\sin 70}{\sin 40} = \frac{\cos 20}{2 \sin 20 \cos 20} = \frac{1}{2 \sin 20}$$

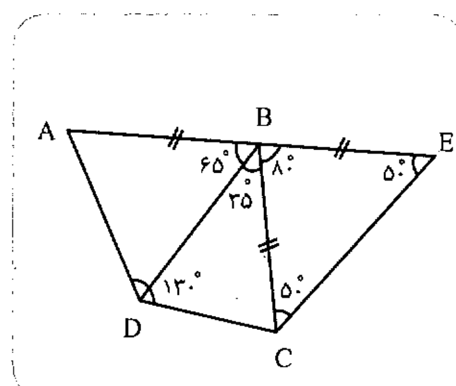
اکنون می‌توان دید که $\alpha = 20^\circ$ در برابری فوق صدق می‌کند (امتحان کنید) و در نتیجه پاسخ مساوی 20° است.

مسئله‌ی ۸: در چهارضلعی محدب ABCD می‌دانیم که $A\hat{B}D = 65^\circ$ و $C\hat{B}D = 35^\circ$ و $A\hat{D}C = 130^\circ$ و $AB = BC$. اندازه‌ی زاویه‌ی $B\hat{A}D$ را به دست آورید.

حل: مطابق شکل زیر و در امتداد AB، BE را مساوی AB و BC جدا می‌کنیم. بنابراین داریم:

$$C\hat{B}E = 180^\circ - (65^\circ + 35^\circ) = 80^\circ, CB = BE$$

$$\Rightarrow B\hat{E}C = B\hat{C}E = 50^\circ$$



لذا چون دو زاویه‌ی روبه‌روی $A\hat{D}C$ و $A\hat{E}C$ مکمل هم هستند، پس چهارضلعی AECD محاطی است و از A و E و C و D یک دایره می‌گذرد و چون دایره‌ای به مرکز B و به شعاع AB نیز از A و C و E می‌گذرد و از هر سه نقطه‌ی غیرواقع بر یک خط راست، یک و تنها یک دایره می‌گذرد، پس دایره‌ی محیطی چهارضلعی AECD همین دایره و به مرکز B است. بنابراین $BD = AB = BC = BE$ و مثلث ABD در رأس B متساوی‌الساقین است و در نتیجه:

$$A\hat{D}B = B\hat{A}D = \frac{180 - 65}{2} = 57/5^\circ$$

تمرین

۱- در مثلث ABC، طول میانه‌ی رأس B و ارتفاع رأس C با هم برابرند. زاویه‌ی حاده‌ی بین این میانه و ارتفاع را به دست آورید. (جواب: 60°)

۲- در مثلث ABC، اندازه‌ی زاویه‌ی A مساوی 75° و طول ارتفاع CH نصف طول ضلع AB است. زاویه‌ی B چند درجه است؟ (جواب: 30°)

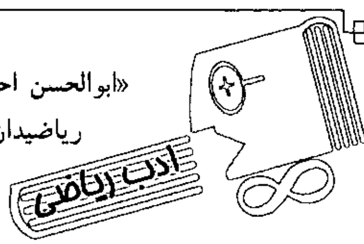
۳- در مثلث ABC، $AB>AC$ و M وسط BC است و دو زاویه‌ی $\hat{B}$ و $M\hat{A}C$ متمم یکدیگرند. اندازه‌ی $\hat{A}$ را به دست آورید. (جواب: 90°)

۴- زاویه‌ی رأس مثلث متساوی‌الساقین ABC $(AB = AC)$ مساوی 100° است. در امتداد AB و از طرف B، AM را مساوی BC جدا می‌کنیم. زاویه‌ی $B\hat{C}M$ چند درجه است؟ (جواب: 10°)

۵- در مثلث متساوی‌الساقین طول نیمساز زاویه‌ی رأس مساوی نصف طول هر یک از نیمسازهای زوایای مجاور به دو ساق است. اندازه‌ی زاویه‌ی رأس را به دست آورید. (جواب: 108°)

۶- مثلث ABC در رأس A متساوی‌الساقین است و $\hat{A} = 80^\circ$ و نقطه‌های D و E را روی BC و AC طوری در نظر گرفته‌ایم که: $B\hat{A}D = 50^\circ$ و $A\hat{B}E = 30^\circ$. مقدار زاویه‌ی $B\hat{E}D$ را به دست آورید. (جواب: 40°)

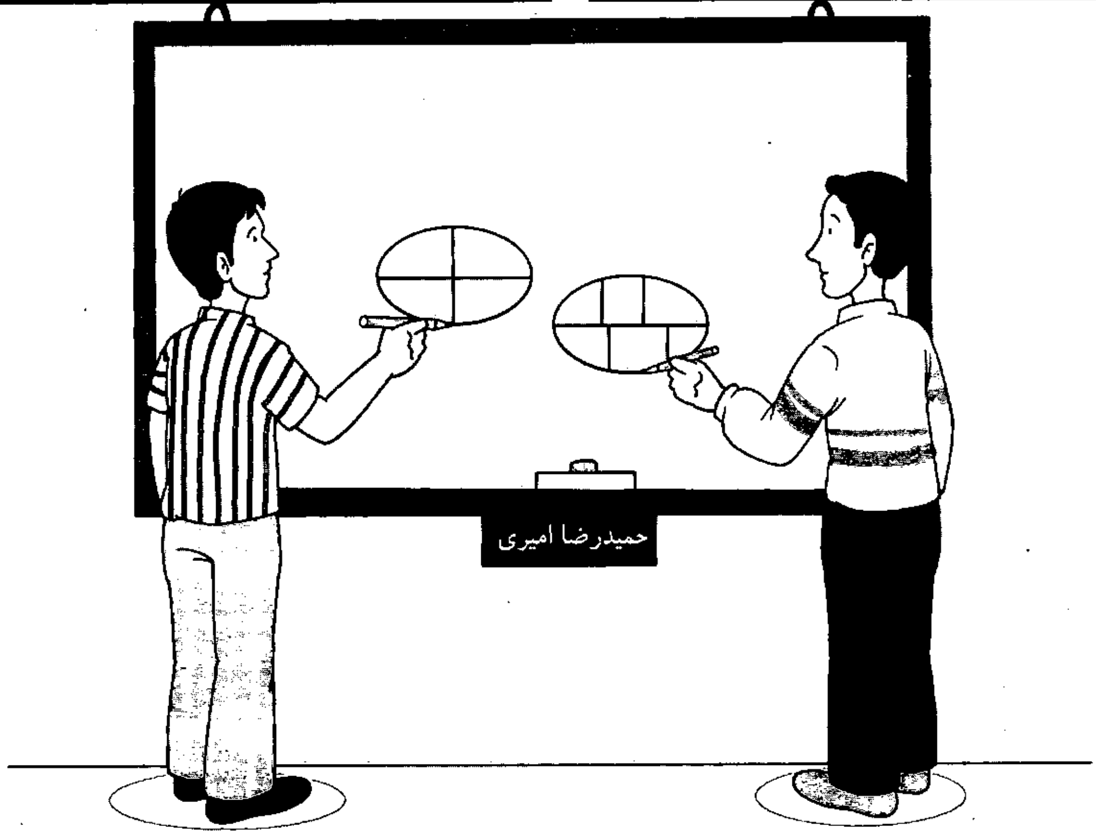
(المپیاد ریاضی انگلستان-۱۹۷۰)



«ابوالحسن احمدبن ابراهیم اقلیدسی» ریاضیدان قرن چهارم هجری است. وی حدود پنج قرن پیش از کاشانی، کسرهای اعشاری را در کتاب خود به‌کار برده و اعمال اصلی را درباره‌ی آن‌ها انجام داده است. با این حال، مثل این‌که این کسرها را از پیشینیان خود اخذ کرده باشد، به آن‌ها توجه خاصی نداشته و به اهمیت آن‌ها پی‌نبرده؛ بلکه آن‌ها را در ردیف کسرهای متعارف و کسرهای شصتگانی به‌کار گرفته است و پس از وی، حدود پنج قرن، کسی از کار او اطلاعی کسب نکرده است. بنابراین کتاب او در استعمال این کسرها توسط دیگران تأثیری نداشته است. اما کاشانی به قول خودش، کسرهای اعشاری را به قیاس با کسرهای شصتگانی اختراع کرده و نام کسر اعشاری را بر این کسرها نهاده و آگاهانه و به‌طور اصولی قاعده‌های عمل با آن‌ها را شرح داده است و آن‌ها را به وجهی پیگیر، در محاسبات به‌کار برده و استعمال آن‌ها را به دیگران توصیه کرده است. کتاب «مفتاح‌الحساب» او در بسط این کسرها- بعد از خودش- مؤثر بوده است.

در قدیم، عنوان اقلیدسی به کسانی داده می‌شد که کتاب اصول اقلیدس را برای فروش رونویسی می‌کردند.

رابطه‌های هم‌ارزی کلاس‌های هم‌ارزی



حمیدرضا امیری

رابطه‌ی R روی مجموعه‌ی ناتهی A می‌تواند دارای خواص بازتابی (انعکاسی)، تقارنی، پادتقارنی و تعدّی (تراگذاری) باشد. برای مثال، اگر $A = \{a,b,c,d\}$ و رابطه‌ی R را به صورت: $R = \{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(a,b),(b,a)\}$ تعریف کنیم، مشاهده می‌شود که رابطه‌ی R سه خاصیت انعکاسی، تقارنی و تعدّی را دارد. در حالت کلی، به چنین رابطه‌هایی که هر سه خاصیت انعکاسی،تقارنی و تعدّی را با هم داشته باشند، یک رابطه‌ی هم‌ارزی می‌گویند. لازم است یادآوری کنیم که اگر رابطه‌ی R سه خاصیت فوق و علاوه بر آن خاصیت دیگری را نیز داشته باشد، باز هم یک رابطه‌ی هم‌ارزی نامیده می‌شود.

مثال: رابطه‌ی R روی $\mathbb{Z}$، به صورت زیر تعریف می‌شود. ثابت کنید که این رابطه، یک رابطه‌ی هم‌ارزی است. (m عددی صحیح و ثابت است.)

$$xRy \Leftrightarrow x - y = mk \quad (k \in \mathbb{Z})$$

حل: می‌دانیم صفر مضرب هر عدد است، به خصوص $0 = m \times 0$؛ پس:

$$1)\ x - x = 0 = m \times 0 \Leftrightarrow xRx$$

$$2)\ xRy \Rightarrow x - y = mk_1$$
$$\Rightarrow y - x = m\underbrace{(-k_1)}_{k_2 \in Z}$$
$$\Rightarrow y - x = mk_2 \Rightarrow yRx$$

یعنی، با فرض این که xRy، ثابت کردیم که yRx، پس خاصیت تقارنی نیز برقرار است.

$$3)\ xRy\ ,\ \ yRz \Rightarrow x - y = mk_1 \ ,\ \ y - z = mk_2$$

$$\Rightarrow x - z = m\underbrace{(k_1 + k_2)}_{k_3 \in \mathbb{Z}}$$

$$\Rightarrow x - z = mk_3 \Rightarrow xRz$$ (خاصیت تعدّی دارد)

بنابراین رابطه‌ی R، یک رابطه‌ی هم ارزی است.

(لازم است توضیح دهیم که رابطه‌ی R در مثال قبل به رابطه‌ی هم نهشتی به پیمانه‌ی m معروف است.)

خواص انعکاسی، تقارنی و تعدّی در یک رابطه‌ی هم ارزی مانند R که روی مجموعه‌ی A تعریف شده است و ارتباط بین این سه خاصیت می‌تواند بین اعضایی از A که با هم رابطه‌ی R داشته باشند، ارتباطی خاصی برقرار کند. برای مثال، اگر در مثال قبل قرار دهیم $m = ۳$، داریم:

$$xRy \Leftrightarrow x - y = ۳k \quad (k \in \mathbb{Z})$$

در حقیقت، اعدادی از $\mathbb{Z}$ با هم رابطه‌ی R دارند که تفاضل آن‌ها مضرب ۳ باشد. برای مثال، ۶R۱۵، زیرا $۶ - ۱۵ = -۹$ یا $۶ - ۱۵ = ۳\times(-۳)$. حال اگر a عضوی از $\mathbb{Z}$ باشد و همه‌ی اعداد صحیح که با a رابطه‌ی R دارند (تفاضل هر یک از آن‌ها با a مضرب ۳ باشد) را در نظر بگیریم، مجموعه‌ای حاصل می‌شود که آن را کلاس هم ارزی a می‌نامند و با نماد [a] نمایش می‌دهند. در حالت کلی داریم:

اگر R یک رابطه‌ی هم ارزی روی مجموعه‌ی A باشد و $a \in A$، کلاس هم ارزی a را با نماد [a] نشان می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$[a] = \{x \in A \mid xRa\}$$

به عبارت دیگر: $x \in [a] \Leftrightarrow xRa$

برای مثال، در رابطه‌ی زیر داریم:

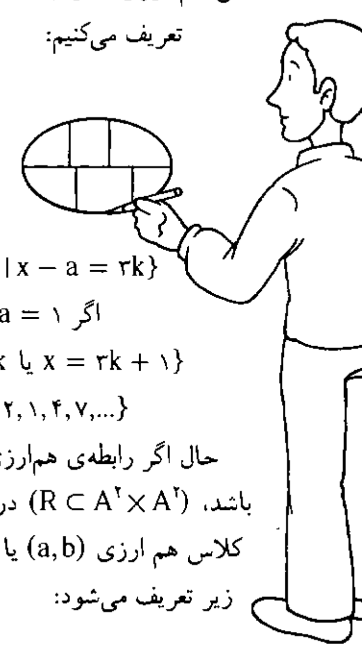
$$xRy \Leftrightarrow x - y = ۳k$$

$$[a] = \{x \in \mathbb{Z} \mid xRa\} = \{x \in \mathbb{Z} \mid x - a = ۳k\}$$

اگر $a = ۱$، در این صورت داریم:

$$[۱] = \{x \in \mathbb{Z} \mid x - ۱ = ۳k \text{ یا } x = ۳k + ۱\}$$

$$\Rightarrow [۱] = \{..., -۵, -۲, ۱, ۴, ۷, ...\}$$



حال اگر رابطه‌ی هم‌ارزی R روی مجموعه‌ی $A^۲$ تعریف شده باشد، $(R \subset A^۲ \times A^۲)$ در این صورت، برای هر $(a,b) \in A^۲$ کلاس هم ارزی (a,b) یا [(a,b)] مطابق تعریف اصلی به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$[(a,b)] = \{(x,y) \in A^۲ \mid (x,y)R(a,b)\}$$

مثال: رابطه‌ی هم ارزی R روی $\mathbb{R}^۲$ به صورت زیر تعریف شده است. اولاً، نوع نمودار کلاس‌های هم ارزی را مشخص کنید. ثانیاً، $[(۱,\sqrt{۲})]$ را به صورت مجموعه‌ای تشکیل دهید.

$$(a,b)R(c,d) \Leftrightarrow a + d = b + c$$

حل: با نوشتن یک کلاس هم ارزی دلخواه مانند [(a,b)]، نمودار هر کلاس هم ارزی مشخص می‌شود:

$$[(a,b)] = \{(x,y) \in \mathbb{R}^۲ \mid (x,y)R(a,b)\}$$
$$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^۲ \mid x + b = y + a\}$$
$$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^۲ \mid y = x + (b - a)\}$$
$$\Rightarrow [(۱,\sqrt{۲})] = \{(x,y) \in \mathbb{R}^۲ \mid y = x + (\sqrt{۲} - ۱)\}$$

و همان‌طور که مشاهده می‌شود، نمودار دسته‌های هم ارزی این رابطه، خط‌هایی به شکل $y = x + (b - a)$ است که می‌بینیم a و b تأثیری در ضریب زاویه‌ی این خط‌ها ندارند و فقط عرض از مبدأ را تعیین می‌کنند؛ یعنی، نمودار همه‌ی کلاس‌های هم‌ارزی، خط‌هایی موازی با هم هستند.

مثال: رابطه‌ی R را روی مجموعه‌ی $A = \{۲,۴,۶,۸\}$ به شکل زیر تعریف می‌کنیم:

$$R = \{(۲,۲),(۴,۴),(۶,۶),(۸,۸),(۴,۶),(۶,۴)\}$$

واضح است که رابطه‌ی R، یک رابطه‌ی هم ارزی است. حال کلاس‌های هم ارزی این رابطه را تشکیل می‌دهیم:

$$[۲] = \{x \in A \mid xR۲\} = \{۲\}$$
$$[۴] = \{x \in A \mid xR۴\} = \{۴,۶\}$$
$$[۶] = \{x \in A \mid xR۶\} = \{۶,۴\}$$
$$[۸] = \{x \in A \mid xR۸\} = \{۸\}$$

همان‌طور که مشاهده می‌کنید، اوّلاً هیچ کدام از کلاس‌های هم‌ارزی این رابطه‌ی هم‌ارزی، تهی نیست، ثانیاً کلاس‌های هم ارزی، یا از هم جدا هستند و عضو مشترکی ندارند یا برابرند ($[۴] = [۶]$) ثالثاً اجتماع کلاس‌های هم ارزی رابطه‌ی R، برابر با مجموعه‌ی A است؛ یعنی:

$$[۲] \cup [۴] \cup [۸] = \{۲\} \cup \{۴,۶\} \cup \{۸\} = \{۲,۴,۶,۸\} = A$$

در این جا، خواصی را که درباره‌ی کلاس‌های هم ارزی در مثال قبل مشاهده کردید، در حالت کلّی و به عنوان یک قضیه، مطرح و اثبات می‌کنیم.

قضیه: اگر رابطه‌ی R روی مجموعه‌ی ناتهی A یک رابطه‌ی هم ارزی باشد، در این صورت داریم:

الف) کلاس‌های هم ارزی رابطه‌ی R، ناتهی‌اند.

ب) اگر $b \in [a]$، آن‌گاه $[a] = [b]$.

ج) اجتماع همه‌ی کلاس‌های هم‌ارزی رابطه‌ی R، برابر با مجموعه‌ی A است.

اثبات: الف) فرض کنیم [a] یک کلاس هم ارزی دلخواه باشد. چون رابطه‌ی R هم ارزی است، پس خاصیت انعکاسی دارد، لذا aRa. بنابراین طبق تعریف کلاس‌های هم ارزی $a \in [a]$، پس: $[a] \neq \emptyset$.

ب) برای این که ثابت کنیم $[a] = [b]$، (با فرض $b \in [a]$)

کافی است ثابت کنیم $[a]\subset[b]$ و $[b]\subset[a]$.

فرض کنیم:

$$x\in[a]\Rightarrow xRa; b\in[a]\Rightarrow aRb$$

و داریم:

$$aRb \xrightarrow{xRa} xRb \Rightarrow x\in[b]\Rightarrow[a]\subset[b] \quad (۱)$$

حال اگر:

$$x\in[b]\Rightarrow xRb; b\in[a]\Rightarrow bRa$$

و داریم:

$$bRa \xrightarrow{xRb} x\in[a]\Rightarrow[b]\subset[a] \quad (۲)$$

$$(۱) \text{ و } (۲)\Rightarrow[a]=[b]$$

تذکر: قسمت (ب) نشان می‌دهد که هر دو کلاس هم ارزی، یا مساوی یکدیگرند یا هیچ اشتراکی با هم ندارند.

ج) اجتماع همه‌ی کلاس‌های هم ارزی را با E نشان می‌دهیم، چون طبق تعریف کلاس‌های هم ارزی، هر کلاس هم ارزی زیر مجموعه‌ی A است، پس اجتماع این کلاس‌های هم ارزی، یعنی E نیز زیرمجموعه‌ی A است؛ بنابراین $E\subseteq A$. حال اگر فرض کنیم $x\in A$ واضح است که $x\in[x]$. پس هر عضو از A، در یکی از کلاس‌های هم ارزی رابطه‌ی R وجود دارد و بنابراین در اجتماع کلاس‌ها، یعنی E وجود خواهد داشت؛ یعنی $A\subseteq E$ و در کل ثابت شد $A=E$.

مثال: مجموعه‌ی $A=\{x\in\mathbb{R}\,|\,۰\le x\le ۱\}$ را در نظر می‌گیریم و رابطه‌ی R را روی $A^۲$ به شکل زیر تعریف می‌کنیم:

$$(x,y)R(z,t)\Leftrightarrow y=t$$

که $A^۲=A\times A=\{(x,y)|\ ۰\le x\le ۱, ۰\le y\le ۱\}$:

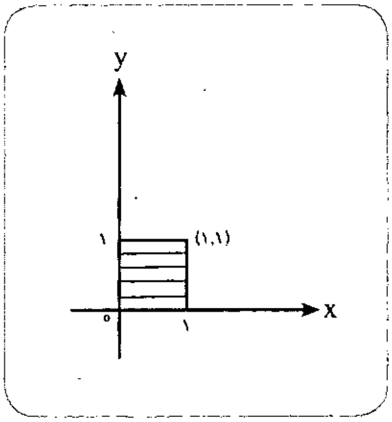
(مجموعه‌ی $A=\{x\in\mathbb{R}\,|\,۰\le x\le ۱\}$ را به شکل $A=[۰,۱]$ نیز نشان می‌دهند.)

اوّلاً، به راحتی می‌توان ثابت کرد که رابطه‌ی R یک رابطه‌ی هم ارزی است (اثبات به عهده‌ی خواننده).

ثانیاً، همان‌طور که مشاهده می‌کنید، مجموعه‌ی $A^۲$، یعنی $[۰,۱]\times[۰,۱]$، سطح مربع واحد را نشان می‌دهد و اگر بخواهیم نمودار هر کلاس هم ارزی این رابطه را بشناسیم، داریم:

$$[(a,b)]=\{(x,y)\in A^۲|(x,y)R(a,b)\}$$
$$=\{(x,y)\in A^۲|\,y=b\}$$

یعنی نمودار هر کلاس هم ارزی، پاره خطی است داخل سطح مربع واحد و موازی با محور xها، که هیچ کدام از این پاره خط‌ها یکدیگر را قطع نمی‌کنند. زیرا هر یک از این پاره‌خط‌ها به یک کلاس هم ارزی تعلق دارد و می‌دانیم که (ثابت شده) که کلاس‌های هم ارزی، عضو مشترک ندارند.



مثال: رابطه‌ی R را روی $\mathbb{R}^۲$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$(x,y)R(z,t)\Leftrightarrow y-x^۲=t-z^۲$$

الف) ثابت کنید که R رابطه‌ی هم ارزی است.

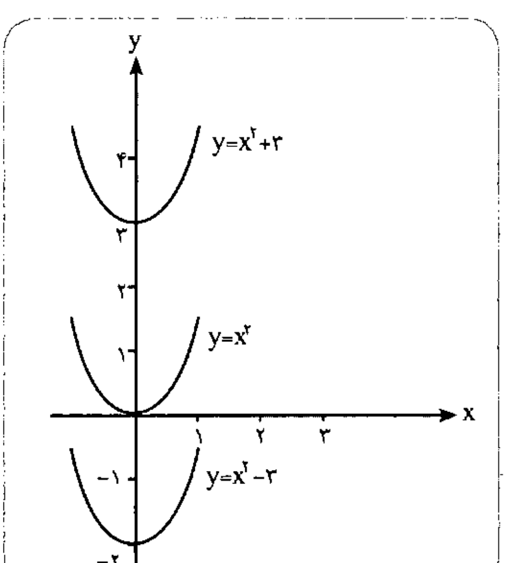
ب) نمودار هر کلاس هم ارزی در این رابطه، چه شکلی را در صفحه‌ی مختصات معین می‌کند؟

اثبات: اثبات قسمت (الف) به عهده‌ی خواننده.

ب) برای مشخص کردن نمودار هر کلاس هم ارزی، یک کلاس هم ارزی دلخواه مانند $[(a,b)]$ را در نظر می‌گیریم:

$$[(a,b)]=\{(x,y)\in\mathbb{R}^۲|(x,y)R(a,b)\}$$
$$=\{(x,y)\in\mathbb{R}^۲|\,y-x^۲=b-a^۲\}$$
$$=\{(x,y)\in\mathbb{R}^۲|\,y=x^۲+(b-a^۲)\}$$

همان‌طور که مشاهده می‌کنید، نمودارهای کلاس‌های هم ارزی این رابطه، سهمی‌هایی به شکل $y=x^۲+(b-a^۲)$ هستند. برای مثال، نمودار $[(۱,۲)]$، سهمی $y=x^۲+۱$ است.



$[(۱,۱)] \to y = x^۲$

$[(۰,۲)] \to y = x^۲ + ۲$

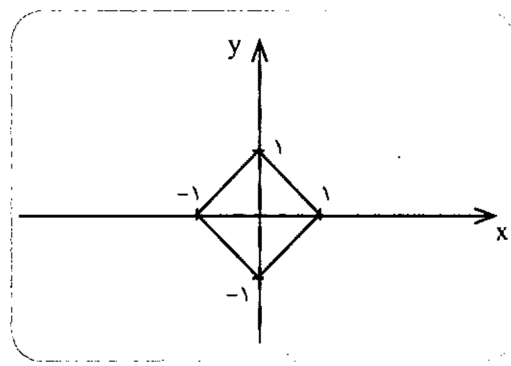
$[(-۱,-۱)] \to y = x^۲ - ۲$

مثال: رابطه‌ی هم‌ارزی R روی $\mathbb{R}^۲$ به صورت زیر تعریف می‌شود، شکل کلاسی هم‌ارزی [(۱و۰)] را مشخص کرده و نحوه‌ی افراز $\mathbb{R}^۲$ را توسط کلاس‌های هم‌ارزی این رابطه توضیح دهید.

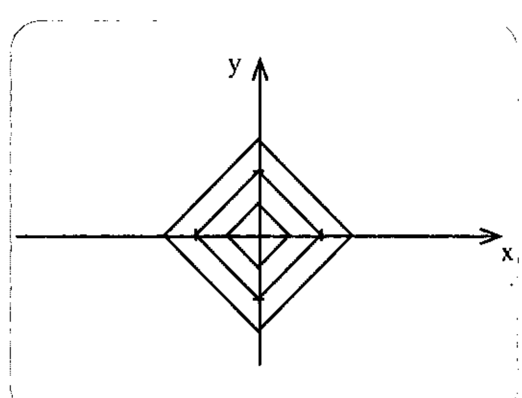
$$(x,y)R(z,t) \Leftrightarrow |x|+|y|=|z|+|t|$$

حل:

$$[(۰,۱)] = \left\{(x,y \in \mathbb{R}^۲ \middle| |x|+|y| = |۰|+|۱|\right\}$$
$$= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^۲ \middle| |x|+|y| = ۱\right\}$$



همان‌طور که مشاهده می‌شود نمودار هر کلاس هم‌ارزی مانند [(a,b)] یک مربع است که چهار رأس آن روی محورهای مختصات قرار دارد و مرکز همه‌ی این مربع‌ها (با طول اضلاع متمایز) مبدأ مختصات است و بنابراین هیچ‌کدام دیگری را قطع نمی‌کند در واقع $\mathbb{R}^۲$ توسط این مربع‌های هم مرکز افراز می‌شود.



تمرین: رابطه‌ی هم‌ارزیِ زیر روی $\mathbb{R}^۲$ تعریف شده این رابطه، مجموعه‌ی $\mathbb{R}^۲$ را توسط چه نمودارهایی افراز می‌کند؟

$$(x,y)R(z,t) \Leftrightarrow x^۲ + y^۲ = z^۲ + t^۲$$

تعریف افراز یک مجموعه: هرگاه A یک مجموعه‌ی ناتهی باشد و بتوانیم تعدادی متناهی از زیرمجموعه‌های متمایز A مانند $A_۱, A_۲, \ldots, A_n$ بیابیم، به قسمی که اوّلاً هر یک از زیرمجموعه‌ها ناتهی باشند، ثانیاً هیچ دوتایی از آن‌ها با هم اشتراکی نداشته باشند (دو به دو از هم جدا باشند) و ثالثاً اجتماع این زیرمجموعه‌های برابر با مجموعه‌ی A شود، در این صورت می‌گوییم که مجموعه‌های $A_۱$، $A_۲$، ... و A_n مجموعه‌های افراز کننده‌ی مجموعه‌ی A هستند و مجموعه‌ی $E = \{A_۱, A_۲, \ldots, A_n\}$ یک افراز n عضوی از مجموعه‌ی A است.

تبصره- در حالتی که $n = ۱$، یعنی E یک افراز یک عضوی از مجموعه‌ی A باشد، داریم: $E = \{A\}$. حال اگر بخواهیم تعریف افراز یک مجموعه را توسط نمادهای ریاضی یا به زبان ریاضی بیان کنیم، می‌گوییم:

مجموعه‌ی $E = \{A_۱, A_۲, \ldots, A_n\}$ یک افراز n عضوی برای مجموعه‌ی ناتهی A است، هرگاه:

۱) برای هر $A_i \neq \varnothing : ۱ \leq i \leq n$

۲) برای هر j و i که $j \leq n$ و $۱ \leq i$ و $i \neq j$، $A_i \cap A_j = \varnothing$

۳) $A_۱ \cup A_۲ \cup \ldots \cup A_n = \bigcup_{i=۱}^{n} A_i = A$.

مثال: یک افراز ۴ عضوی، یک افراز ۳ عضوی و یک افراز ۲ عضوی برای مجموعه‌ی $A = \{۱,۲,۳,۴\}$ بنویسید.

حل: ۱- اگر فرض کنیم که $A_۱ = \{۱\}$ و $A_۲ = \{۲\}$ و $A_۳ = \{۳\}$ و $A_۴ = \{۴\}$، در این صورت $E_۱ = \{A_۱, A_۲, A_۳, A_۴\}$ یک افراز ۴ عضوی برای A است.

۲- اگر فرض کنیم که $B_۱ = \{۱,۴\}$ و $B_۲ = \{۲\}$ و $B_۳ = \{۳\}$، در این صورت $E_۲ = \{B_۱, B_۲, B_۳\}$ یک افراز ۳ عضوی برای A است.

۳- و بالاخره اگر فرض کنیم که $C_۱ = \{۱,۲\}$ و $C_۲ = \{۳,۴\}$، در این صورت $E_۳ = \{C_۱, C_۲\}$ یک افراز ۲ عضوی از A است.

مثال: برای مجموعه‌ی اعداد حقیقی، می‌توان به صورت $E = \{\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^-, \{۰\}\}$ یک افراز ۳ عضوی نوشت.

مثال: اگر مجموعه‌ی اعداد صحیح زوج را با $\mathbb{Z}_E$ و مجموعه‌ی اعداد صحیح فرد را با $\mathbb{Z}_O$ نمایش دهیم، در این صورت، $E = \{\mathbb{Z}_E, \mathbb{Z}_O\}$ یک افراز ۲ عضوی برای $\mathbb{Z}$ است.

حال با توجه به قضیه‌ای که درباره‌ی کلاس‌های هم ارزی یک رابطه‌ی هم ارزی مانند R اثبات شد و با توجه به تعریف افراز، بدیهی است که:

اگر R رابطه‌ی هم ارزی روی مجموعه‌ی ناتهی A باشد، مجموعه‌ی کلاس‌های هم ارزی رابطه‌ی R، یک افراز برای مجموعه‌ی

A است. (طبق قضیه‌ی کلاس‌های هم ارزی، هر سه خاصیت افراز را دارند.)

مثال: دیدیم که رابطه‌ی $xRy \Leftrightarrow x - y = ۳k$ یک رابطه‌ی هم ارزی روی $\mathbb{Z}$ است و کلاس‌های هم ارزی این رابطه به قرار زیرند:

$$[۰] = \{..., -۶, -۳, ۰, ۳, ۶, ...\}$$

$$[۱] = \{...., -۵, -۲, ۱, ۴, ۷, ...\}$$

$$[۲] = \{..., -۴, -۱, ۲, ۵, ۸, ...\}$$

و واضح است که $\mathbb{Z} = [۰] \cup [۱] \cup [۲]$؛ یعنی: $E = \{[۰], [۱], [۲]\}$ یک افراز $\mathbb{Z}$ است.

مثال: رابطه‌ی هم ارزی R روی $\mathbb{R}^۲$ به صورت زیر تعریف می‌شود. شکل کلاس هم ارزی $[(۰,۱)]$ را مشخص کرده و نحوه‌ی افراز $\mathbb{R}^۲$ را توسط کلاس‌های هم ارزیِ این رابطه توضیح دهید.

$$(x,y)R(z,t) \Leftrightarrow |x|+|y| = |z|+|t|$$

حل:

$$[(۰,۱)] = \{(x,y) \in \mathbb{R}^۲ \,|\, |x|+|y| = |۰|+|۱|\}$$
$$= [(x,y) \in \mathbb{R}^۲ \,|\, |x|+|y| = ۱]$$

همان طور که مشاهده می‌شود نمودار هر کلاس هم ارزی مانند $[(a,b)]$ یک مربع است که چهار رأس آن روی محورهای مختصات قرار دارد و مرکز همه‌ی این مربع‌ها (با طول اضلاع متمایز) مبدأ مختصات است و بنابراین هیچ‌کدام دیگری را قطع نمی‌کند در واقع $\mathbb{R}^۲$ توسط این مربع‌های هم مرکز افراز می‌شود.

تمرین: رابطه‌ی هم ارزیِ زیر روی $\mathbb{R}^۲$ تعریف شده این رابطه، مجموعه‌ی $\mathbb{R}^۲$ را توسط چه نمودارهایی افراز می‌کند؟

$$(x,y)R(z,t) \Leftrightarrow x^۲ + y^۲ = z^۲ + t^۲$$



مشاهده کردید که کلاس‌های هم ارزی هر رابطه‌ی هم ارزی مانند R روی مجموعه‌ی A، یک افراز برای A است. حال این سؤال پیش می‌آید که آیا عکس مطلب فوق نیز برقرار است؟ یعنی آیا به ازای هر افراز برای A، رابطه‌ای هم ارزی روی A می‌توان تعریف کرد که این افراز، همان کلاس‌های هم ارزی آن رابطه باشند؟ جواب مثبت است و برای به دست آوردن آن رابطه‌ی هم ارزی کافی است هر یک از مجموعه‌های افراز کننده را در خودش ضرب دکارتی کرده و اجتماع همه‌ی آن‌ها، همان رابطه هم ارزی است.



معرفی سایت‌های ریاضی جهان

احسان یارمحمدی

www.combinatorics.org

این سایت به معرفی یک مجله‌ی الکترونیکی ریاضی در زمینه‌ی ریاضیات گسسته می‌پردازد که دربرگیرنده‌ی موضوعات متنوع ریاضیات گسسته شامل مباحث نظریه‌ی گراف‌ها، ترکیبیات و... است.

در سمت چپ صفحه‌ی اصلی این سایت می‌توانید با اعضای دست‌اندرکار در این مجله‌ی الکترونیکی به شرح زیر آشنا شوید.

ویراستار افتخاری (Honorary Editor)

مدیران مسئول (Editors- in- Chief)

کمک ویراستاران (Associate Editors)

مدیر مسئول (Managing Editors)

هیئت تحریریه (Editorial Board)

صفحه‌ی اصلی این سایت نیز دربرگیرنده‌ی عناوین زیر است که هر یک از آن‌ها حاوی زیرعنوان‌ها و مطالب متنوع، جالب توجه و پیشرفته درباره‌ی مباحث ریاضیات گسسته است.

نمایی کلی از مجله (View the Journal)

مجلدهای فعلی و اخیر (Current and Recent Volumes)

تمام مجلدها (All Volumes)

ضمیمه‌ی نویسندگان (Index of Authors)

بازدیدهای پویا (Dynamic Surveys)

درباره‌ی مجله (About the Journal)

هدف مجله (The Purpose of the Journal)

هیئت تحریریه (Editorial Board)

اطلاعات برای نویسندگان (Information for Authors)

سایت‌های کپی برابر اصل[۱] (Mirror Sites)

ثبت نام برای دریافت اطلاعات از راه پست الکترونیک.
(Sign up to Receive Abstract Via E- mail)

نسخه‌ی چاپی از مجله (The Print Version of the Journal)

سپاس‌گزاری (Thanks)

تبادل ترکیبیات جهانی
(The World Combinatorics Exchange)

بقیه در صفحه‌ی ۲۷



مجله یکان

دوره سوم ـ شماره ۹

شماره مسلسل ۳۴

فروردین ـ اردیبهشت ۱۳۴۶

در این شماره :

ماتریس

مراحل مهم علم نجوم

مسائل حل نشده ریاضی

سرگرمیهای ریاضی

داستانهای تفننی ریاضی

مسائلی از ریاضیات جدید

مسائل امتحانات مسابقه کلاسهای چهارم و پنجم

مسائل امتحانات داخلی دبیرستانها

مسائل برای حل

حل مسائل یکان شماره ۳۳

آگهی دانشگاه صنعتی آریامهر

تاریخچه‌ی مجله‌های ریاضی ایران

غلامرضا یاسی‌پور

در شماره‌ی ۳۴ مجله‌ی یکان در مقاله‌ای با عنوان «مسائل حل نشده‌ی ریاضی» به این پارادوکس برخورد می‌کنیم:

مدیر مدرسه‌ای به شاگردان اطلاع می‌دهد که بعد از ظهر یکی از روزهای شنبه تا پنجشنبه‌ی هفته‌ی آینده، یک امتحان از آن‌ها به عمل خواهد آورد. این امتحان کاملاً غیرمترقبه خواهد بود. چنانچه صبح روزی که قرار است بعد از ظهر آن امتحان انجام گیرد، یکی از دانش‌آموزان برای مدیر شرح دهد که آن روز بعد از ظهر امتحان به عمل خواهد آمد و دلیلش را هم بگوید از انجام امتحان منصرف خواهد شد.

در تعطیلی روز جمعه، دانش‌آموزان نتیجه‌ی عجیبی به دست آوردند و صبح شنبه اول وقت، نماینده‌ی خود را نزد مدیر فرستادند. این گفت‌گویی است که بین مدیر و نماینده‌ی دانش‌آموزان انجام گرفته است:

نماینده: آقای مدیر، اجازه می‌خواهم یک موضوع را به اطلاعتان برسانم. شما اصلاً امتحان را به عمل نخواهید آورد.

مدیر: چرا؟

نماینده: اگر در نظر بگیریم که هفته‌ی آینده تا آخر روز چهارشنبه سپری شود و شما امتحان را به عمل نیاورید، در این صورت فقط یک روز پنجشنبه باقی مانده است و صبح پنجشنبه یکی از دانش‌آموزان به شما اطلاع خواهد داد که امتحان در آن روز انجام خواهد گرفت، زیرا غیر از آن روزی از هفته باقی نمانده است و شما هم بنا به قولی که داده‌اید مجبورید که در آن روز امتحان نگیرید.

مدیر: بسیار خوب، پنجشنبه را کنار می‌گذاریم. امتحان در روزی غیر از پنجشنبه انجام خواهد گرفت.

نماینده: روز چهارشنبه را هم باید کنار بگذارید، زیرا اگر تا روز سه شنبه امتحان انجام نگرفت، چون پنجشنبه را هم کنار

گذاشته‌ایم، بنابراین مسلم می‌شود که امتحان در روز چهارشنبه انجام می‌گیرد و یکی از دانش‌آموزان صبح چهارشنبه این موضوع را به شما اطلاع می‌دهد و شما هم از انجام امتحان صرف نظر می‌کنید.

مدیر: درست می‌گویید. روز چهارشنبه را هم باید کنار بگذاریم.

در اینجا مدیر کمی مکث کرد و بعد خطاب به نماینده‌ی دانش‌آموزان اظهار داشت که: شما به همین ترتیب به استدلال خود ادامه می‌دهید و نتیجه می‌گیرید که در هیچ یک از روزهای هفته امتحان انجام نخواهد گرفت. استدلال شما کاملاً صحیح است و ما نمی‌توانیم امتحانی به عمل آوریم که کاملاً غیرمترقبه باشد.

نماینده‌ی دانش‌آموزان شادی‌کنان نزد آنان آمد و موضوع را به ایشان اطلاع داد.

هرچند که مدیر مدرسه قبول کرد که نمی‌تواند در هفته‌ی معین امتحانی غیرمترقبه از دانش‌آموزان به عمل آورد و با وجود این که استدلال بالا کاملاً منطقی به نظر می‌رسد، اما عملاً چه چیزی مدیر را از انجام امتحان در یک روز هفته، مثلاً روز یکشنبه، بازخواهد داشت؟ و یک محصل از کجا بفهمد که امتحان عصر روز یکشنبه انجام خواهد گرفت؟

تناقضی وجود دارد که تاکنون درباره‌ی آن کاغذها سیاه شده است، اما هنوز پاسخ قانع‌کننده‌ای برای آن به دست نیامده است.

در این شماره از مقالات جالب شماره‌های اولیه خبری نیست و بیش‌تر مسائل امتحانات دبیرستان‌ها در آن آمده است. در شماره‌ی ۳۵ مجله به این مسئله برمی‌خوریم:

> من به فرامرز گفتم که جواد می‌گفت یک بشقاب پرنده دیده است. فرامرز جواب داد که: یک کلمه از حرف‌های جواد را باور مکن.
>
> من در جواب فرامرز گفتم: عجیب است، جواد درباره‌ی تو درست برعکس تو عقیده داشت و من به فرامرز حقیقت را گفته بودم.
>
> احتمال این‌که جواد بشقاب پرنده را دیده باشد تا چه حد است؟
>
> ترجمه‌ی داود مصحفی

و در شماره‌ی ۳۷ در مقاله‌ای با عنوان «مراحل مهم علم نجوم» در شرح حال پوانکاره چنین آمده است:

ترجمه‌ی فصلی از کتاب "L'Astronomie modern"
تالیف: TOCQUET

ژول هانری پوانکاره[1] (۱۸۵۴-۱۹۱۳) در ۲۹ آوریل ۱۸۵۴ در نانسی متولد شد. پسر عمویش ریموند پوانکاره از ۱۹۱۳ تا ۱۹۲۰ رئیس جمهور فرانسه بود. اولین بار در ۱۸۷۳ وارد مدرسه‌ی پلی‌تکنیک شد. دوره‌ی این مدرسه را با چنان درخشندگی گذراند که به افسانه بیش‌تر شباهت دارد. در ۱۸۷۸ بعد از خروج از مدرسه‌ی معادن در دانشکده‌ی کان با سمت دانشیاری شروع به آموزش آنالیز ریاضی کرد. در ۱۸۸۱ به سوربن فراخوانده شد تا تصدی کرسی مکانیک فیزیک و تجربی را بر عهده گیرد. بعداً استاد کرسی فیزیک ریاضی شد. بعد از درگذشت **تیسران** کرسی مکانیک سماوی بر عهده‌ی وی گذاشته شد. در ۱۸۸۷ به عضویت **آکادمی علوم** و در ۱۹۰۹ به عضویت **آکادمی فرانسه** برگزیده شد. غیر از آن، در بسیاری از آکادمی‌های علمی جهان عضویت داشت.

آثار هانری پوانکاره بسیار است و همه‌ی شاخه‌های ریاضی و فیزیک را دربرمی‌گیرد: آنالیز عالی، هندسه‌های غیراقلیدسی، توپولوژی، مکانیک، نجوم و فیزیک ریاضی. **لوئی دوبرگلی** می‌نویسد: «در ۵۸ سالگی از دنیا رفت درحالی‌که آثاری از خود باقی گذاشت که از نظر وسعت شگفت‌انگیز است و تقریباً غیرممکن به نظر می‌رسد که در طول عمر چنین کوتاهی این‌همه کارهای مختلف و پرارزش انجام گرفته باشد.»

در تاریخ ریاضیات، ریاضی‌دانان انگشت شماری مثل هانری پوانکاره توانسته‌اند در نظام اساسی ریاضیات تا این حد «حد اعلای امکان» تحول پدید آورند. در ریاضیات محض، قوه‌ی ابداع او اعجاب آور است. در فراهم آوردن بهترین راه‌های ابتکاری برای حل همه‌ی مسائلی که با آن‌ها مواجه می‌شد، چنان استادی و شایستگی از خود بروز داده است که همه را متحیر می‌سازد. قابلیت فوق العاده‌ای که در خلق همه نوع راه‌های تحلیلی برای بررسی مسائل داشته، نشان‌دهنده‌ی نبوغ اوست. به علاوه، استعداد شگرفی داشته که همه‌ی موضوع‌ها را در همان نظر اول در حالت کلی و عمومی در نظر می‌گرفته است. کارهای گذشتگان را به ندرت بررسی کرده است، مگر این که حداکثر بر چندتا از آن‌ها نظری سطحی افکنده باشد. برای درک کلیه‌ی قسمت‌های نظریه‌ای، مختصر اطلاعی از آن برای وی کفایت داشته است.

مثال خوبی از اساسی بودن مشاهدات وی موضوع کشف توابع فوشین است که تقریباً مربوط به اوایل زندگی علمی وی بوده و نام او را به بلندآوازه ساخته است. وقتی که پوانکاره مطالعات خود را در این باره شروع کرد و حالت کلی موضوع را در نظر گرفت، بعضی حالات خاص آن توسط ژاکوبی، هرمت و دیگر ریاضی‌دان‌ها تحت بررسی بود، اما پوانکاره از این موضوع

اطلاعی نداشت. مرحله‌ی شروع مسئله عبارت بود از پوشاندن صفحه‌ی مستوی با آجرهای به شکل متوازی الاضلاع‌های برابر. پوانکاره به مطالعه‌ی حالت کلی پرداخت و مسئله را به صورت پوشاندن یک نیم‌صفحه با مجموعه‌ای از چندضلعی‌های منحنی الخط مطرح کرد. آن‌چه وی را در نیل به هدف رهبری کرد و به یک نتیجه گیری عالی ختم شد تصویر سری‌های کاملا تازه بود (*توابع تتافوشین*).

در قسمت فیزیک، بیست موضوع که به هنگام تصدی کرسی فیزیک ریاضی دانشگاه سوربن عرضه کرد، همه را به حیرت افکند. او درباره‌ی موضوع‌های مختلف و متغیری بحث کرده است از قبیل: نیروی ارتجاع، نیروی مایعات، نظریه‌ی حرارت، ترمودینامیک، قوای شعریه، نور و الکتریسیته. وی همچون مخرج مشترک بین چند کسر به نظر می‌رسد و برهنه ساختن نظام‌های اساسی که با عنوان‌های مختلف در فیزیک ریاضی عرض وجود می‌کنند برای او همچون یک بازی بوده است.

درباره‌ی نجوم، تقریباً همه‌ی کارهای او به مکانیک سماوی مربوط می‌شود، اما هرچه کرده کاملاً تازگی داشته و هنوز به منبعی می‌ماند که استفاده از آن با همان سبکی که وی ابداع کرده، میسر است.

اولین تذکاریه‌ی وی درباره‌ی مکانیک سماوی مربوط به بررسی معادلات علم القوی است و در آن درباره‌ی مسئله‌ی مشهور «سه جسم» به بحث پرداخته است: بعد از آن آثاری درباره‌ی نظریه‌ی جزر و مد و روش‌های جدید در مکانیک سماوی منتشر کرده است. آخرین کتابش که به فرضیات آفرینش جهان اختصاص دارد و چند سال قبل از مرگش انتشار یافت، یک شاهکار علمی بی‌نظیر است. در این اثر، کلیه‌ی فرضیات مربوط به تشکیل منظومه‌ی شمسی که بعد از کانت و لاپلاس عنوان شده مجدداً مورد بحث قرار گرفته است، اما روش بررسی آن‌ها کاملاً تازه و اساسی است، وانگهی به منظومه‌ی شمس محدود نمی‌شود. او نظریه‌ی خود را تا ستارگان و سحابی‌ها گسترش داده است. **نظریه‌ی آرنیوس** (Arrhenius) را درباره‌ی امکان این که جهان به مرگ حرارتی می‌افتد با یک نظر انتقادی مؤثر و دلنشین بررسی کرده است و می‌توان **اصل کارنو** (Carnot) را به وی نسبت داد. این اثر از جهات دیگر هم پر از نظریات عالی است و از کتاب‌هایی است که باید از دیدگاهی عالی مورد قضاوت واقع شود و می‌توان آن را چکامه‌ای در علوم دانست.

نکته‌ی مهمی که از این اثر به دست می‌آید آن است که برای اولین دفعه و قبل از اینشتین، نظریه‌ی نسبیت از سوی هانری پوانکاره مطرح شده است و باید افتخار این کشف بزرگ نصیب علوم فرانسه باشد.

وی در کتاب دانش و مردم (صفحه‌ی ۲۴۰) آنجا که نتایج همه‌ی تجربیاتش را درباره‌ی مسئله بیان می‌کند چنین می‌نویسد: «ممکن است که این باشد و غیرممکن است که از این تأثیر برکنار بود. اساس نسبیت یک قانون عمومی طبیعت است. هیچ گاه و با هیچ وسیله‌ی خیالی سرعت‌ها را نمی‌توان مسلم و قطعی دانست، همه نسبی هستند و با آن وسیله سرعت‌ها را نسبت به اثر حس نمی‌کنیم، بلکه آن چه به دست می‌آوریم عبارت است از سرعت‌هایی که اجسام نسبت به یکدیگر دارند. بسیاری از آزمایش‌های مختلف نتایج یکسان داده‌اند برای این که نخواسته‌اند برای نسبیت همان ارزشی را قائل شوند که مثلاً برای قانون تعادل قائل‌اند. لازم است که در همه‌ی حالات، نوع مشاهده‌ای را که ما را به اخذ نتایج رهبری می‌کند امتحان کنیم و بالاخره بعد از کنترل آزمایش این نتایج را قبول داشته باشیم.»

نتیجه آن که در ۱۹۰۴ زمانی که اینشتین تازه کارهای قطعی خود را آغاز می‌کرده، پوانکاره بر کلیه‌ی جزئیات نظریه‌ی نسبیت احاطه داشته است. وی تمام اشکالات الکترودینامیک اجسام در حال حرکت را مطرح کرده و تمام ریزه‌کاری‌های آن را آشکارا مشخص ساخته است. عناوینی که وی بررسی کرده، عبارت‌اند از: زمان محلی لورنتز، انقباض فیتز جرالد، طرح ثابت‌های معادلات الکترومغناطیس و نتایج آزمایش **مایکلسن**.

لوئی بروگلی چنین می‌نویسد: «در این باره، پوانکاره گام قطعی را برنداشته و افتخار مشاهده‌ی همه‌ی نتایج نظریه‌ی نسبیت را به اینشتین واگذار کرده است، به خصوص تحقیق دقیق اندازه‌های طول و زمان و درک حقیقت فیزیکی مشخص ارتباطی که اساس نسبیت بین فضا و زمان مستقر می‌سازد. چرا پوانکاره بعد از اولین قدم، قدمی فراتر ننهاده است؟ وی مانند یک ریاضی‌دان محض فکر می‌کرده و به علاوه دارای اندیشه‌ی انتقادی مفرطی بوده است و در مواجهه با نظریه‌های فیزیکی رفتاری شکاک داشته است. تصورات نامحدود مختلفی وجود دارد که از لحاظ منطقی هم ارزند و دانشمندان از بین آن‌ها، مواردی را انتخاب می‌کنند که دلایل آسان‌تری را لازم داشته

باشند. به نظر می‌رسد یک چنین وضعی موجب شده است تا وی به نظریاتی که به حقیقت فیزیکی بسیار نزدیک اند و فیزیکدان‌ها در مشاهدات خود در هر حال آن‌ها را می‌پذیرند توجه نداشته باشد. از این جهت است که اینشتین، جوانی که تازه ۲۵ سال داشت و اطلاعات ریاضی او در برابر معلومات عمیق و داهیانه‌ی دانشمند فرانسوی کاملاً مقدماتی بود، موفق شد همه‌ی تجربیات جزئی سلف خود را به کار برد و به مرحله‌ای برسد که کلیه‌ی اشکالات کار را با قاطعیت استخراج کند. اندیشه‌ای قوی، کار ماهرانه‌ای را که با مشاهده‌ی عمیق حقایق فیزیکی رهبری می‌شد، به ثمر رساند.» اما به هر حال خیره‌کنندگی و شایستگی موفقیت اینشتین نباید موجب آن شود که فراموش کنیم مسئله‌ی نسبیت قبل از وی با اندیشه‌ی درخشان پوانکاره عمیقاً تجزیه و تحلیل شده است.

قبل از آن که صحبت از پوانکاره را قطع کنیم مناسب است راجع به فلسفه‌ی وی هم چند کلمه‌ای صحبت کنیم. روی هم رفته وی متفکری مستقل و نسبت به هر مکتبی بیگانه بوده و هیچ‌گاه هم مانند رنوویه، برگسون یا **ویلیام جمز** در صدد تأسیس مکتب خاصی برنیامده است. پای‌بند هیچ آیینی نبوده و از خود هم هیچ نوع آیینی اظهار نکرده است. اگر بخواهیم نوع تفکر وی را در یک کلمه خلاصه کنیم، شاید مناسب‌ترین کلمه «طرفداری سهولت عمل» باشد. وانگهی در نوشته‌هایش کلمه‌ی «سهل» پیوسته تکرار می‌شود و توضیحاتش نیز همیشه با این کلمه پایان می‌یابد.

شاید بتوان پوانکاره را جانب‌دار **فلسفه‌ی پراگماتیسم** دانست، اما کلمه‌ی «سهولت» نزد او معنای ذهنی‌تری دارد و غیر از دکترین **ویلیام جمز** است. درست است که معنا آسان را می‌رساند، اما در عین حال با بعضی داده‌های تجربی هم متناظر است.

پوانکاره یک ایده‌آلیست بوده است و همین طرز تفکر ایده‌آلی در تنظیم آثاری که همچون یک شعر قابل تحسین در ادبیات فرانسه جاودانی خواهد بود، الهام بخش وی بوده است. آخرین صفحه‌ی کتاب وی درباره‌ی ارزش دانش با این کلمات آغاز می‌شود: «چیزی که درباره‌ی آن نشود فکر کرد وجود ندارد»، یا جای دیگر در قسمتی از کتابش با حالتی کاملاً جدی، اندیشه را چنین توصیف می‌کند: «آذرخشی در نیمه‌شبی طولانی.»

پی‌نوشت

1. Jules-Henri Poincare

ادامه‌ی مطلب صفحه‌ی ۲۳



پایگاه داده‌های بسیار مدرن و توسعه‌یافته[2]

(Databases of the State-of-the-Art)

نرم‌افزار، کتاب‌ها، یادداشت‌های سخنرانی‌ها، و... جالب توجه برای ترکیبی‌دانان

(Software, Books , Lecture Notes , ete of interest to Combinatorialists)

صفحه‌های اصلی از افراد و گروه‌های ترکیباتی

(Home Page of Combinatorial People and Groups)

مواردی دیگر از مجله‌های ریاضی رایگان در اینترنت

(Some Other Free Mathematics Journals on the Internet)

همایش‌هایی در ترکیبیات و رشته‌های مرتبط

(Conferences in Combinatorecs and Related Fields)

صفحات جالب توجه دیگر برای ترکیبی‌دانان

(Other Pages of Internet to Combinatorialists)

پی‌نوشت

۱. در فرهنگ لغت انگلیسی به انگلیسی longman برای عبارت Mirror site آورده شده است:

A website that is an exact copy of another one, but which is in a different place on the internet

و برگردان این عبارت به فارسی چنین است: یک وب‌سایت که دقیقاً یک کپی از دیگری است، اما در یک مکان متفاوت در اینترنت قرار دارد.

۲. در فرهنگ لغت انگلیسی به انگلیسی Longman برای عبارت State-of-the-Art چنین آورده شده است:

State-of-the-Art: Using the most modern and recently developed methods, materials of knowledge.

و برگردان آن به فارسی این است: استفاده از روش‌های بسیار مدرن و توسعه‌یافته‌ی جدید، مواد یا دانش



رویکرد هندسی و رویکرد جبری در آموزش هندسه (۱۳)

محمد هاشم رستمی

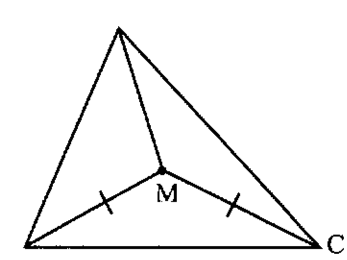
اشاره

به‌منظوراستفاده‌ی بیشتر دانش‌آموزان ارجمند از این مقاله، از شماره‌ی قبل به حل مسئله‌های هندسه در صفحه (هندسه‌ی مسطحه) پرداختیم. در این شماره ادامه‌ی این مطالب را پی می‌گیریم.

مثال ۳: سه نقطه‌ی A، B و C داده شده‌اند. نقطه‌ای در صفحه‌ی گذرنده بر این سه نقطه بیابید که از این سه نقطه به یک فاصله باشد. آیا این نقطه یکتاست؟

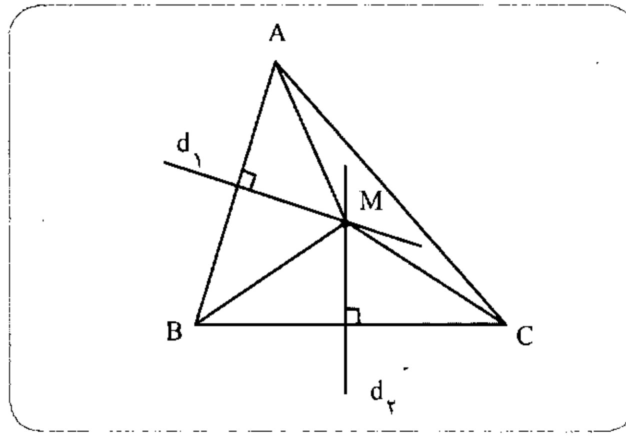
الف) حل با روش هندسی

فرض می‌کنیم مسئله حل شده باشد و نقطه‌ی M جواب مسئله باشد یعنی نقطه‌ای باشد که از سه نقطه‌ی A، B و C به یک فاصله است، یعنی داریم $MA = MB = MC$. چون $MA = MB$ است، پس نقطه‌ی M از دو نقطه‌ی A و B به یک فاصله است.

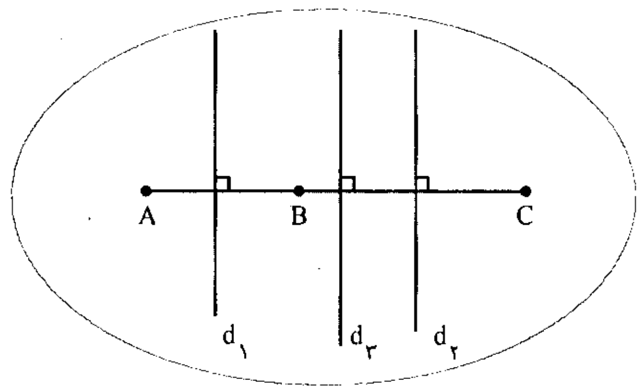


بنابراین نقطه‌ی M روی عمودمنصف پاره خط AB است. هم‌چنین $MB = MC$ است پس نقطه‌ی M از دو نقطه‌ی B و C به یک فاصله است، یعنی نقطه‌ی M روی عمودمنصف پاره خط BC است و هم‌چنین $MA = MC$ است، پس نقطه‌ی M روی عمودمنصف پاره‌خط AC قرار دارد. در نتیجه نقطه‌ی M محل برخورد عمود منصف‌های سه پاره خط AB، BC و AC است. از این جا راه حل مسئله به این صورت مشخص می‌شود:

عمودمنصف دو پاره خط از سه پاره خط AB، BC و AC را رسم می‌کنیم. برای مثال عمودمنصف پاره خط AB را رسم می‌کنیم و خط d_1 می‌نامیم. هم‌چنین عمودمنصف پاره خط BC را رسم می‌کنیم و خط d_2 می‌نامیم. نقطه‌ی برخورد این دو خط، نقطه‌ی M جواب مسئله است.

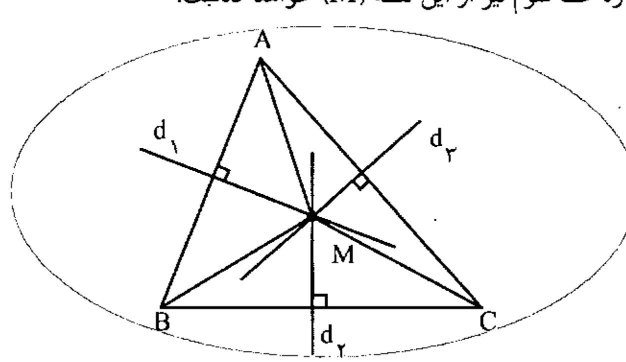


نکته‌ی ۱. خط‌های d_1 و d_2 در صورتی یکدیگر را قطع می‌کنند که سه نقطه‌ی A، B و C روی یک خط راست نباشد، زیرا اگر سه نقطه‌ی A، B و C روی یک خط راست قرار داشته باشد خط‌های d_1، d_2 و d_3 که به ترتیب عمودمنصف پاره خط‌های AB، BC و AC هستند. با هم موازی خواهند بود (شکل). چرا؟



راهنمایی. از هر نقطه یک و تنها یک خط موازی خط مفروض می‌توان رسم کرد.

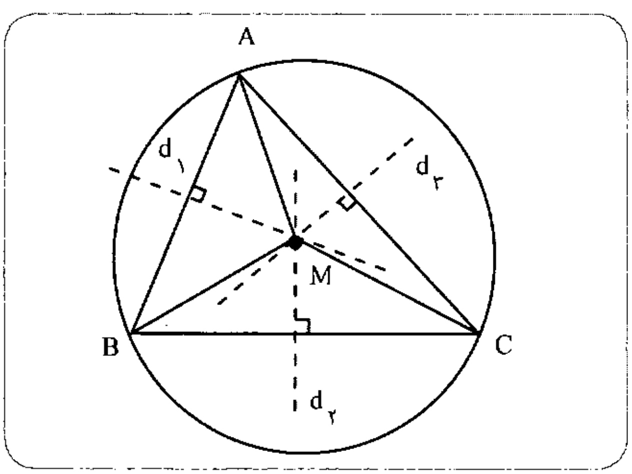
نکته‌ی ۲. هنگامی که سه نقطه‌ی A، B و C روی یک خط راست نباشد، خط‌های d_1، d_2 و d_3، یعنی همان عمودمنصف‌های پاره‌خط‌های AB، BC و AC از یک نقطه می‌گذرند (همرس‌اند). بنابراین برای تعیین نقطه‌ی M، یعنی جواب مسئله، کافی است عمودمنصف دو تا از پاره‌خط‌های AB، BC و AC، یعنی دو خط از سه خط d_1، d_2 و d_3 را رسم کنیم تا نقطه‌ی برخورد آن‌ها M به دست آید. عمودمنصف پاره خط سوم نیز از این نقطه (M) خواهد گذشت.



نکته‌ی ۳. نقطه‌ی M که از سه نقطه‌ی غیرواقع بر یک خط راست A، B و C به یک فاصله است؛ یعنی برای آن نقطه داریم $MA = MB = MC$، مرکز دایره‌ای است که بر سه نقطه‌ی A، B و C می‌گذرد. این دایره را دایره‌ی محیطی مثلث ABC می‌نامند که دایره‌ای یکتاست، یعنی بر هر سه نقطه‌ی غیر هم‌خط A، B و C تنها و تنها یک دایره می‌گذرد که مرکز آن، محل برخورد عمودمنصف‌های ضلع‌های مثلث ABC است. وجود این نقطه را دیدیم؛ یکتایی آن را هم می‌توان به سادگی ثابت کرد. بدین ترتیب که فرض می‌کنیم نقطه‌ی دیگری مانند M' وجود داشته باشد که از سه نقطه‌ی A، B و C به یک فاصله باشد؛ یعنی داشته باشیم $M'A = M'B = M'C$.

حال باید ثابت کنیم که این نقطه بر نقطه‌ی M منطبق است. از $M'A = M'B$ نتیجه می‌شود که نقطه‌ی M' روی عمودمنصف پاره خط AB، یعنی روی خط d_1 است و از $M'B = M'C$ نتیجه می‌شود که نقطه‌ی M' روی عمودمنصف پاره خط BC، یعنی روی خط d_2، است، پس M' نقطه‌ی برخورد d_1 و d_2، یعنی همان نقطه‌ی M است. به بیان دیگر، M' بر M منطبق است، پس M نقطه‌ای یکتاست.

نقطه‌ی M مرکز دایره‌ی محیطی مثلث را با حروف دیگر مانند



O، ... نیز نمایش می‌دهند.

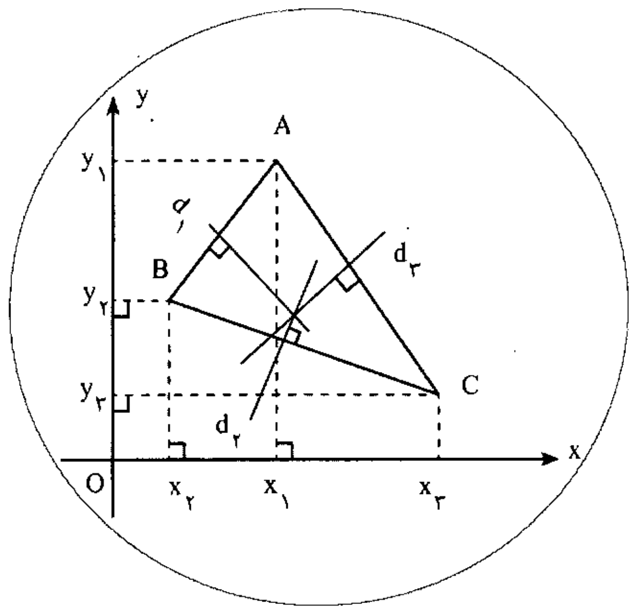
ب) اثبات با رویکرد جبری - مختصاتی

مسئله را بار دیگر بیان می‌کنیم:

سه نقطه‌ی A، B و C داده شده‌اند. نقطه‌ای در صفحه‌ی گذرنده بر این سه نقطه بیابید که از این سه نقطه به یک فاصله باشد. آیا این نقطه یکتاست؟

دستگاه مختصات قائم xoy را در صفحه‌ی گذرنده بر این سه نقطه در نظر می‌گیریم. اگر ویژگی خاصی را برای چگونگی در نظر گرفتن این دستگاه مختصات قائم در نظر نگیریم، مختصات نقطه‌های A، B و C در این دستگاه مختصات، به صورت کلی $A = (x_1, y_1)$، $B = (x_2, y_2)$ و $C = (x_3, y_3)$ خواهد بود. اکنون باید معادله‌ی

عمودمنصف‌های پاره‌خط‌های AB، BC و AC را بنویسیم و در صورتی که سه نقطه‌ی A، B و C هم‌خط نباشند، ثابت کنیم که این سه عمودمنصف همرس‌اند. نوشتن معادله‌ی عمودمنصف‌ها و اثبات همرسی آن‌ها در این دستگاه مختصات طولانی و دشوار است، بنابراین دستگاه مختصات قائم را به گونه‌ای دیگر انتخاب می‌کنیم تا محاسبات ساده‌تر شود. برای این کار روش‌های مختلفی وجود دارد.



برای مثال می‌توانیم محور xها را روی خط BC و محور yها را روی ارتفاع AH (خطی که از A بر BC عمود می‌شود) اختیار کنیم. در این صورت نقطه‌ی H مبدأ مختصات خواهد شد؛ در این دستگاه مختصات، مختصات نقطه‌های A، B و C به صورت زیر خواهد بود:

$A = (0, y_1), B = (x_2, 0), C = (x_3, 0)$

اکنون عمودمنصف‌های ضلع‌های AB، BC و AC را که به ترتیب آن‌ها را d_1، d_2 و d_3 می‌نامیم می‌نویسیم و نقطه‌ی برخورد آن‌ها را به دست می‌آوریم. داریم:

H' وسط پاره خط AB $\begin{cases} x_{H'} = \dfrac{x_A + x_B}{2} = \dfrac{0 + x_2}{2} = \dfrac{x_2}{2} \\ y_{H'} = \dfrac{y_A + y_B}{2} = \dfrac{y_1 + 0}{2} = \dfrac{y_1}{2} \end{cases}$

$$\Rightarrow H' = (\frac{x_2}{2}, \frac{y_1}{2}), m/AB = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{0 - y_1}{x_2 - 0}$$

$$= \frac{-y_1}{x_2} \Rightarrow m/d_1 = \frac{x_2}{y_1}$$

$$\Rightarrow AH': y - \frac{y_1}{2} = \frac{x_2}{y_1}(x - \frac{x_2}{2}) \quad \Rightarrow d_1: y = \frac{x_2}{y_1}x - \frac{x_2^2}{2y_1} + \frac{y_1}{2}$$

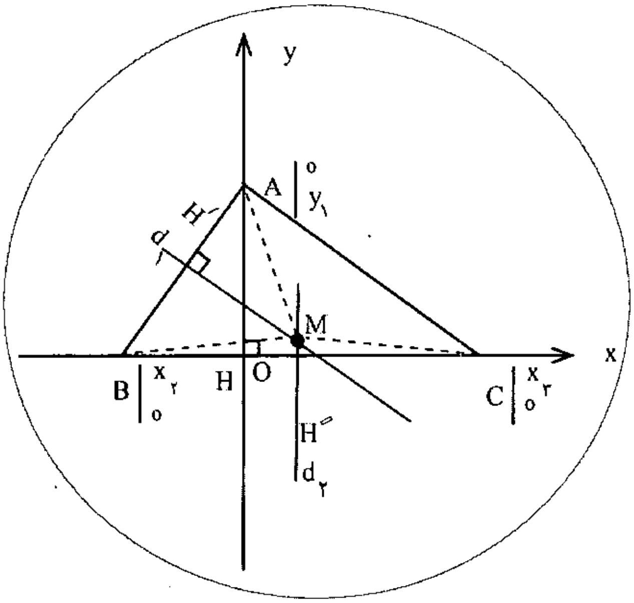
وسط پاره خط BC $H'' = (\frac{x_2 + x_3}{2}, 0)$,

$$m/AB = \frac{0 - 0}{x_2 - x_1} = 0 \Rightarrow m/d_2 \to \infty$$

$$\Rightarrow d_2: x = \frac{x_2 + x_3}{2}$$

$$\begin{cases} d_1: y = \dfrac{x_2}{y_1}x - \dfrac{x_2^2}{2y_1} + \dfrac{y_1}{2} \Rightarrow y = \dfrac{x_2}{y_1}(\dfrac{x_2 + x_3}{2}) - \dfrac{x_2^2}{2} + \dfrac{y_1}{2} \\ d_2: x = \dfrac{x_2 + x_3}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow M = (\frac{x_2 + x_3}{2}, \frac{x_2^2 + x_2x_3 - x_2^2y_1 + y_1^2}{2y_1})$$



در صورتی که معادله‌ی عمودمنصف ضلع AC که آن را d_3 می‌نامیم نیز بنویسیم، خواهیم دید که مختصات نقطه‌ی M در معادله‌ی d_3 صدق می‌کند، یعنی عمودمنصف‌های سه ضلع AB، BC و AC از مثلث ABC از یک نقطه می‌گذرند که این نقطه همان مرکز دایره‌ی محیطی مثلث ABC است.

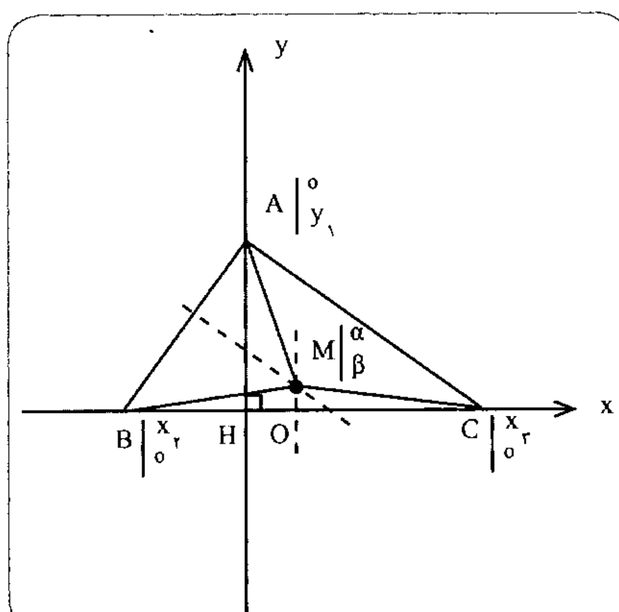
نکته‌ی مهم ۱. می‌توانیم دستگاه مختصات قائم xoy را چنان اختیار کنیم که محور xها روی خط BC و محور yها عمودمنصف پاره خط BC باشد. در این دستگاه مختصات $A = (x_1, y_1)$، $B = (x_2, 0)$ و $C = (-x_2, 0)$ خواهد بود. معادله‌ی عمودمنصف‌های پاره‌خط‌های AB، BC و AC را مانند روش بالا می‌نویسیم و نقطه‌ی برخورد آن‌ها یعنی مختصات خط‌های M را به دست می‌آوریم. محاسبه را خودتان انجام دهید.

نکته‌ی مهم ۲. پس از انتخاب دستگاه مختصات قائم مناسب، همانند

روش هندسی می‌توانیم مسئله را حل شده فرض کنیم، یعنی فرض کنیم $M = (\alpha, \beta)$ نقطه‌ی جواب مسئله است، یعنی نقطه‌ای است که برای آن داریم $MA = MB = MC$. در این صورت ثابت می‌کنیم که این نقطه روی عمودمنصف‌های پاره خط‌های AB، BC و AC (ضلع‌های مثلث ABC) قرار دارد. برای این کار اگر BC محور xها، و ارتفاع AH محور yها اختیار شده باشند، یعنی $A = (0, y_1)$، $B = (x_2, 0)$ و $C = (x_3, 0)$ باشند، داریم:

$$MA = MB \Rightarrow MA^2 = MB^2$$
$$\Rightarrow (0-\alpha)^2 + (y_1-\beta)^2 = -(x_2-\alpha)^2 + (0-\beta)^2$$
$$\Rightarrow \alpha^2 + y_1^2 + \beta^2 - 2\beta y_1 = x_2^2 + \alpha^2 - 2\alpha x_2 + \beta^2$$
$$\Rightarrow 2\alpha x_2 - 2\beta y_1 + y_1^2 - x_2^2 = 0$$

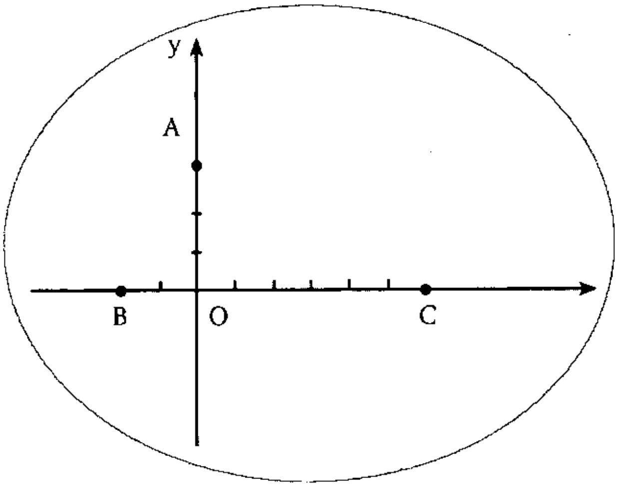
این معادله، معادله‌ی عمودمنصف پاره خط AB است ($\beta = y$ ،$\alpha = x$).
به همین ترتیب از $MB = MC$ و جایگذاری برحسب مختصات نقطه‌ها معادله‌ی عمود منصف پاره خط BC به دست می‌آید. هم‌چنین معادله‌ی عمودمنصف پاره خط AC را از $MA = MC$ می‌توان به دست آورد. این سه عمودمنصف از یک نقطه می‌گذرند. از آن جا راه حل مسئله همانند روش جبری مشخص می‌شود، یعنی مشخص می‌شود که برای تعیین مختصات نقطه‌ی M کافی است معادله‌ی عمودمنصف‌های دو پاره خط از پاره‌خط‌های AB، BC و AC را بنویسیم و نقطه‌ی برخورد آن‌ها را به دست آوریم.
(مختصات نقطه‌ی M جواب مسئله)



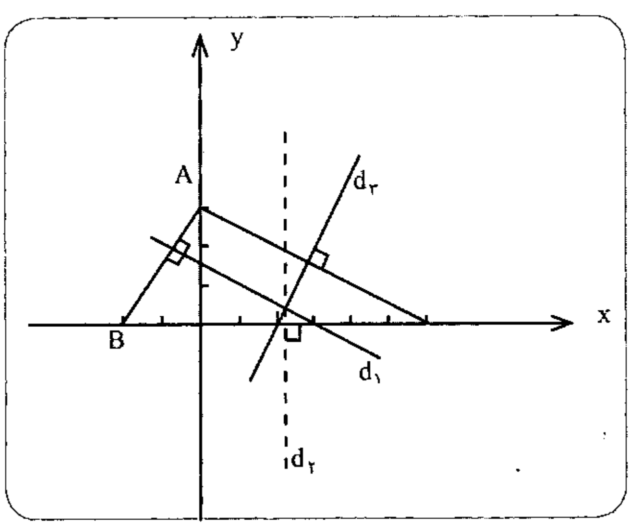
نکته‌ی مهم ۳. اگر سه نقطه‌ی A، B و C هم‌خط باشند به سادگی با نوشتن معادله‌ی عمودمنصف‌های پاره خط‌های AB، BC و AC دیده می‌شود که این سه عمودمنصف موازی‌اند.

اینک به چند مثال از رویکرد جبری مختصاتی توجه کنید.

مثال ۱: سه نقطه‌ی $A = (0, 4)$، $B = (-2, 0)$ و $C = (6, 0)$ در دستگاه مختصات قائم xoy داده شده‌اند. نقطه‌ی M را در این صفحه‌ی مختصات چنان بیابید که از سه نقطه‌ی A، B و C به یک فاصله باشند.



حل: سه نقطه‌ی A، B و C را دو به دو به هم وصل می‌کنیم. عمودمنصف‌های پاره‌خط‌های AB، BC و AC را به ترتیب d_1، d_2 و d_3 می‌نامیم. می‌دانیم d_1 مکان هندسی نقطه‌ای از صفحه‌ی مختصات است که از دو نقطه‌ی A و B به یک فاصله و d_2 مکان هندسی نقطه‌ی از صفحه‌ی مختصات است که از B و C به یک فاصله است، هم‌چنین d_3 مکان هندسی نقطه‌ای از صفحه‌ی مختصات است که از A و C به یک فاصله است. پس نقطه‌ی M محل برخورد این سه عمودمنصف است. که همرس‌اند، زیرا سه نقطه‌ی داده‌شده‌ی A، B و C هم‌خط نیستند (روی یک خط راست قرار ندارند). بنابراین معادله‌ی دو خط از سه خط d_1، d_2 و d_3 را می‌نویسیم و مختصات نقطه‌ی برخورد آن‌ها را که همان نقطه‌ی M است به دست می‌آوریم:



$A = (0, 4), B = (-2, 0), C = (6, 0)$

وسط پاره خط AB $H_1 = (-1, 2), m/AB = \frac{0-4}{-2-0} = 2$

$\Rightarrow m/d_1 = -\frac{1}{2}$

$\Rightarrow d_۱: y-۲=-\frac{۱}{۲}(x+۱) \Rightarrow d_۱: y=-\frac{۱}{۲}x+\frac{۳}{۲}$

$H_۲=(۲,۰)$ وسط پاره خط BC، $m/BC=۰$

$\Rightarrow m/d_۲ \to \infty \Rightarrow d_۲: x=۲$

$$\begin{matrix} d_۱: \\ d_۲: \end{matrix}\begin{cases} y=-\frac{۱}{۲}x+\frac{۳}{۲} \\ x=۲ \end{cases} \Rightarrow M=(۲,\frac{۱}{۲})$$ نقطه‌ی جواب مسئله

نکته‌ی ۱: اگر بخواهیم، می‌توانیم درستی جواب را با محاسبه‌ی اندازه‌ی پاره‌خط‌های MA، MB و MC امتحان کنیم.

$$MA=\sqrt{(۰-۲)^۲+(۴-\frac{۱}{۲})^۲}=\frac{\sqrt{۶۵}}{۲}$$

$$MB=\sqrt{(-۲-۲)^۲+(۰-\frac{۱}{۲})^۲}=\frac{\sqrt{۶۵}}{۲}$$

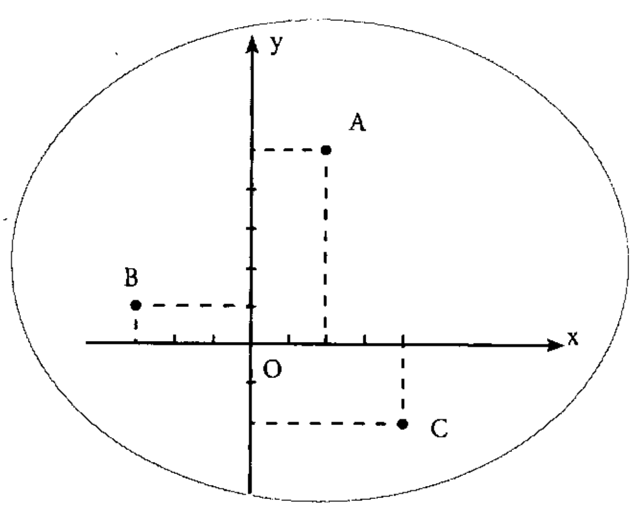
$$MC=\sqrt{(۶-۲)^۲+(۰-\frac{۱}{۲})^۲}=\frac{\sqrt{۶۵}}{۲}$$

$$\Rightarrow MA=MB=MC=\frac{\sqrt{۶۵}}{۲}$$

پس محاسبه‌ها درست بوده است.

نکته‌ی ۲: مختصات نقطه‌های A، B و C نشان می‌دهند که پاره خط BC روی محور xها و رأس A روی محور yها که در این‌جا، ارتفاع نظیر رأس A است، قرار دارد. به همین علت محاسبه‌ها ساده‌تر از حالتی است که نقطه‌ها روی محورها نباشند.

مثال ۲: سه‌نقطه‌ی $A=(۲,۵)$، $B=(-۳,۱)$ و $C=(۴,-۲)$ در دستگاه مختصات قائم xoy داده شده‌اند. نقطه‌ی M را در صفحه‌ی این دستگاه مختصات چنان بیابید که از سه نقطه‌ی A، B و C به یک فاصله باشند.



حل: سه نقطه‌ی A، B و C را دو به دو به هم وصل می‌کنیم و عمودمنصف‌های پاره‌خط‌های AB، BC و AC را به ترتیب $d_۱$، $d_۲$ و $d_۳$ می‌نامیم. می‌دانیم که نقطه‌ی جواب مسئله که آن را M می‌نامیم، محل برخورد یا نقطه‌ی همرسی این سه خط است، پس معادله‌ی دو خط از این سه خط را می‌نویسیم و مختصات نقطه‌ی M محل برخورد آن‌ها را به دست می‌آوریم. داریم:

$A=(۲,۵), B=(-۳,۱), C=(۴,-۲)$

$H'=(-\frac{۱}{۲},۳)$ وسط پاره خط AB،

$$m/AB=\frac{۱-۵}{-۳-۲}=\frac{۴}{۵}$$

$$\Rightarrow m/d_۱=-\frac{۵}{۴} \Rightarrow d_۱: y-۳=-\frac{۵}{۴}(x+\frac{۱}{۲})$$

$$\Rightarrow d_۱: y=-\frac{۵}{۴}x+\frac{۱۹}{۸}$$

$H''=(\frac{۱}{۲},-\frac{۱}{۲})$ وسط پاره‌خط BC،

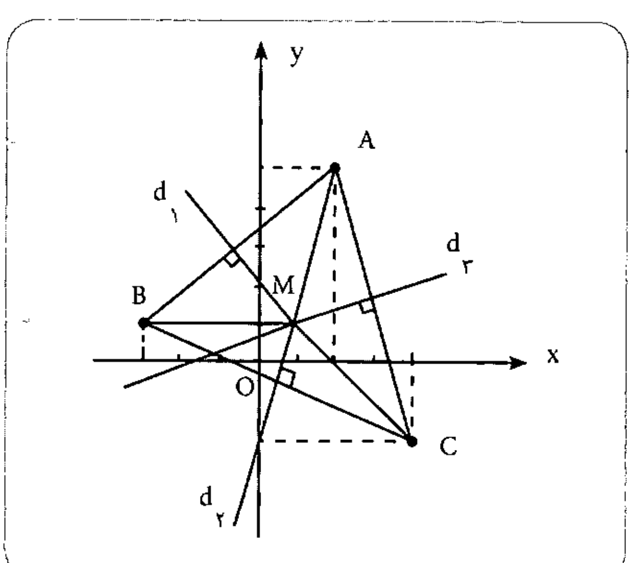
$$m/BC=\frac{-۲-۱}{۴+۳}=\frac{-۳}{۷} \Rightarrow m/d_۲=\frac{۷}{۳}$$

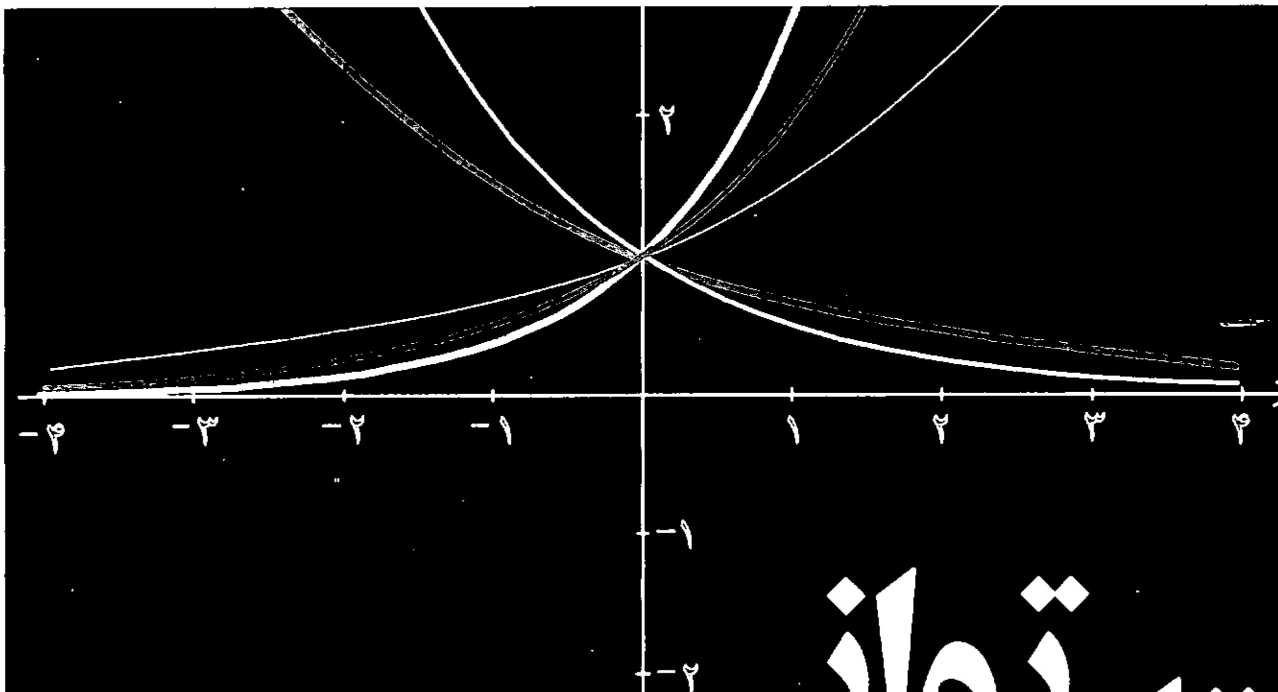
$$\Rightarrow d_۲: y+\frac{۱}{۲}=-\frac{۷}{۳}(x-\frac{۱}{۲}) \Rightarrow d_۲: y=\frac{۷}{۳}x-\frac{۵}{۳}$$

$$\begin{matrix} d_۱: \\ d_۲: \end{matrix}\begin{cases} y=-\frac{۵}{۴}x+\frac{۱۹}{۸} \\ y=\frac{۷}{۳}x-\frac{۵}{۳} \end{cases} \Rightarrow -\frac{۵}{۴}x+\frac{۱۹}{۸}=\frac{۷}{۳}x-\frac{۵}{۳}$$

$$\Rightarrow \frac{۴۳}{۱۲}x=\frac{۹۷}{۱۲} \Rightarrow x=\frac{۹۷}{۸۶} \Rightarrow y=\frac{۷}{۳}\times\frac{۹۷}{۸۶}-\frac{۵}{۳}$$

$$\Rightarrow y=\frac{۸۳}{۸۶} \Rightarrow M=(\frac{۹۷}{۸۶},\frac{۸۳}{۸۶})$$





تابع توانی

میرشهرام صدر

(سال دوم متوسطه)

اشاره: در این مقاله ابتدا به معرفی توان حقیقی اعداد می‌پردازیم، سپس تابع توانی را معرفی می‌کنیم و رسم نموداری این تابع را با ضابطه‌های مختلف با حل چند مسئله توضیح خواهیم داد.

توان حقیقی

فرض کنیم a عددی حقیقی و مثبت و x یک عدد حقیقی دلخواه باشد. برای محاسبه‌ی a^x سه حالت در نظر می‌گیریم.

حالت اول: $x \in \mathbb{Z}$

در صورتی که x عددی صحیح و مثبت باشد، داریم:

$$a^x = \underbrace{a \times a \times \ldots \times a}_{x \text{ مرتبه}}$$

چنان‌چه $x = ۰$ داریم: $a^x = ۰$

و در حالتی که x عددی صحیح و منفی باشد، داریم:

$$x \in \mathbb{Z}^- \Rightarrow -x \in \mathbb{Z}^+$$

$$a^x = \frac{۱}{a^{-x}} = \underbrace{\frac{۱}{a} \times \frac{۱}{a} \times \ldots \times \frac{۱}{a}}_{-x \text{ مرتبه}}$$

برای مثال:

$$۲^{-۵} = \frac{۱}{۲^{-(-۵)}} = \frac{۱}{۲^۵} = \underbrace{\frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۲} \times \ldots \times \frac{۱}{۲}}_{-(-۵) \text{ مرتبه}}$$

حالت دوم: $x \in \mathbb{Q} - \mathbb{Z}$

چنان‌چه x عددی گویا و ناصحیح باشد، در این صورت $x = \frac{m}{n}$ که در آن $n \neq ۰$ و $m, n \in \mathbb{Z}$ داریم:

$$a^x = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \qquad (\frac{m}{n} > ۰)$$

برای مثال:

$$۲^{\frac{۳}{۵}} = \sqrt[۵]{۲^۳} = \sqrt[۵]{۸}$$

$$۲^{-\frac{۳}{۵}} = \frac{۱}{۲^{\frac{۳}{۵}}} = \frac{۱}{\sqrt[۵]{۸}} \times \frac{\sqrt[۵]{۸^۴}}{\sqrt[۵]{۸^۴}} = \frac{\sqrt[۵]{۸^۴}}{۸}$$

حالت سوم: $x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$

حال به توان اصم اعداد می‌پردازیم. برای تعریف دقیق توان اصم اعداد، نیاز به ذکر مباحثی از دنباله‌ها و سایر مطالب ریاضی داریم که از ورود به آن پرهیز می‌کنیم. با این حال می‌کوشیم به قسمی این قبیل توان‌ها را معرفی کنیم. برای مثال، عددی به صورت $۳^{\sqrt{۲}}$ را در نظر می‌گیریم. این توان باید به گونه‌ای تعریف شود که در قوانین عمومی توان که قبلاً یادآوری کردیم، صدق کند. می‌دانیم $\sqrt{۲}$ تقریباً برابر ۱/۴۱۴۲۱۳۵۶۲ است. بنابراین $\sqrt{۲}$ بین ۱ و ۱/۵ است. پس $۳^{\sqrt{۲}}$ نیز باید بین $۳^۱$ و $۳^{۱/۵}$ باشد. بنابراین $۳^{\sqrt{۲}}$ عددی بین ۳ و ۵/۱۹۶۱۵ خواهد بود.

$$۳ < ۳^{\sqrt{۲}} < ۵/۱۹۶۱۵$$

اما فاصله از ۳ تا ۵/۱۹۶۱۵ خیلی زیاد است و باید با تقریب‌های

بهتری از $\sqrt{۲}$ این فاصله را کم‌تر کنیم. این بار $\sqrt{۲}$ را بین ۱/۴ و ۱/۴۲ مورد توجه قرار می‌دهیم. پس $۳^{\sqrt{۲}}$ نیز عددی بین $۳^{۱/۴}$ و $۳^{۱/۴۲}$ خواهد بود. با محاسبه‌ی این دو عدد با ماشین حساب، به تقریب بهتر زیر برای $۳^{\sqrt{۲}}$ می‌رسیم:

$$۳^{۱/۴۲} \cong ۴/۷۵۸۹ \qquad ۳^{۱/۴} = ۴/۶۵۵۵۳$$

بنابراین $۳^{\sqrt{۲}}$ عددی بین ۴/۶۵۵۵۳ و ۴/۷۵۸۹ است. فاصله‌ای که در این حالت به دست آوردیم، خیلی کوتاه‌تر از فاصله‌ی به دست آمده در حالت قبلی است. اگر بخواهیم این تقریب را بهتر کنیم و فاصله‌ای کوتاه‌تر به دست آوریم، باید از تقریب‌های بهتر $\sqrt{۲}$ استفاده کنیم. برای مثال:

$$۱/۴۱۴ < \sqrt{۲} < ۱/۴۱۴۳$$

در این حالت داریم:

$$۴/۷۲۷۶ \simeq ۳^{۱/۴۱۴} < ۳^{\sqrt{۲}} < ۳^{۱/۴۱۴۳} \simeq ۴/۷۲۹۲۵$$

در این تقریب دیده می‌شود که تا دو رقم اعشار، می‌توان $۳^{\sqrt{۲}}$ را برابر ۴/۷۲ در نظر گرفت. به هر حال از آن‌جا که بسط $\sqrt{۲}$ نامختوم است، می‌توانیم $\sqrt{۲}$ را بین دو عددی که خیلی به هم نزدیک باشند قرار دهیم و بدین ترتیب $۳^{\sqrt{۲}}$ را با تقریب بسیار خوبی محاسبه کنیم. اگر بتوانیم اختلاف دو عدد گویایی را که برای تقریب $\sqrt{۲}$ به کار می‌بریم، به ۰ نزدیک کنیم. مقادیر تقریبی برای $۳^{\sqrt{۲}}$ به حدی میل خواهد کرد که آن حد، مقدار $۳^{\sqrt{۲}}$ است.

گاه این سؤال مطرح می‌شود که $۳^{\sqrt{۲}}$ چه‌قدر است؟ این سؤال وارد نیست، زیرا $۳^{\sqrt{۲}}$ برای خود عددی است که به مقدار آن از طریق حد نزدیک می‌شویم. مقادیر تقریبی آن را نیز قبلاً به دست آوردیم. توان‌های اصم نیز در همان قوانین عمومی توان صدق می‌کنند. فقط به یاد داشته باشید برای آن‌که توانی به صورت a^x (x یک عدد اصم است) قابل تعریف باشد، لازم است $a > ۰$. پس a باید مثبت باشد، زیرا برای تعریف a^x باید a را به توان اعداد گویایی که به x نزدیک می‌شوند، برسانیم و چون ممکن است هر عدد گویایی به جای x قرار گیرد، باید a هم به گونه‌ای باشد که جمله‌ی بی‌معنا به دست نیاید. ساده‌ترین شرطی که می‌توان برای این منظور اعمال کرد، همان مثبت بودن a است.

تابع توانی

تعریف: عدد حقیقی و مثبت a (به طوری که $a \neq ۱$) را در نظر بگیرید. تابع با ضابطه‌ی زیر را تابع نمایی می‌گوییم.

$$\begin{cases} f:\mathbb{R} \to (۰,\infty) \\ f(x) = a^x \quad (a > ۰, a \neq ۱) \end{cases}$$

مسئله‌ی ۱: در تابع نمایی فرض کنید $۰ < a < ۱$. در این صورت a بزرگ‌تر است یا $a^۲$؛ $a^۵$ بزرگ‌تر است یا $a^۶$؛ به طور کلی با بزرگ و بزرگ‌تر شدن x، مقدار $f(x) = a^x$ چه تغییری می‌کند؟

حل: هرگاه عددی بزرگ‌تر از ۱ باشد؛ مربعش از آن عدد بزرگ‌تر است، یعنی $x > ۱ \Rightarrow x^۲ > x$. بنابراین داریم:

$$۰ < a < ۱ \Rightarrow \frac{۱}{a} > ۱ \Rightarrow (\frac{۱}{a})^۲ > \frac{۱}{a} \Rightarrow \frac{۱}{a^۲} > \frac{۱}{a}$$
$$\Rightarrow a^۲ < a$$

$$۰ < a < ۱ \Rightarrow \frac{۱}{a} > ۱ \Rightarrow (\frac{۱}{a})^۶ > (\frac{۱}{a})^۵ \Rightarrow \frac{۱}{a^۶} > \frac{۱}{a^۵}$$
$$\Rightarrow a^۶ < a^۵$$

با بزرگ و بزرگ‌تر شدن مقدار x حاصل $f(x) = a^x$ کوچک و کوچک‌تر می‌شود، زیرا فرض کنیم m و n دو عدد طبیعی باشند به طوری که $n>m$؛ در این صورت داریم:

$$۰ < a < ۱ \Rightarrow \frac{۱}{a} > ۱ \Rightarrow (\frac{۱}{a})^n > (\frac{۱}{a})^m \Rightarrow \frac{۱}{a^n} > \frac{۱}{a^m}$$
$$\Rightarrow a^n < a^m$$

برای روشن‌تر شدن مطلب، فرض کنیم $۰ < a = \frac{۱}{۳} < ۱$. در این صورت با توجه به جدول زیر ملاحظه می‌کنید که با بزرگ‌تر شدن مقدار x، حاصل $f(x) = (\frac{۱}{۳})^x$ کوچک‌تر می‌شود.

$$f(-۱) = (\frac{۱}{۳})^{-۱} = (۳^{-۱})^{-۱} = ۳$$

$$f(-۲) = (\frac{۱}{۳})^{-۲} = (۳^{-۱})^{-۲} = ۳^۲ = ۹$$

$$f(-۳) = (\frac{۱}{۳})^{-۳} = (۳^{-۱})^{-۳} = ۳^۳ = ۲۷$$

x	...	-۳	-۲	-۱	۰	۱	۲	۳	۴	...
$f(x) = (\frac{۱}{۳})^x$	...	۲۷	۹	۳	۱	$\frac{۱}{۳}$	$\frac{۱}{۹}$	$\frac{۱}{۲۷}$	$\frac{۱}{۸۱}$	...

هم‌چنین با دقت در این جدول ملاحظه می‌کنیم که هر چه مقدار x کوچک‌تر می‌شود، حاصل $f(x) = (\frac{۱}{۳})^x$ بزرگ‌تر خواهد شد.

مثال: نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x) = (\frac{۱}{۲})^x$ را رسم کنید.

حل: نمودار این تابع را به کمک نقطه‌یابی و با استفاده از جدول ذیل رسم می‌کنیم.

$$x = ۱ \Rightarrow f(۱) = (\frac{۱}{۲})^۱ = \frac{۱}{۲};$$

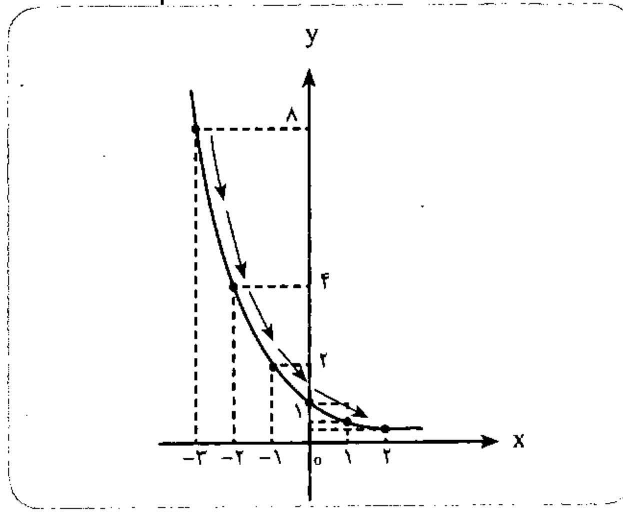
$$x = ۲ \Rightarrow f(۲) = (\frac{۱}{۲})^۲ = \frac{۱}{۴};$$

$$x = ۰ \Rightarrow f(۰) = (\frac{۱}{۲})^۰ = ۱;$$

$$x = -۲ \Rightarrow f(-۲) = (\frac{۱}{۲})^{-۲} = (۲^{-۱})^{-۲} = ۴;$$

$$x = -۳ \Rightarrow f(-۳) = (\frac{۱}{۲})^{-۳} = (۲^{-۱})^{-۳} = ۸$$

x	-3	-2	-1	0	1	2
$f(x) = (\frac{1}{2})^x$	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

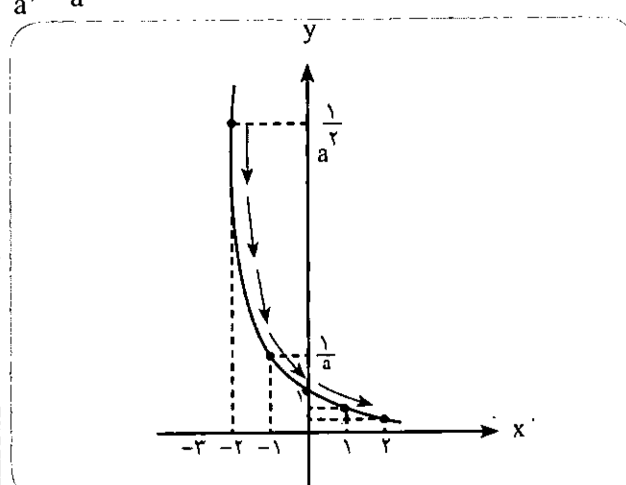


توجه: نمودار تابع $f(x) = a^x$ برای $0 < a < 1$ شبیه به نمودار تابع $y = (\frac{1}{2})^x$ است، زیرا در این تابع با افزایش x مقدار $f(x) = a^x$ کاهش می‌یابد.

	x	-2	-1	0	1	2
$(0 < a < 1)$	$f(x) = a^x$	$\frac{1}{a^2}$	$\frac{1}{a}$	1	a	a^2

چون $0 < a < 1$، پس طبق مسئله‌ی ۱ داریم:

$$\frac{1}{a^2} > \frac{1}{a} > 1 > a > a^2$$



مسئله‌ی ۲: در تابع نمایی فرض کنید $a > 1$، در این صورت a بزرگ‌تر است یا a^2؛ a^5 بزرگ‌تر است یا a^6؛ به طور کلی با بزرگ و بزرگ‌تر شدن x، حاصل $f(x) = a^x$ چه تغییری می‌کند؟

حل: اگر دو طرف نابرابری $a>b$ را در عدد مثبت $c > 0$ ضرب کنیم، داریم $ac>bc$. بنابراین خواهیم داشت:

$$a > 1 \xrightarrow{(a>0)} a \times a > 1 \times a \Rightarrow a^2 > a$$

(می‌دانید که چرا $a > 0$؟ زیرا $a > 1$ و $1 > 0$ پس $a > 0$)

اکنون اگر دو طرف رابطه‌ی $a^2 > a$ را در $a^4 > 0$ ضرب کنیم، داریم:

$$a^2 \times a^4 > a \times a^4 \Rightarrow a^6 > a^5$$

با بزرگ و بزرگ‌تر شدن مقدار x، حاصل $f(x) = a^x$ بزرگ و بزرگ‌تر می‌شود.

برای روشن‌تر شدن مطلب فرض کنیم $a = 3 > 1$، در این صورت با توجه به جدول زیر ملاحظه می‌کنیم که با بزرگ‌تر شدن مقدار x، حاصل $f(x) = 3^x$ بزرگ‌تر می‌شود.

$$f(-1) = 3^{-1} = \frac{1}{3}; f(-2) = 3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9};$$
$$f(-3) = 3^{-3} = \frac{1}{3^3} = \frac{1}{27}$$

x	-3	-2	-1	0	1	2
$f(x) = 3^x$	$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	3	9

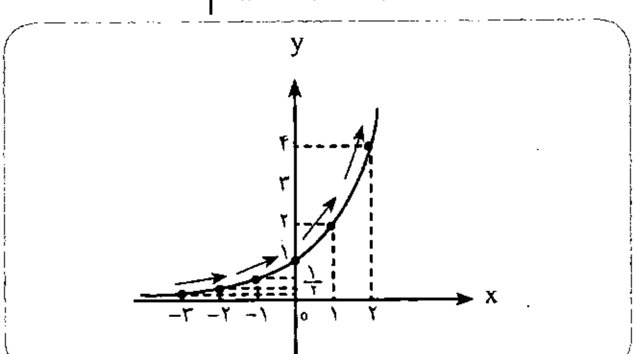
هم‌چنین با دقت در این جدول ملاحظه می‌کنیم که هر چه مقدار x کوچک‌تر شود، حاصل $f(x) = 3^x$ کوچک‌تر خواهد شد.

مثال: نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x) = 2^x$ را رسم کنید.

حل: نمودار تابع را با استفاده از نقطه‌یابی و به کمک جدول ذیل رسم می‌کنیم:

$$x = 1 \Rightarrow f(1) = 2^1 = 2; x = 2 \Rightarrow f(2) = 2^2 = 4;$$
$$x = 0 \Rightarrow f(0) = 2^0 = 1; x = -1 \Rightarrow f(-1) = 2^{-1} = \frac{1}{2};$$
$$x = -2 \Rightarrow f(-2) = 2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4};$$
$$x = -3 \Rightarrow f(-3) = 2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$$

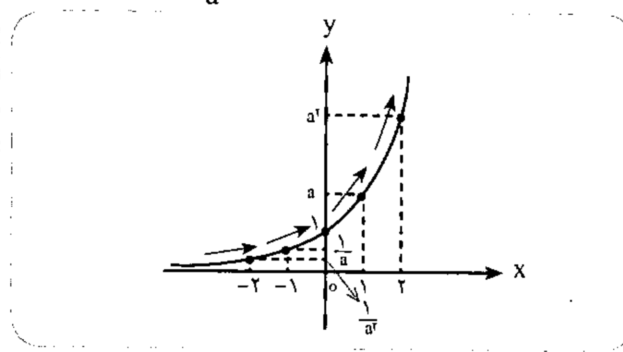
x	-3	-2	-1	0	1	2
$f(x) = 2^x$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4



توجه: نمودار تابع $f(x) = a^x$ برای $a > ۱$، شبیه به نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x) = ۲^x$ است، زیرا در این تابع با افزایش x، مقدار $f(x) = a^x$ افزایش می‌یابد.

x	-۲	-۱	۰	۱	۲
$(a>۱)\ \ f(x) = a^x$	$\frac{۱}{a^۲}$	$\frac{۱}{a}$	۱	a	$a^۲$

چون $a > ۱$، پس طبق مسئله‌ی ۲ داریم: $a^۲ > a > ۱ > \frac{۱}{a} > \frac{۱}{a^۲}$



مسئله‌ی ۳: آیا تابع نمایی با ضابطه‌ی $f(x) = \begin{cases} \mathbb{R} \to (۰,\infty) \\ f(x) = a^x \end{cases}$ یک به یک و پوشاست.

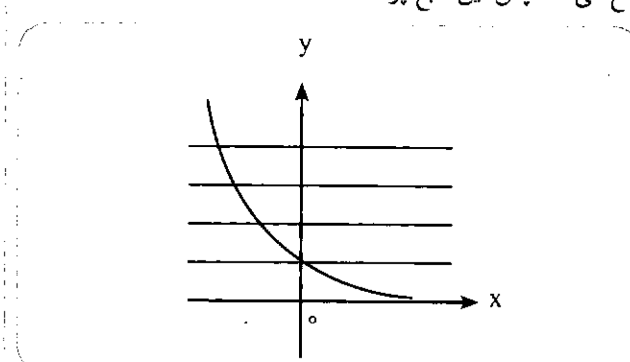
حل: مسئله را در دو حالت $a > ۱$، $۰ < a < ۱$ بررسی می‌کنیم.

حالت اول) $۰ < a < ۱$، در این صورت با توجه به نمودار این تابع ملاحظه می‌کنیم که هر خط افقی نمودار تابع را در یک نقطه قطع می کند، پس تابع یک به یک است، از طرفی به کمک تعریف ریاضی تابع یک به یک داریم:

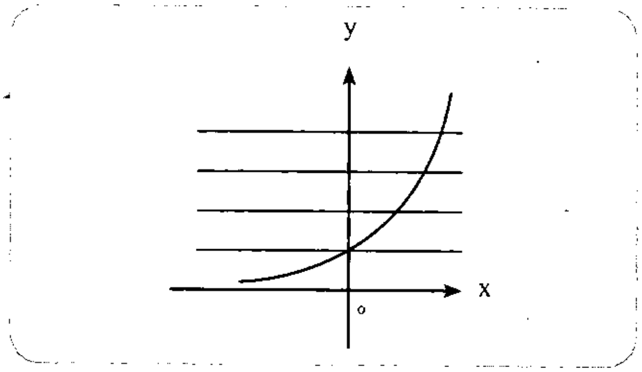
$f(x_۱) = f(x_۲) \Rightarrow a^{x_۱} = a^{x_۲} \Rightarrow x_۱ = x_۲$

در نتیجه $f(x) = a^x$ یک به یک است.

وقتی بازه‌ی $(۰,\infty)$ را روی محور yها مشخص و از هر نقطه‌ی این بازه خطی موازی محور xها رسم کنیم، این خط نمودار تابع را قطع می‌کند. پس این تابع پوشاست.

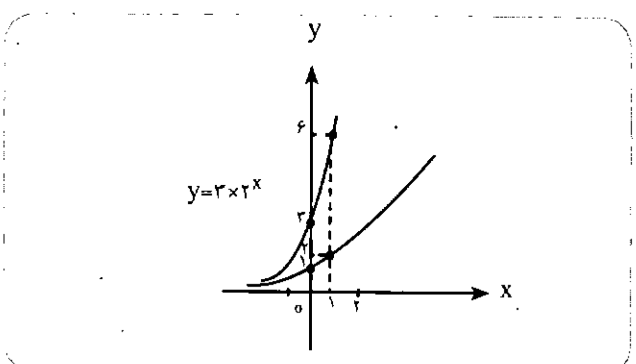


حالت دوم) $a > ۱$، در این صورت با توجه به نمودار این تابع ملاحظه می‌کنیم که هر خط افقی نمودار تابع را حداکثر در یک نقطه قطع می‌کند. پس تابع یک به یک است، هم‌چنین وقتی بازه‌ی $(۰,\infty)$ را روی محور yها مشخص و از هر نقطه‌ی آن خطی موازی محور xها رسم کنیم، این خط نمودار تابع را قطع می‌کند، پس در این حالت نیز تابع پوشاست.



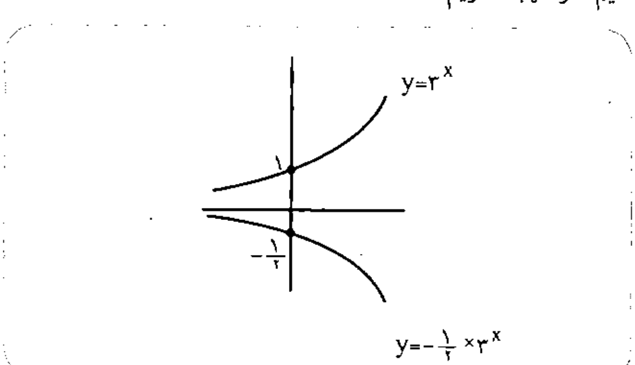
مسئله‌ی ۴: نمودار تابع با ضابطه‌ی $y = ۳ \times ۲^x$ را رسم کنید.

حل: کافی است به ازای هر x مقدار ۲^x را که روی منحنی $y = ۲^x$ قرار دارد، در ۳ ضرب کنیم تا نقطه‌ی مربوط به همان x روی منحنی $y = ۳ \times ۲^x$ به دست آید.



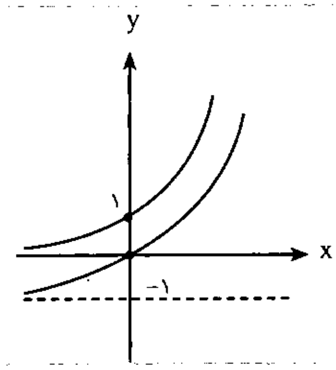
مسئله‌ی ۵: نمودار تابع با ضابطه‌ی $y = \frac{-۱}{۲} \times ۳^x$ را رسم کنید.

حل: کافی است نقاط روی نمودار $y = ۳^x$ را در $\frac{-۱}{۲}$ ضرب کنیم. در نتیجه داریم:



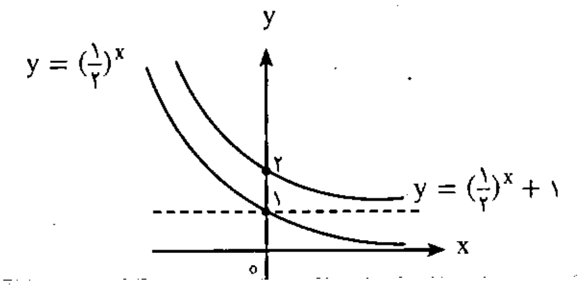
مسئله‌ی ۶: نمودار تابع با ضابطه‌ی $y = ۲^x - ۱$ را رسم کنید.

حل: کافی است نمودار تابع با ضابطه‌ی $y = ۲^x$ را ۱ واحد در امتداد محور yها و به سمت پایین انتقال دهیم.



مسئله‌ی ۷: نمودار تابع با ضابطه‌ی $y = (\frac{1}{2})^x + 1$ را رسم کنید.

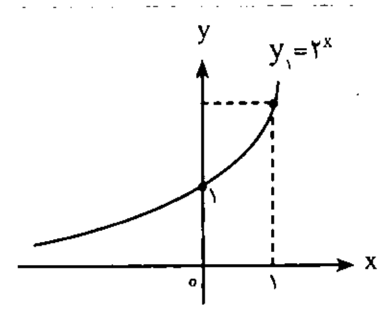
حل: کافی است نمودار تابع ضابطه‌ی $y = (\frac{1}{2})^x$ را در امتداد محور yها، ۱ واحد به سمت بالا انتقال دهیم.



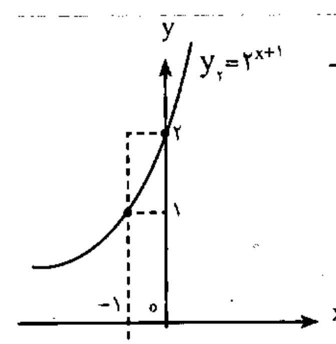
مسئله‌ی ۸: نمودار تابع با ضابطه‌ی $y = \frac{1}{3}2^{x+1} - 1$ را رسم کنید.

حل: نمودارهای زیر مراحل شکل‌گیری نمودار تابع بالا را نشان می‌دهند.

مرحله‌ی اول

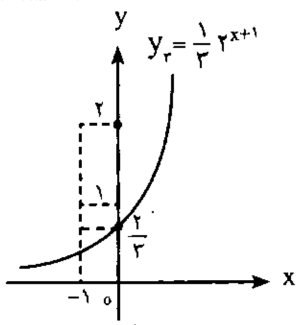


مرحله‌ی دوم

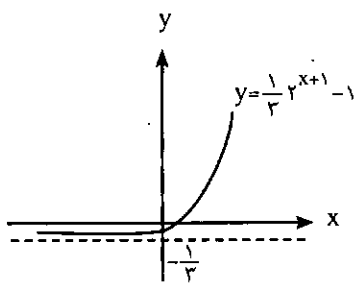


نمودار $y_1=2^x$ را در امتداد محور xها، ۱ واحد به سمت چپ انتقال دادیم.

مرحله‌ی سوم



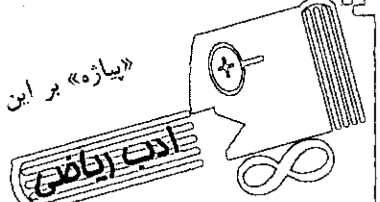
عرض هر نقطه‌ی نمودار $y_2=2^{x+1}$ را در $\frac{1}{3}$ ضرب کردیم.



نمودار y_3 را در امتداد محور yها، ۱ واحد به طرف پایین انتقال دادیم.

نتیجه: با ترکیب مطالبی که تا به حال خوانده‌ایم، می‌توانیم نمودار توابعی به صورت $y = a \times b^{x+c}$ را رسم کنیم. برای رسم نمودار این قبیل توابع کافی است ابتدا نمودار تابع $y = b^x$ را رسم کنیم، سپس با انتقال c- واحد در امتداد محور xها، نمودار تابع $y = b^{x+c}$ را به دست آوریم و سرانجام با ضرب عرض نقاط در مقدار a به نمودار $y = a \times b^{x+c}$ برسیم.

***



«پیاژه» بر این باور است که تصورها و اعمال منطقی ذهن و به‌طور کلی، هوش انسان، زاییده‌ی درونی‌شدن اعمال او است. به‌عقیده‌ی پیاژه، تشریح حقایق و مفاهیم ریاضی، به‌صورتی که در روش تدریس زبان معمول است، برای دانش‌آموز کافی نیست. برای آن‌که تصورهای حاصله، دقیق و مفاهیم مورد نظر روشن باشند، دانش‌آموز باید شخصاً به تجربه و آزمایش بپردازد و اشیا را از نزدیک دستکاری کند.



آشنایی با بسته‌ی نرم‌افزاری مَتِمَتیکا (۲) Mathematica

دکتر محمدعلی فریبرزی عراقی
عضو هیئت علمی گروه ریاضی دانشگاه
آزاد اسلامی، واحد تهران مرکزی

کلید واژه‌ها: دستورالعمل‌های Simplify، Expand، Factor، Coefficient، Roots، Solve، List

مقدمه

در کتاب ریاضیات ۱، سال اول متوسطه دانش‌آموزان با اعمال ریاضی روی عبارت‌های جبری، ساده‌کردن عبارت‌ها و تجزیه‌کردن آن‌ها به حاصل‌ضرب عوامل اول و هم‌چنین اتحادهای جبری آشنا می‌شوند. این‌گونه عملیات که به صورت دستی انجام می‌شوند و در اکثر موارد نیاز به ابتکار عمل و تفکر زیادی دارند، در بسته‌ی نرم‌افزاری مَتمتیکا به سادگی انجام می‌گیرد. در این قسمت به معرفی دستورالعمل‌های اصلی در این بسته‌ی نرم‌افزاری که مربوط به محاسبات روی عبارت‌های جبری است، می‌پردازیم. مجدداً توصیه می‌شود خوانندگان گرامی هم‌زمان با مطالعه‌ی این سری از مقالات دستورالعمل‌های معرفی شده را روی رایانه‌ی خود در

محیط مَتمتیکا اجرا کنند تا بهتر با عملکرد این دستورها آشنا شوند. بیش‌تر مسائل داخل کتاب درسی را می‌توانید به عنوان تمرین با به‌کارگیری این دستورالعمل‌ها حل کنید و پاسخ نهایی را در اختیار داشته باشید.

در قسمت قبلی شما را با چند عمل مقدماتی و هم‌چنین محیط بسته‌ی نرم‌افزاری مَتمتیکا آشنا کردیم. در پنجره Basic Math Input که در صفحه‌ی اصلی متمتیکا قابل نمایش است، نمادهای بسیاری از اعمال مهم ریاضی از جمله توان‌رسانی، ریشه‌گیری، کسر و... مشخص شده‌اند. نمادهای دیگر این پنجره در قسمت‌های بعدی معرفی خواهند شد. یادآوری می‌شود که برای محاسبه‌ی هر سلول به‌طور هم‌زمان، باید دکمه‌های shift+Enter را فشار دهیم.

ابتدا چند دستورالعمل مقدماتی را معرفی می‌کنیم.

۱. دستور [عبارت] Simplify عبارت داخل کروشه را به ساده‌ترین صورت ممکن ساده می‌کند.

مثال:

$$\mathbf{Simplify}\left[\frac{1}{3(1+x)}-\frac{-1+2x}{6(1-x+x^2)}+\frac{2}{3(1+\frac{1}{3}(-1+2x)^2}\right]$$

$$\frac{1}{1+x^3}$$

$\mathbf{Simplify[x^4+4x^3y-15y^3x-6x^3y+4xy^3+7x^4]}$

$8x^4+4xy^3-2x^3y-15xy^3$

۲. دستور [فرض، عبارت] Simplify تحت فرض داده شده در داخل کروشه، عبارت موردنظر را ساده می‌کند.

مثال:

Simplify[Sqrt[x ^ 2], x > 0]

x

Simplify[Sqrt[x ^ 2], x < 0]

−x

۳. دستور [عبارت] Expand حاصل عبارت داخل کروشه را گسترش می‌دهد.

مثال:

Expand[(a + b) ^ 6]

$a^6+6a^5b+15a^4b^2+20a^3b^3+15a^2b^2+6ab^5+b^6$

Expand[(1 + x + y)(2 - x) ^ 3]

$8-4x-6x^2+5x^3-x^4+8y-12xy+6x^2y-x^3y$

$\mathbf{Expand[(1+\sqrt{x})\wedge 6]}$

$1+6\sqrt{x}+15x+20x^{3/2}+15x^2+6x^{5/2}+x^3$

توجه شود که علامت «^» به معنای توان‌رسانی است و (a+b)^6 همان $(a+b)^6$ است.

۴. دستور [عبارت] Factor، عبارت داخل کروشه را به شکل حاصل‌ضربی از عوامل اول تجزیه می‌کند. در این حالت اگر عبارت داخل کروشه تجزیه‌ناپذیر باشد، خود عبارت در خروجی مشخص می‌شود.

مثال:

Factor[x ^ 5 - y ^ 5]

$(x-y)(x^4+x^3y+x^2y^2+xy^3+y^4)$

Factor[Power[a,4] + Power[b,4]]

a^4+b^4

Factor[2x ^ 6 - 8y ^ 10]

$2(x^3-2y^5)(x^3+2y^5)$

$\mathbf{Factor[x^2+xy-6y^2+x+13y-6]}$

$-6+x+x^2+xy+13y-6y^2$

۵. دستور [جمله، عبارت] Coefficient ضریب جمله‌ی بیان‌شده‌ی داخل کروشه را در عبارت مفروض مشخص می‌کند. هم‌چنین دستور [n، جمله، عبارت] Coefficient ضریب $(\text{جمله})^n$ را در عبارت داخل کروشه مشخص می‌کند.

مثال: فرض کنید می‌خواهیم ضریب x^2y^4 را در عبارت $(2x+3y)^6$ بدانیم. برای این‌کار از دستور فوق به صورت زیر استفاده می‌کنیم و با اجرای آن ضریب این جمله را به دست می‌آوریم:

Coefficient[(2x + 3y) ^ 6, x ^ 2y ^ 4]

4860

حال فرض کنید می‌خواهیم ضریب جمله‌ی a^3 را در عبارت $(a-2)^{10}$ بدانیم. در این حالت به صورت زیر از دستور فوق استفاده می‌کنیم:

Coefficient[(a - 2) ^ 10, a, 3]

-15360

با استفاده از این دستور می‌توانید هر یک از ضرایب بسط دو جمله‌ای نیوتن به صورت کلی $(a+b)^n$ را به دست آورید. مجدداً یادآوری می‌شود برای به‌کارگیری عمل توان‌رسانی هم می‌توانید از پنجره‌ی Basic Math Input و نماد $\blacksquare^{\square}$ استفاده کنید و هم

می‌توانید از نماد «^» یا دستورالعمل Power که قبلاً معرفی شد، بهره گیرید.

۶. دستور [جمله، عبارت] Exponent توان جمله‌ی مذکور در داخل کروشه را در عبارت مفروض بیان می‌کند.

مثال:

$$\mathbf{Exponent[(1+x^2)^3 - (y+x^2+ax^3)^2, x]}$$

6

$$\mathbf{Exponent[6a^3 - 24ab^2 - 4a^2b + 5b^3, ab^2]}$$

1

۷. دستور [متغیر و عبارت] Collect

جملاتی را که در عبارت داده شده دارای توان یکسانی نسبت به متغیر مفروض هستند، دسته‌بندی می‌کند.

مثال:

$$\mathbf{Collect[ax+by+cx, x]}$$

$$(a+c)x+by$$

$$\mathbf{Collect[(1+a+x)^4, x]}$$

$$1+4a+6a^2+4a^3+a^4+(4+12a+12a^2+4a^3)x$$
$$+(6+12a+6a^2)x^2+(4+4a)x^3+x^4$$

۸. دستور [عبارت] Together عبارت داخل کروشه را به شکل یک کسر نمایش می‌دهد.

مثال:

$$\mathbf{Together[\frac{1}{x+1}+\frac{2}{x^2-1}]}$$

$$\frac{1}{-1+x}$$

مثال: برای نمایش عبارت $\frac{x^2}{x^2-1}+\frac{x}{x^2-1}$ به شکل یک کسر به صورت زیر از این دستور استفاده می‌شود. این دستور نتیجه را به صورت یک کسر ساده شده اعلام می‌کند. توجه کنید که می‌توان برای ورود کسرها هم از نماد/ و هم از نماد $\frac{\blacksquare}{\square}$ در پنجره‌ی Basic Math Input استفاده کرد.

$$\mathbf{Together[x^2/(x^2-1)+x/(x^2-1)]}$$

$$\frac{x}{-1+x}$$

هم‌چنین به مثال‌های زیر نیز توجه کنید:

$$\mathbf{Together[\frac{x^3-2x^2}{x^2-25}\times\frac{5x+10}{x^2-2x}]}$$

$$\frac{5x(2+x)}{-25+x^2}$$

$$\mathbf{Together[\frac{4}{x^2+x}+\frac{1}{x^2+3x+2}]}$$

$$\frac{8+5x}{x(1+x)(2+x)}$$

۹. دستور [عبارت] Apart، عبارت داخل کروشه را به شکل مجموعی از کسرهای جزئی تجزیه می‌کند.

$$\mathbf{Apart[1/((1+x)(5+x))]}$$

$$\frac{1}{4(1+x)}-\frac{1}{4(5+x)}$$

$$\mathbf{Apart[\frac{x}{x^3-1}]}$$

$$\frac{1}{3(-1+x)}+\frac{1-x}{3(1+x+x^2)}$$

۱۰. دستور [عبارت] Cancel عوامل مشترک در صورت و مخرج عبارت داخل کروشه را حذف می‌کند.

مثال:

$$\mathbf{Cancel[\frac{x^2-5x+6}{5x-10}]}$$

$$\frac{1}{5}(-3+x)$$

البته از دستور Simplify نیز می‌توان استفاده کرد.

مثال:

$$\mathbf{Cancel[\frac{x^2+5x+6}{x^2+3x+2}]}$$

$$\frac{3+x}{1+x}$$

در ادامه، چند دستورالعمل تکمیلی دیگر را معرفی می‌کنیم:

به منظور ورود یک عبارت برای استفاده از هر کدام از دستورالعمل‌های فوق به جای تایپ عبارت در داخل کروشه، می‌توان نامی برای عبارت در نظر گرفت و سپس با استفاده از این نام در داخل کروشه به جای کل عبارت فقط نام آن را تایپ کرد. در این حالت، باید بعد از تایپ عبارت علامت ; را تایپ کرد.

مثال:

$$\mathbf{p = x^8 - 41x^4 + 400;}$$

Factor[p]

$$(-2+x)(2+x)(-5+x^2)(4+x^2)(5+x^2)$$

در مثال زیر یک چندجمله‌ای با دو متغیر به نام poly معرفی شده و با استفاده از دستور Collect یک بار نسبت به متغیر x و یک بار نسبت به متغیر y دسته‌بندی شده است.

$$poly = ۱+۲x+۳y+۴xy+۵x^۲y+۶xy^۲+۷x^۲y^۲;$$

Collect[poly, x]

$$1+3y+x(2+4y+6y^2)+x^2(5y+7y^2)$$

Collect[poly,y]

$1+2x+(3+4x+5x^2)y+(6x+7x^2)y^2$

۱۱. دستورالعمل‌های [... ,Polynomial GCD [P1, P2 و [... ,Polynomial LCM [P1, P2 به ترتیب بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک و کوچک‌ترین مضرب مشترک عبارت‌های داخل کروشه را مشخص می‌کنند. توجه شود هنگام استفاده از این دستورها حروفی که به صورت بزرگ در دستور آمده‌اند به همین شکل تایپ شوند.

مثال:

PolynomialGCD[x ^ 2 - 1, x ^ 3 - 1, x ^ 2 + x - 2]

$-1+x$

در مثال زیر، بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک و کوچک‌ترین مضرب مشترک دو عبارت $(x-y)^۳(x+y)$ و $(x^۲-y^۲)^۲(۳x^۲)$ به دست آمده‌اند.

PolinomialGCD[(x - y) ^ 3(x + y), (x ^ 2 - y ^ 2) ^ 2(3x ^ 2)]

$(-x+y)^2(x+y)$

PolynomialLCM[(x - y) ^ 3(x + y), (x ^ 2 - y ^ 2) ^ 2(3x ^ 2)]

$3x^2(x-y)^3(x+y)^2$

در دو مثال زیر ابتدا دو چندجمله‌ای p و q معرفی و سپس بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک و کوچک‌ترین مضرب مشترک آن‌ها با به‌کارگیری دو دستور فوق محاسبه شده‌اند.

$\mathbf{p = 2x^4 - 15x^3 + 39x^2 - 40x + 12;}$

$\mathbf{q = 4x^4 - 24x^3 + 45x^2 - 29x + 6;}$

a = PolinomialGCD[p,q]

$-6+17x-11x^2+2x^3$

b = PolynomialLCM[p,q]

$(-2+x)(6-29x+45x^2-24x^3+4x^4)$

$\mathbf{p = (x-1)(x-2)^2(x-3)^3;}$

$\mathbf{q = (x-1)^2(x-2)(x-3)^4;}$

PolynomialGCD[p,q]

$(-3+x)^3(-2+x)(-1+x)$

PolynomialLCM[p,q]

$(-3+x)^4(-2+x)^2(-1+x)^2$

۱۲. دستور [متغیر و عبارت] CoefficientList فهرستی از تمام ضرایب توان‌های متغیر مفروض را در عبارت داخل کروشه مشخص می‌کند.

مثال:

$\mathbf{CoefficientList[(x+1)^{10}, x]}$

{1,10,45,120,210,252,210,120,45,10,1}

۱۳. دستور [متغیر و معادله] Roots ریشه‌های معادله‌ی مفروض را نسبت به متغیر مربوط مشخص می‌کند. در این حالت باید هنگام ورود معادله از دو تساوی متوالی استفاده کرد. برای مثال:

$x^۲+x-۱==۰$

در خروجی، کلیه ریشه‌های معادله برای متغیر x مشخص و بین ریشه‌ها علامت || درج می‌شود.

مثال:

$\mathbf{Roots[x^2 + x - 1 == 0, x]}$

$x == \frac{1}{2}(-1-\sqrt{5}) \,||\, x == \frac{1}{2}(-1+\sqrt{5})$

Roots[x ^ 3 - x ^ 2 - x + 1 == 0, x]

$x == -1 \,||\, x == 1 \,||\, x == 1$

$\mathbf{Roots[(x^2 - 5)(x+2)^3 == 0, x]}$

$x == -2 \,||\, x == -2 \,||\, x == -2 \,||\, x == \sqrt{5} \,||\, x == -\sqrt{5}$

$\mathbf{Roots[x^4 + x^3 - 8x^2 - 5x + 15 == 0, x]}$

$x == \frac{1}{2}(-1-\sqrt{13}) \,||\, x == \frac{1}{2}(-1+\sqrt{13}) \,||\, x == \sqrt{5} \,||\, x == -\sqrt{5}$

۱۴. دستور [متغیر، معادله] Solve، معادله‌ی داخل کروشه را نسبت به متغیر مفروض حل می‌کند. اگر معادله برحسب x و حاصل a باشد، خروجی به صورت {{x → a}} مشخص می‌شود. توجه شود مشابه دستور قبلی باید برای ورود معادله به جای = از == استفاده کرد. اگر معادله فقط دارای یک متغیر باشد نیازی به معرفی متغیرنیست، ولی اگر در معادله بیش از یک متغیر وجود داشته باشد، لازم است که نام متغیر مشخص شود.

Solve[4x + 5 == -6x + 7]

$\{\{x \rightarrow \frac{1}{5}\}\}$

Solve[2xy == 3a + y, a]

$\{\{a \rightarrow \frac{1}{3}(2xy - y)\}\}$

از دستور Solve برای حل دستگاه معادلات هم می‌توان استفاده کرد. به مثال‌های زیر توجه کنید:

مثال: می‌خواهیم دستگاه دو معادله دو مجهولی $\begin{cases}\mathbf{2x - 3y = 4}\\ \mathbf{-x + y = 5}\end{cases}$ را حل کنیم. برای این کار معادلات را داخل کروشه تایپ و بین آن‌ها علامت && را قرار می‌دهیم. پس از اجرا، جواب‌های دستگاه مشخص می‌شوند.

Solve[2x - 3y == 4 & & - x + y == 5]

{{x → -19, y → -14}}

مثال: می‌خواهیم دستگاه سه معادله سه مجهولی ذیل را حل کنیم:

$$\begin{cases} 2x + y - z = 3 \\ x + 4y - 3z = -1 \\ 7x - 2y - z = 0 \end{cases}$$

با استفاده از دستور Solve، درون کروشه هر سه معادله را تایپ و بین آن‌ها علامت && را قرار می‌دهیم. پس از اجرا جواب‌های دستگاه به دست می‌آیند:

Solve[2x + y - z == 3 && x + 4y - 3z == -1 && 7x - 2y - z == 0]

$\{\{x \to \frac{33}{10}, y \to \frac{13}{2}, z \to \frac{101}{10}\}\}$

۱۵. دستورالعمل‌های PolynomialQuotient[P,S,x] و PolynomialRemainder[P,S,x] به ترتیب خارج‌قسمت و باقی‌مانده‌ی تقسیم چند جمله‌ای P را بر چند جمله‌ای S نسبت به متغیر x مشخص می‌کنند.

مثال: می‌خواهیم خارج‌قسمت و باقی‌مانده‌ی تقسیم $P = x^۵ - ۷x^۴ + ۳x^۲ - ۵x + ۹$ را بر $S = x^۲ + ۱$ به دست آوریم. با تایپ‌کردن این دو چندجمله‌ای و به‌کارگیری دو دستور فوق، نتیجه به صورت زیر حاصل می‌شود. توجه کنید که باید بعد از معرفی هر چندجمله‌ای نماد ; را تایپ کنید.

$p = x^5 - 7x^4 + 3x^2 - 5x + 9$;

$s = x^2 + 1$;

q = PolynomialQuotient[p, s, x]

$10 - x - 7x^2 + x^3$

r = PolynomialRemainder[p, s, x]

$-1 - 4x$

۱۶. دستور [عناصر] List فهرستی از اشیا را نمایش می‌دهد که می‌توان شامل اعداد یا حروف باشد. مزیت این دستور آن است که هر نوع عمل ریاضی را به راحتی می‌توان روی آن انجام داد. برای مثال، دستور $\frac{1}{\text{List}}$ تمام عناصر موجود در داخل کروشه را معکوس می‌کند یا دستور $\sqrt{\text{List}}$ جذر تمام عناصر موجود در List را می‌گیرد. هم‌چنین می‌توان بین دو فهرست یک عمل حسابی چون جمع را نیز انجام داد. در این حالت عناصر دو فهرست نظیر به نظیر با هم جمع می‌شوند.

مثال:

List = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}

{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}

1 / List

$\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \frac{1}{9}, \frac{1}{10}\}$

List^2

{1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100}

$\sqrt{\text{List}}$

$\{1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{7}, \sqrt{8}, \sqrt{9}, \sqrt{10}\}$

List1 = {1, 2, 3, 4, 5};

List2 = {2, 3, 2, 3, 2};

List1 + List2

{3, 5, 5, 7, 7}

در قسمت بعد به معرفی توابع اصلی در مَتمَتیکا و رسم نمودار توابع می‌پردازیم.

تمرین

پاسخ تمرینات زیر را در محیط بسته‌ی نرم‌افزاری مَتمتیکا[1] به دست آورید:

۱. سه عبارت $p = \frac{۲x + ۳}{۵x - ۷}$، $q = \frac{۷x - ۲}{۳x + ۱}$ و $r = \frac{x^۲}{x^۲ + ۱}$ را با هم جمع و نتیجه را در یک کسر بیان کنید.

۲. حاصل $(x + y + z)^۳$ را به دست آورید.

۳. بزرگ‌ترین مقسوم علیه مشترک و کوچک‌ترین مضرب مشترک عبارت‌های زیر را به دست آورید:

$a^۳ - b^۳ \ , \ (a - b)^۳ \ , \ (a^۲ - b^۲)(a + b)$

۴. ریشه‌های معادله‌ی $x^۵ - ۴x^۳ + x^۲ - ۴ = ۰$ را بیابید. هم‌چنین عبارت $p = x^۵ - ۴x^۳ + x^۲ - ۴$ را به صورت حاصل‌ضرب عوامل اول بنویسید.

۵. فهرست $\text{List} = \{۱, ۲, ۳, ..., ۱۰\}$ مفروض است حاصل $\text{List}^۳ + ۲^{\text{List}}$ را به دست آورید.

۶. مقدار تقریبی عدد پی را تا ۱۵ رقم اعشار بیابید.

پی‌نوشت

1. Mathematica

منابع

۱. کتاب درسی ریاضیات ۱ سال اول متوسطه، ۱۳۸۹

2. Mathematica, second edition, Eugene Don, ph.D., Schaum's Outline Series, McGrowHill, 2009

ماتریس مجاورت گراف‌های ساده

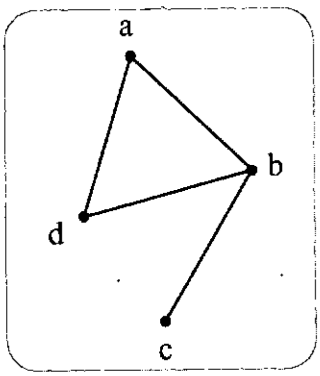
حمیدرضا امیری

اگر G گرافی ساده با مجموعه‌ی رئوس زیر باشد:

$$V = \{V_1, V_2, \cdots, V_i, \cdots, V_j, \cdots, V_P\}$$

ماتریس مربعی M از مرتبه‌ی P را طوری تعریف کنیم که هر سطر آن متناظر با یک رأس G و نیز هر ستون آن متناظر با یک رأس G (سطر iام و ستون iام متناظر با رأس V_i) تعریف شود و درایه‌ی m_{ij} را ۱ در نظر بگیریم هرگاه دو رأس V_i و V_j مجاور باشند و صفر در نظر بگیریم هرگاه این دو رأس مجاور نباشند، در این صورت ماتریس M ماتریس مجاورت گراف G نامیده می‌شود.

مثال: ماتریس مجاورت گراف ساده‌ی زیر را تعریف کنید.



$$M = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۱ & ۰ & ۰ \end{bmatrix} \end{array}$$

ویژگی‌های ماتریس مجاورت گراف‌های ساده

۱. ماتریس مجاورت هر گراف ساده‌ی ماتریسی متقارن است (درایه‌های بالا و پایین قطر اصلی، نسبت به قطر قرینه‌اند).

۲. تمام درایه‌های روی قطر اصلیِ هر ماتریس مجاورت صفر می‌باشند.

۳. تعداد یک‌های موجود روی هر سطر (یا ستون) با درجه‌ی رأس متناظر با آن سطر (یا ستون) برابر است.

۴. تعداد کل یک‌های موجود در ماتریس مجاورت گراف ساده‌ی G برابر است با مجموع درجات رئوس گراف G و برابر است با ۲q.

۵. اگر گراف G رأس ایزوله داشته باشد به‌ازای آن رأس ایزوله، یک سطر و ستون نظیر آن صفر است.

۶. اگر ماتریس M متناظر با گراف کامل K_p باشد تمام درایه‌های غیرواقع بر قطر اصلی M یک می‌باشند.

۷. تعداد یک‌های واقع بر ماتریس مجاورت متناظر با گراف ساده‌ی G از مرتبه‌ی p و اندازه‌ی q، برابر است با ۲q و تعداد صفرهای آن $(p^۲-۲q)$ است.

۸. تعداد صفرهای ماتریس مجاورت M متناظر با درخت T از مرتبه‌ی p و اندازه‌ی q، برابر است با $(q^۲+۱)$.

ویژگی‌های مربع ماتریس‌های مجاورت

اگر M ماتریس مجاورت متناظر با گراف ساده‌ی G باشد و $M \times M = M^۲$ مربع این ماتریس، در این صورت داریم:

۱. هر درایه‌ی واقع بر قطر اصلی $M^۲$ با درجه‌ی رأس متناظر با سطر (یا ستون) آن درایه برابر است.

۲. مجموع درایه‌های روی قطر اصلی ماتریس $M^۲$ همان مجموع درجات رئوس G بوده و برابر است با ۲q.

۳. اگر $m_{ij}^۲$ درایه‌ی غیرواقع بر قطر اصلی ماتریس $M^۲$ باشد $(i \neq j)$ در این صورت $m_{ij}^۲$ برابر است با تعداد مسیرهای به‌طول ۲ از رأس V_i به رأس V_j.

۴. اگر $G=K_p$ در این صورت هر درایه‌ی روی قطر اصلی $M^۲$، برابر است با $(P-۱)$ و هر درایه‌ی غیرواقع بر قطر اصلی $M^۲$، برابر است با $(P-۲)$.

۵. اگر $G=K_p$ در این صورت مجموع درایه‌های ماتریس $M^۲$، برابر است با $p(p-۱)^۲$.

آزمون ۱. اگر M ماتریس مجاورت درخت T_p بوده و مجموع درایه‌های روی قطر اصلی $M^۲$ برابر با ۱۸ باشد ماتریس M چند درایه‌ی صفر دارد؟

۱) ۵۰ ۲) ۳۷

۳) ۶۵ ۴) ۸۲

حل: گزینه‌ی (۴) زیرا،

$۸۲ = q^۲+۱ =$ تعداد صفرهای M $\Rightarrow q = ۹ \Rightarrow ۱۸ = ۲q$

آزمون ۲. کدام نمی‌تواند قطر اصلی مربع ماتریس مجاورت گراف ساده‌ی G باشد؟

۱) $\begin{bmatrix} ۳ & & & \\ & ۳ & & \\ & & ۲ & \\ & & & ۲ \end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix} ۳ & & & \\ & ۲ & & \\ & & ۲ & \\ & & & ۱ \end{bmatrix}$

۳) $\begin{bmatrix} ۲ & & & \\ & ۲ & & \\ & & ۱ & \\ & & & ۱ \end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix} ۳ & & & \\ & ۳ & & \\ & & ۲ & \\ & & & ۱ \end{bmatrix}$

حل: گزینه‌ی (۴) زیرا، درایه‌های قطر اصلی $M^۲$ همان درجات رئوس ماتریس G می‌باشند و دنباله‌ی S:۳,۳,۲,۱ گرافیکال نیست. (دو رأس ماکزیمم دارد و حداقل درجه‌ی هر رأس باید ۲ باشد).

مثال ۱: اگر M ماتریس مجاورت گراف کامل K_p باشد و درایه‌ی واقع بر سطر دوم و ستون سوم ماتریس $M^۲$، برابر با ۵ باشد مطلوب است:

الف) تعداد یال‌های این گراف

ب) مجموع درایه‌های ماتریس $M^۲$

حل: چون ۵ درایه‌ی غیرواقع بر قطر اصلی است پس باید p−۲=۵ یا p=۷ و داریم:

الف) $q = \frac{p(p-۱)}{۲} = ۲۱$

ب) مجموع درایه‌های $M^۲$ = $p(p-۱)^۲ = ۷ \times ۶^۲ = ۲۵۲$

آزمون ۳. اگر ماتریس M دارای ۶ سطر و ۱۱ درایه‌ی صفر باشد در این صورت مقدار Δ (ماکزیمم درجه‌ی گراف) کدام عدد می‌تواند باشد.

۱) ۶ ۲) ۵

۳) ۴ ۴) ۳

حل: گزینه‌ی (۲) زیرا، از ۱۱ درایه‌ی صفر، ۶ درایه روی قطر اصلی قرار دارد، حال اگر ۵ صفر باقی‌مانده را بخواهیم روی ۶ سطر ماتریس M قرار دهیم به حداقل یکی از سطرها صفری تعلق نمی‌گیرد و آن سطر دارای ۵ درایه‌ی یک بوده و بنابراین Δ = ۵ خواهد شد.

آزمون ۴. اگر M ماتریس مجاورت درخت T_p باشد، حداکثر مقدار برای هر درایه‌ی غیرواقع بر قطر اصلی $M^۲$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲

۳) صفر ۴) حداقل ۲

حل: گزینه‌ی (۱) زیرا، تعداد مسیرهای از هر رأس به هر رأس در یک درخت ۱ است و چون تعداد مسیرهای به طول ۲ از رأس V_i به رأس $V_j (i \neq j)$ ۱ می‌باشد، طبق نکته‌ی ذکر شده در ویژگی‌های ماتریس $M^۲$ حداکثر مقدار برای این درایه‌ها ۱ می‌باشد.

آزمون ۵: اگر $M = \begin{bmatrix} x & z & y & t \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۱ \\ y & ۱ & ۰ & ۱ \\ u & ۱ & ۱ & ۰ \end{bmatrix}$ ماتریس مجاورت گراف همیلتنی G باشد حاصل (x+y+z+t+u) کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۳

۳) ۲ ۴) ۵

حل: گزینه‌ی (۲) زیرا با توجه به این‌که درایه‌های قطر اصلی M باید همگی صفر باشد لذا x=۰ و چون M متقارن است z=۰ و چون در هر گراف همیلتنی حداقل درجه‌ی هر رأس باید ۲ باشد پس y=t=۱ و لذا u=۱ بنابراین:

$x+y+z+t+u = ۳$

آزمون ۶. اگر M ماتریس مجاورت درخت T_p باشد و درایه‌های روی قطر اصلی ماتریس $M^۲$ به‌صورت ۱,...,۱,۱,۲,۲,۳,۴,۴,۵,۵ مرتب شده باشند ماتریس M چند ستون دارد؟

۱) ۱۶ ۲) ۱۸

۳) ۱۹ ۴) ۱۷

حل: گزینه‌ی (۳)، می‌دانیم هر درایه‌ی روی قطر اصلی ماتریس $M^۲$ درجه‌ی یک رأس درخت T_p است لذا اگر تعداد یک‌ها مشخص شود، تعداد رئوس درخت مورد نظر و درنتیجه تعداد ستون‌ها مشخص می‌شود:

تعداد رأس‌های درجه‌ی ۱ در درخت = $\sum_{\deg v_i \geq ۲} (\deg v_i - ۲) + ۲$

تعداد رأس‌های درجه‌ی ۱ =(۳−۲)+(۴−۲)+(۴−۲)+(۵−۲)+(۵−۲)+۲=۱۳

پس تعداد رأس‌های این درخت یعنی p، برابر است با ۱۹=۲+۲+۱+۱+۱۳ پس M ماتریس ۱۹×۱۹ است.

آزمون ۷. اگر M ماتریس مجاورت گراف ساده‌ی G باشد کدام عدد نمی‌تواند حاصل ضرب درایه‌های قطر اصلی $M^۲$ باشد؟

۱) ۸۱ ۲) ۱۲

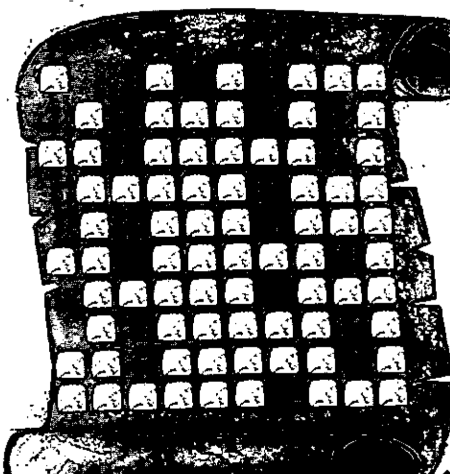
۳) ۳۶ ۴) ۱۸

حل: گزینه‌ی (۴) زیرا:

۱×۲×۳×۳=۱۸ یا ۲×$۳^۲$=۱۸

و دنباله‌ی S:۳,۳,۲,۱ گرافیکال نیست.





اعداد اول

غلامرضا یاسی‌پور

ریاضیات، آن‌چنان موضوع وسیع و مداخله‌گری در کار و بار آدمیان است که می‌تواند گه‌گاه توفنده به نظر آید و در مورد آن گاهی باید به مبناها بازگردیم. این وضعیت همواره به معنای بازگشت به اعداد شمارش، یعنی ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹، ۱۰، ۱۱، ۱۲، ... است. در واقع مگر می‌توان مبنایی اساسی‌تر از آن به دست آورد؟

بسیار خوب، داریم ۲×۲ = ۴ و بنابراین می‌توانیم آن را به مؤلفه‌های اوّل[۱] تقسیم کنیم. امّا آیا می‌توانیم هر عدد دیگر را این چنین تقسیم کنیم؟ در واقع، اعداد دیگری برای این کار موجودند:

و ۳×۳ = ۹ و ۲×۲×۲ = ۸ و ۲×۳ = ۶

۲×۲×۳ = ۱۲ و ۲×۵ =۱۰

این اعداد، عددهایی مرکّب‌اند، زیرا از اعداد بسیار اساسی ۲، ۳، ۵، ۷، ... تشکیل شده‌اند. اعداد تقسیم‌نشدنی[۲] عبارت‌اند از اعداد ۲، ۳، ۵، ۷، ۱۱، ۱۳، ... این اعداد، عددهای اوّل یا به طور ساده، اوّل‌ها هستند. عدد اول، عددی است که تنها بر یک و خودش تقسیم‌پذیر است. در این صورت، ممکن است به این پرسش برسیم که خود ۱ اول است یا خیر. بنا به این تعریف، باید باشد. در گذشته، بسیاری از ریاضی‌دان‌های برجسته، آن را عدد اول در نظر گرفته‌اند، اما ریاضی‌دان‌های جدید، اول‌های خود را با ۲ آغاز می‌کنند. این کار به قضایا این توان را می‌دهد که به ظرافت و زیبایی بیان شوند. برای ما نیز، عدد ۲ نخستین اول است.

در مورد چند عدد شمارش اولیه، می‌توانیم زیر اول‌ها خط بکشیم: ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹، ۱۰، ۱۱، ۱۲، ۱۳، ۱۴، ۱۵، ۱۶، ۱۷، ۱۸، ۱۹، ۲۰، ۲۱، ۲۲، ۲۳، ... بررسی اعداد اول، ما را به مبناهای واقعی می‌کشاند، اما این اعداد از این لحاظ اهمیت دارند که اتم‌ها[۳]ی ریاضیات‌اند. اعداد اول نیز مانند عناصر اساسی شیمی، که جمیع ترکیبات شیمیایی از آن‌ها مشتق می‌شوند، می‌توانند برای ساختن ترکیبات ریاضی به کار روند.

دستاورد ریاضی‌ای که همه‌ی این موارد را تحکیم می‌بخشد، به نام شکوهمند «قضیه‌ی تجزیه به اعداد اول» موسوم است. این قضیه بیان

می‌کند که هر عدد تمام بزرگ‌تر از ۱ را می‌توان دقیقاً به یک طریق به صورت حاصل ضرب اعداد اول نوشت. ملاحظه کردیم که ۳×۲×۲=۱۲ و هیچ طریق دیگری برای انجام این کار با مؤلفه‌های اول وجود ندارد. این عبارت اغلب به نمادنویسی توانی نوشته می‌شود: $۳ \times ۲^۲ = ۱۲$.
برای مثال، ۶,۵۴۵,۴۴۸ را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$۲^۳ \times ۳^۵ \times ۷ \times ۱۳ \times ۳۷$

کشف اول‌ها

متأسفانه فرمولی برای مشخص کردن اول‌ها موجود نیست و به نظر می‌رسد که الگویی در مورد ظهورشان در میان اعداد تمام در دست نباشد. یکی از نخستین روش‌های یافتن آن‌ها را اراتُستن سیرنه‌ای[۴] معاصر جوان‌تر ارشمیدس، مطرح کرد که بیشتر حیات خود را در آتن گذراند. گرچه محاسبه‌ی دقیق طول خط استوای وی در روزگار او از تحسین بیشتری برخوردار شد، اما امروزه وی به دلیل غربالش برای یافتن اعداد اول، مشهور است. اراتستن تصور کرد که اعداد شمارش در مقابلش قرار گرفته‌اند. وی ابتدا زیر ۲ خط کشید و تمام مضرب‌های ۲ را کنار زد. سپس به ۳ پرداخت و زیر آن خط کشید و تمام مضارب آن را کنار زد. و با ادامه‌ی این کار، جمیع مرکب‌ها را غربال کرد. در این صورت، اعدادی که زیرشان خط کشیده شده بود و در غربال باقی مانده بودند، اول بودند.

به این ترتیب، می‌توان اول‌ها را پیش‌گویی کرد، اما چگونه می‌توان گفت عدد مفروضی اول است یا خیر؟ برای مثال در مورد ۱۹,۰۷۱ یا ۱۹,۰۷۳ چه می‌توان گفت؟ هر عدد اول، غیر از اول‌های ۲ و ۵، باید به ۱، ۳، ۷ یا ۹ ختم شود، اما این شرط برای این که عددی را اول کند کافی نیست. بدون بررسی عامل‌های ممکن، دانستن این که یک عدد بزرگ مختوم به ۱، ۳، ۷ یا ۹ اول است یا نه، مشکل به نظر می‌رسد. در ضمن $۱۶۳ \times ۱۳ \times ۳^۲ = ۱۹,۰۷۱$ اول نیست، در حالی که ۱۹,۰۷۳ اول است.

پیکار دیگر، کشف الگویی در توزیع اول‌ها بوده است. بگذارید بررسی کنیم در هر قطعه‌ی ۱۰۰ عددی بین ۱ و ۱۰۰۰، چند اول موجود است. (جدول ۱)

در سال ۱۷۹۲، کارل فردریش گاوس[۵]، زمانی که ۱۵ ساله بود، فرمول P(n)ی را برای تخمین تعداد اعداد اول کمتر از عدد مفروض n، به دست داد (این فرمول امروزه به قضیه‌ی اعداد اول موسوم است). فرمول مزبور به ازای n = ۱۰۰۰ مقدار تقریبی ۱۷۲ را به دست می‌دهد. تعداد واقعی اول‌ها در این فاصله، یعنی ۱۶۸، کوچک‌تر از این تخمین است. همواره فرض بر این بوده که این وضع در مورد هر مقدار n برقرار است، اما اول‌ها اغلب شگفتی‌هایی در آستین دارند، زیرا نشان داده شده است که به ازای $n = ۱۰^{۳۷۱}$ (عددی عظیم که به صورت دست خطی مرکب از ۱ و دنباله‌ای با ۳۷۱ صفر نوشته می‌شود) تعداد واقعی اعداد اول از تخمین مزبور تجاوز می‌کند. در واقع، در بعضی از نواحی اعداد شمارش، تفاضل بین تخمین و تعداد واقعی بین کم‌تر و زیادتر نوسان می‌کند.

چند تا؟

بی‌نهایت عدد اول موجود است. اقلیدس در کتاب مقدمات خود (کتاب ۹، قضیه‌ی ۲۰) بیان می‌کند که «تعداد اعداد اول، از هر تعداد اول مشخص شده بیش‌تر است». اثبات زیبای اقلیدس به طریق زیر است:

فرض می‌کنیم P بزرگ‌ترین عدد اول باشد و عدد زیر را در نظر می‌گیریم $N = (۲ \times ۳ \times ۵ \times ... \times P) + ۱$. N که یا اول است یا نیست. اگر اول باشد اولی بزرگ‌تر از P به دست داده‌ایم که نقیض فرضمان است و اگر اول نباشد، باید بر اولی، مثلاً p، که یکی از موارد ۲، ۳، ۵، ... P است، بخش‌پذیر باشد. این بدان معناست که p عدد $N - (۲ \times ۳ \times ۵ \times ... \times P)$ را می‌شمارد. اما این عدد برابر ۱ است و بنابراین p عدد ۱ را می‌شمارد. اما نمی‌تواند چنین باشد، زیرا جمیع اول‌ها بزرگ‌تر از ۱ هستند. به این ترتیب، نوع N هرچه باشد، به تناقض می‌رسیم. بنابراین، فرض اولیه‌مان در مورد بزرگ‌ترین اول بودن P نادرست است. نتیجه: تعداد اول‌ها نامحدود است.

اگرچه اول‌ها تا نامتناهی ادامه دارند، این واقعیت مانع اشخاص از یافتن بزرگ‌ترین اول شناخته شده، نشده است. موردی که اخیراً رکورددار شده، اول عظیم مِرسن[۶] $۲^{۲۴۰۳۶۵۸۳} - ۱$ است که تقریباً $۱۰^{۷۲۳۵۷۳۲}$ یا عددی است که با ۱ آغاز می‌شود و پس از آن ۷,۲۳۵,۷۳۲ صفر قرار می‌گیرد.

ناشناخته‌ها

دو ناحیه از نواحی کشف نشده‌ی معروف مربوط به اعداد اول «مسئله‌ی اول‌های توأمان یا دوقلو[۷]» و «حدس مشهور گلدباخ[۸]» است.

اول‌های توأمان، جفت‌هایی از اول‌های متوالی‌اند که تنها با یک عدد زوج از هم جدا شده‌اند. ده اول توأمان در برد ۱ تا ۱۰۰ عبارت‌اند از:

۳,۵;۵,۷;۱۱,۱۳;۱۷,۱۹;۲۹,۳۱;۴۱,۴۳;۵۹,۶۱;۷۱,۷۳

مشخص شده است که در زمینه‌ی شمارش، ۲۷,۴۱۲,۶۷۹

برد	۱-۱۰۰	۱۰۱-۲۰۰	۲۰۱-۳۰۰	۳۰۱-۴۰۰	۴۰۱-۵۰۰	۵۰۱-۶۰۰	۶۰۱-۷۰۰	۷۰۱-۸۰۰	۸۰۱-۹۰۰	۹۰۱-۱۰۰۰	۱-۱۰۰۰
تعداد اول‌ها	۲۵	۲۱	۱۶	۱۶	۱۷	۱۴	۱۶	۱۴	۱۵	۱۴	۱۶۸

(جدول ۱)

توأمان کوچک تر از 10^{15} موجود است. این مطلب بدان معناست که اعداد زوج توأمان‌دار، مانند ۱۲ (که توأمان‌های ۱۱، ۱۳ را دارد) تنها ۰/۲۷۴ درصد اعداد واقع در این برد را تشکیل می‌دهند. اما آیا تعداد اول‌های توأمان نامتناهی است؟ اگر نباشد تعجب‌آور است، اما تا کنون کسی نتوانسته است اثباتی در این مورد ارائه دهد.

کریستیان گلدباخ[9] حدس زد که :

هر عدد زوج بزرگ‌تر از ۲ مجموع دو عدد اول است.

برای نمونه، ۴۲ عددی زوج است و می‌توان آن را به صورت ۵ + ۳۷ نوشت. این واقعیت که آن را می‌توان به صورت ۱۱ + ۳۱ و ۱۳ + ۲۹ یا ۱۹+ ۲۳ نیز نوشت، موضوعی دیگر است. تمام آن‌چه در این مورد نیاز داریم یک *طریق است*. این حدس در مورد برد عظیمی از اعداد صادق است،اما هرگز در حالت کلی به اثبات نرسیده است؛ گرچه در این مورد به پیشرفت‌هایی رسیده‌اند و پاره‌ای بر این باورند که اثبات مزبور دور از دسترس نیست. چن جینگ‌رون[10] ریاضی‌دان چینی، گام مهمی در این باره برداشته است. قضیه‌ی وی می‌خواهد ثابت کند که هر عدد به قدر کافی بزرگ زوج را می‌توان به صورت مجموع دو اول یا مجموع یک اول و یک نیمه–اول[11] (عددی که حاصل ضرب دو اول است) نوشت.

پی‌یر دوفرما[12] نظریه‌پرداز بزرگ نظریه‌ی اعداد به اثبات رساند که اول‌های به صورت $4k + 1$ را می‌توان به صورت مجموع دو مربع و دقیقاً به یک طریق بیان کرد (برای مثال، $17 = 1^2 + 4^2$)، در حالی که اول‌های به صورت $4k + 3$ (مثل ۱۹) را به هیچ وجه نمی‌توان به صورت مجموع دو مربع نوشت. ژوزف لاگرانژ[13] نیز قضیه‌ی ریاضی معروفی را در مورد توان‌های مربع اثبات کرد: «هر عدد تمام مثبت، مجموع چهار مربع است.» برای نمونه، $19 = 1^2 + 1^2 + 1^2 + 4^2$. در این مورد، توان‌های بالاتر نیز مورد بررسی قرار گرفته‌اند و کتاب‌ها را پر از قضایا کرده‌اند، اما بسیاری از مسائل هنوز اثبات نشده باقی‌مانده‌اند.

اعداد اول را به صورت «اتم‌های ریاضیات» توصیف کردیم. اما، «مطمئناً» می‌توان گفت «فیزیک‌دان‌ها در ماورای اتم‌ها به سراغ واحدهای حتی بنیادی‌تر از قبیل کوارک‌ها (ذرات بنیادی)[14] نیز رفته‌اند. در این صورت، آیا ریاضیات توقف کرده است؟» اگر کارمان را محدود به اعداد شمارش کنیم، ۵ عددی اول است، و همواره نیز چنین خواهد بود. اما گاوس به کشف دامنه‌داری نائل شد که به ازای بعضی اول‌ها، مانند ۵، $5 = (1 - 2i) \times (1 + 2i)$، که در آن $i = \sqrt{-1}$ از دستگاه اعداد موهومی است. در این صورت ۵ به عنوان حاصل ضرب دو عدد صحیح گاوسی و اعدادی مانند آن، آن‌گونه که فرض کرده بودیم تقسیم نشدنی نیستند.

عدد عدد- رمزان

یکی از پیکارجوترین زمینه‌های نظریه‌ی اعداد، مورد «مسئله‌ی وارینگ[15]» است. به سال ۱۷۷۰، ادوارد وارینگ[16] استاد کمبریج، مسائلی شامل نوشتن اعداد تمام به صورت جمع توان‌ها مطرح کرد. در این تنظیم و چینش، هنرهای جادویی عدد–رمزی، با دانش خشک و کلینیکی ریاضیات، به شکل اول‌ها، مجموع‌های مربع‌ها و مجموع‌های مکعب‌ها تلاقی می‌کند. در عدد–رمزی، عدد آیینی بی‌رقیب ۶۶۶ «عدد شیطان»[17] در فصل مکاشفه‌ی کتاب مقدس را در نظر می‌گیریم که دارای بعضی ویژگی‌های غیرمنتظره است. این عدد مجموع مربعات ۷ اول نخستین است:

$$666 = 2^2 + 3^2 + 5^2 + 7^2 + 11^2 + 13^2 + 17^2$$

عدد–رمزان به این نیز مشتاق‌اند که خاطرنشان کنند این عدد، مجموع مکعب‌های ۶ عدد طبیعی نخست و مقلوب مستوی آن‌هاست، و اگر این نیز کافی نیست، عدد محوری 6^3 واقع در مرکز این مجموع، اختصار $6 \times 6 \times 6$ است.

$$666 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + 6^3 + 5^3 + 4^3 + 3^3 + 2^3 + 1^3$$

عدد ۶۶۶ به درستی (عدد عدد–رمزان)[18] است.

تاریخ شمار چند رخداد مهم ریاضی

۳۰۰ قبل از میلاد: [illegible] اقلیدس [illegible] بودن تعداد اعداد اول [illegible] می‌دهد.

۲۳۰ قبل از میلاد: اراتستن سیرنه‌ای، روش غربال کردن اعداد اول را از اعداد تمام به دست می‌دهد.

۱۷۴۲ میلادی: گلدباخ حدس زد که هر عدد زوج (بزرگ‌تر از ۲) مجموع دو عدد اول است.

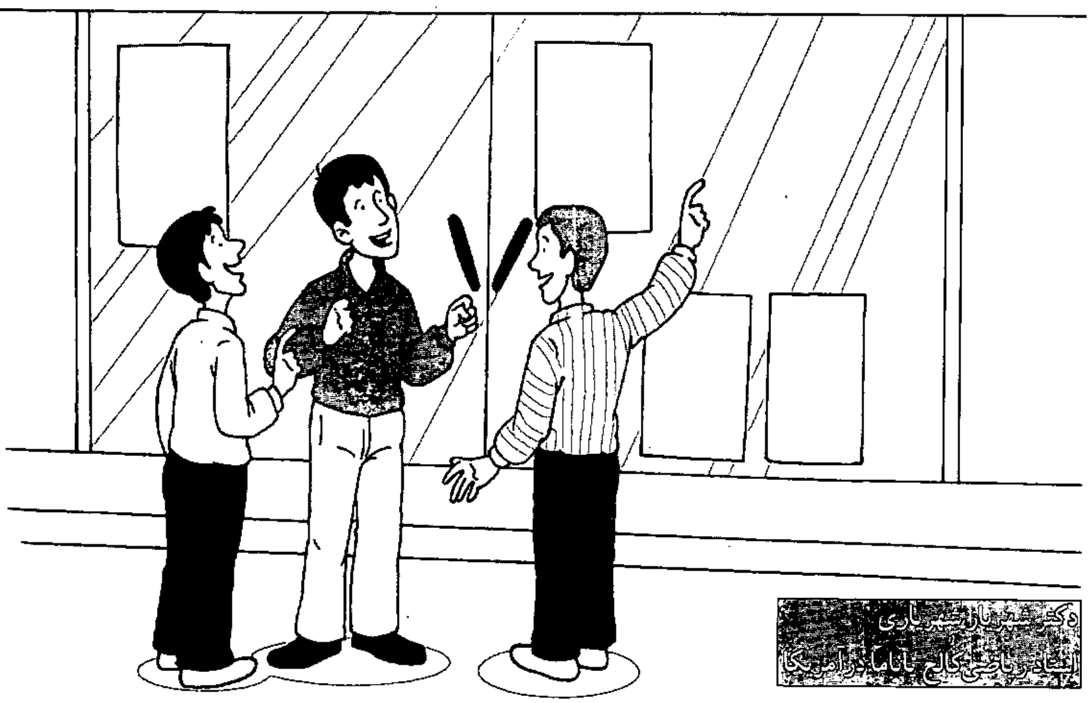
۱۸۹۶ میلادی: قضیه‌ی اعداد اول در مورد توزیع اول‌ها به اثبات رسید.

۱۹۶۶ میلادی: چن جینگ‌رون تقریباً حدس گلدباخ را تأیید کرد.

پی‌نوشت

1. Primary components
2. Unbreakable numbers
3. Atoms
4. Erastosthenes of Cyrene
5. Carl Friedrich Gauss
6. Mersenne
7. Twin primes problem
8. Goldbach conjecture
9. Christian Goldbach
10. Chen Jingrun
11. Semi-Prime
12. Pierre de Fermat
13. Joseph Lagrange
14. quarks
15. Waring's problem
16. Edward Waring
17. Number of the beast
18. Number of the numerologist





دکتر شهرناز شهریاری
استاد ریاضی کالج یاناما در آمریکا

مقدمه

بسیار اتفاق می‌افتد که جمعی می‌خواهد بر اساس خواست‌های اعضایش تصمیم بگیرد. چند مثال بیاوریم: چند دوست می‌خواهند به سینما بروند و هر کدام علاقه‌های متفاوتی نسبت به فیلم‌های سینماها دارند. واضح است که یک فیلم بیشتر نمی‌توانند انتخاب کنند. چه‌طور این کار را انجام دهند؟ دولت می‌خواهد برای ساختن وسایل مصرفی اولویت‌هایی قائل شود. چگونه خواست‌های تک‌تک افراد را جمع‌بندی کند؟ اعضای شورای مدیریت یک واحد تولیدی می‌خواهند تکنولوژی‌های مختلف را طبقه‌بندی کنند و ترتیبی از نظر مفید بودن برای آن‌ها قائل شوند. نظرات متفاوت اعضای شورا چگونه جمع‌بندی شود؟ هیئت تحریریه‌ی یک مجله می‌خواهد ترتیبی برای درج مقالات رسیده پیدا کند، ولی اعضا درباره‌ی زودتر و دیرتر چاپ شدن مقالات اختلاف دارند. این اختلاف چگونه حل شود؟

واضح است که جواب هر یک از این سؤال‌ها با هم متفاوت است. هیچ راه حل یکسانی برای این مشکلات نمی‌توان یافت. گاهی باید به نظریات همه به یکسان احترام گذاشت، در حالی که گاهی به حرف‌های برخی از آن‌ها نباید توجه کرد. گاهی باید بکوشند همدیگر را متقاعد کنند و گاه بعد از تبادل نظرها عقیده‌ی یک نفر باید تعیین کننده باشد. در هر صورت، در مورد هر یک از این سؤال‌ها و امثال آن‌ها باید شرایط مشخص را بررسی کنیم تا راه حلی عاقلانه بیابیم.

در این مورد، ریاضیات چه کمکی می‌تواند بکند. در برخی موارد مانند برنامه‌ریزی اقتصادی، نقش ریاضیات را نمی‌توان انکار کرد و در برخی دیگر هنوز نقشی برای ریاضیات پیدا نشده است. ولی ریاضیات علم انتزاع است. آیا می‌تواند به طور انتزاعی درباره‌ی روش‌های جمع‌بندی نظریات چیزی به افراد بگوید؟

فقط می‌شود گفت که کارهایی در این زمینه انجام گرفته است. آن‌چه در این چند مقاله می‌آوریم، نشان دادن روشی برای طرح این سؤالات به زبان ریاضی است. البته این تنها روش نیست و کار ریاضی‌دانان جهان از این حد، فرسنگ‌ها جلوتر رفته است. هدف ما فقط آشنایی بسیار مختصر با این شاخه‌ی ریاضیات است. نباید انتظار داشته باشیم که ریاضیات به تنهایی جوابی برای مشکل جمع‌بندی

ریاضیات و تصمیم گیری جمعی

نظریات افراد و به دست آوردن تصمیم گیری جمعی از روی آن‌ها به‌دست دهد. جواب واقعی برای این سؤال نه در محدوده‌ی ریاضیات، بلکه برای هر مورد مشخص، در علوم دیگر است. ریاضیات فقط می‌تواند در برخی موارد چهارچوبی برای ارائه نظرات به دست دهد و ممکن است کمکی در جهت منطقی بودن بحث‌های ما باشد. در این جا کوشش می‌کنیم روشی پیدا کنیم که بتواند اولویت‌ها را مرتب کند.

فرمول بندی مسئله از نظر ریاضی

۱) $X = \{x, y, ..., z\}$ مجموعه‌ی انتخاب‌های ممکن است. تعداد عضوهای X مساوی یا بیشتر از ۳ است.

۲) V مجموعه‌ی محدودی از افراد تصمیم گیرنده است. عضوهای آن را با ۱، ۲، ...، i، ...، n نشان می‌دهیم.

۳) برای هر فردی مثلاً i و هر دو انتخاب مثلاً u و v یکی و فقط یکی از سه حالت زیر برقرار است:

الف) i، «u را به v ترجیح می‌دهد» که آن را به صورت uP_iv می‌نویسیم.

ب) i، (v را به u ترجیح می‌دهد» که آن را به صورت vP_iu می‌نویسیم.

ج) i، (بین u و v بی‌تفاوت است» که آن را به صورت uI_iv می‌نویسیم.

همچنین، اگر i «v را به u ترجیح ندهد» یعنی داشته باشیم $\sim vP_iu$ آن‌گاه می‌نویسیم uR_iv که معادل با این است که بگوییم. i، یا u را به v ترجیح می‌دهد یا بین u و v بی‌تفاوت است.

حال بعضی شرط‌ها را برای P، R و I تعیین می‌کنیم. در این‌جا هدف، غیرمتناقض بودن ارجحیت‌های هر فرد است. در نتیجه شرط می‌کنیم که P یک رابطه‌ی ترتیبی ضعیف باشد، یعنی:

۱) نابرگشتی: $xPy \Leftarrow \sim yPx$ (یعنی xRy)

۲) سرایت پذیری منفی: $\sim xPy$ و $\sim yPz \Leftarrow \sim xPz$

تعریف: ما رابطه‌های R و I را بدین ترتیب با استفاده از P تعریف می‌کنیم.

الف) $xRy \Longleftrightarrow \sim yPx$

ب) $xIy \Longleftrightarrow yRx$ و xRy

حال با استفاده از خصوصیات فرض شده‌ی P و تعاریف R و I می‌توانیم خواص منطقی زیر را برای انتخاب‌های فردی ثابت کنیم.

قضیه: اگر x، y و z عضوهای X باشند، آن‌گاه:

الف) xRy یا yRx یا هر دو

ب) xRy و $yRx \Leftarrow xRz$ (سرایت پذیری)

ج) xRx (انعکاس)

د) $xPy \Leftarrow xRy$

ه) xPy و $yPz \Leftarrow xPz$

و) xIy و $yIz \Leftarrow xIz$

ز) xRy یا yPx

ح) xPy و $yRz \Leftarrow xPz$

اثبات:

الف) اگر $xPy \Leftarrow \sim yPx \Longleftrightarrow xRy$

اگر $yPx \Leftarrow \sim xPy \Longleftrightarrow yRx$

اگر $xIy \Longleftrightarrow xRy$ و yRx

ب) xRy و $yRz \Longleftrightarrow \sim yPx$ و $\sim zPy \Leftarrow \sim zPx \Longleftrightarrow xRz$

ج) اگر $xPx \Leftarrow \sim xPx$ و این یک تناقض است و لذا داریم: $\sim xPx \Longleftrightarrow xRx$.

د) $xPy \Leftarrow \sim yPx \Longleftrightarrow xRy$

اثبات بقیه‌ی قسمت‌ها را به‌عهده‌ی خواننده می‌گذاریم.

پس ما مجموعه‌ای $X = \{x, y, ..., z\}$ از انتخاب‌های ممکن و مجموعه‌ی $V = \{1, 2, ..., n\}$ از افراد داریم. نظرات هر شخص درباره‌ی انتخاب‌های مختلف یک ترتیب ضعیف بر روی X است (یعنی دارای خواصی است که برشمردیم). مجموعه‌ی همه‌ی این گونه نظرات راجع به X را ω می‌خوانیم.

پس:

مجموعه‌ی تمام ترتیب‌های ضعیف روی $X = \omega$

وقتی نظرات تمام اشخاص دانسته شد، آن‌گاه این به معنای داشتن تابع f است: $f: V \to \omega$

یعنی f برای هر فرد عضو V یک ترتیب ارجحیت، یعنی یک عضو ω را معین می‌کند. حال بگذارید $F = \{f | f: V \to \omega\}$. یعنی F مجموعه‌ی همه‌ی توابع از V به ω است. F مجموعه‌ی همه‌ی

روش‌های ممکن در انتخاب ارجحیت‌ها برای افراد است. حال ما می‌خواهیم با دانستن ارجحیت‌های اشخاص به یک جمع‌بندی برای کل گروه برسیم. یعنی با داشتن یک $f \in F$ می‌خواهیم یک ترتیب ارجحیت (یعنی عضوی از ω) برای کل گروه بیابیم. در زبان ریاضی ما خواهان تابعی به شکل زیر هستیم.

$$\sigma: F \to \omega$$

تابع σ را مدل جمع‌بندی می‌خوانیم.

پس در هر مورد خاص، کل نظریات اشخاص را تابع f، که عضوی از F است، معین می‌کند و $\sigma(F)$، که عضوی از ω است، جمع‌بندی را نشان می‌دهد. لذا، $X\sigma(f)y$، یعنی در جمع‌بندی x به y ترجیح داده شده است. منظور از $xf(V)y$ آن است که در مجموعه‌ی ارجحیت‌های فردی که به وسیله‌ی f داده شده است، شخص V، x را به y ترجیح می‌دهد.

حال، می‌خواهیم ببینیم که این مدل جمع‌بندی‌مان، یعنی σ، چه شرایطی باید داشته باشد. البته این شرایط جدا از بعضی ارزش‌ها نیستند و همان‌طور که در مقدمه گفته شد، در موارد خاص شرایط مختلفی لازم است. در این‌جا ما چهار شرط را که به نظر عاقلانه می‌آیند، می‌آوریم و بعد قضیه‌ای راجع به آن‌ها متذکر می‌شویم.

شرط ۱ (حوزه‌ی نامحدود)

الف) تعداد عضوهای X برابر یا بیشتر از سه است.

ب) مدل جمع‌بندی σ برای تمام $f \in F$ تعریف شده باشد.

ج) تعداد افراد حداقل ۲، ولی در هر صورت محدود باشد.

توجه: بخش (ب) این شرط به این معناست که اختلاف در آرای اشخاص هرچه باشد، باید بتوان به یک جمع‌بندی رسید.

شرط ۲ (اصل برتر)

اگر x و y دو انتخاب ممکن در X باشند و همه‌ی اشخاص در V، x را به y ترجیح بدهند، آن‌گاه در ترتیب گروهی هم x به y ترجیح داده شود، یعنی $x\sigma(f)y$.

شرط ۳ (استقلال انتخاب‌های غیرمربوط)

دو مجموعه‌ی ترتیب‌های ارجحیت‌های شخصی را در نظر می‌گیریم (یعنی $f,g \in F$). همچنین x و y دو انتخاب ممکن را در نظر می‌گیریم. حال اگر برای همه‌ی افراد، مقایسه‌ی بین x و y در f و در g یکسان باشد، آن‌گاه برای $\{x,y\}$ باید داشته باشیم $\sigma(f) = \sigma(g)$. مثلاً ۳ نفر را در نظر می‌گیریم. روز اول xP_1y و xP_2y و yP_3x و روز دوم هم دقیقاً به همین ترتیب. حال این شرط می‌گوید که مدل جمع‌بندی ما باید در روز اول و دوم یک نوع ترتیب بین x و y به دست دهد. یعنی اگر روز اول داریم $x\sigma(f)y$ روز دوم هم باید همین را داشته باشیم. گو این‌که در روز دوم ممکن است ارجحیت‌های افراد برای انتخاب‌های ممکن دیگر مثل z و غیره فرق کرده باشد.

شرط ۴ (همفکری کنید!)

شخصی وجود نداشته باشد که هرگاه او انتخابی را بر انتخاب دیگر ترجیح داد، آن‌گاه کل گروه هم همین کار را بکند.

یعنی $v \in V$ وجود ندارد به نحوی که اگر $x,y \in X$ و $f \in F$ باشد داشته باشیم. $xf(V)y \Rightarrow x\sigma(f)y$.

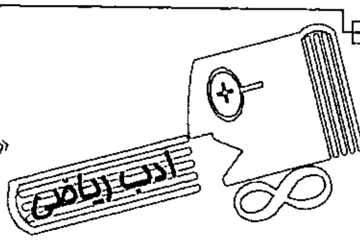
پس ما یک جمع را در نظر می‌گیریم. این جمع باید بر اساس تمایلات افراد ترتیبی برای انتخاب‌های ممکن اتخاذ کند، یعنی معین کند که مثلاً x به y ترجیح دارد، بین y و z بی‌تفاوت است و غیره. نام روش جمع‌بندی یا مدل جمع‌بندی را σ گذاشتیم و برایش چهار شرط که زیاد هم غیرمنطقی به نظر نمی‌رسند آوردیم. خوب است در این‌جا به قضیه‌ای که کنت. جی. اروو ثابت کرده است اشاره‌ای داشته باشیم.

قضیه: شرایط ۴-۱ متناقض‌اند.

یعنی مدل یک جمع‌بندی که دارای هر چهار شرط بالا باشد، وجود ندارد! برای مطالعه‌ی بیشتر به کتاب زیر مراجعه کنید.

Kenneth J. Arrow: Social Choice and Individual values

***



«ابوعلی حسن‌بن حسن‌بن هیثم»، فیزیکدان و ریاضیدان بَصری مصری، در حدود ۳۵۴ هجری در بصره به‌دنیا آمد و به سال ۴۳۰ وفات یافت. بیشتر آثار ابن‌هیثم- که از صد متجاوزند- درباره‌ی ریاضیات و فیزیک است؛ البته به مباحث فلسفی و طبی نیز پرداخته است. نبوغ ریاضی ابن‌هیثم در مقاله‌ی پنجم کتاب «فی‌المناظر» به اوج می‌رسد.

رابطه‌ی بین مجذور اعداد و مجذور مقلوب آن‌ها

هادی خانی
دانش‌آموز دبیرستان شهید مفتح،
شهرستان خدابنده



اشاره

نظریه‌ی اعداد شاخه‌ای از ریاضی است که به مطالعه‌ی اعداد و روابط بین آن‌ها می‌پردازد و در این میان، شگفتی‌های زیادی از زیبایی‌های روابط و قاعده‌های جاری میان اعداد حاصل می‌شود.

مطالعه و پژوهش در زمینه‌ی اعداد به کشف این روابط قوی و بنیادی می‌انجامد که یکی از نتایج مهم آن، سرعت بخشیدن به محاسبات عظیمی است که امروزه در جوامع صنعتی و دانشگاهی و حتی امور روزانه‌ی سازمان‌ها و کارهای شخصی وجود دارد. در این مجال به معرفی یک رابطه‌ی جالب ریاضی میان مجذور یک عدد و مجذور مقلوب آن عدد می‌پردازیم.

فرض کنیم $\overline{xy}$ نماد یک عدد دو رقمی باشد که در این صورت مقلوب آن $\overline{yx}$ خواهد بود.

حال قصد داریم $(\overline{yx})^2$ را از روی $(\overline{xy})^2$ به دست آوریم. ادعا می‌کنیم که:

$$(\overline{yx})^2 = 99(y^2 - x^2) - (\overline{xy})^2 \quad (1)$$

یعنی مربع عدد مقلوب برابر است با:

^{2}(عدد داده شده) + (مجذور رقم یکان − مجذور رقم دهگان) × ۹۹

اثبات:

$$(\overline{yx})^2 = (10y + x)^2 = 100y^2 + 20xy + x^2$$
$$= 99y^2 - 99x^2 + 100x^2 + 20xy + y^2$$
$$= 99(y^2 - x^2) + (10x + y)^2$$
$$= 99(y^2 - x^2) + (\overline{xy})^2$$

مثال: می‌دانیم که $169 = (13)^2$ می‌باشد حال می‌خواهیم $(31)^2$ را به دست آوریم:

$$(31)^2 = 99\{(3)^2 - (1)^2\} + 169$$
$$= 99(9 - 1) + 169 = 99 \times 8 + 169$$
$$= 792 + 169 = 961$$

که همان مجذور عدد ۳۱ است و در این محاسبه از مجذور ۱۳ (مقلوب آن ۳۱) استفاده شده است. این قاعده در مورد اعداد سه رقمی نیز به شکل مشابه برقرار است:

مقلوب عدد سه رقمی $(\overline{xyz})$ عدد $(\overline{zyx})$ است. حال قصد داریم $(\overline{zyx})^2$ را از روی $(\overline{xyz})^2$ به دست آوریم. رابطه‌ی زیر را ادعا و اثبات می‌کنیم.

$$(\overline{zyx})^2 = 9999\{(z)^2 - (x)^2\} + 1980y(z - x) + (\overline{xyz})^2 \quad (2)$$

اثبات: طرف چپ رابطه‌ی (۲) برابر است با:

$$(\overline{zyx})^2 = (100z + 10y + x)^2$$
$$(\overline{zyx})^2 = 10000z^2 + 2000zy + 100y^2 + x^2 + 200xz + 20xy$$

$= 9999z^2 - 9999x^2 + 1980zy$ طرف راست رابطه‌ی (۲)

$$1980xy + (100x + 10y + x)^2$$
$$= 9999z^2 - 9999x^2 + 1980yz - 1980xy + 10000x^2$$
$$+ 100y^2 + z^2 + 2000xy + 200xz + 20yz$$
$$= 10000z^2 + 2000yz + 100y^2 + x^2 + 200xz + 20yz$$

می‌بینیم که دو طرف رابطه‌ی داده شده با هم برابرند.

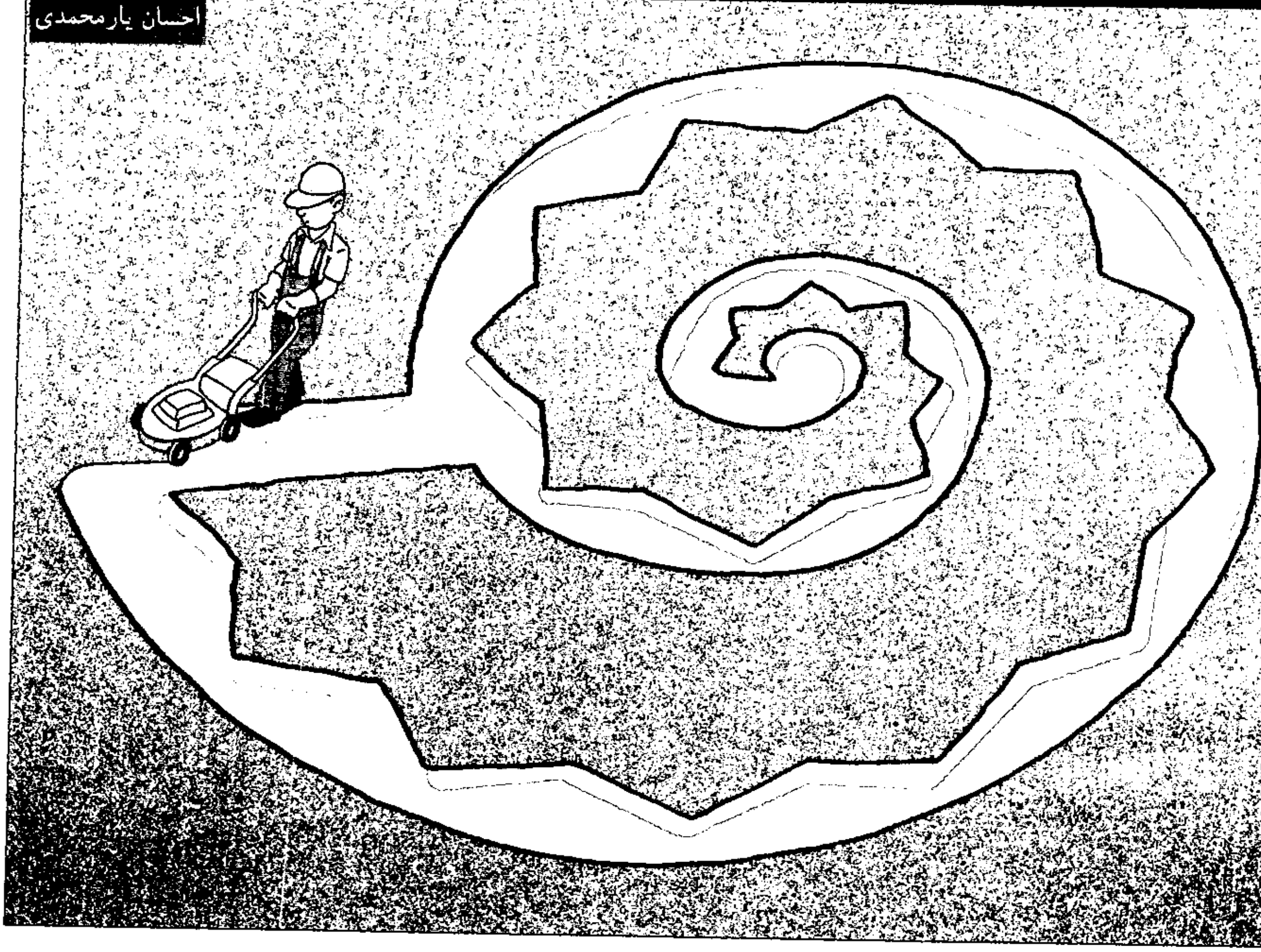
مثال: می‌دانیم که $84681 = (291)^2$ است. حال قصد داریم حاصل $(192)^2$ را از روی مجذور (۲۹۱) به دست آوریم.

$$(192)^2 = 9999(4 - 1) + 1980 \times 9 \times (1 - 2) + (291)^2$$
$$= (-29997) - (17820) + (84681) = 36864$$

خاطر نشان می‌شود که با توجه به الگوریتم محاسبه‌ی چنین روابطی می‌توان روابط مشابه را برای اعداد n رقمی به دست آورد.

سری هندسی مثلثاتی

احسان یارمحمدی



روزی با عده‌ای از دانشجویان و دانش‌پژوهان ریاضی بحثی پیرامون وضعیت همگرایی و واگرایی سری‌هایی که جمله‌ی عمومی آن‌ها شامل عبارت‌های مثلثاتی مانند $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1+\cos(n)}{n^2}$، $\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{\sin(n)+\frac{1}{2}}{n(\ln(n))^2}$ و ... است داشتیم که در این بین من سری‌هایی به فرم $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin(\frac{n\pi}{2})\cos(\frac{n\pi}{2})}{4^n}$، $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin(\frac{n\pi}{4})\cos(\frac{n\pi}{4})}{2^n}$، $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{\cos(\frac{n\pi}{4})}{5^n}$ و ... را مطرح کردم و نظر ایشان را جویا شدم. نظرات متفاوت و گوناگونی ارائه شد، اما جالب این بود که هیچ نظری راجع به این‌که می‌توان مقدار این سری‌ها را محاسبه کرد، بیان نشد. این موضوع باعث شد تا به نگارش این مقاله و به بیان بهتر، معرفی گروه متفاوتی از سری‌های هندسی. با آن‌چه از سری‌های هندسی متعارف وجود دارد، بپردازم.

نخست به ارائه‌ی تعریف و شرایط همگرایی و واگرایی سری هندسی و سپس به معرفی چندین دنباله‌ی مثلثاتی می‌پردازم که هر یک از آن‌ها کمک ارزنده و شایان توجهی را در درک بهتر این مقاله ایفا می‌کنند.

اگر $a \neq 0$، هر سری به فرم زیر:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} ar^n = a + ar + ar^2 + ar^3 + \dots$$

یک سری هندسی با جمله‌ی اول a و قدر نسبت r می‌نامیم و مجموع جزئی آن را به صورت زیر بیان می‌کنیم.

$$a + ar + ar^{۲} + ar^{۳} + ... + ar^{n-۱}$$
$$= a(۱ + r + r^{۲} + r^{۳} + ... + r^{n-۱})$$
$$= \begin{cases} a\times\frac{۱-r^{n}}{۱-r}, r\neq ۱ \\ a(n+۱), r = ۱\end{cases}$$

البته برای سری هندسی $\sum_{n=۰}^{+\infty} ar^{n}$ برحسب مقادیر مختلف r می‌توان درمورد همگرایی یا واگرایی سری مزبور به شرح زیر بحث کرد:

۱. اگر $-۱ < r < ۱$ آنگاه سری $\sum_{n=۰}^{+\infty} ar^{n}$ همگراست و مقدار آن هنگامی که $n \to +\infty$ برابر با $\frac{a}{۱-r}$ است.

۲. اگر $r > ۱$ آن‌گاه سری $\sum_{n=۰}^{+\infty} ar^{n}$ واگراست. چون S_n به این علت که r^{n} آن هنگامی که $n \to +\infty$ برابر است با ∞ است، واگرا خواهد بود.

۳. اگر $r = ۱$ آن‌گاه سری $\sum_{n=۰}^{+\infty} ar^{n}$ واگراست، چون $S_n = a(n+۱)$ آن واگراست.

۴. اگر $r = -۱$ آنگاه سری $\sum_{n=۰}^{+\infty} ar^{n}$ واگراست، چون $S_n = \frac{a(۱-(-۱)^{n})}{۲}$ آن واگراست.

۵. اگر $r < ۱$ آنگاه سری $\sum_{n=۰}^{+\infty} ar^{n}$ واگراست، چون S_n آن به این علت واگراست که r^{n} آن هنگامی که $n \to +\infty$ برابر با $\pm\infty$ است.

مثال ۱. کدام یک از گزینه‌های زیر درباره‌ی سری $\sum_{n=۰}^{+\infty} \frac{۲^{n} + ۴^{n} + ۸^{n}}{۱۶^{n}}$ صحیح است؟

۱) همگرا به $-\frac{۴۱}{۴۲}$ ۲) همگرا به $\frac{۴۱}{۴۲}$

۳) همگرا به صفر ۴) واگرا

پاسخ: گزینه‌ی ۲ صحیح است. سری مفروض شرط لازم همگرایی را دارد (چرا؟) و چون:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{۲^{n}+۴^{n}+۸^{n}}{۱۶^{n}} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\left(\frac{۲}{۱۶}\right)^{n}+\left(\frac{۴}{۱۶}\right)^{n}+\left(\frac{۸}{۱۶}\right)^{n}\right)$$

$$= \sum_{n=۱}^{+\infty}(\tfrac{۱}{۸})^{n} + \sum_{n=۱}^{+\infty}(\tfrac{۱}{۴})^{n} + \sum_{n=۱}^{+\infty}(\tfrac{۱}{۲})^{n}$$

$$= \frac{\frac{۱}{۸}}{۱-\frac{۱}{۸}} + \frac{\frac{۱}{۴}}{۱-\frac{۱}{۴}} + \frac{\frac{۱}{۲}}{۱-\frac{۱}{۲}} = \frac{۱}{۷} + \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۲} = \frac{۴۱}{۴۲}$$

مثال ۲. کدام یک از گزینه‌های زیر در مورد سری $\sum_{n=۱}^{+\infty}\frac{۲^{n}+n^{۲}+n}{۲^{n+۱}n(n+۱)}$ صحیح است؟

۱) همگرا به ۲ ۲) همگرا به ۱

۳) همگرا به صفر ۴) واگرا

پاسخ: گزینه‌ی ۲ صحیح است. سری مفروض شرط لازم همگرایی را دارد (چرا؟) و چون:

$$\frac{۲^{n}+n^{۲}+n}{۲^{n+۱}n(n+۱)} = \frac{۲^{n}}{۲^{n+۱}n(n+۱)} + \frac{n^{۲}+n}{۲^{n+۱}n(n+۱)}$$
$$= \frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{n(n+۱)} + \frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲^{n}}$$

بنابراین:

$$\sum_{n=۱}^{+\infty}\frac{۲^{n}+n^{۲}+n}{۲^{n+۱}n(n+۱)} = \sum_{n=۱}^{+\infty}\left(\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{n(n+۱)} + \frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲^{n}}\right)$$
$$= \frac{۱}{۲}\sum_{n=۱}^{+\infty}\frac{۱}{n(n+۱)} + \frac{۱}{۲}\sum_{n=۱}^{+\infty}\frac{۱}{۲^{n}} = \frac{۱}{۲}\times ۱ + \frac{۱}{۲}\times ۱ = ۱$$

در ادامه، تعدادی از دنباله‌های مثلثاتی را که کاربردی مؤثر در این مقاله دارند، ارائه می‌کنیم.

$$\{\sin(n\pi)\}_{n=۱}^{+\infty} = \{\underbrace{۰,۰,۰,۰,۰,۰,۰,۰}_{n=۱,۲,۳,۴,۵,۶,۷,۸},...\}$$

$$\{\cos(n\pi)\}_{n=۱}^{+\infty} = \{(-۱)^{n}\}_{n=۱}^{+\infty}$$
$$= \{\underbrace{-۱,۱,-۱,۱,-۱,۱,-۱,۱}_{n=۱,۲,۳,۴,۵,۶,۷,۸},...\}$$

$$\left\{\sin(\frac{n\pi}{۲})\right\}_{n=۱}^{+\infty} = \{\underbrace{۱,۰,-۱,۰}_{n=۱,۲,۳,۴},\underbrace{۱,۰,-۱,۰}_{n=۵,۶,۷,۸},...\}$$

$$\left\{\cos(\frac{n\pi}{۲})\right\}_{n=۱}^{+\infty} = \{\underbrace{۰,-۱,۰,۱}_{n=۱,۲,۳,۴},\underbrace{۰,-۱,۰,۱}_{n=۵,۶,۷,۸},...\}$$

$$\left\{\sin(\frac{n\pi}{۴})\right\}_{n=۱}^{+\infty} =$$
$$\left\{\underbrace{\frac{\sqrt{۲}}{۲},۱,\frac{\sqrt{۲}}{۲},۰,-\frac{\sqrt{۲}}{۲},-۱,-\frac{\sqrt{۲}}{۲},۰}_{n=۱,۲,۳,۴,۵,۶,۷,۸},...\right\}$$

$$\left\{\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)\right\}_{n=1}^{+\infty} = \left\{\underbrace{\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -1, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1}_{n=1,2,3,4,5,6,7,8}, \dots\right\}$$

اکنون با بهره‌گیری از عمل جبری ضرب می‌توانیم دنباله‌های مثلثاتی جدیدی را از دنباله‌های مثلثاتی بالا به دست آوریم. بنابراین داریم:

$$\left\{\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right\}_{n=1}^{+\infty} = \{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \dots\}$$

$$\left\{\cos(n\pi)\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right\}_{n=1}^{+\infty} = \{-1, 0, 1, 0, -1, 0, 1, 0, \dots\}$$

$$\left\{\cos(n\pi)\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right\}_{n=1}^{+\infty} = \{0, -1, 0, 1, 0, -1, 0, 1, \dots\}$$

$$\left\{\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)\right\}_{n=1}^{+\infty} = \left\{\frac{1}{2}, 0, \frac{-1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 0, \frac{-1}{2}, 0, \dots\right\}$$

$$\left\{\cos(n\pi)\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)\right\}_{n=1}^{+\infty} = \left\{-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 0, \dots\right\}$$

$$\left\{\cos(n\pi)\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)\right\}_{n=1}^{+\infty} = \left\{-\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}, 0, \dots\right\}$$

$$\left\{\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)\right\}_{n=1}^{+\infty} = \left\{\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 0, \dots\right\}$$

$$\left\{\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)\right\}_{n=1}^{+\infty} = \{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \dots\}$$

در این قسمت به ارائه‌ی مثال‌هایی درباره‌ی محاسبه‌ی مقدار سری‌های هندسی می‌پردازیم که جمله‌ی عمومی آن‌ها دربرگیرنده‌ی دنباله‌های مثلثاتی است.

مثال ۳. کدام گزینه در مورد سری $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \frac{\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{4^n}$ صحیح است؟

۱) همگرا به $-\frac{4}{15}$ ۲) همگرا به $-\frac{4}{17}$

۳) همگرا به $\frac{1}{3}$ ۴) واگرا

پاسخ: گزینه‌ی ۲ صحیح است. سری مفروض شرط لازم همگرایی را دارد (چرا؟) و چون می‌دانیم:

$$\left\{(-1)^n \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right\}_{n=1}^{+\infty} = \left\{\cos(n\pi)\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right\}_{n=1}^{+\infty} = \{-1, 0, 1, 0, -1, 0, 1, 0, \dots\}$$

بنابراین:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \frac{\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{4^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(n\pi)\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{4^n}$$

$$\left(\frac{-1}{4^1}\right) + \left(\frac{0}{4^2}\right) + \left(\frac{1}{4^3}\right) + \left(\frac{0}{4^4}\right) + \left(\frac{-1}{4^5}\right) + \left(\frac{0}{4^6}\right) + \left(\frac{1}{4^7}\right) + \left(\frac{0}{4^8}\right) + \dots$$

$$= \left(\frac{-1}{4^1}\right) + \left(\frac{1}{4^3}\right) + \left(\frac{-1}{4^5}\right) + \left(\frac{1}{4^7}\right) + \dots$$

$$= \frac{\frac{-1}{4}}{1 - \left(-\frac{1}{4^2}\right)} = -\frac{4}{17}$$

مثال ۴. کدام گزینه در مورد سری $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)}{\cos(n\pi)\times 5^n}$ صحیح است؟

۱) همگرا به $-\frac{5}{48}$ ۲) همگرا به $-\frac{5}{52}$

۳) همگرا به $\frac{5}{49}$ ۴) واگرا

پاسخ: گزینه‌ی ۲ صحیح است. سری مزبور شرط لازم همگرایی را دارد (چرا؟) و چون می‌دانیم:

$$\left\{\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)\right\}_{n=1}^{+\infty} = \left\{\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}, 0, \dots\right\}$$

بنابراین:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)}{\cos(n\pi)\times 5^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)}{(-1)^n\times 5^n}$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)}{(-5)^n}$$

$$= \left(\frac{\frac{1}{2}}{(-5)^1}\right) + \left(\frac{0}{(-5)^2}\right) + \left(\frac{-\frac{1}{2}}{(-5)^3}\right) + \left(\frac{0}{(-5)^4}\right)$$

$$+\left(\frac{\frac{۱}{۲}}{(-۵)^{۵}}\right)+\left(\frac{۰}{(-۵)^{۶}}\right)+\left(\frac{-\frac{۱}{۲}}{(-۵)^{۷}}\right)+\left(\frac{۰}{(-۵)^{۸}}\right)+\ldots$$

$$=\left(\frac{\frac{۱}{۲}}{(-۵)^{۱}}\right)+\left(\frac{-\frac{۱}{۲}}{(-۵)^{۳}}\right)+\left(\frac{\frac{۱}{۲}}{(-۵)^{۵}}\right)+\left(\frac{-\frac{۱}{۲}}{(-۵)^{۷}}\right)+\ldots$$

$$=\frac{\frac{\frac{۱}{۲}}{(-۵)^{۱}}}{۱-\left(-\frac{۱}{(-۵)^{۲}}\right)}=-\frac{۵}{۵۲}$$

مثال ۵. کدام یک از گزینه‌های زیر در مورد سری $\sum_{n=۱}^{+\infty}\frac{\sin(\frac{n\pi}{۴})\cos(\frac{n\pi}{۴})\sin(\frac{n\pi}{۲})}{(-۱)^{n}\times ۲^{n}\times ۴^{n}}$ صحیح است؟

۱) همگرا به $-\frac{۴}{۶۵}$ ۲) همگرا به $-\frac{۸}{۱۲۷}$

۳) همگرا به $-\frac{۴}{۶۳}$ ۴) واگرا

پاسخ: گزینه‌ی ۳ صحیح است. سری بالا شرط لازم همگرایی را دارد (چرا؟) و چون می‌دانیم:

$$\left\{\sin(\frac{n\pi}{۴})\cos(\frac{n\pi}{۴})\sin(\frac{n\pi}{۲})\right\}_{n=۱}^{+\infty}=\left\{\frac{۱}{۲},۰,\frac{۱}{۲},۰,\frac{۱}{۲},۰,\frac{۱}{۲},۰,\ldots\right\}$$

بنابراین:

$$\sum_{n=۱}^{+\infty}\frac{\sin(\frac{n\pi}{۴})\cos(\frac{n\pi}{۴})\sin(\frac{n\pi}{۲})}{(-۱)^{n}\times ۲^{n}\times ۴^{n}}$$

$$=\sum_{n=۱}^{+\infty}\frac{\sin(\frac{n\pi}{۴})\cos(\frac{n\pi}{۴})\sin(\frac{n\pi}{۲})}{(-۸)^{n}}$$

$$=\left(\frac{\frac{۱}{۲}}{(-۸)^{۱}}\right)+\left(\frac{۰}{(-۸)^{۲}}\right)+\left(\frac{\frac{۱}{۲}}{(-۸)^{۳}}\right)+\left(\frac{۰}{(-۸)^{۴}}\right)+$$

$$\left(\frac{\frac{۱}{۲}}{(-۸)^{۵}}\right)+\left(\frac{۰}{(-۸)^{۶}}\right)+\left(\frac{\frac{۱}{۲}}{(-۸)^{۷}}\right)+\left(\frac{۰}{(-۸)^{۸}}\right)+\ldots$$

$$=\left(\frac{\frac{۱}{۲}}{(-۸)^{۱}}\right)+\left(\frac{\frac{۱}{۲}}{(-۸)^{۳}}\right)+\left(\frac{\frac{۱}{۲}}{(-۸)^{۵}}\right)+\left(\frac{\frac{۱}{۲}}{(-۸)^{۷}}\right)+\ldots$$

$$=\frac{\frac{\frac{۱}{۲}}{(-۸)^{۱}}}{۱-\left(\frac{۱}{(-۸)^{۲}}\right)}=-\frac{۴}{۶۳}$$

مثال ۶. کدام یک از گزینه‌های زیر در مورد سری $\sum_{n=۱}^{+\infty}\frac{\sin(\frac{n\pi}{۲})+\cos(\frac{n\pi}{۲})}{۲^{n}\times ۳^{n}}$ صحیح است؟

۱) همگرا به $-\frac{۱}{۳۷}$ ۲) همگرا به $\frac{۵}{۳۷}$

۳) همگرا به $\frac{۶}{۳۷}$ ۴) واگرا

پاسخ: گزینه‌ی ۲ صحیح است. سری بالا شرط لازم همگرایی را دارد (چرا؟) و چون می‌دانیم:

$$\left\{\sin(\frac{n\pi}{۲})\right\}_{n=۱}^{+\infty}=\{۱,۰,-۱,۰,۱,۰,-۱,۰,\ldots\}$$

$$\left\{\cos(\frac{n\pi}{۲})\right\}_{n=۱}^{+\infty}=\{۰,-۱,۰,۱,۰,-۱,۰,۱,\ldots\}$$

بنابراین:

$$\sum_{n=۱}^{+\infty}\frac{\sin(\frac{n\pi}{۲})+\cos(\frac{n\pi}{۲})}{۲^{n}\times ۳^{n}}$$

$$=\sum_{n=۱}^{+\infty}\frac{\sin(\frac{n\pi}{۲})}{۶^{n}}+\sum_{n=۱}^{+\infty}\frac{\cos(\frac{n\pi}{۲})}{۶^{n}}$$

$$=\left[\left(\frac{۱}{۶^{۱}}\right)+\left(\frac{۰}{۶^{۲}}\right)+\left(\frac{-۱}{۶^{۳}}\right)+\left(\frac{۰}{۶^{۴}}\right)+\ldots\right]$$

$$+\left[\left(\frac{۰}{۶^{۱}}\right)+\left(\frac{-۱}{۶^{۲}}\right)+\left(\frac{۰}{۶^{۳}}\right)+\left(\frac{۱}{۶^{۴}}\right)+\ldots\right]$$

$$=\left[\left(\frac{۱}{۶^{۱}}\right)+\left(\frac{-۱}{۶^{۳}}\right)+\ldots\right]+\left[\left(\frac{-۱}{۶^{۲}}\right)+\left(\frac{۱}{۶^{۴}}\right)+\ldots\right]$$

$$\frac{\frac{۱}{۶}}{۱-(-\frac{۱}{۶^{۲}})}+\frac{\frac{-۱}{۶^{۲}}}{۱-(-\frac{۱}{۶^{۲}})}=\frac{۶}{۳۷}-\frac{۱}{۳۷}=\frac{۵}{۳۷}$$

تمرین

۱. در این مورد که با بهره‌گیری از اعمال جبری جمع، تفریق و تقسیم برای دنباله‌های مثلثاتی ارائه شده در متن، نمونه‌هایی را تعیین کنید که جملات آن‌ها مشابه با آنچه به دست آورده‌ایم، از نظم و ترتیب مشخصی پیروی کنند، تحقیق و بررسی کنید.

۲. در این مورد تحقیق و بررسی کنید که دنباله‌های مثلثاتی دیگری مطابق با آن‌چه در متن ارائه شده‌اند، تعیین کنید که به واسطه‌ی آن‌ها بتوان با استفاده از عمل جبری ضرب دنباله‌های مثلثاتی دیگری به وجود آورد که جملات آن‌ها مشابه با آن‌چه در متن به دست آورده‌ایم، از نظم و ترتیب مشخصی پیروی کنند.

۳. همگرایی یا واگرایی سری زیر را با محاسبه‌ی حد مجموع جزئی آن تعیین کنید.

$$\sum_{n=۱}^{+\infty} \frac{n^۳ + ۴^n - n}{n۴^{n-۱}(n^۲ - ۱)}$$

۴. همگرایی یا واگرایی سری زیر را با محاسبه‌ی حد مجموع جزئی آن به دست آورید.

$$\sum_{n=۱}^{+\infty} \frac{(-۱)^n \sin(\frac{n\pi}{۲}) - (-۱)^n \cos(\frac{n\pi}{۲})}{۳^n \times ۴^n}$$

۵. همگرایی یا واگرایی سری زیر را با محاسبه‌ی حد مجموع جزئی آن مشخص کنید.

$$\sum_{n=۱}^{+\infty} (-۱)^n \frac{\sin(\frac{n\pi}{۴})\cos(\frac{n\pi}{۴})}{۲^n \times ۴^n}$$

۶. همگرایی یا واگرایی سری زیر را با محاسبه‌ی حد مجموع جزئی آن تعیین کنید.

$$\sum_{n=۱}^{+\infty} \cos(n\pi)\frac{۲^n + ۳^n + ۴^n}{۱۲^n}$$

۷. همگرایی یا واگرایی سری زیر را با محاسبه‌ی حد مجموع جزئی آن بررسی کنید.

$$\sum_{n=۱}^{+\infty} (-۱)^n \frac{\sin(\frac{n\pi}{۲})\cos(\frac{n\pi}{۴})\sin(\frac{n\pi}{۴})}{۵^n \times ۶^n}$$

منابع

۱. حساب دیفرانسیل و انتگرال دوره‌ی پیش‌دانشگاهی رشته‌ی علوم ریاضی، شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران، ۱۳۸۹.

۲. حساب دیفرانسیل و انتگرال و هندسه‌ی تحلیلی، جورج توماس و راس فینی، ترجمه‌ی مهدی بهزاد، سیامک کاظمی و علی کافی، مرکز نشر دانشگاهی، ۱۳۷۵.

تفاضل مربع‌های دو عدد

یک الگوی ریاضی

با سلام خدمت دست‌اندرکاران مجله‌ی ریاضی برهان، اینجانب فرهاد محمدی خجسته‌نژاد دانش‌آموز سال اول دبیرستان خاتم منطقه‌ی ۶ تهران، الگوی زیر را درباره‌ی عددهای طبیعی a و b ($a > b$) کشف کرده و با کمک دبیر ریاضی خود درستی آن را اثبات نموده‌ام تا در صورتی که صلاح می‌دانید آن را در مجله‌تان مطرح نمایید. برای محاسبه‌ی تفاضل مربع‌های دو عدد a و b یعنی $a^۲ - b^۲$، می‌توان دو عدد a و b را با دو برابرهای عددهای طبیعی بین a و b جمع کرد، برای مثال:

$$۷^۲ - ۳^۲ = ۷ + ۲\times۴ + ۲\times۵ + ۲\times۶ + ۳;$$
$$۸^۲ - ۵^۲ = ۸ + ۲\times۶ + ۲\times۷ + ۵$$

یعنی در حالت کلی داریم:

$$a^۲ - b^۲ = a + ۲(a-۱) + ۲(a-۲) + ... + ۲(b+۱) + b$$

برای اثبات این دستور از سمت راست ساده می‌کنیم و از دستور $۱+۲+۳+...+n = \frac{n(n+۱)}{۲}$ نیز استفاده می‌کنیم:

$$\text{سمت راست} = (a+b) + ۲(a-۱+a-۲+...+b+۱)$$
$$= (a+b) + ۲[(۱+۲+۳+...+b+b+۱+...+a-۱) - (۱+۲+...+b)]$$
$$= (a+b) + ۲[\frac{a(a-۱)}{۲} - \frac{b(b+۱)}{۲}] = a + b + (a^۲ - a - b^۲ - b)$$
$$= a^۲ - b^۲$$

اثبات فرمولی کاربردی در دیفرانسیل

فرزاد حمزه‌پور- محمد قناعت
دبیران ریاضی شهرستان بانه



تابع جزء صحیح

تعریف: کوچک‌ترین عدد صحیح نابیشتر x را جزء صحیح x می‌نامند و داریم:

$$n \le x < n + ۱ \Leftrightarrow [x] = n (n \in z)$$

نکته: جزء صحیح را می‌توان به صورت تابعی از R به توی Z با ضابطه‌ی $[x] = \max\{n \in Z : n \le x\}$ تعریف کرد.

مثال:

$$[۲/۷۵] = ۲; [-۴.۳] = -۵; [۲۳] = ۲۳$$

$$[۲/۷۵] = \max\{n \in Z : n \le ۲/۷۵\}$$

$$= \max\{۲, ۱, ۰, -۱, -۲, ...\} = ۲$$

باتوجه به تعریف، داریم:

$$[x] \le x < [x] + ۱$$

$$۰ \le x - [x] < ۱$$

$$x - ۱ < [x] \le x$$

$$[x + k] = [x] + k (k \in Z)$$

$$[x] + [-x] = \begin{cases} ۰ & x \in Z \\ -۱ & x \notin Z \end{cases}$$

$$[x + y] \ge [x] + [y]$$

$$[nx] = [x] + \left[x + \frac{۱}{n}\right] + \left[x + \frac{۲}{n}\right] + ... \left[x + \frac{n - ۱}{n}\right]$$

اثبات برابری زیر:

$$[nx] = [x] + \left[x + \frac{۱}{n}\right] + \left[x + \frac{۲}{n}\right] + ... + \left[x + \frac{n - ۱}{n}\right]$$

$$[x] = m$$

$$x = [x] + p \ , \ ۰ \le p < ۱$$

$$x = k + p \ , \ ۰ \le p < ۱$$

$$[nx] = [n(k + p)] = nk + [np] \ ; \ ۰ \le np < n$$

$$۰ \le p < ۱ \Rightarrow \begin{cases} ۰ \le p < \frac{۱}{n} \\ \frac{۱}{n} \le p < \frac{۲}{n} \\ \vdots \\ \frac{i}{n} \le p < \frac{i + ۱}{n} \\ \vdots \\ \frac{n - ۱}{n} \le p < \frac{n}{n} = ۱ \end{cases}$$

در هر حالت، باید ثابت کنیم که معادله برقرار است.
برای فهم بهتر، یکی دو مورد را اثبات می‌کنیم و پس از ایده گرفتن، قضیه را در حالت کلی ثابت می‌کنیم.

$$
\begin{aligned}
&۰ \le p < \frac{۱}{n} \Rightarrow ۰ \le np < ۱ \Rightarrow [np] = ۰\\
&\Rightarrow [nx] = [nk + np] = nk + ۰ = nk\\
&[x] + \left[x + \frac{۱}{n}\right] + \left[x + \frac{۲}{n}\right] + \dots + \left[x + \frac{n-۱}{n}\right]\\
&= k + \left[k + p + \frac{۱}{n}\right] + \left[k + p + \frac{۲}{n}\right] + \dots + \left[k + p + \frac{n-۱}{n}\right]\\
&= nk + \left[p + \frac{۱}{n}\right] + \left[p + \frac{۲}{n}\right] + \dots + \left[p + \frac{n-۱}{n}\right]\\
&= nk + ۰ + ۰ + \dots + ۰ = nk
\end{aligned}
$$

زیرا هر یک از جزء صحیح‌ها صفر است.
ببینید:

$$
۰ \le p < \frac{۱}{n} \Rightarrow \begin{cases}
\frac{۱}{n} \le p + \frac{۱}{n} < \frac{۲}{n} \Rightarrow \left[p + \frac{۱}{n}\right] = ۰\\
\frac{۲}{n} \le p + \frac{۲}{n} < \frac{۳}{n} \Rightarrow \left[p + \frac{۲}{n}\right] = ۰\\
\vdots\\
\frac{n-۱}{n} \le p + \frac{n-۱}{n} < \frac{n}{n} = ۱ \Rightarrow \left[p + \frac{n-۱}{n}\right] = ۰
\end{cases}
$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{۱}{n} \le p < \frac{۲}{n} \Rightarrow ۱ \le np < ۲ \Rightarrow [np] = ۱\\
&\Rightarrow [nx] = [nk + np] = nk + ۱\\
&[x] + \left[x + \frac{۱}{n}\right] + \left[x + \frac{۲}{n}\right] + \dots + \left[x + \frac{n-۱}{n}\right]\\
&= k + \left[k + p + \frac{۱}{n}\right] + \left[k + p + \frac{۲}{n}\right] + \dots + \left[k + p + \frac{n-۱}{n}\right].\\
&= nk + \left[p + \frac{۱}{n}\right] + \left[p + \frac{۲}{n}\right] + \dots + \left[p + \frac{n-۱}{n}\right]\\
&= nk + ۰ + ۰ + \dots + ۰ = nk + ۱
\end{aligned}
$$

باز هم، همه به جز یکی از جزء صحیح‌ها، صفر و آخری یک است.

$$
\frac{۱}{n} \le p < \frac{۲}{n} \Rightarrow \begin{cases}
\frac{۲}{n} \le p + \frac{۱}{n} < \frac{۳}{n} \Rightarrow \left[p + \frac{۱}{n}\right] = ۰\\
\frac{۳}{n} \le p + \frac{۲}{n} < \frac{۴}{n} \Rightarrow \left[p + \frac{۲}{n}\right] = ۰\\
\vdots\\
۱ = \frac{n}{n} \le p + \frac{n-۱}{n} < \frac{n+۱}{n} = ۱/۱\\
\qquad \Rightarrow \left[p + \frac{n-۱}{n}\right] = ۱
\end{cases}
$$

در حالت کلی، یعنی برای $i = ۰, ۱, ۲, ۳, \dots, n-۱$ و $\frac{i}{n} \le p < \frac{i+۱}{n}$ نشان می‌دهیم که رابطه برقرار است:

$$
\begin{aligned}
&\frac{i}{n} \le p < \frac{i+۱}{n} \Rightarrow i \le np < i + ۱ \Rightarrow [np] = i\\
&\Rightarrow [nx] = [nk + np] = nk + i\\
&[x] + \left[x + \frac{۱}{n}\right] + \left[x + \frac{۲}{n}\right] + \dots + \left[x + \frac{n-۱}{n}\right]\\
&= k + \left[k + p + \frac{۱}{n}\right] + \left[k + p + \frac{۲}{n}\right] + \dots + \left[k + p + \frac{n-i-۱}{n}\right]\\
&+ \underbrace{\left[k + p + \frac{n-i}{n}\right] + \dots + \left[k + p + \frac{n-۲}{n}\right] + \left[k + p + \frac{n-۱}{n}\right]}_{i}\\
&= nk + \underbrace{\left[p + \frac{۱}{n}\right] + \left[p + \frac{۲}{n}\right] + \dots + \left[p + \frac{n-i-۱}{n}\right]}_{(n-i)\times ۰}\\
&+ \underbrace{\left[p + \frac{n-i}{n}\right] + \dots + \left[p + \frac{n-۲}{n}\right] + \left[p + \frac{n-۱}{n}\right]}_{i \times ۱}\\
&= nk + \underbrace{۰ + ۰ + \dots + ۰}_{(n-i)} + \underbrace{۱ + ۱ + \dots + ۱}_{i} = nk + i
\end{aligned}
$$

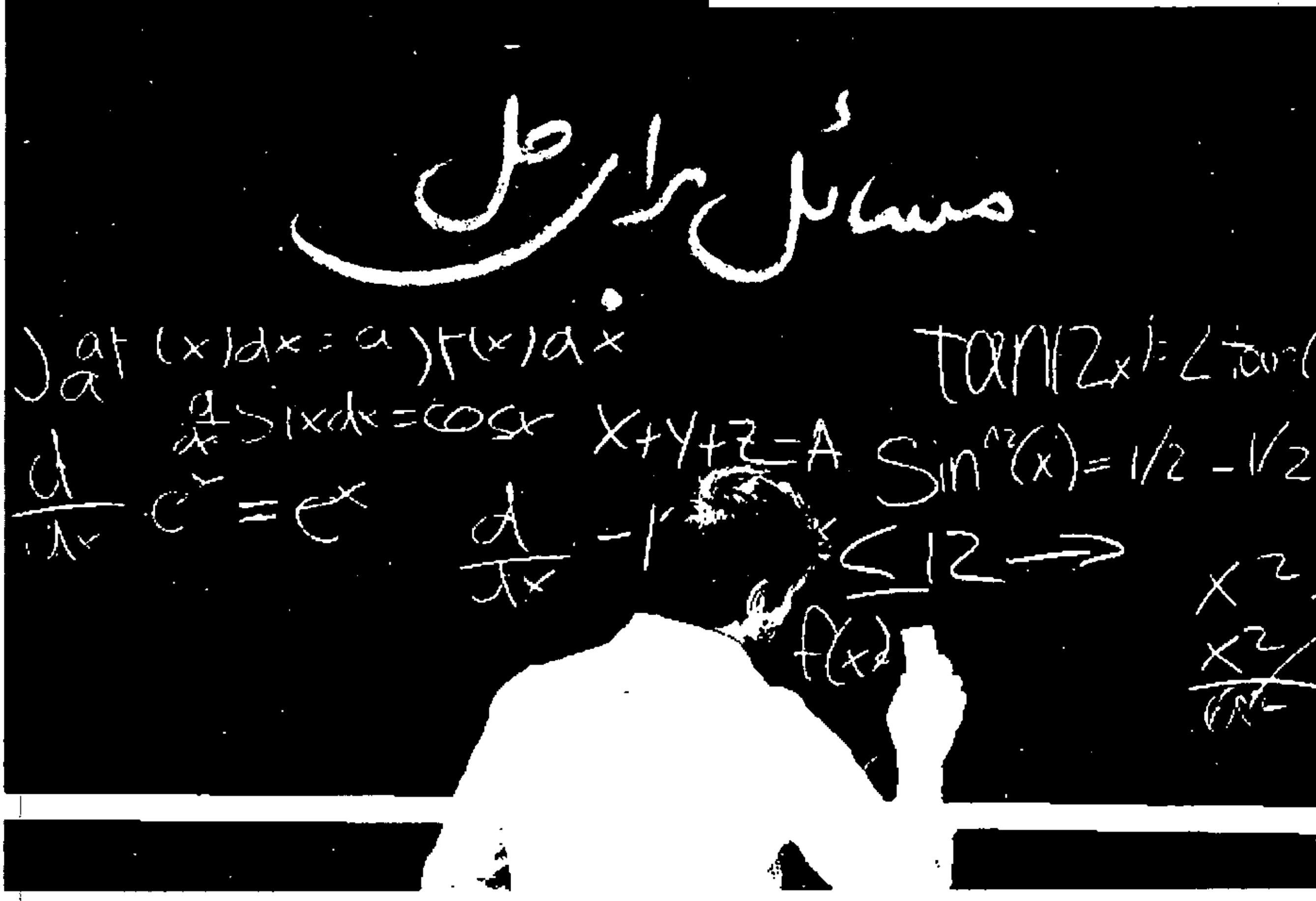
$$
\begin{aligned}
&\frac{i}{n} \le p < \frac{i+۱}{n} \Rightarrow \left[p + \frac{n-i}{n}\right] = ۱\\
&\frac{i}{n} \le p < \frac{i+۱}{n} \Rightarrow \frac{i}{n} + \frac{n-i}{n} \le p + \frac{n-i}{n} < \frac{i+۱}{n} + \frac{n-i}{n}\\
&\Rightarrow ۱ \le p + \frac{n-i}{n} < \frac{n+۱}{n} = ۱ + \delta\\
&\Rightarrow \left[p + \frac{n-i}{n}\right] = ۱
\end{aligned}
$$

به همین ترتیب داریم:

$$
\left[p + \frac{n-i-۱}{n}\right] = ۰
$$

زیرا:

$$
\begin{aligned}
&\frac{i}{n} \le p < \frac{i+۱}{n} \Rightarrow \left[p + \frac{n-i-۱}{n}\right] = ۰\\
&\frac{i}{n} \le p < \frac{i+۱}{n} \Rightarrow \frac{i}{n} + \frac{n-i-۱}{n} \le p + \frac{n-i-۱}{n}\\
&< \frac{i+۱}{n} + \frac{n-i-۱}{n} \Rightarrow \frac{n-۱}{n} \le p + \frac{n-i-۱}{n} < \frac{n}{n} = ۱\\
&\Rightarrow \left[p + \frac{n-i-۱}{n}\right] = ۰
\end{aligned}
$$



مسائل ریاضیات ۱

فرخ فرشیان

۱- طول وتر یک مثلث قائم‌الزاویه $۵\sqrt{۲}$ و طول دو ضلع زاویه‌ی قائمه دو عدد طبیعی است. اندازه‌ی همه‌ی ضلع‌های این مثلث را پیدا کنید. در کدام یک از جواب‌های ممکن مسئله، محیط مثلث کمتر است.

۲- کدام کسر بزرگ‌تر است؟ $\frac{۱۰۱}{۱۰۰۱}$ و $\frac{۱۰۰۱}{۱۰۰۰۱}$

۳- اگر بخواهیم صد عدد بنویسیم که بین دو عدد $\frac{۴۲}{۴۳}$ و $\frac{۴۱}{۴۳}$ باشند، چگونه عمل کنیم؟

۴- حاصل $\dfrac{\left|\,|\sqrt{۳}-\sqrt{۵}\,|-|\sqrt{۵}-۲|-۲\times(۳-۴)\right|}{\left|\,|\sqrt{۳}-۲|-|-\sqrt{۳}\,|\right|+۲}$ را به دست آورید.

۵- هر یک از مجموعه‌های زیر را با نوشتن عضوهایش مشخص کنید.

الف) $A=\left\{\frac{۲^x+۱}{۲^x-۱}\,\middle|\,x\in Z,\ -۳\le x\le ۰\right\}$

ب) $B=\{۲^x-۳^y \mid x,y\in Z,\ xy=۴\}$

۶- اگر $A\cap B=\{۱,۲\}$ و $A-B=\{۳,۴\}$ و $B-A=\{۵,۶\}$ باشند مجموعه‌ی $A\cup B$ را با نوشتن عضوها مشخص کنید.

۷- به جای X در رابطه‌ی $\{۳\}\subset X\subset\{۱,۲,۳\}$ چند مجموعه می‌توان نوشت؟ آن مجموعه‌ها را مشخص کنید.

۸- اگر $n^n=a$ باشد، حاصل عبارت $n^{n^{n+۱}}$ را برحسب a به‌دست آورید.

۹- حاصل عبارات زیر را به ساده‌ترین صورت بنویسید.

$$\underbrace{۱۱^{۱۳}+۱۱^{۱۳}+\dots+۱۱^{۱۳}}_{\text{۱۱ تا}}+\underbrace{۱۱^{۱۴}+۱۱^{۱۴}+\dots+۱۱^{۱۴}}_{\text{۱۲۰ تا}}$$

$$+\underbrace{۱۱^{۱۵}+۱۱^{۱۵}+\dots+۱۱^{۱۵}}_{\text{۱۳۲۰ تا}}$$

ب) $\left[\left(\frac{۱}{۷}\right)^{\left(\frac{۱}{۷}\right)^{\left(\frac{۱}{۷}\right)}}\times\left(-\frac{۱}{۷}\right)^{\left(\frac{۱}{۷}\right)^{\left(\frac{۱}{۷}\right)}}\right]^{\left(\frac{۱}{۷}\right)^{\left(-\frac{۱}{۷}\right)}}$

۱۰- عبارت $-\sqrt{-yx^۲}-\sqrt{-xy^۲}$ را ساده کنید.

۱۱- ابتدا مخرج کسر زیر را ساده و سپس گویا کنید.

$$\frac{۱}{\sqrt[۴]{۴۰۵}+۳\sqrt[۸]{۲۵}+۷\sqrt[۱۶]{۶۲۵}+۵\sqrt[۸]{۲۵}-۱۶\sqrt[۴]{۵}}$$

۱۲- حاصل عبارت ذیل را به دست آورید.

$-x\{-x[-x(3-x)-2]-5\}+1-x^3(x-3)+2x^2$

۱۳- اگر $A=4(x^2+3)-2(x-2)(2x-3)$ و $B=14(2x-\frac{1}{7})(7x+\frac{1}{2})$ باشد، حاصل $(B-A^2)^{2010}$ را به‌دست آورید.

۱۴- حاصل عبارت‌های زیر را به کمک اتحادها به دست آورید.

الف) $(ab-a)^2(b+1)^2(b^2+1)^2a^{-2}$

ب) $19^2+19\times18+18^2+18^3$

۱۵- اگر $x+\frac{1}{x}=3$ باشد، حاصل عبارت $\left(\frac{x^2+1}{2x}\right)^2-2x^2+6x$ را به دست آورید.

۱۶- چندجمله‌ای‌های زیر را تجزیه کنید.

الف) $a^6x^2-729x^8$

ب) $(a+b)^2+1-2a-2b$

ج) $x^2+y^2-2x+2xy-2y+1$

د) $3x^3-7x^2+4$

۱۷- فاصله‌ی دو شهر ۱۰ کیلومتر بیشتر از یک سوم فاصله‌ی همان دو شهر است. فاصله‌ی این دو شهر را پیدا کنید.

۱۸- نقطه‌ی A را روی محور طول‌ها چنان تعیین کنید که از دو نقطه‌ی $B=(4,1)$ و $C=(2,1)$ به یک فاصله باشد.

۱- در مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABC $(\angle A=90°)$، اگر ضلع‌ها را a، b و c بنامیم (وتر = a)، ثابت کنید در صورتی که ضلع‌های مثلث با یکدیگر تصاعد عددی بسازند، ضلع وسطی ۴ برابر قدر نسبت است.

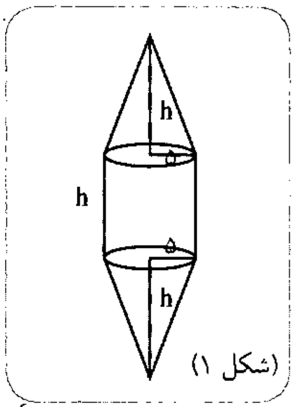
۲- اگر جملات چهارم، ششم و دوازدهم یک دنباله‌ی عددی به ترتیب، سه جمله‌ی اول یک دنباله‌ی هندسی باشند، قدر نسبت دنباله‌ی هندسی را بیابید.

۳- اگر دو تابع $f=\{(1,2a+b),(a,3)\}$ و $g=\{(1,a+3b),(2,4b+c)\}$ با هم برابر باشند، آن‌گاه مقدار عددی $5a+2b+c$ را به دست آورید.

۴- اگر دو نقطه‌ی $A(2n+2m,n-m)$ و $B(2n-1,\frac{n}{3}+1)$ نسبت به خط به معادله‌ی $y=x$ قرینه‌ی یکدیگر باشند، مقادیر m و n را بیابید.

۵- تابع $f=\{(1,-3),(2,5),(-3,2)\}$ را در نظر بگیرید. در این صورت حاصل $f(f(f(1)))$ را بیابید.

۶- مخزنی از یک استوانه و دو مخروط به شعاع مقطع ۵ در دو انتهای استوانه تشکیل شده است (شکل ۱). اگر ارتفاع استوانه و مخروط‌ها h باشد. حجم این مخزن را برحسب تابعی از h بنویسید.



(شکل ۱)

۷- هرگاه داشته باشیم $f(x)=\begin{cases}2x-1 & x>2\\ 4 & x=2\\ x^2+1 & x<2\end{cases}$، در این صورت $f(k-1)$ را به دست آورید.

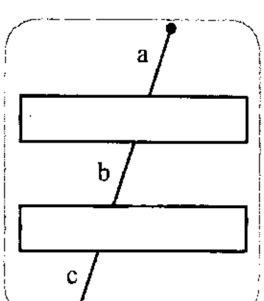
۸- حدود a را چنان تعیین کنید که به ازای جمیع مقادیر x داشته باشیم:

$$\frac{ax^2+2x+a-2}{2x^2+3x+2}>0$$

۹- دامنه‌ی تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\frac{2\sqrt{16-x^2}}{\sqrt{-x^2-x+30}}$ را به دست آورید.

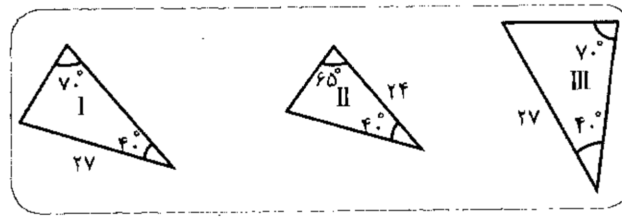
۱۰- نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x)=2\times(\frac{3}{2})^{x-1}$ را رسم کنید.

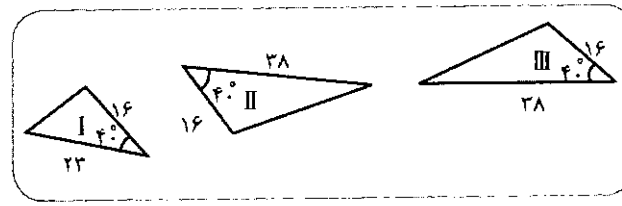
۱. در شکل زیر، آیا سه پاره خط a، b و c بر یک استقامت‌اند یا متوازی و متمایزند؟

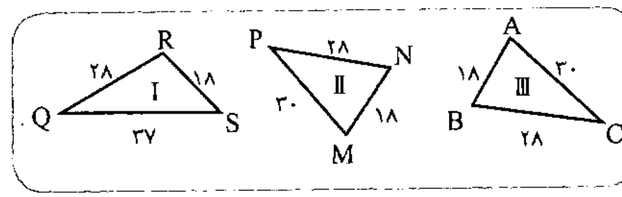


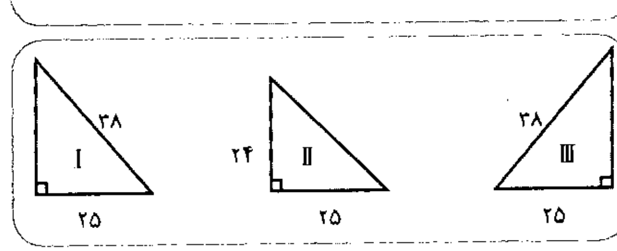
۲. دو زاویه متمم یکدیگرند. اگر یکی از آن‌ها ۶ درجه از ۳ برابر دیگری کم‌تر باشد، اندازه‌ی هر یک از این دو زاویه را تعیین کنید.

۳. در هر دسته از شکل‌های ذیل، مثلث‌های هم‌نهشت را تعیین و حالت هم‌نهشتی آن‌ها را مشخص کنید.

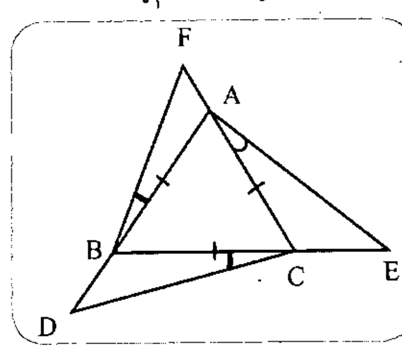






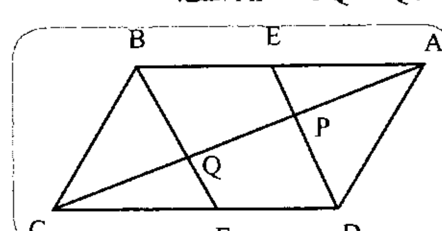


۴. ضلع‌های مثلث متساوی‌الاضلاع ABC را چنان امتداد می‌دهیم که $A\hat{B}F = B\hat{C}D = C\hat{A}E$ باشد (شکل زیر). ثابت کنید که مثلث‌های ABF، BCD و CAE هم‌نهشت‌اند.



۵. تعداد قطرهای یک ۱۷ ضلعی چه‌قدر بیش‌تر از تعداد ضلع‌های آن است؟

۶. در متوازی‌الاضلاع ABCD، نقطه‌ی E وسط ضلع AB و نقطه‌ی F وسط ضلع CD است. پاره‌خط‌های DE و BF قطر AC از این متوازی‌الاضلاع را به ترتیب در نقطه‌های P و Q قطع کرده‌اند. ثابت کنید که $AP = PQ = QC$ است.



۷. مساحت مستطیلی را بیابید که:

الف) محیط آن ۶۸ سانتی‌متر و نسبت دو ضلع مجاورش $\frac{۸}{۹}$ باشد.

ب) قطر آن ۵۰ سانتی‌متر و یک زاویه‌ی بین دو قطرش $۶۰°$ باشد.

۸. اندازه‌ی ارتفاع متوازی‌الاضلاعی را بیابید که:

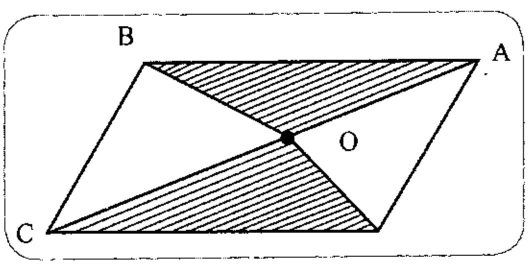
الف) مساحت آن ۵۷۶ و ضلع نظیر این ارتفاع ۲۴ باشد.

ب) مساحت آن ۴۸۰ و نسبت این ارتفاع به ضلع نظیرش مساوی $\frac{۵}{۶}$ باشد.

پ) مساحت آن ۱۱۷ سانتی‌متر مربع و ضلع نظیر این ارتفاع ۴ واحد بیش‌تر از ارتفاع آن باشد.

۹. نقطه‌ی O واقع در درون متوازی‌الاضلاع ABCD را به رأس‌های این متوازی‌الاضلاع وصل می‌کنیم (شکل زیر). ثابت کنید که داریم:

$$S_{OAB} + S_{OCD} = \frac{۱}{۲} S_{ABCD}$$

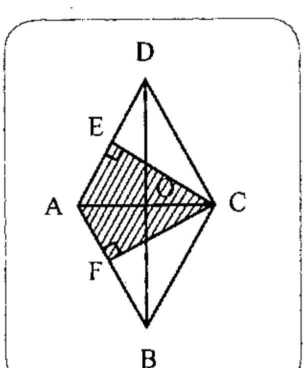


(راهنمایی: ارتفاع‌های رأس O از دو مثلث OAB و OCD را رسم کنید.)

۱۰. مساحت یک شش ضلعی منتظم $۵۴\sqrt{۳}$ سانتی‌متر مربع است. اندازه‌ی ضلع و اندازه‌ی سهم آن را بیابید.

راهنمایی: مساحت شش ضلعی منتظم به ضلع a مساوی با $\frac{۳\sqrt{۳}a^۲}{۲}$ است.

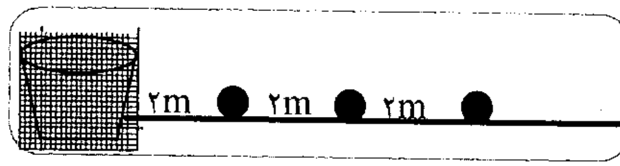
۱۱. در لوزی ABCD، اندازه قطرهای $AC = ۱۲$ و $BD = ۱۶$ است. از رأس C عمودهای CE و CF وارد بر دو ضلع AD و AB را رسم کرده‌ایم. مساحت چهارضلعی AECF را تعیین کنید.



مسائل حسابان

مجتبی رفیعی

۱- تعدادی توپ روی یک خط مستقیم و به فاصله‌ی دو متر از هم قرار دارند. فاصله‌ی توپ اول تا یک سبد ۲ متر است (شکل زیر). دونده‌ای باید از کنار سبد شروع کند، هر توپ را بردارد و به سبد بیندازد و دوباره به طرف توپ بعدی بدود و آن را تا سبد حمل کند و داخل آن بیندازد. اگر این دونده در مجموع ۴۸۰ متر دویده باشد، معین کنید او چند توپ در سبد انداخته است؟



۲- اگر a، b، c و d جمله‌های متوالی یک تصاعد هندسی باشند، درستی رابطه‌ی زیر را ثابت کنید.

$$(b-c)^2 = ac + bd - 2ab$$

۳- خارج قسمت و باقی‌مانده‌ی تقسیم $x^n \pm a^n$ را بر $x \pm a$ حساب کنید ($n \in \mathbb{N}$).

۴- اگر در بسط دو جمله‌ای $(x+y)^{2m+1}$ جمله‌ی نهم دارای بزرگ‌ترین ضریب عددی باشد، m را بیابید.

۵- فرض کنید x_1 و x_2 اعداد حقیقی باشند و $x_1^2 + x_2^2 = 5$، $3(x_1^5 + x_2^5) = 11(x_1^3 + x_2^3)$؛ معادله‌ی درجه‌ی دومی بنویسید که ریشه‌هایش x_1 و x_2 باشند.

۶- حاصل عبارت زیر را به دست آورید:

$$\frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b+c}}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b+c}} \cdot \left(1 + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}\right) \div \frac{a+b+c}{2bc}$$

۷- معادله‌ی اصمّ زیر را حل کنید.

$$\sqrt{2x+3} + \sqrt{5x+1} = \sqrt{12x+13}$$

۸- برد تابع با ضابطه‌ی $f(x) = x(x+1)(x+2)(x+3)$ را به دست آورید.

۹- نمودار تابع $f:[-5,5] \to R$ با ضابطه‌ی $f(x) = \left|\left||x|-1\right|-1\right|$ را رسم و وضعیت تابع را از نظر زوج یا فرد بودن مشخص کنید.

۱۰- فرض کنید تابع‌های $f, g: R \to R$ صعودی (اکید) باشند.

الف) ثابت کنید $f+g$ هم صعودی (اکید) است.

ب) آیا ممکن است $f-g$ صعودی (اکید) نباشد؟

۱۱- فرض کنید f تابعی یک به یک و فرد باشد. ثابت کنید که تابع f^{-1} هم فرد است.

۱۲- ثابت کنید تابع با ضابطه‌ی $f(x) = x + [x]$ معکوس‌پذیر است و معکوس آن را به دست آورید.

۱۳- نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \left[\frac{[x]+1}{3}\right]$ را در فاصله‌ی $x \in [0,10]$ رسم کنید.

۱۴- معادله‌ی $[\sin^2 x] + \left[\frac{x}{2}\right] = -1$ را حل کنید ([ ] تابع جزء صحیح است).

۱۵- معادله‌ی زیر را حل کنید.

$$\sin 2x + \sqrt{3} - 2\cos x - \sqrt{3}\sin x = 0$$

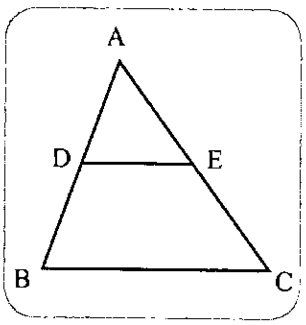
۱۶- ثابت کنید:

$$2\operatorname{Arc\,tan}\frac{1}{2} + \operatorname{Arc\,tan}\frac{1}{3} = \operatorname{Arc\,tan} 3$$

مسائل هندسه‌ی ۲

محمد هاشم رستمی

۱. مثلث ABC را در نظر می‌گیریم و خطی موازی ضلع BC رسم می‌کنیم تا ضلع‌های AB و AC را در نقطه‌های D و E قطع کند.



الف) پاره‌خط‌های AB، DB، AE و EC را با خط‌کش اندازه بگیرید.

ب) نسبت‌های $\frac{AD}{DB}$ و $\frac{AE}{EC}$ را محاسبه کنید. آیا این دو نسبت مساوی‌اند؟

پ) خط دیگری موازی ضلع BC رسم کنید تا ضلع‌های AB و AC را به ترتیب در نقطه‌های M و N قطع کند.

ت) اندازه‌ی پاره‌خط‌های AM، MB، AN و NC و نسبت‌های $\frac{AM}{MB}$ و $\frac{AN}{NC}$ را تعیین کنید. آیا این دو نسبت مساوی‌اند؟

ث) از قسمت‌های (ب) و (ت) چه حدسی می‌زنید؟

۲. کدام یک از عبارت‌های زیر درست و کدام یک نادرست است؟ در صورت نادرست بودن، یک مثال نقض بزنید.

الف) هر زاویه‌ی خارجی یک مثلث مساوی مجموع دو زاویه‌ی داخلی غیرمجاور آن مثلث است.

ب) در مثلث ABC، $AB = 8$ و $BC = 9$ است، پس $\hat{A} < \hat{C}$ است.

پ) اگر موربی دو خط راست را چنان قطع کند که چهار زاویه‌ی حاده‌ی هم‌نهشت و چهار زاویه‌ی منفرجه‌ی هم‌نهشت به وجود آید، آن دو خط با هم موازی‌اند.

۳. سه پاره خط به طول‌های x، $x-1$ و $2x-3$ داده شده‌اند. اگر این سه پاره خط ضلع‌های یک مثلث به محیط ۴۰ باشند، ضلع‌های

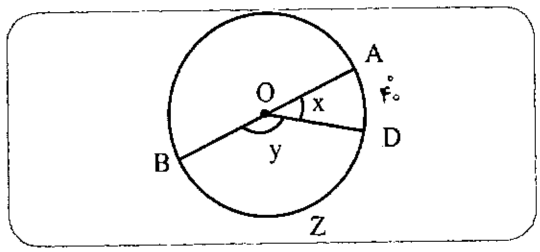
این مثلث را تعیین کنید.

۴. طول مستطیلی ۲ برابر عرض آن است. از برخورد نیمسازهای زاویه‌های درونی این مستطیل، مربعی به ضلع ۸ سانتی‌متر ایجاد شده است. اندازه‌ی ضلع‌های این مستطیل را تعیین کنید.

۵. سه نقطه‌ی A، B و C در یک صفحه داده شده‌اند. نقطه‌ای در این صفحه بیابید که از دو نقطه‌ی B و C به یک فاصله باشد و از نقطه‌ی A به فاصله‌ی ۶ قرار گیرد.

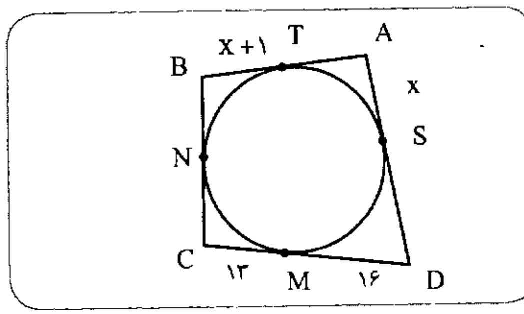
۶. از مثلث ABC، اندازه‌ی زاویه‌های $\hat{B} = \alpha$ و $\hat{C} = \beta$ و محیط مثلث $AB + AC + BC = ۲P$ داده شده است. این مثلث را رسم کنید

۷. در شکل داده شده، نقطه‌ی O مرکز دایره است. اندازه‌ی x و y را با توجه به شکل بیابید.

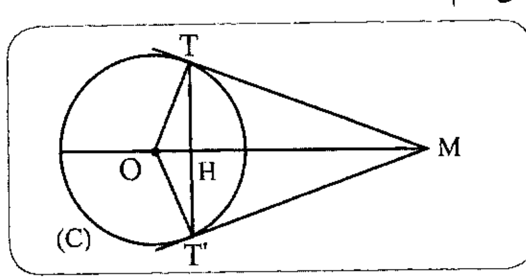


۸. در دایره‌ی $C(O,۱۰)$ دو وتر AB و CD به طول‌های ۱۲ و ۱۸ داده شده‌اند. کدام وتر به مرکز دایره نزدیک‌تر است؟

۹. چهار ضلعی ABCD بر دایره‌ی (O) محیط است. با توجه به شکل اندازه‌ی x را چنان بیابید که محیط این چهار ضلعی مساوی ۱۲۰ باشد (M، N، T و S نقطه‌های تماس ضلع‌های چهارضلعی با دایره‌اند).



۱۰. از نقطه‌ی M واقع در خارج دایره‌ی $C(O,R)$ دو مماس MT و MT' را بر این دایره رسم می‌کنیم. از O به T و T' و هم‌چنین از M به O وصل می‌کنیم و نقطه‌ی برخورد TT' و OM را H می‌نامیم.



الف) اگر $T\hat{M}T' = ۶۰°$ و $R = ۱۵cm$ باشد، اندازه‌ی MT، TH، OH و MH را تعیین کنید.

ب) اگر $MO = ۳۰cm$ و $TH = ۱۵cm$ باشد، اندازه‌ی MH، OH، 'TT، MT و OT را تعیین کنید.

۱- به کمک قضیه‌ی استقرای ریاضی ثابت کنید:

$$\frac{۱}{۱^۲} + \frac{۱}{۲^۲} + \frac{۱}{۳^۲} + ... + \frac{۱}{n^۲} \le ۲ - \frac{۱}{n}$$

۲- به کمک استدلال استنتاجی ثابت کنید که اگر عددی طبیعی بر سه بخش‌پذیر نباشد، مربع آن در تقسیم بر سه همواره باقی مانده‌ی ۱ دارد.

۳- به کمک برهان خلف ثابت کنید با فرض گنگ بودن $\sqrt{۵}$، عدد $\sqrt{\sqrt{۵} + \sqrt[۳]{۲}}$ نیز گنگ است.

۴- به کمک استدلال بازگشتی، درستی نابرابری زیر را برای عددهای حقیقی و مثبت a و b اثبات کنید:

$$\frac{a^۳}{b} + \frac{b^۳}{a} \ge a^۲ + b^۲$$

۵- درستی هر یک از احکام درست زیر را اثبات کنید و نادرستی احکام نادرست را با یک مثال نقض نشان دهید.

الف) مکعب هر عدد گنگ، عددی گنگ است.

ب) مکعب هر عدد گنگ، عددی گویاست.

ج) مکعب هر عدد گویا، عددی گویاست.

۶- پانزده نقطه به تصادف درون شش ضلعی منتظمی به ضلع واحد اختیار می‌کنیم. ثابت کنید دست کم سه تا از این نقاط رئوس مثلثی هستند که مساحت آن از $\frac{\sqrt{۳}}{۴}$ واحد سطح کمتر است.

۷- مجموعه‌های A و B به صورت زیر معرفی شده‌اند:

$$A = \{x \in \mathbb{Z} \mid x(x - ۱) \le ۲\},$$
$$B = \{x \in W \mid x! \le ۳۰\}$$

مجموعه‌ی $A\Delta B$ را با اعضای آن مشخص کنید.

۸- مجموعه‌های زیر را با نماد ریاضی نمایش دهید:

$$A = \left\{\frac{۱}{۲}, \frac{-۱}{۶}, \frac{۱}{۱۲}, \frac{-۱}{۲۰}, ...\right\} \quad B = \left\{\frac{۱}{۲}, \frac{۱}{۵}\right\}$$

۹- درستی روابط زیر را با کمک قوانین جبر مجموعه‌ها اثبات کنید:

الف) $A - (B - C) = (A - B) \cup (A \cap C)$

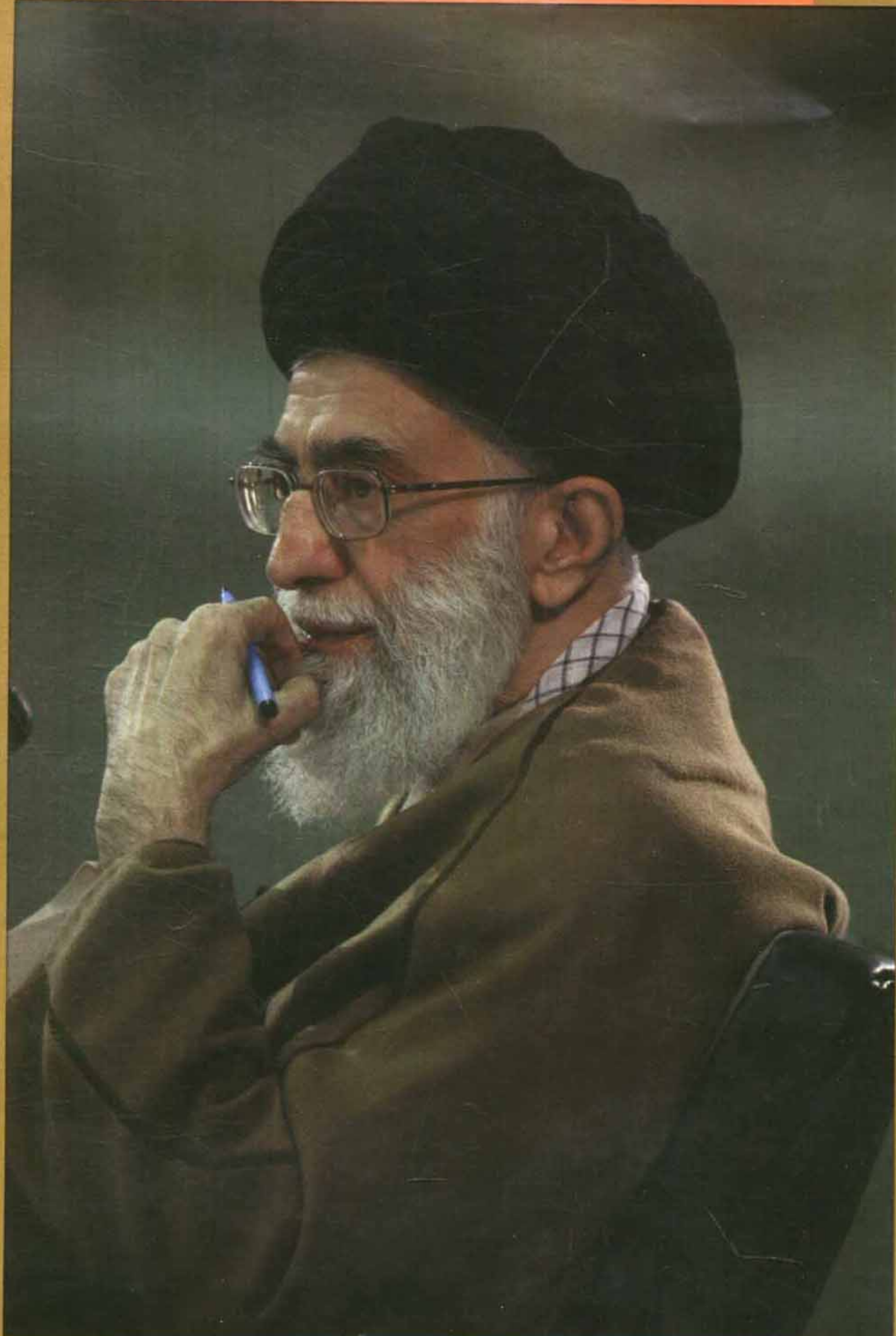
ب) $A \subset B, A' \subset B \Rightarrow B = U$

ج) $A - B = A \Rightarrow B - A = B$

در انتظار بهار



عکاس: خانم نسرین حیدری /چهارمحال و بختیاری



مقام معظم رهبری: من از جوان سه چیز می خواهم:
تحصیل،
تهذیب و
ورزش

رشد برهان

۶۹

مجله‌ی ریاضی

دوره‌ی آموزش متوسطه

وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی
دفتر انتشارات کمک‌آموزشی

دوره‌ی بیستم/ بهار ۱۳۹۰/ شماره‌ی ۳/ ٦٤ صفحه/ ۵۰۰۰ ریال
فصلنامه‌ی آموزشی، تحلیلی و اطلاع‌رسانی
www.roshdmag.ir

● مسیر، دور و هم‌بندی در گراف‌ها ● اصل لانه کبوتری ● المپیادهای ریاضی لنینگراد ● دنباله



سال نو مبارک

ISSN: 1735-4951

ریاضی‌دانان مسلمان



شیخ بهایی

محمدبن حسین بهاءالدین عاملی متخلص به بهایی و معروف به شیخ بهایی دانشمند معروف و ریاضیدان (۹۵۳-۱۰۳۱)

دانشمند به‌نام عهد شاه‌عباس اول. در سال ۹۵۳ در بعلبک تولد یافت و در سال ۱۰۳۱ در اصفهان درگذشت و آرامگاه او بنا به وصیت خودش در مجموعه‌ی حرم رضوی (بست شیخ بهایی) قرار دارد. اصل وی از جبل عامل بود. به ایران سفر کرد و در دربار شاه‌عباس قدر و منزلت بسیار یافت. تألیفاتی به فارسی و عربی پرداخته که مجموع آن‌ها به ۸۸ کتاب و رساله بالغ می‌شود. شهرت فوق‌العادهٔ از در ریاضیات به دلیل تألیف کتاب خلاصه‌الحساب است.

همچنین به پاس خدمات وی به علم نجوم، یونسکو سال ۲۰۰۹ میلادی را به نام او سال «نجوم و شیخ بهایی» نامگذاری کرد.

تألیف ریاضی و شیخ بهایی

خلاصة‌الحساب

کتابی است درسی در ریاضیات مقدماتی که تقریباً همهٔ آن از نوشته‌های دیگران اقتباس و تألیف شده است. این کتاب در حدود دویست سال در ایران و ترکیه و هندوستان از شهرت فوق‌العاده‌ای برخوردار بوده و بارها به طبع رسیده است. اخیراً هم در سال ۱۹۷۶ میلادی کتابی با عنوان ریاضیات بهاءالدین العاملی توسط جلال شوقی در حلب به چاپ رسیده است.

قضاوت شادروان دکتر مصاحب را دربارهٔ خلاصة‌الحساب در کتاب «مصاحب: تئوری اعداد»، جلد دوم صفحهٔ ۱۷۱۹ خواهید یافت.

بر خلاصة‌الحساب شرح‌های متعدد به زبان‌های فارسی و عربی نوشته‌اند. از آن جمله یک شرح فارسی ممزوج با متن عربی است که توسط شخصی موسوم به مولوی روشنعلی جونفوری انجام گرفته و در سال ۱۲۲۷ هـ.ق مطابق با ۱۸۱۲ میلادی در کلکته به چاپ رسیده است. و نیز از جملهٔ شرح‌ها و ترجمه‌های فارسی آن کتاب کنزالحساب تألیف فرهاد میرزا معتمدالدوله (۱۲۳۳- ۱۳۰۵ هـ.ق) از مشاهیر و رجال و شاهزادگان عصر ناصری است که در سال ۱۲۸۷ هـ.ق در تهران به طبع رسیده است. ازجمله شرح‌های عربی معروف آن شرح ممزوجی است که فاضل جواد که شاگرد شیخ بهایی بوده نوشته و به «شرح جواد» معروف است و در سال ۱۲۷۳ هـ.ق در تهران چاپ شده است.

شهرت شیخ بهایی بین مورخان ریاضی از آن جهت است که متن عربی و ترجمهٔ آلمانی کتاب خلاصه‌الحساب در سال ۱۸۴۳ میلادی توسط نسلمان در برلین و ترجمهٔ فرانسوی آن توسط اریستیدمار در سال ۱۸۴۶ م در فرانسه منتشر شد. و در آن موقع که هنوز دانشمندان مغرب‌زمین از آثار مهم ریاضی دورهٔ اسلامی چندان اطلاعی نداشتند با این کتاب آشنا شدند و نام بهاءالدین عاملی در کتاب‌های تاریخ ریاضیات وارد شد.

وی چند کتاب و رساله دربارهٔ هیأت و نجوم و اسطرلاب دارد که از آن جمله است تشریح‌الافلاک که خلاصه‌ای است در علم هیأت و بر آن شرح‌ها و حاشیه‌های متعدد نوشته‌اند.

گفتنی است که شیخ بهایی آثار برجسته‌ای در ادبیات به نثر و نظم پدید آورده است. در زیر نمونه‌ای از اشعار او آورده شده است:

همه روز روزه رفتن، همه شب نماز کردن — همه ساله حج نمودن، سفر حجاز کردن

ز مدینه تا به مکه، به برهنه پای رفتن — دو لب از برای لبیک، به وظیفه باز کردن

به معابد و مساجد، همه اعتکاف جستن — ز مناهی وملاهی، همه احتراز کردن

شب جمعه‌ها نخفتن، به خدای راز گفتن — ز وجود بی‌نیازش، طلب نیاز کردن

به خدا قسم که آن را، ثمر آن‌قدر نباشد — که به روی ناامیدی در بسته باز کردن

بسم الله الرحمن الرحیم

وزارت آموزش‌وپرورش
سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی
دفتر انتشارات کمک آموزشی

رشد برهان ۶۹
مجله‌ی ریاضی
دوره‌ی آموزش متوسطه

فصلنامه‌ی آموزشی، تحلیلی و اطلاع‌رسانی
دوره‌ی بیستم/شماره‌ی ۳/بهار ۱۳۹۰

● مدیر مسئول: **محمد ناصری** ● سردبیر: **حمیدرضا امیری**

● مدیر داخلی: **میرشهرام صدر** ● طراح گرافیک: **جعفر وافی**

● هیئت تحریریه: **حمیدرضا امیری، محمد هاشم رستمی، احمد قندهاری، میرشهرام صدر، هوشنگ شرقی، سید محمدرضا هاشمی موسوی، غلامرضا یاسی‌پور**

و با تشکر از همکاری ارزنده‌ی **استاد پرویز شهریاری**

● ویراستار ادبی: **مرتضی حاج‌علی‌فرد**

● **وبگاه:** www.roshdmag.ir

● **رایانامه:** Borhanm@roshdmag.ir

● **پیام‌گیر نشریات رشد:** ۸۸۳۰۱۴۸۲ ـ ۰۲۱

نشانی دفتر مجله: تهران، صندوق پستی ۱۵۸۷۵/۶۵۸۵

● **تلفن دفتر مجله:** ۸۸۳۰۵۸۶۲ ـ۰۲۱

● **تلفن امور مشترکین:** ۷۷۳۳۶۶۵۶ ـ ۷۷۳۳۶۶۵۵ ـ۰۲۱

● **شمارگان:** ۱۲۰۰۰ نسخه

● **چاپ:** شرکت افست (سهامی عام)

رشد برهان متوسطه، تمامی دبیران محترم و دانش‌آموزان عزیز را در زمینه‌های زیر به همکاری دعوت می‌کند:

● نگارش مقاله‌های کمک درسی (شرح و بسط رفع مشکلات مبحث درسی کتاب‌های ریاضی دوره‌ی متوسطه و پیش‌دانشگاهی)

● طرح مسائل کلیدی به همراه حل آن‌ها (برای دانش‌آموزان)

● طرح مسائل مسابقه‌ای به همراه حل آن‌ها (برای دانش‌آموزان)

● طرح معماهای ریاضی

● نگارش یا ترجمه‌ی مقاله‌های عمومی ریاضی (مانند تاریخ ریاضیات، زندگینامه‌ی علمی و اجتماعی ریاضی دانان، نکته‌های تازه و لطیف ریاضیات، آموزش ریاضیات، آموزش رایانه و...)

● **رشد برهان متوسطه هر سه ماه، یکبار منتشر می‌شود.** ● مجله در حک، اصلاح، حذف و اضافه‌ی مقاله‌ها آزاد است.
● مقاله‌های وارده، باید خوانا و حتی‌الامکان کوتاه باشد. ● مقاله‌های رسیده مسترد نمی‌شود. ● استفاده از مطالب مجله در کتاب‌ها یا مجله‌های دیگر با ذکر دقیق مأخذ بلامانع است.

توقع ما از شما

حرف اول

آیــا تا به حال مقاله یا نوشـــته‌ای که بــرای چاپ در مجله مناســب باشد، نوشـــته‌اید؟ اصلاً به فکر نوشتن مقاله و ارسال آن بــرای چــاپ در مجله افتاده‌اید؟ فکر می‌کنید یــک مقاله‌ی خوب و یا مسـئله‌ای مناسب برای چاپ چه ویژگی‌هایی باید داشته باشــد؟ چه زمانی را باید صرف کرد تا نوشته، قابل چاپ باشد؟ در این مجال می‌خواهم راجع به این موضوعات با هم چند دقیقه‌ای را سپری کنیم. اول این‌که بنده به عنوان سردبیر و همه‌ی دست‌اندرکاران و اعضای هیئت تحریریه مجله توقع داریم که شما به عنوان مخاطبین اصلیِ مجله دســت به قلم برده و بنویســید و باور کنید هیچ موضوعی به اندازه این ما را خوشحال نمی‌کند که مشاهده کنیم مقاله‌ای را دانش‌آموزی نوشــته و برای ما ارســال کرده است و ما حداکثر توانِ خود را به‌کار می‌بریم تا اگر احیاناً اشکالاتی در مقاله هســت، برطرف کرده و مقاله به نام همان شــخص به چاپ برســانیم ـ البته این امر بارها در مجله اتفاق افتاده اســت ـ اما متأسفانه این توقع ما از طرف شما برآورده نشده و ما همچنان چشم براه مقالات و نوشته‌های شما هستیم. دوم این‌که توقع ما از شــما در حد شــما بوده و فقط همین که وقت بگذارید و دســت به قلم برده و نوشته‌ای را تهیه کرده و برای ما ارسال کنید، برای ما بسیار مهم بوده و ما را خوشحال خواهید کرد.

ولی در هر صورت برای نوشتن یک مقاله باید به نکات زیر توجه کنید و بعداً خواهید دید، آن‌طور هم که تصور می‌کردید کار بسیار سختی نیست.

۱. اولین شــرط نوشـــتن، مطالعه و تحقیق اســت و این‌که باید راجع به موضوعی که در نظر دارید، حداقل یکی دو کتاب مطالعه کرده باشید و به آن موضوع باید احاطه داشته باشید.

۲. مقاله شما باید شامل مقدمه، متن اصلی و نتیجه‌گیری باشد ـ که البته گاهی اوقات متن اصلی و نتیجه‌گیری با هم ارائه می‌شوند ـ در مقدمه معمولاً اهداف مقاله و مخاطبین آن و این‌که موضوع ارائه شده در چه زمینه‌ای و مربوط به چه مبحث یا کتاب درسی است قید می‌شود مگر این‌که نام مقاله و عنوان آن گویای این مطالب باشد.

۳. شــما باید در مقاله‌ی خود از اصطلاحات و واژه‌هایی استفاده کنید که مخاطبین شما با آن‌ها آشنا هستند و اگر مقاله یک موضوع درسی را شامل می‌شود حتی‌الامکان از نمادها و رسم‌الخط کتاب درسی استفاده شود.

۴. می‌توانید برای نگارش مقاله از دبیران محترم خود کمک گرفته و از ایشان بخواهید منابع خوب برای مطالعه به شما معرفی کنند.

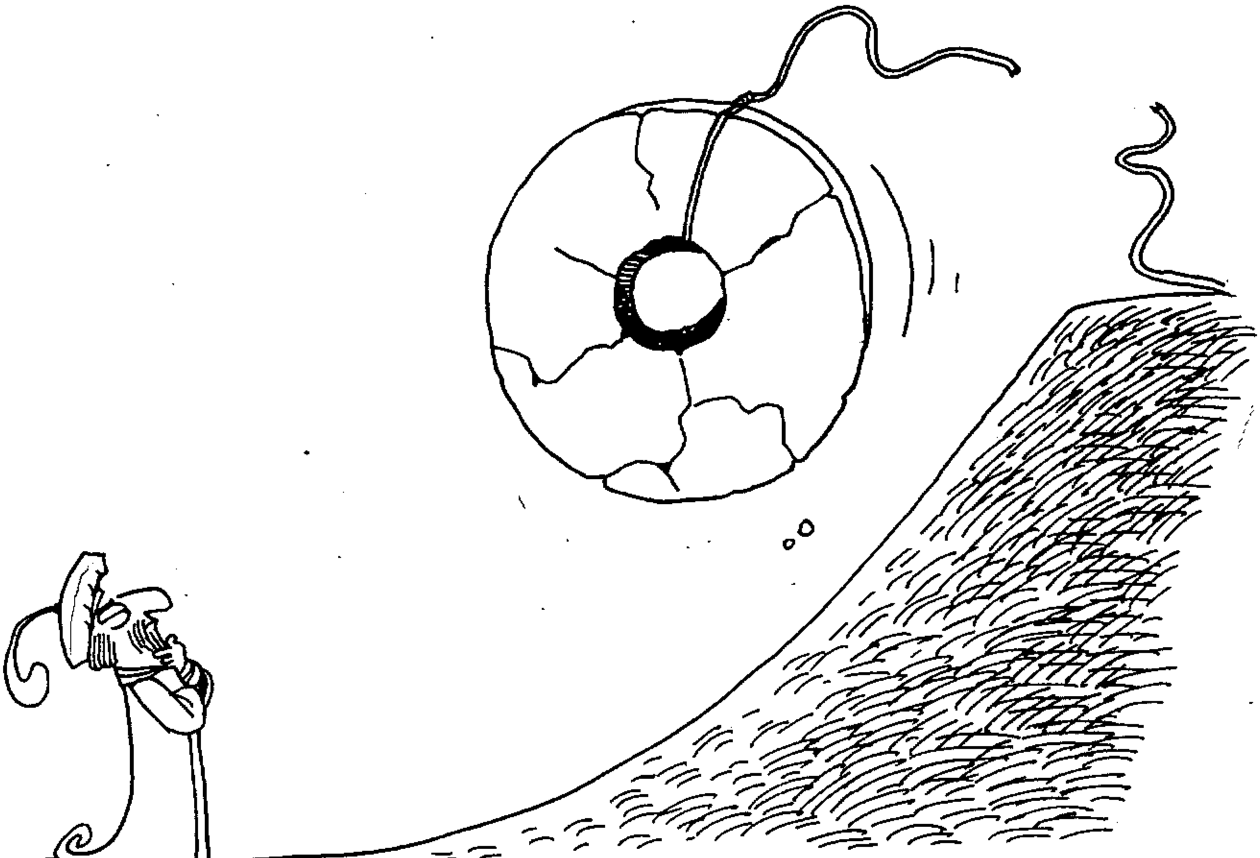
شــاید یکی از بهترین ســاده‌ترین مقالاتی که می‌توانید برای ما ارسال کنید، خاطرات شما از کلاس‌های درس ریاضی و معلمین محترم ریاضی است. این خاطرات می‌تواند بسیار آموزنده و در عین حال سرگرم‌کننده باشد.

همین‌طور، بعضی وقت‌ها به یک مسئله جالب برمی‌خورید که راه‌حل بسیار جالبی برای آن می‌یابید، می‌توانید آن مسئله را همراه با راه‌حل آن برای ما ارسال کنید.

به هر صورت شروع کردن به نگارش، مهم‌ترین قسمت کار است و شما اگر علاقه دارید نوشته خودتان با نام خودتان در مجله چاپ شود شروع کنید!

به امید این‌که مقاله‌های شــما و دبیران محترم شــما همه‌ی صفحات مجله را شــامل شود. و با آرزوی موفقیت و شادکامی در سال جدید برای همه‌ی شما عزیزان، ان‌شاءا... در پناه خداوند متعال و مورد تأییدات حضرت ولی‌عصر(ع) باشید.

سردبیر



نظریه‌ی هفت فاجعه ۲

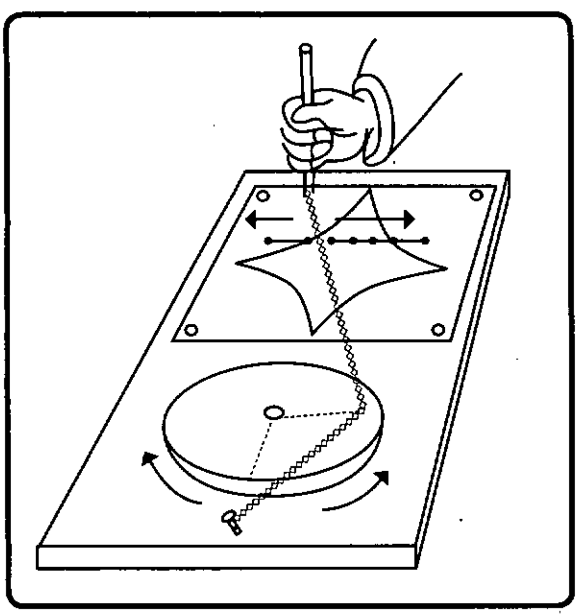
پرویز شهریاری

به کریستوفر زیمان توجه کنیم

آزمایشی را که می‌خواهیم مطرح کنیم به کریستوفر زیمان، شاگرد پروفسور توم، تعلق دارد. ماشین زیمان برای نظریه‌ی فاجعه‌ها، همان نقش کتری را برای روشن کردن روندهای ترمودینامیکی برعهده دارد.

این ماشین، ساختمان ساده‌ای دارد. صفحه‌ای قرص‌مانند را در نظر بگیرید با میله‌ای که در کنار قرص بر آن عمود باشد. محور قرص در مرکز میز قرار دارد. از میله، دو فنر به موازات سطح میز گذشته است. انتهای دیگر فنر اول را به میخی که روی میز کوبیده‌ایم، محکم می‌کنیم. انتهای آزاد فنر دوم را به چیزی شبیه مداد می‌بندیم که می‌تواند با دست روی میز حرکت داده شود.

میله‌ی مداد مانند را، که نوک آن روی میز قرار دارد، کمی حرکت می‌دهیم، قرص به اندازه‌ی زاویه‌ی کوچکی می‌چرخد و در حالت تازه‌ی خود به حالت تعادل قرار می‌گیرد. تا این‌جا همه‌چیز بر مدار طبیعی خود جریان دارد. اگر متغیر درونی را زاویه‌ی دوران قرص و مختصات نوک مداد را متغیرهای بیرونی بگیریم، هر تغییر کوچک متغیرهای بیرونی به تغییر کوچکی در متغیر درونی می‌انجامد.



ماشین زیمان

نوک مداد را دوباره کمی حرکت می‌دهیم، قرص هم دوباره به‌اندازه‌ی زاویه‌ی کوچکی می‌چرخد. همه‌چیز مثل سابق است. مداد باز هم به حرکت خود ادامه می‌دهد... و یکباره قرص از

جا کنده می‌شود و با سرعت، نزدیک به ۱۸۰ درجه می‌چرخد! تغییر کوچکی در متغیرهای بیرونی، به تغییر تند و جهشی در متغیر درونی می‌انجامد!

ایـــن را هم می‌توان فاجعه نامید. نظریه‌ی فاجعه در این مورد چه می‌گوید؟ برای مثال، این پدیده‌ی شـــگفت را چگونه روشن می‌کند: مداد را روی یک منحنی حرکت می‌دهیم تا به نقطه‌ی جهشـــی برای قرص برســـیم، این نقطه را روی ســـطح میز علامت می‌گذاریم. حالا مداد را روی همان منحنی و در جهت عکس حرکت می‌دهیم، با کمال شگفتی متوجه می‌شـــویم که لحظه‌ی جهش برای قرص، نه در همان نقطه‌ی قبلی، بلکه خیلی بعدتر پیش می‌آید!

به‌طور کلی، همه‌ی مســـئله‌های مربوط به نظریـــه‌ی فاجعه‌ها را می‌توان به این صورت تنظیم و روشـــن کرد: طبیعت جهش‌ها چگونه اســـت که ضمن گـــذار از یک حالت تعادلی بـــه حالت دیگر، جنبه‌ی تدریجی تغییر را از دست می‌دهند؟

با گالیله مشورت کنیم

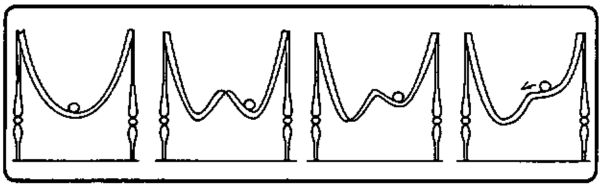
وســـیله‌ی آزمایش تازه را از گالیله‌ئو گالیله اقتباس می‌کنیم. این دانشـــمند، بســـیاری از قانون‌های مکانیک را با غلتاندن یک گلوله روی مســـیر ناودان‌مانندی پیدا کرد که شکلی نیم‌دایره داشت و تحدب آن به سمت پایین بود.

اگر گلوله را به حال خود بگذاریم، چه پیش می‌آید؟ به این‌طرف و آن‌طرف می‌غلتد و ســـرآخر، در پایین‌ترین نقطه‌ی مســـیر متوقف می‌شود. اگر مسیر را نمایش تغییرات یک تابع بگیریم، این پایین‌ترین نقطـــه، همان نقطه‌ی مینیمم منحنی اســـت. یـــادآوری می‌کنیم که اگر ممـــاس بر منحنی تابع را، در نقطه‌ی مینیمم آن رســـم کنیم، یک خط راست افقی به دست می‌آید.

مسیر ناودانی را خم می‌کنیم تا در پایین آن، تپه‌ای که دو گودال در دو طرف خود دارد، به‌وجود آید. حالا، اگر گلوله را به حال خود بگذاریم، چـــه پیش می‌آید؟ گلوله در یکی از دو گودال ـ یکی از دو نقطه‌ی مینیممی که مماس بر منحنی مسیر در آن‌جا افقی است ـ تعادل پایدار پیدا می‌کند و متوقف می‌شود.

توجـــه به این نکته جالب اســـت کـــه روی این منحنـــی، نقطه‌ی دیگری هم وجود دارد که در آن‌جا، مماس بر منحنی به‌صورت افقی درمی‌آید. این نقطه، همان رأس تپه، یعنی نقطه‌ی ماکزیمم است. بنابر نشـــانه‌ی رســـمی، یعنی افقی بودن مماس، این نقطه با نقطه‌ی تعادل خویشی دارد. جالب‌تر این است که این نقطه هم درواقع، یک نقطه‌ی تعادل است، منتهی تعادلی ناپایدار. وقتی که گلوله به رأس تپه رسید، بعد از یک توقف کوتاه، به طرف یکی از دو گودال فرو می‌غلتد.

تـــه گودال، برعکـــس رأس تپه، نقطه‌ی تعادل پایدار اســـت. اگر گلوله را از جایی که آرمیده است اندکی تکان دهیم، کمی به این‌طرف و آن‌طرف می‌غلتد و دوباره در نقطه‌ی مینیمم آرام می‌گیرد.

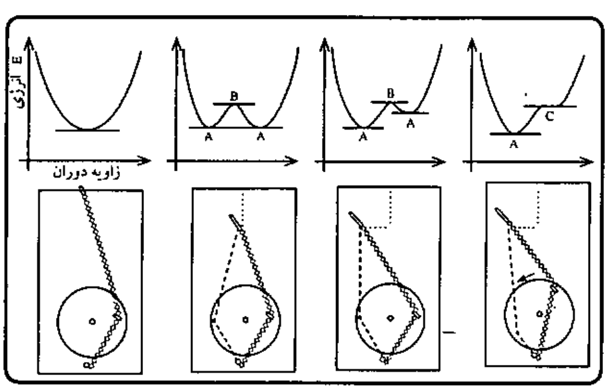


حالا ناودان را کمی دستکاری می‌کنیم و شکل آن را اندکی تغییر می‌دهیم. تـــه یکی از گودال‌ها (همان که گلوله‌ی ما در آن‌جا آرمیده اســـت) را بالا می‌آوریم تا جایی کـــه با رأس تپه در یک ارتفاع قرار گیرد. در این صورت، در یک ناودان خم‌شده، گلوله‌ای قرار می‌دهیم. اگر گلولـــه را به حال خود بگذاریم،در ته یکـــی از گودال‌ها ـ آن‌جا که مماس بر مســـیر خطی افقی اســـت ـ یعنی در نقطه‌ی مینیمم نسبی می‌ایســـتد. ولی در نقطه‌ی عطف، جایی کـــه باز هم مماس بر منحنی افقی است، گلوله به حالت تعادل درنمی‌آید و به طرف پایین می‌غلتد تا وقتی که به نزدیک‌ترین نقطه‌ی مینیمم نسبی برسد.

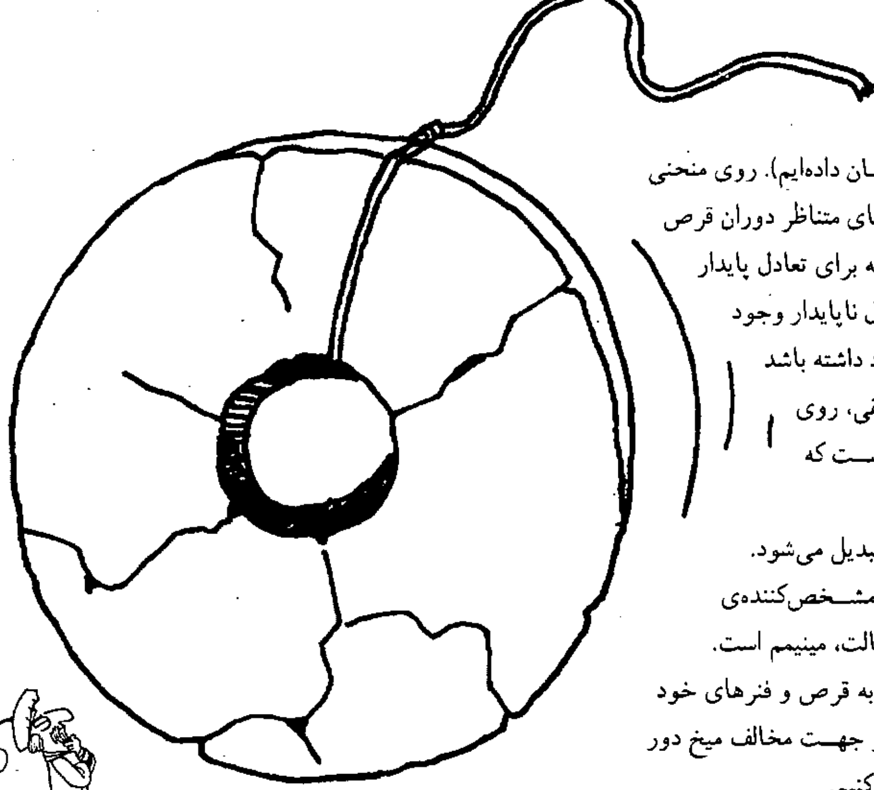
منحنی ما پیچیده‌تر می‌شـــود. روی ایـــن منحنی، نقطه‌ای وجود دارد که مماس در آن افقی اســـت، ولی ایـــن نقطه نه نقطه‌ی ماکزیمم است و نه نقطه‌ی مینیمم، بلکه نقطه‌ی عطف است. در چنین نقطه‌ای، گلولـــه‌ی مـــا تعادل خود را به دســـت نمی‌آورد؛ از جـــای خود کنده می‌شود و به طرف گودال دیگر می‌غلتد.

به فنر خود برگردیم

تـــه، پایین‌ترین نقطه، مینیمـــم... همه‌ی این‌هـــا در بخش قبل به ارتفاع گلوله مربوط می‌شـــد. ولی ارتفاع گلولـــه، یعنی میزان انرژی پتانســـیلی. خوب اســـت یادآوری کنیم که همین گلوله‌ای که در قعر



گودال افتاده اســـت، ماشین زیمان، بســـته به محل قرار گرفتن مداد، می‌تواند در یک تا دو حالت به تعادل پایدار برســـد (برای حالتی که دو تعادل پایدار داریم، روی تصویر ماشین، یکی از حالت‌ها را رسم



کرده‌ایم و حالت دیگر را با خط‌چین نشان داده‌ایم). روی منحنی انرژی پتانسیلی فنرهای کشیده شده، زاویه‌های متناظر دوران قرص را با حرف A نشان داده‌ایم. اگر دو زاویه برای تعادل پایدار وجود داشته باشد، بین آن‌ها، زاویه‌ی تعادل ناپایدار وجود دارد(B). ممکن است موقعیتی از مداد وجود داشته باشد که به‌ازای آن، نقطه‌ی عطفی با مماس افقی، روی منحنی پیدا شود (C). در همین موارد است که قرص به حالت جهشی می‌رسد.

به نمونه‌ای از یک قانون مهم فیزیکی تبدیل می‌شود. حالت تعادل پایدار یک دستگاه فیزیکی، مشخص‌کننده‌ی این وضع است که انرژی دستگاه در این حالت، مینیمم است.

با آگاهی از این موقعیت نظری، دوباره به قرص و فنرهای خود برمی‌گردیم. مداد را از محور قرص و در جهت مخالف میخ دور می‌کنیم و فعلاً آن را در همان‌جا محکم می‌کنیم.

حالا قرص را می‌چرخانیم و زاویه‌ی دوران را از طرف میخ به حساب می‌آوریم. به ازای هر زاویه‌ی دوران، انرژی پتانسیل فنر کشیده شده را معین می‌کنیم.

اگر منحنی نمایش تغییرات انرژی را نسبت به زاویه‌ی دوران رسم کنیم، شبیه همان نیم‌دایره‌ای که تحدبی به طرف پایین دارد، به دست می‌آید.

قعر منحنی رسم شده، معرف مینیمم انرژی پتانسیل است. اگر قرص را به اندازه‌ی همین زاویه دوران دهیم، به حالت تعادل پایدار می‌رسد.

با جابه‌جا کردن محل مداد، می‌توان حالتی را پیدا کرد که در آن، منحنی انرژی پتانسیل تغییر شکل دهد و در پایین آن تپه‌ای ظاهر شود که در هر طرف آن یک گودال باشد. در این صورت، برای قرص، دو حالت تعادل پایدار وجود دارد.

سرانجام می‌توان استحاله‌ای را انجام داد که با آن از آزمایش آخر با ناودان گالیله آشنا هستیم. جای مداد را آن‌قدر تغییر می‌دهیم تا قعر یکی از گودال‌ها با رأس تپه در یک سطح قرار گیرد...

... خطر! قرص با حرکتی تند و ناگهانی، خود را به حالت تعادل پایدار تازه‌ای می‌رساند.

و این چیزی است که باید همیشه به خاطر داشت: حالت تعادل پایدار و ناپایدار قرص و همچنین، موقعیت‌هایی که قرص با رسیدن به آن‌ها به حرکتی تند و ناگهانی می‌افتد، همه یک نشانه دارند؛ اگر این نقطه‌ها را روی منحنی متناظر انرژی آن در نظر بگیریم، در همه‌ی این موارد، مماس بر منحنی، خطی افقی است.

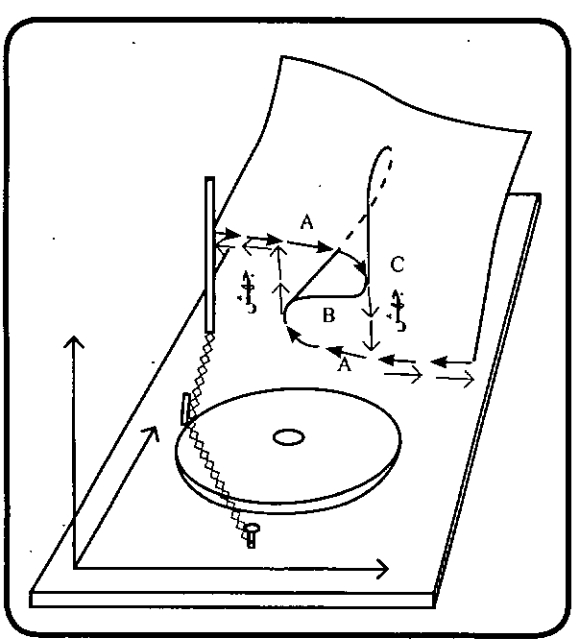
بسته به شکل منحنی‌ها (به منحنی انرژی دقیق‌تر توجه کنید!)، تعداد این گونه نقطه‌ها ممکن است یک، دو یا سه باشد. زاویه‌های دوران متناظر این نقطه‌ها را در قرص، زاویه‌های بحرانی گویند.



دوباره مقداری رسم می‌کنیم

حالا دیگر می‌توانیم کمی به ریاضیات بپردازیم.

روی سطح میز، دو محور مختصات را رسم می‌کنیم تا روی آن موضع نوک مداد را نشان دهیم. محور سوم را عمود بر سطح میز می‌گیریم. چند سطر بعد، هدف این کار را خواهیم فهمید.



مداد را در جایی محکم می‌کنیم و زاویه‌های بحرانی دوران قرص را اگر برای هر وضع مداد، روی محوری که از نوک آن گذشته و بر صفحه‌ی میز عمود است، مقادیر زاویه‌های بحرانی را جدا کنیم (همان مقادیری که در شکل قبل با حرف‌های A، B و C مشخص شده بودند)، سطح عجیب و غریبی به دست می‌آید. مقطع این سطح، که روی شکل با علامت پیکان نشان داده شده است، به روشنی نشان می‌دهد که وقتی به لبه‌ی چین‌ها در سطح برسیم، حالت جهش ناگهانی پیش می‌آید.

در این وضع معین می‌کنیم. می‌دانیم که بسته به جای مداد، تعداد این زاویه‌ها ممکن است یک، دو یا سه باشد. همه‌ی این مقادیر را، هر چند تا که باشد، روی محور عمودی در دستگاه سه بعدی خود، که از نوک مداد گذشته باشد، جدا می‌کنیم.

مداد را در جاهای تازه‌ای قرار می‌دهیم و این روند را پشت سرهم تکرار می‌کنیم و همه‌ی نقطه‌های جدید را در دستگاه مختصات خود قرار می‌دهیم. سرانجام، این نقطه‌ها به هم متصل می‌شوند و سطحی را تشکیل می‌دهند.

به شکل نگاه کنید. آیا عجیب و غریب نیست؟ چنین سطحی را سطح چین‌دار می‌گویند.

به کمک این تصویر، می‌توان به سادگی همه‌ی آن‌چه را که مربوط به قرص ـ ضمن جابه‌جا شدن مداد ـ بود و از جمله جهش‌های ناگهانی آن را پیش خود تصور کرد. این جهش‌ها وقتی پیش می‌آید که به لبه‌های سطح چین‌دار برسیم.

این مطلب را هم می‌توان فهمید که چرا وقتی مداد را در یک مسیر ولی در دو جهت مختلف جابه‌جا می‌کنیم، حالت جهشی در نقطه‌ی یگانه‌ای از این مسیر پیش نمی‌آید. به‌خصوص، این پیشامد را با علامت پیکان روی شکل مشخص کرده‌ایم.

هفت فاجعه

شانس آوردیم. در شرح آزمایش با قرص، تنها سه متغیر شرکت داشت: دو متغیر بیرونی (مختصات نوک مداد) و یک متغیر درونی (زاویه‌ی دوران قرص).

به همین دلیل بود که برای شرح پیشامدها به کمک شکل، یک دستگاه سه بعدی مختصات برای ما کفایت می‌کرد. روی همین دستگاه بود که ما توانستیم سطح پر راز و رمز خود را بسازیم.

البته وقتی که متغیرهای درونی چهار تا باشد، با حالت بسیار جالب‌تری روبه‌رو هستیم. مگر نه این است که جهان ما چهار بعدی است (سه بعد فضایی به اضافه‌ی زمان). پروفسور رنه توم ثابت کرده است که در چنین مواردی، بدون ارتباط با تعداد متغیرهای بیرونی، تنها هفت نوع جهش (و یا به بیان خود پروفسور، هفت «فاجعه‌ی مقدماتی») می‌تواند وجود داشته باشد.

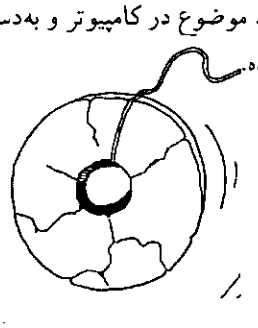
هفت سطحی که به کمک آن‌ها می‌توان این «فاجعه‌ها» را به صورت عینی شرح داد، نام‌های ظریف و شاعرانه‌ای دارند: سطح پرچین، سطح شکن‌دار، سطح پرستویی، سطح دنباله‌دار، سطح پروانه‌ای، سطح بیضوی و سطح هذلولوی و سهموی.

اگر تعداد متغیرهای درونی پنج باشد، یازده فاجعه می‌تواند وجود داشته باشد و اگر شش متغیر درونی یا بیشتر داشته باشیم، تعداد فاجعه‌ها بی‌نهایت می‌شود.

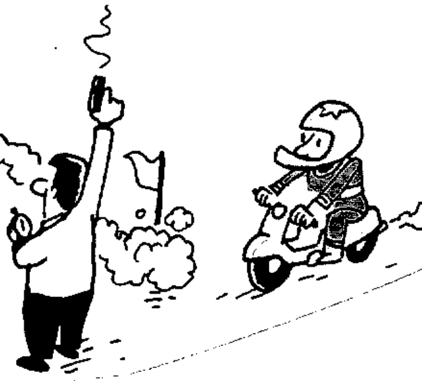
هم گردباد، هم موج و هم تقسیم یاخته‌ها

به کمک نظریه‌ی فاجعه‌ها، می‌توان به خوبی از عهده‌ی توضیح پدیده‌های فیزیکی مربوط به گذارهای مرحله‌ای و جهشی (گذار از حالت جامد به مایع، از مایع به گاز و غیره) برآمد. مکانیک مایعات و پدیده‌های طوفانی آن را هم، می‌توان مثالی برای فاجعه دانست. موج‌های پرتلاطمی هم که نیروی خود را در صخره‌ها گم می‌کنند، مثالی از همین نوع است. زیست‌شناسی هم، که سرچشمه‌ی الهام نیرومندی برای پروفسور توم است، نمایشگر مواردی از پدیده‌های فاجعه‌ای است. از این قبیل است تقسیم یاخته‌ها، تحریک عصبی، توزیع شکل و غیره.

ذکر همین چند نمونه نشان می‌دهد که دامنه‌ی کاربرد نظریه‌ی فاجعه‌ها، تا چه اندازه گسترده است. در ضمن این موضوع را نباید از یاد برد که در طبیعت کمتر به صورت خالص خود، با فاجعه‌های مقدماتی برخورد می‌کنیم، همان‌طور که خط راست واقعی هم، تنها در هندسه وجود دارد. این نظریه، مدل‌هایی را ارائه می‌دهد که در تقریب اول، می‌توانند معرف پدیده‌های موردنظر باشند، درست به همان ترتیب که دایره می‌تواند مدل خوبی برای خورشید ـ آن‌طور که ما می‌بینیم ـ باشد؛ ولی روشن است که خورشید واقعی با تصوری که ما در ظاهر از آن داریم، متفاوت است. مدلی برای ساده‌تر کردن کار است و کاربرد آن در محدوده‌ای است که به هدف آن، لطمه‌ای وارد نیاورد. مثلاً، برای این که وکیلی به فکر نجات موکل خود باشد ـ که به مفهوم عام خود، یک مورد فاجعه‌ای است ـ بعضی ملاحظه‌های کوچک روانی، خیلی بیشتر نتیجه‌بخش است تا استفاده از عامل‌های فوق العاده زیاد موضوع در کامپیوتر و به‌دست آوردن ترسیم پرپیچ و خم گیج‌کننده.



مسیر، دور و هم‌بندی در گراف‌ها

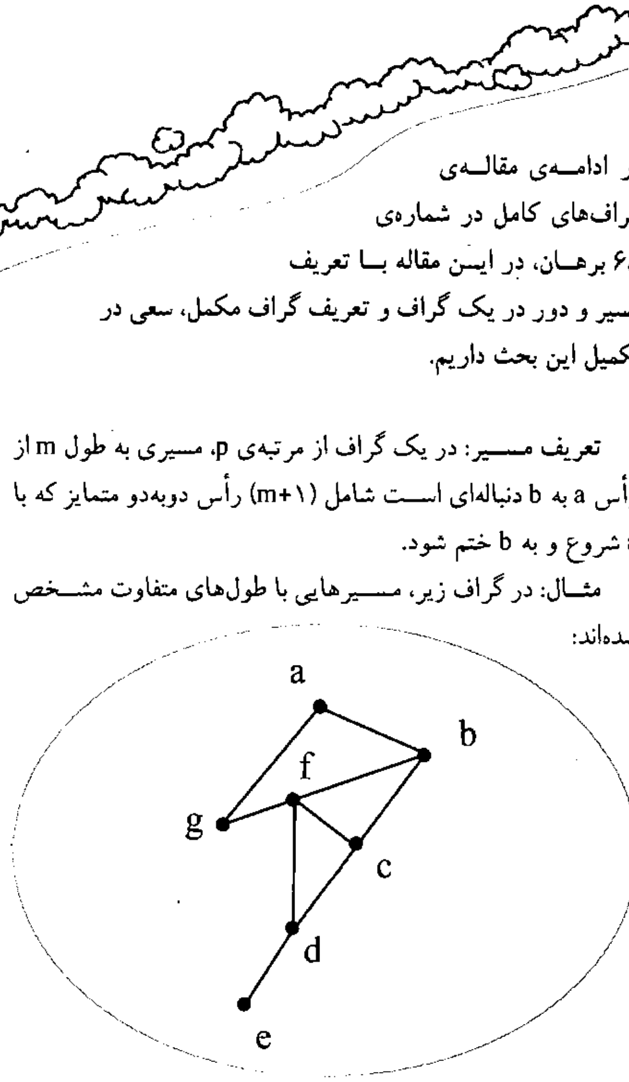


حمیدرضا امیری

در ادامه‌ی مقاله‌ی گراف‌های کامل در شماره‌ی ۶۸ برهان، در این مقاله با تعریف مسیر و دور در یک گراف و تعریف گراف مکمل، سعی در تکمیل این بحث داریم.

تعریف مسیر: در یک گراف از مرتبه‌ی p، مسیری به طول m از رأس a به b دنباله‌ای است شامل (m+۱) رأس دوبه‌دو متمایز که با a شروع و به b ختم شود.

مثال: در گراف زیر، مسیرهایی با طول‌های متفاوت مشخص شده‌اند:



مسیر به طول ۱ ab

مسیر به طول ۲ abc

مسیر به طول ۴ از a به e abcde

نکته: تعداد مسیرهای با طول‌های متفاوت از رأس a به b در گراف کاملِ k_p از دستورهای زیر قابل محاسبه است:

$$\text{تعداد مسیرهای از رأس a به b در } k_p = \sum_{k=0}^{p-2}(p-2)_k, \left((n)_k = \frac{n!}{(n-k)!}\right)$$

$$\text{تعداد مسیرهای از رأس a به b در } k_p = [(p-2)!\times e]$$

تذکر: اگر تعداد مسیرهای بین a و b (از a به b و از b به a) در گراف k_p را بخواهیم، کافی است تعداد مسیرهای از a به b را دوبرابر کنیم و اگر همه‌ی مسیرهای بین رأسهای متمایز در گراف k_p را بخواهیم، کافی است آن را در $\binom{p}{2}$ ضرب کنیم (هر دو نقطه از p تعداد مسیرهایی را بین یکدیگر تعریف می‌کنند).

$$\text{تعداد کل مسیرها بین رؤوس متمایز در } k_p = 2\times\binom{p}{2}\times[(p-2)!\times e]$$

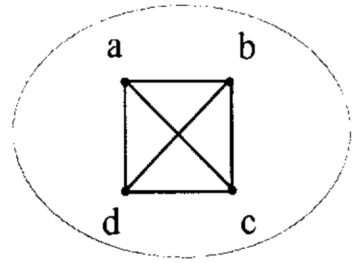
در رابطه‌ی اخیر e عدد اویلر است که تقریباً برابر با ۲/۷۲ در نظر گرفته می‌شود و علامت [ ] نشان‌دهنده‌ی جزء صحیح است.

تذکر: مسیر از رأس a به رأس a را مسیر به طول صفر تعریف می‌کنیم.

تعریف دور: یک دور به طول m روی رأسی چون a در گراف G از مرتبه‌ی p دنباله‌ای است شامل m رأس دوبه‌دو متمایز که با a شروع و به a ختم شود.

تذکر: دورهایی که رأس‌های به‌کار رفته و یال‌های طی‌شده روی آن‌ها با هم برابر باشد، یک دور به‌حساب می‌آیند.

مثال: در گراف زیر (k_4) هریک از ۶ دور abc و acb و bca و cab و bac و cba یک دور به‌حساب می‌آیند، و دورهای abcda و abdca دو دور متفاوت با طول‌های ۴ هستند.



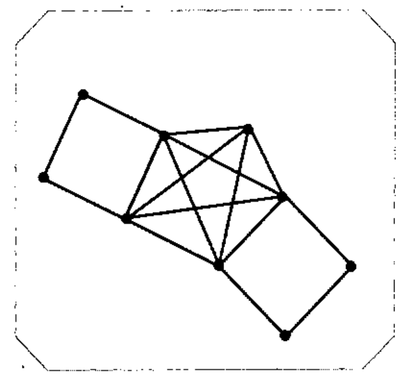
(k_4)

نکته: تعداد دورهای به طول k در گراف کامل k_p از رابطه‌ی زیر به‌دست می‌آید:

$$\text{تعداد دورهای به طول } k \text{ در } k_p = \frac{1}{2}\binom{p}{k}\times(k-1)!$$

مثال: در گراف ساده‌ی G چند دور به طول ۴ وجود دارد؟

حل: هر ۴ ضلعی بدون قطر فقط یک دور به طول ۴ دارد. بنابراین می‌توان گفت:



تعداد دورهای به طول ۴ در G = ۱ + تعداد دورهای به طول ۴ در k_5 + ۱

$=1+15+1=17$

$$\left(\text{دورهای به طول ۴ در } k_5 = \frac{1}{2}\binom{5}{4}\times 3! = \frac{1}{2}\times 5\times 6 = 15\right)$$

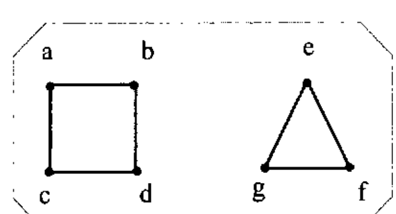
تذکر: تعداد کل دورهای موجود در گراف k_p (از دور به طول ۳ تا دور به طول p) از رابطه‌ی زیر به‌دست می‌آید:

$$\text{تعداد کل دورها در } k_p = \sum_{k=3}^{p}\frac{1}{2}\binom{p}{k}(k-1)!$$

نکته: رابطه‌ی وجود مسیر بین رؤوس یک گراف، یک رابطه‌ی هم‌ارزی است (خواص انعکاسی، تقارنی و تعدی را دارد) و اگر G یک گراف k بخشی باشد، دارای k کلاس هم‌ارزی است.

مثال: گراف دوبخشی G به‌صورت زیر دارای دو کلاس هم‌ارزی $[a]=\{a,b,c,d\}$ و $[e]=\{e,g,f\}$ است.

(بین a و b مسیری وجود داشته باشد ⇔ aRb)

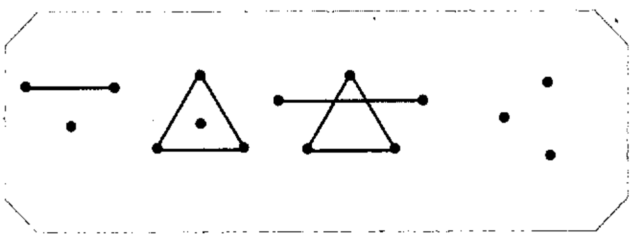


تعریف گراف همبند: گراف G از مرتبه‌ی p را همبند می‌نامیم، هرگاه بین هر دو رأس متمایز در G حداقل ۱ مسیر وجود داشته باشد.

تذکر: گراف k_1 که فقط از یک رأسِ ایزوله تشکیل یافته، گرافی همبند است.

تذکر: هر گراف از مرتبه‌ی $p \geq 2$ که رأس ایزوله داشته باشد، همبند نیست.

مثال: گراف‌های زیر همگی ناهمبندند:



تذکر: هر گراف کامل همبند است.

نکته: اگر در گراف G از مرتبه‌ی p و اندازه‌ی q داشته باشیم $q < p-1$، در این صورت G همبند نیست. به عبارت دیگر، اگر گراف G همبند باشد، همواره $q \geq p-1$ است.

نکته: اگر در گراف G از مرتبه‌ی p و اندازه‌ی p داشته باشیم $q \geq \binom{p-1}{2}+1$، در این صورت G همبند است.

نکته: در هر گراف از مرتبه‌ی p که رأس ماکزیمم (رأسی از درجه‌ی p−1) داشته باشیم، آن گراف همبند است.

پرسش: کدام یک از دنباله‌های زیر مربوط به یک گراف همبند است؟

۱) ۱ و ۱ و ۱ و ۱ و ۱ و ۲ و ۲ و ۳

۲) ۱ و ۱ و ۱ و ۱ و ۳ و ۳

۳) ۱ و ۲ و ۳ و ۳

۴) ۱ و ۱ و ۱ و ۱ و ۱ و ۲ و ۲ و ۴

حل: گزینه‌ی ۲، زیرا در گزینه‌ی ۱ داریم p=۸ و q=۶ و چون $q<p-1$ پس گراف متناظر با آن همبند نیست. هم‌چنین در گزینه‌ی ۴ داریم p=۹ و q=۷ و $q<p-1$ و گراف متناظر با آن همبند نیست. گزینه‌ی ۳ نیز مُعرف دنباله‌ای گرافیکال نیست.

پرسش: گراف G از مرتبه‌ی ۸ ناهمبند است. این گراف حداکثر چند یال دارد؟

۱) ۲۰ ۲) ۱۹ ۳) ۲۱ ۴) ۲۲

حل: گزینه‌ی ۳ صحیح است، زیرا کافی است یک رأس را ایزوله

کنیم و با هفت رأس باقی‌مانده گراف k_7 بسازیم.

$$q_{k_7} = \frac{7\times 6}{2} = 21$$

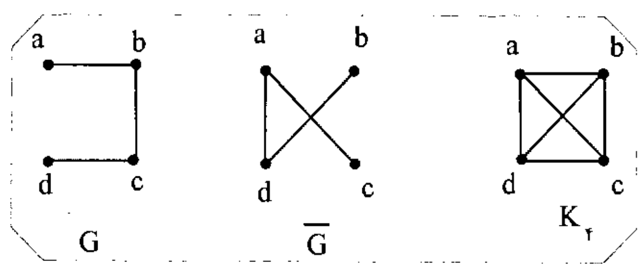
پرســش: گراف G از مرتبه‌ی ۹ مفروض است. این گراف حداقل چند یال باید داشته باشد تا مطمئن باشیم همبند است؟

۱) ۲۱ ۲) ۲۶ ۳) ۲۸ ۴) ۲۹

حل: گزینه‌ی ۴ صحیح است، زیرا:

$$q \ge \binom{p-1}{2}+1 \Rightarrow q \ge \binom{8}{2}+1 = 29$$ ← شرط همبندی

مکمّـل یک گـراف: مکمّل گراف G از مرتبه‌ی p گرافی اسـت چـون $\overline{G}$ از مرتبه‌ی p به طوری که ایـن دو گراف روی هم، گراف کامل از مرتبه‌ی p را تشکیل می‌دهند. به مثال زیر توجه کنید:



تذکر: همواره مجموع یال‌های یک گراف و مکمّل آن گراف برابر است با تعداد یال‌های گراف کاملِ هم‌مرتبه با آن گراف؛ یعنی:

$$q(G)+q(\overline{G}) = \frac{p(p-1)}{2}$$

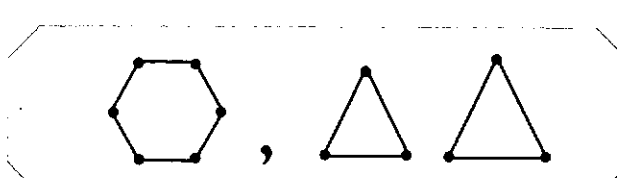
تذکر: اگر G گرافی از مرتبه‌ی p باشد و a رأسی در این گراف و ā رأسِ متناظر با آن در گراف $\overline{G}$ باشد، همواره داریم:

$$\deg a + \deg \bar{a} = p-1$$

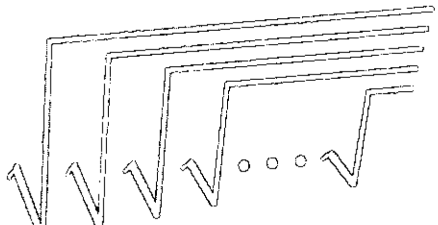
تذکر: اگر G گرافی r_1ـ منتظم از مرتبه‌ی p باشد، مکمل G نیز گرافی r_2ـ منتظم است و همواره $r_1+r_2=p-1$ است.

مثال: چند گرافِ ۳ـ منتظم از مرتبه‌ی ۶ وجود دارد؟

حل: مکمل گرافِ ۳ـ منتظم از مرتبه‌ی ۶ گرافی است ۲ـ منتظم از مرتبه‌ی ۶ و چون تعداد گراف‌های ۲ـ منتظم از مرتبه‌ی ۶ همواره برابر اســت با ۲، یعنی دو گراف زیــر را داریم، پس تعداد گراف‌های ۳ـ منتظم از مرتبه‌ی ۶ نیز ۲ است.







چند رادیکال مسلسل

فرستنده: عباس روح‌الامینی از سیرجان

اینجانب «عباس روح‌الامینی» تاکنون چند مقاله به دفتر مجله ارســال نموده‌ام و هنوز جوابی دریافت نکرده‌ام، چرا مجلات ایران به نامه‌های ارسالی بی‌توجهی می‌نمایند؟

ســیرجان هیچ امکانات علمی و آموزشی ندارد، برای همین من به عضویت خانه ریاضیات کرمان درآمده‌ام و هر هفته به کرمان مسافرت می‌کنم تا از امکانات و کلاس‌های آن بهره‌مند شوم.

آرم سـفر بـه کرمـان، هـر انتهـای هفتـه
چـون خانـه ریاضـی از یـاد مـن نرفته
عشـق ریاضی مرا درمی‌کشـد ز سیرجان
هـر هفتـه آرد مرا در شـهر خـوب کرمان
در خانـه ریاضـی باشـد کتـاب وافـر
عـازم بـه کرمان شـدم، گردیده‌ام مسـافر

مـن ترجمه کردن بـه زبان انگلیســی را خیلی خوب بلد نیسـتم ولی سـردبیر مجله ریاضی اسپکتروم[۱] خودش نامه‌های من را ویرایش کرده، چاپ می‌کند و مجلات را هم مجانی برایم می‌فرستد، ولی مجلات ایران جواب نامه‌هایم را هم، نمی‌دهند؟!!

... بگذریم. در مجله ریاضی (Volume 43 Number 1) در صفحه ۳۳ شخصی بەنام «یاسار اَتس»[۲] دانشجوی رشته‌ی فیزیک در دانشـگاه ماری‌کوری پاریس است، دَه تا رادیکال مسلسـل برای آن مجله ارســال نموده که من آن‌ها را جهت آشنایی دانش‌آموزان ارسال می‌نمایم.

بنـده آن‌ها را اثبات کـرده‌ام. امیـدوارم دانش‌آموزان بتوانند، این رادیکال‌های مسلسل را اثبات کنند.

بقیه در صفحه‌ی ۲۱

تاریخچه‌ی مجلات ریاضی ایران ۴

غلامرضا یاسی‌پور

در پی بررسی «تاریخچه‌ی مجلات ریاضی ایران» به شماره‌های ۴۰، ۴۱ و ۴۲ مجله‌ی یکان می‌رسیم و به مسئله‌های جالبی برمی‌خوریم که در پاییز و زمستان سال ۱۳۴۶ به چاپ رسیده‌اند.

در شماره‌ی مسلسل ۴۰ با این مسئله‌ی جالب مواجه می‌شویم:

حل یک مسئله از مسائل شیخ بهائی

در یکان شماره‌ی یکم به نقل از خلاصة الحساب شیخ بهائی با عنوان مسائل لاینحل هفت مسئله درج شده بود. آقای علی رضائی، دبیر دانشمند ریاضیات (فعلاً بازنشسته) حل یکی از این مسائل را مرقوم داشته‌اند که در زیر چاپ می‌شود:

مطلوبست حل هر یک از دو معادله‌ی زیر:

$$x^2 - 10 = \sqrt{b} \quad \text{و} \quad x^2 + 10 = \sqrt{a}$$

معادلات را در حالت کلی زیر حل می‌کنیم:

$$(1)\quad x^2 + \alpha = \sqrt{a}$$

$$(1)\quad x^2 - \alpha = \sqrt{b}$$

معادله‌ی (۱) را چنین می‌نویسیم:

$$x^2 - \alpha = \sqrt{a} - 2\alpha$$

تساوی زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\sqrt{a} - 2\alpha = (\sqrt[4]{a} - \alpha)^2$$

که از آن نتیجه خواهد شد:

$$\sqrt{a} = \left(\frac{\alpha + 2}{2}\right)^2$$

و از معادله‌ی (۲) نیز حاصل می‌شود:

$$\sqrt{b} = \left(\frac{2 - \alpha}{2}\right)^2$$

چون این مقادیر را در معادلات (۱) و (۲) قرار دهیم نتیجه خواهد شد:

$$x^2 = \frac{\alpha^2 + 4}{4}$$

و در ازای مقادیر مختلف α می‌توان مقادیر نظیر a و b و x را تعیین کرد. مثلاً:

$$\alpha = 0\ ;\ \sqrt{a} = 1\ ،\ \sqrt{b} = 1\ ،\ x^2 = 1$$

$$\alpha = 1\ ;\ \sqrt{a} = \frac{9}{4}\ ،\ \sqrt{b} = \frac{1}{4}\ \text{و}\ x^2 = \frac{5}{4}$$

و در حالت خاص $\alpha = 10$ داریم:

$$\sqrt{a} = 36\ \text{و}\ \sqrt{b} = 16\ \text{و}\ x^2 = 26$$

در این شماره در مقاله‌ای با عنوان کارمند بازنشسته‌ی راه‌آهن به این داستان برخورد می‌کنیم که:

ترن‌هایی که از کنار یکدیگر می‌گذرند

چند روزی از ملاقات دکتر و جانسن گذشته بود که تلفن منزل جانسن زنگ زد. از آن طرف، دکتر از مکانیسین تقاضا کرد که اگر ممکن است در بعدازظهر آن روز وی را در مطبش ملاقات کند. جانسن که بازنشسته بود و همیشه وقت داشت، دعوت دکتر را پذیرفت و عصر به دیدار وی رفت. در آن‌جا دکتر گفت با معمای تازه‌ای مواجه شده است و آن‌را برای جانسن چنین شرح داد:

ـ با یکی از بیمارانم راجع به آن‌چه برای تو پیش آمده بود، صحبت کردم و او در مقابل، مسئله‌ای مربوط به خودش را برای من بیان کرد: این شخص برای رفتن سر کارش از راهی باید بگذرد که یک رشته‌ی تنهای راه‌آهن را قطع می‌کند. این یک رشته‌ی راه‌آهن اغلب برای عبور ترن‌های تجاری استفاده می‌شود که هم از نظر طول و هم از این نظر که آهسته از شهرها می‌گذرد معروف است. بسیار رخ داده که شخص مزبور مجبور شده است پشت راه‌بند، خودرو خود را متوقف کند و پشت فرمان انتظار بکشد تا زمانی که ترن تجاری با دنباله‌ی دور و درازش آهسته بگذرد و راه برای خودرو وی باز شود. او به من گفت که ترجیح می‌دهد به جای یک رشته، دو رشته راه‌آهن وجود داشته باشد، زیرا گاهی پیش آمده که دو ترن در جهت‌های مخالف از آن راه می‌گذرند و این باعث می‌شود که زمان توقف اجباری وی دو برابر گردد.

آیا به عقیده‌ی شما این شخص درست پیش‌بینی می‌کند؟ یعنی اگر دو رشته راه‌آهن وجود داشته باشد، زمان توقف وی در حالت اخیر کمتر می‌شود؟

مکانیسین بازنشسته اظهار داشت:

ـ کاملاً صحیح است. اگر تعداد کل ترن‌هایی که از دو رشته راه‌آهن

استفاده می‌کنند با تعداد ترن‌هایی که روی یک رشته حرکت می‌کنند برابر باشد، در تقاطع آن‌ها زمان انتظار به حد وسط تقلیل خواهد یافت. اگر دو ترن با هم از آن‌جا بگذرند زمان توقف اجباری در راه بسته برای آن دو درست برابر است با زمان توقف برای یک ترن تنها.

دکتر پاسخ داد:

ـ این موضوع درست، اما برای وقتی که محل عبور ترن‌ها از یکدیگر درست محل تقاطع جاده با راه‌آهن باشد. در حالت‌هایی غیر از این، وضع فرق می‌کند. یک حالت هم که ممکن است پیش بیاید حالتی است که لوکوموتیو یکی از ترن‌ها هنگامی به معبر برسد که درست واگن انتهایی ترن دیگر در حال گذشتن باشد. راجع به این حالت چه می‌گویید؟

مکانیسین پاسخ داد:

ـ بین این حالت و حالتی که دو ترن در آن محل هرگز به هم نرسند هیچ فرقی نیست.

دکتر اظهار داشت:

ـ در این مورد شما اشتباه می‌کنید. اجازه بدهید با محاسبات مقدماتی دلیل اشتباه شما را برایتان توضیح دهم. فرض می‌کنیم به‌طور متوسط در هر جهت یک ترن از راه‌آهن بگذرد و زمان عبور هر ترن از معبر محل تقاطع ۶ دقیقه باشد. با این پیش‌فرض‌ها زمان توقف پشت راه‌بند را حساب می‌کنیم؛ احتمال این‌که اتومبیل موقعی به محل تقاطع برسد که ترن از آن می‌گذرد یعنی راه بسته باشد برابر با یک برده است.

احتمال این‌که درست هنگامی برسد که ترن به معبر می‌رسد برابر است با احتمال آن‌که درست موقعی که ترن آنجا را ترک می‌کند.

روی هم رفته، وی باید سه دقیقه انتظار بکشد تا ترن بگذرد. بنابراین، زمان متوسط توقف ۰/۳ دقیقه خواهد شد.

اکنون حالت فوق‌العاده‌ای را در نظر بگیریم که ترن‌ها در محل تقاطع به وضعی از یکدیگر بگذرند که لوکوموتیو یکی در مقابل واگن انتهایی دیگری واقع شده باشد. خیلی ساده است که اگر تعداد ترن‌ها را نصف بگیریم و در عوض، طول هر ترن را دو برابر در نظر بگیریم. در نتیجه فرقی حاصل نخواهد شد. احتمال مربوط به این‌که با راه بسته روبه‌رو شوید همان احتمال قبلی خواهد بود. اما اگر پشت راه‌بند توقف کرده باشید زمان انتظار شما دو برابر خواهد شد.

بنابراین، چنین دو ترنی برای اتومبیل سواری که مجبور به توقف شده وضعی دو مرتبه بدتر ایجاد می‌کند:

مکانیسین در حالی که به موضوع فکر می‌کرد، گفت:

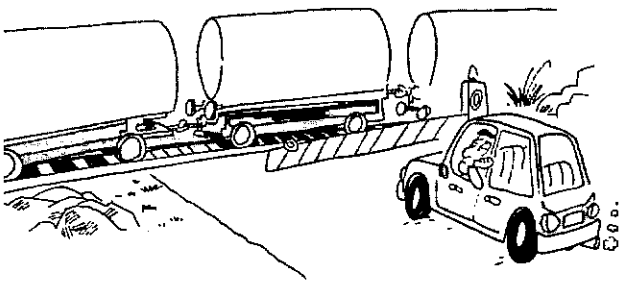
ـ واضح است که اگر بین عبور دو ترن از محل تقاطع چند دقیقه‌ای فاصله باشد، راننده‌ی خودرو می‌تواند از این مدت زمان استفاده کند و قبل از عبور ترن دیگر از راه‌آهن بگذرد و این حالت بر حالتی که دو ترن پشت سرهم از معبر بگذرند و جاده را در تمام طول مدت بسته نگاه دارند، برتری دارد.

دکتر گفت:

ـ خوشحالم که موضوع را متوجه شدید. فعلاً به این نتیجه رسیده‌ایم که در حالت کلی که ترن‌ها از یکدیگر می‌گذرند، زمان توقف نصف می‌شود و در حالت خاصی که در عبور از گذرگاه لوکوموتیو یکی مقابل واگن انتهایی دیگری واقع می‌شود، زمان توقف دو برابر خواهد شد.

مکانیسین اظهار داشت: حالتی را بررسی می‌کنید که ترن‌ها وقتی در محل تقاطع از یکدیگر می‌گذرند، لوکوموتیو یکی در نیمه‌ی طول دیگری واقع شده باشد؛ و دکتر چنین پاسخ داد:

ـ خیلی ساده است. چنین حالتی معادل است با وقتی که تعداد ترن‌ها نصف باشد، اما طول هر یک از آن‌ها یک برابر و نیم بزرگ‌تر



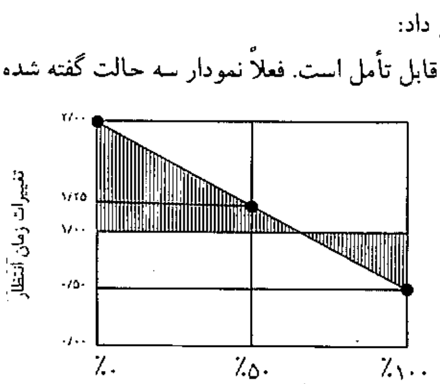
باشد. در چنین وضعی احتمال مربوط به این‌که وقتی به محل تقاطع برسیم که راه بسته باشد در $\frac{۱/۵}{۲}$ ضرب می‌شود و حد متوسط زمان انتظار برای باز شدن راه در ۱/۵ ضرب می‌شود. روی‌هم، اضافه شدن زمان متوسط انتظار برابر می‌شود با:

$$\frac{۱/۵}{۲}\times ۱/۵ = ۱/۱۲۵$$

بنابراین زمان انتظار برای گذشتن نیم طول ترن‌ها، ۱۲/۵ درصد افزایش خواهد داشت:

مکانیسین گفت که برای یک چنین وضعی، محاسبه ناجور است و دکتر چنین توضیح داد:

ـ پاسخ آن هم قابل تأمل است. فعلاً نمودار سه حالت گفته شده را رسم می‌کنیم:



ملاحظه می‌شود که سطح کل متناظر با افزایش زمان متوسط به‌طور قابل ملاحظه‌ای از سطح متناظر با کاهش زمان متوسط بیش‌تر

است. بنابراین نتیجه می‌گیریم که به‌طور متوسط، روبه‌رو شدن دو ترن در گذرگاه‌های مختلف باعث می‌شود که به مدتی بیش‌تر از وقتی که همان تعداد ترن بر یک رشته راه‌آهن می‌گذرند جاده بسته باشد.

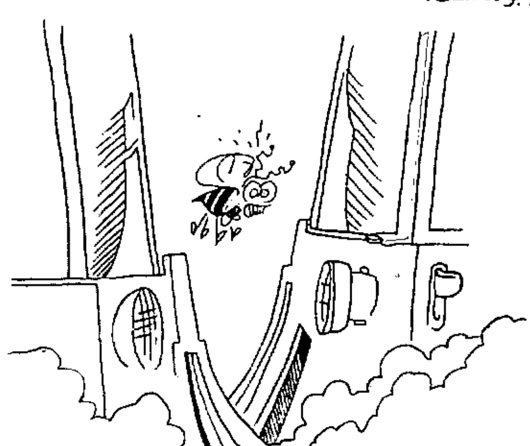
در شماره‌ی ۴۱ باز هم تحت عنوان کارمند بازنشسته راه‌آهن به مسئله‌ی زنبور و راه‌حل آن می‌رسیم:

مسئله‌ی زنبور

مکانیسین پس از کمی مکث از دکتر خواهش کرد که معمای دیگری مطرح کند. دکتر گفت که یک معما را مطرح خواهد ساخت، اما بسیار ساده است و آن‌را چنین شرح داد:

دو ترن در یک لحظه از دو ایستگاه A و B به فاصله‌ی ۱۶۰ کیلومتر به طول یکدیگر حرکت می‌کنند. سرعت هر یک از آن‌ها ۸۰ کیلومتر در ساعت است. در همان لحظه‌ی حرکت ترن‌ها، زنبوری از A با سرعت ۱۰۰ کیلومتر در ساعت به طرف B پرواز می‌کند. این زنبور در لحظه‌ای که ترنی را که از B می‌آید ملاقات می‌کند جهت حرکت خود را تغییر می‌دهد و به طرف ترن اول برمی‌گردد. بعد از ملاقات با این ترن باز جهت حرکت خود را تغییر می‌دهد و به طرف ترن دوم پرواز می‌کند و این عمل را به همین ترتیب و با همان سرعت ثابت اولیه ادامه می‌دهد تا لحظه‌ای که دو ترن را با هم ملاقات کند. در این لحظه از ترس سقوط می‌کند و می‌میرد.

معلوم کنید که این زنبور در مجموع چند کیلومتر مسافت در حال پرواز بوده است؟



جانسن اظهار داشت:

ـ خیلی ساده است. دو ترن با سرعت ۸۰ کیلومتر در ساعت به طرف یکدیگر حرکت می‌کنند. فاصله‌ی دو ایستگاه ۱۶۰ کیلومتر است. بنابراین آن‌ها درست در وسط راه در نقطه‌ای که از دو ایستگاه به یک فاصله است، یکدیگر را ملاقات می‌کنند. از ابتدای شروع حرکت ترن‌ها تا زمان ملاقات آن‌ها روی هم یک ساعت طول می‌کشد، بنابراین زنبور مدت یک ساعت در پرواز بوده است و چون سرعت پرواز آن هم ۱۰۰ کیلومتر در ساعت است پس کل مسافتی که زنبور در حال پرواز بوده ۱۰۰ کیلومتر است. آیا درست است؟

دکتر پاسخ مکانیسین را تأیید کرد و گفت:

ـ کاملاً درست است. اما روشی که به کار بردید و جواب مسئله را به این سادگی به دست آوردید، نشان می‌دهد که شما ریاضی‌دان نیستید. یک ریاضی‌دان برای حل این مسئله از سری‌ها استفاده می‌کند، وی یک سری در نظر می‌گیرد که هر جمله‌ی آن یکی از فاصله‌های پیموده شده توسط زنبور است. اما این راه خیلی ساده هم نیست، زیرا تعیین فرمولی که هر یک از فاصله‌ها را بیان کند کار مشکلی است.

تعریف می‌کنند که وقتی این مسئله را برای جان ون‌نیومن ریاضی‌دان بزرگ معاصر مطرح کرده‌اند و از وی خواستند که ظرف چندین ثانیه جواب درست آن‌را پیدا کند، وی این کار را کرد. وقتی از او سؤال شد مسئله را از چه راهی حل کرده است، پاسخ داد که مجموع یک سری نامحدود را حساب کرده است. راجع به نیومن، حکایت می‌کنند که بعضی محاسبات پیچیده‌ی ریاضی را در ذهن خود با همان سرعت ماشین‌های محاسبه‌ی الکترونیکی انجام می‌داده است.

در این شماره با عنوان مسئله‌ی مسابقه، مسئله‌ی زیر از حساب استدلالی آورده شده است:

با جایزه‌ی دو هزار ریال

از طرف: محمود کاشانی مؤلف جزوه‌های «مسائلی نمونه از حساب استدلالی»

مسئله: دو عدد صحیح a و b را چنین تعیین کنید که عبارت (a^2+b^2+1) بر $(a+b)$ و عبارت (a^2+b^2-1) بر $(a-b)$ قابل قسمت باشد.

شرایط تعلق جایزه:

۱. مسئله باید با توجه به تعریف عدد صحیح در نظریه‌ی اعداد (عددهای صحیح مثبت، منفی یا صفر) حل شود.

۲. مسئله باید صددرصد کامل حل شود به‌طوری که شرح هیچ نکته‌ی مبهم یا حالت خاص از قلم نیفتاده باشد.

۳. پاسخ‌ها حداکثر تا روز آخر ماه دی به اداره‌ی مجله‌ی یکان رسیده باشد.

۴. پاسخ‌ها با خط خوانا نوشته شده باشد و روی ورقه‌ی مربوط، نام و نشانی کامل و مخصوصاً دبیرستان و پایه‌ی تحصیلی حل کننده ذکر شده باشد.

تذکر ـ مسئله‌ی فوق حالت خاصی از مسئله‌ی زیر است. می‌توانید آن‌را به صورت کلی حل کنید: به ازای چه مقادیر صحیح (مثبت، منفی یا صفر) از اعداد a و b عبارت

$(a^2+b^2+2nab+1)$ بر $(a+b)$ و عبارت

$(a^2+b^2+2nab-1)$ بر $(a-b)$ بخش‌پذیر است.

در شماره‌ی ۴۲، مجله به مقاله‌های جالب زیر می‌پردازد:

خواص مثلث شبه قائمه

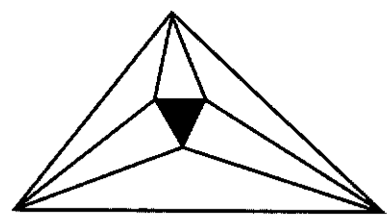
Pseudo rectangle triangle

تهیه از: جعفر آقایانی چاوشی

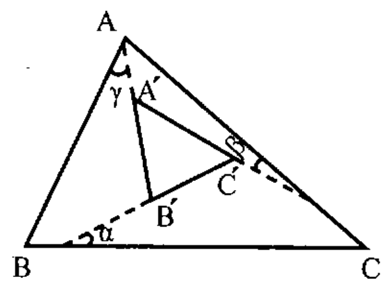
مثلثی که تفاضل دو زاویه‌ی آن یک قائمه باشد، مثلث شبه‌قائمه نامیده می‌شود. اگر مثلث ABC در رأس A شبه‌قائمه باشد، یعنی داشته باشیم: $\hat{B}-\hat{C}=۹۰$، دارای خواص زیر است.

۱. ارتفاع AH واسطه‌ی هندسی است بین BH و CH.

۲. نیمسازهای داخلی و خارجی زاویه‌ی A با یکدیگر برابرند.



شکل ۱



شکل ۲

۳. ارتفاع AH بر دایره‌ی محیطی مثلث مماس است.

۴. قرینه‌ی رأس A نسبت به ضلع BC بر نقطه‌ی تلاقی ارتفاعات واقع است.

۵. بین اندازه‌های ضلع‌ها و شعاع دایره‌ی محیطی روابط زیر برقرار است:

$b^۲-c^۲=۲aR$ و $b^۲+c^۲=۴R^۲$

۶. اگر ضلع BC از حیث اندازه و وضع ثابت بماند و رأس A در صفحه‌ی مثلث تغییر مکان دهد تا همواره مثلث شبه‌قائمه باقی بماند، مکان A و همچنین مکان نقطه‌ی تلاقی ارتفاعات، یک هذلولی متساوی‌القطرین خواهد بود.

قضیه‌ای درباره‌ی مثلث مورلی

از ماهنامه‌ی ریاضیات آمریکا

ترجمه: غلامحسین بهفرو

اگر هر یک از زاویه‌های مثلث غیر مشخص ABC را به سه قسمت متساوی تقسیم کنیم، از برخورد دوبه‌دو خطوط حاصل مثلثی به دست می‌آید که متساوی‌الاضلاع است (مجموعه‌ی علمی یکان سال). این مثلث به نام مثلث مورلی معروف است (شکل ۱).

مثلث ABC و یک مثلث دلخواه A′B′C′ واقع در داخل آن‌را در نظر می‌گیریم. اگر α، β، γ زاویه‌های بین اضلاع متناظر از این دو مثلث باشند (شکل ۲) روابط زیر برقرار خواهد بود:

$$A'=A+\beta-\gamma \text{ و } B'=B+\gamma-\alpha \text{ و } C'=C+\alpha-\beta$$

حال قضیه‌ی زیر را مطرح می‌کنیم:

قضیه ـ شرط لازم و کافی برای آن‌که اضلاع مثلث مورلی مربوط به مثلث ABC با اضلاع مثلث مورلی مربوط به مثلث A′B′C′ نظیر به نظیر با هم موازی باشند، آن است که داشته باشیم:

$$\frac{B-C}{۳}=\alpha+\frac{B'-C'}{۳}$$

که با در نظر گرفتن جهت زاویه‌ها نتیجه خواهد شد:

$$\alpha+\beta+\gamma=۰$$

به آسانی ثابت می‌شود که شرط فوق، وقتی که A′B′C′ یکی از هشت مثلث زیر باشد، برقرار خواهد بود:

۱. مثلث میانه‌ای مثلث ABC؛

۲. مثلث ارتفاعیه‌ی مثلث ABC؛

۳. مثلثی که از وصل کردن مراکز دایره‌های محاطی خارجی به دست می‌آید؛

۴. مثلثی که از وصل کردن نقاط تماس اضلاع مثلث ABC با دایره‌ی محاطی داخلی به دست می‌آید؛

۵ و ۶ و ۷. مثلث‌هایی که از وصل کردن نقاط تماس اضلاع مثلث ABC با دوایر خارجی آن به دست می‌آید.

۸. مثلثی که از خطوط مماس بر دایره‌ی محیطی مثلث ABC در رأس‌های آن به دست می‌آید.

کارمند بازنشسته‌ی راه‌آهن

کبوتران نامه‌بر

در ملاقات دیگری که بین جانسن مکانیسین بازنشسته‌ی راه‌آهن و دکتر پزشک ناحیه روی‌داد، جانسن داستانی از یک مأموریت جالب که در زمان اشتغال به کار برای وی اتفاق افتاده بود برای دکتر شرح داد. او گفت: روزی از طرف هیأت نقل و انتقالات به وی مأموریت دادند تا به هنگام کار در یکی از ترن‌های عادی دو کبوتر نامه‌بر را با خود ببرد و آن‌ها را دقیقاً در فاصله‌ی ۸۰ کیلومتری یکدیگر و درست به فاصله‌ی یک ساعت از هم رها کند.

خوشبختانه قسمتی از مسیری که راه‌آهن از آن می‌گذشت کاملاً هموار بود. طول این خط آهن مستقیم ۱۶۰ کیلومتری به نحوی بود که ترن‌ها این فاصله را درست در مدت ۲ ساعت می‌پیمودند. در این

فاصله ایستگاه‌هایی وجود داشت و در آن‌ها ترن‌ها به نسبت تعداد مسافرانی که پیاده یا سوار می‌شدند توقف داشتند، اما با کم و زیاد کردن سرعت، این زمان‌های توقف جبران می‌شد و در نتیجه، فاصله‌ی ۱۶۰ کیلومتری درست در ۲ ساعت طی می‌شد.

اما از این که ما فاصله‌ی ۱۶۰ کیلومتری را در مدت ۲ ساعت طی می‌کردیم و سرعت متوسط ما ۸۰ کیلومتر در ساعت بود، نمی‌توان اطمینان داشت که یک فاصله‌ی زمانی یک ساعتی وجود داشته که در آن مسافت ۸۰ کیلومتر پیموده شده باشد.



دکتر اظهار داشت: «این چنین نیست. بدون در نظر گرفتن تغییرات سرعت در فاصله‌ی ۲ ساعت به سادگی می‌توان ثابت کرد که در هر حال فاصله‌ای یک ساعتی وجود



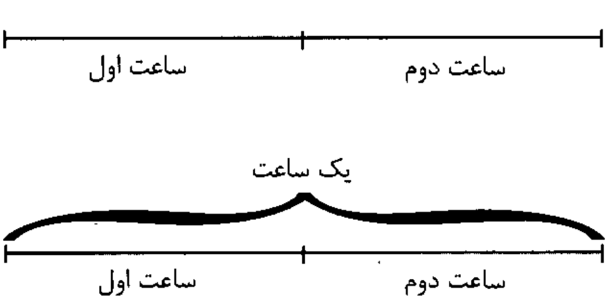
داشته است که طی آن مسافت ۸۰ کیلومتر پیموده می‌شده است. راه ساده‌ی اثبات این مطلب از این قرار است:

فاصله‌ی دو ساعتی را به دو فاصله‌ی یک ساعتی تقسیم می‌کنیم. فرض می‌کنیم که نه در یک ساعت اول و نه در یک ساعت دوم دقیقاً مسافت ۸۰ کیلومتر را نپیموده باشید، وگرنه مسئله خیلی ساده خواهد بود. بنابراین می‌توانیم فرض کنیم که در یک ساعت اول سرعت متوسط شما کمتر از ۸۰ کیلومتر در ساعت و در دومین ساعت بیش‌تر از این مقدار بوده است. ملاحظه خواهید کرد که اگر به ترتیب عکس فرض کنیم، اثبات فرق نخواهد کرد.

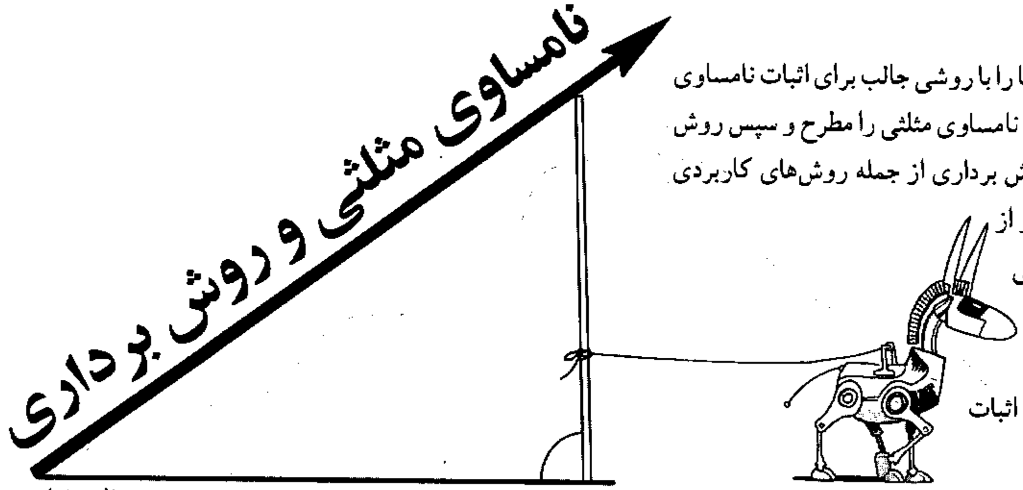
یک فاصله‌ی یک ساعتی مجزا در نظر می‌گیریم و آن را به تدریج در طول مسیر (شکل در پایین است) جا می‌دهیم به‌طوری که ابتدا یک ساعت اول و بعد به تدریج یک ساعت دوم را دربرگرفته باشد. در این یک ساعت مجزا که آن را در طول مسیر پخش کردیم سرعت متوسط همان سرعت مطلوب است. از آن‌جا که این فاصله یک ساعت اول را دربر دارد، در ابتدای آن سرعت متوسط کم‌تر از ۸۰ کیلومتر در ساعت می‌باشد و چون یک ساعت دوم را هم دربرمی‌گیرد، در پایان، سرعت متوسط آن بیش‌تر از ۸۰ کیلومتر خواهد بود.

ملاحظه می‌کنیم که در طول یک ساعت سرعت متوسط بین دو مقدار محصور می‌ماند، یکی کم‌تر از ۸۰ کیلومتر در ساعت و دیگری بیش‌تر از آن. بنابراین، بخشی از مسیر وجود دارد که ضمن آن در این فاصله‌ی یک ساعتی سرعت متوسط دقیقاً برابر با ۸۰ کیلومتر در ساعت است و به این صورت حکم ثابت می‌شود.»

مکانیسین بازنشسته حق را به جانب دکتر داد و چنین اظهار داشت: «آنچه گفتید به جای خود درست است، اما این موضوعی نبود که به کار هیئت نقل و انتقالات بیاید. برای این‌که هیچ‌گاه من نمی‌توانستم شروع این فاصله را تعیین کنم و در نتیجه نمی‌توانستم ساعت رها شدن کبوتران را معلوم کنم. فعلاً هم چنانچه مایل باشید مسئله‌ی کوچکی که سراغ دارم مطرح کنم، شاید برای شما جالب باشد.» قرار شد که این مسئله در جلسه‌ی بعد مطرح شود.



نامساوی مثلثی و روش برداری

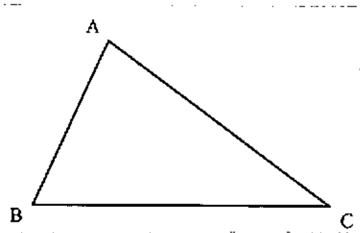


مؤلفان: میلاد محبی و سینا عبدالهی‌نژاد
دانش‌آموزان دوره‌ی پیش‌دانشگاهی

اشاره

در این مقاله قصد داریم شما را با روشی جالب برای اثبات نامساوی مثلثی آشنا کنیم. در این‌جا ابتدا نامساوی مثلثی را مطرح و سپس روش برداری را ارائــه می‌کنیم. روش برداری از جمله روش‌های کاربردی در حل مســائل ریاضی است و از آن در همه‌ی شاخه‌های ریاضی اســتفاده می‌کننــد. این روش بیش‌تر بــرای تعیین ماکزیمم و مینیمـم و حل معـادلات و اثبات نابرابری‌ها استفاده می‌شود.

قضیــه‌ی نابرابــری مثلثــی: در هــر مثلــث، مجمــوع اندازه‌هــای هــر دو ضلــع از انــدازه‌ی ضلــع ســوم بزرگ‌تــر اســت. یعنــی اگــر A ، B ، C سه نقطه‌ی متمایز ناهمخط باشند، آن‌گاه: $AC + AB > BC$.



حالا می‌خواهیــم قضیه را اثبات کنیم، ولی ابتدا چند خاصیت از بردارها را بیان می‌کنیم:

بردارهای $\vec{a}(x_1, y_1)$ و $\vec{b}(x_2, y_2)$ را در نظر بگیرید. خواهیم داشت:

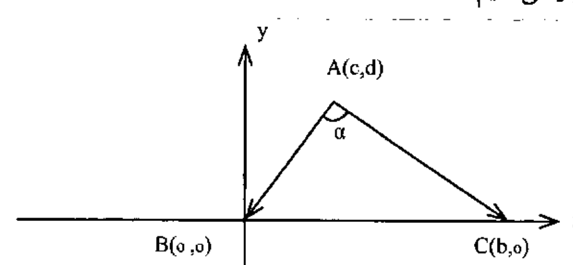
۱) $|\vec{a}| = \sqrt{x_1^2+y_1^2}$ $\qquad$ $|\vec{b}| = \sqrt{x_2^2+y_2^2}$

۲) $\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}|.|\vec{b}|.\cos\hat{\alpha}$; $\qquad$ (α زاویه‌ی بین دو بردار است)

$\vec{a}.\vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2$

(منظور از $\vec{a}.\vec{b}$ ، ضرب داخلی دو بردار است.)

حالا ما مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ را به صورت زیر روی محورهای مختصات قرار می‌دهیم.



اکنون خواهیم داشت:

$\overline{AB}(-c,-d)$, $\overline{AC}((b-c),-d)$

$$\overline{AB}.\overline{AC} = |\overline{AB}|.|\overline{AC}|.\cos\hat{\alpha} \Rightarrow \cos\hat{\alpha} = \frac{\overline{AB}.\overline{AC}}{|\overline{AB}|.|\overline{AC}|}$$

می‌دانیم که در هر مثلث، کسـینوس هیــچ زاویه‌ای برابر ۱ و ۱- نیست[1]. پس همواره: $-1 < \cos\alpha < 1$

$$\cos\alpha = \frac{\overline{AB}.\overline{AC}}{|\overline{AB}|.|\overline{AC}|} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{(-c\times(b-c))+(-d\times(-d))}{\sqrt{c^2+d^2}\times\sqrt{(b-c)^2+d^2}}$$

$$= \frac{c^2-bc+d^2}{\sqrt{(c^2+d^2)((b-c)^2+d^2)}} \Rightarrow \frac{c^2-bc+d^2}{\sqrt{(c^2+d^2)((b-c)^2+d^2)}} > -1$$

$$\Rightarrow c^2-bc+d^2 > -\sqrt{(c^2+d^2)((b-c)^2+d^2)}$$

$$\Rightarrow 2(c^2-bc+d^2) > -2\sqrt{(c^2+d^2)((b-c)^2+d^2)}$$

$$\Rightarrow (c^2+d^2)+(c^2+d^2-2bc)+2\sqrt{(c^2+d^2)((b-c)^2+d^2)} > 0$$

$$\Rightarrow (c^2+d^2)+(d^2+c^2+b^2-2bc)+2\sqrt{((b-c)^2+d^2)(c^2+d^2)} > b^2$$

$$\Rightarrow (\sqrt{c^2+d^2})^2+(\sqrt{(b-c)^2+d^2})^2+2\sqrt{((b-c)^2+d^2)(c^2+d^2)} > b^2$$

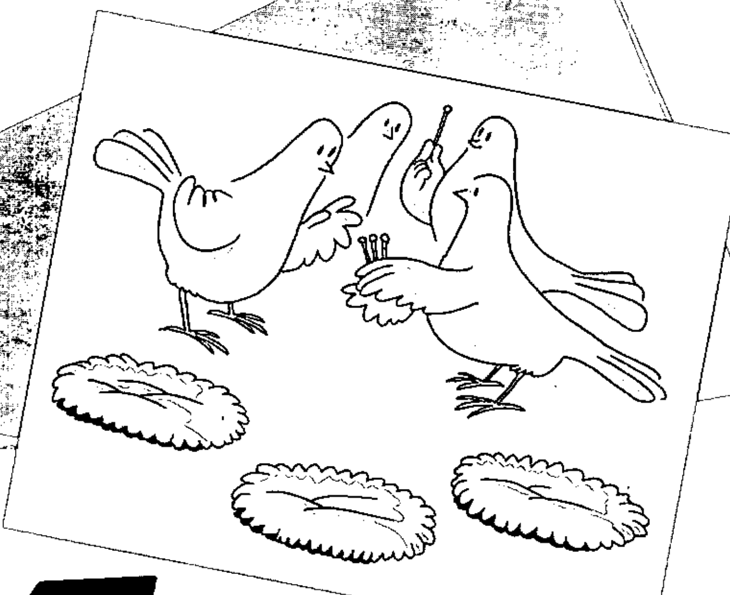
$$(\sqrt{c^2+d^2}+\sqrt{(b-c)^2+d^2})^2 > b^2$$

$$\Rightarrow \sqrt{c^2+d^2}+\sqrt{(b-c)^2+d^2} > b \Rightarrow AB+AC > BC$$

برای بقیه‌ی اضلاع یعنی $BC+AB > AC$ و $BC+AC > AB$ نیز به همین صورت حکم اثبات می‌شود.

پی‌نوشت

۱. زیرا در هیچ مثلثی، زاویه‌ای وجود ندارد که اندازه‌ی آن ۰° یا ۱۸۰° باشد.



اصل لانه کبوتری

میر شهرام صدر

اشاره

یوهان پتر گوستاف لوژون دیریکله[1] در ۱۳ فوریه سال ۱۸۰۵ میلادی در شهر دورن[2] آلمان متولد شد و به ترتیب در برلین و برسلاو[3] سمت استادی داشت. او از شاگردان بااستعداد گاوس بود که با مرگ گاوس در سال ۱۸۵۵ به عنوان جانشین وی در دانشگاه گوتینگن[4] منصوب شد که نشانه‌ای از شایستگی‌های اوست. زمانی که او در گوتینگن بود، امید داشت آثار ناتمام گاوس را به پایان برساند، ولی مرگ زود هنگام او در سال ۱۸۵۹ مانع از آن شد.

دلیل شهرت دیریکله در ریاضیات، تحقیقات مهم او در سری‌های فوریه و نظریه‌ی اعداد است. او در سال ۱۸۳۴ اصل «کشوی دیریکله» یا همان اصل «لانه کبوتری» را بیان کرد. این اصلِ بسیار ساده، کاربردهای فراوانی برای حل مسائل مربوط به مجموعه‌های متناهی در نظریه‌ی اعداد، ترکیبات و هندسه دارد، در ادامه، به بیان این اصل می‌پردازیم و کاربرد آن را با ارائه‌ی مسائل گوناگون بررسی می کنیم.

اصل لانه کبوتری

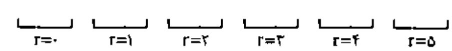
فرض کنید m و n دو عدد طبیعی باشند و داشته باشیم: m<n . اگر n شی را در m خانه قرار دهیم (به هر صورت، اعم از این‌که خانه‌ای خالی بماند یا نماند)، آن‌گاه حداقل یکی از این خانه‌ها شامل دو شی یا بیش‌تر خواهد بود.

اکنون اگر n را تعداد کبوترها و m را تعداد لانه‌ها تصور کنیم، اصل لانه کبوتری را خواهیم داشت.

با استفاده از این اصل ساده و بدیهی، می‌توان در مواقع حساس، مسائل مهم و مشکل را حل کرد. در واقع، بدون استفاده از این اصل، اثبات چنین مسائلی، کاری بسیار دشوار خواهد بود.

مثال ۱: A یک زیرمجموعه‌ی ۷ عضوی از اعداد طبیعی است. اگر اعضای A را بر ۶ تقسیم کنیم، ثابت کنید که حداقل دو عضو از این مجموعه، دارای باقی‌مانده‌ی یکسان‌اند.

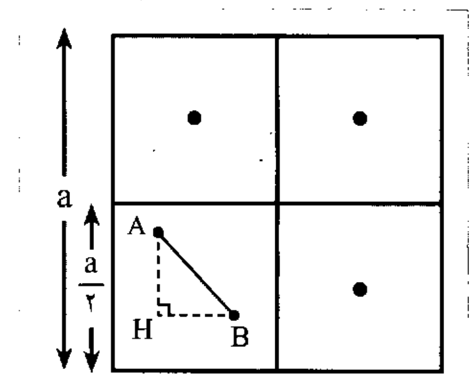
حل: اگر هر یک از اعضای مجموعه‌ی A را بر ۶ تقسیم کنیم، آن‌گاه باقی‌مانده‌ی تقسیم، یکی از عددهای مجموعه‌ی $\{0,1,2,3,4,5\}$ است. حال اگر ۶ لانه به صورت زیر درنظر بگیریم:



و اعضای مجموعه‌ی A را به عنوان ۷ کبوتر تصور کنیم، اگر کبوترها داخل لانه‌ها قرار گیرند، آن‌گاه حداقل یک لانه وجود دارد که در آن دو یا بیش‌تر کبوتر است، یعنی حداقل دو عدد یافت می‌شوند که پس از تقسیم بر ۶، هم باقی‌مانده هستند.

مثال ۲: ۵ نقطه داخل مربعی به ضلع a مفروض‌اند. ثابت کنید که حداقل فاصله‌ی دو نقطه از این ۵ نقطه، کم‌تر از $\frac{\sqrt{2}}{2}a$ است.

حل: ابتدا مربع را به چهار مربع برابر تقسیم می‌کنیم (شکل ۱)، سپس هر یک از آن‌ها را به عنوان یک لانه تصور می‌کنیم. اکنون اگر ۵ نقطه را ۵ کبوتر در نظر بگیریم که می‌خواهند لانه‌ها را اشغال کنند، آن‌گاه طبق اصل لانه کبوتری، حداقل یک لانه وجود دارد که در آن، دو یا بیش‌تر کبوتر قرار دارند. بنابراین داریم:



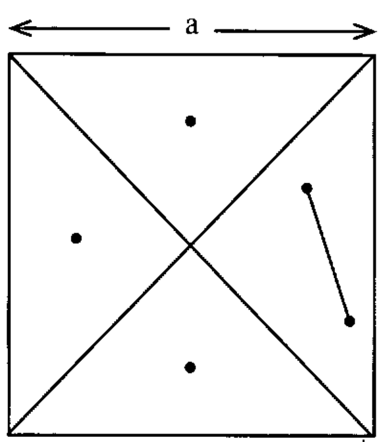
(شکل ۱)

$$\begin{cases} AH < \frac{a}{2} \Rightarrow AH^2 < \frac{a^2}{4} \\ BH < \frac{a}{2} \Rightarrow BH^2 < \frac{a^2}{4} \end{cases} \Rightarrow AH^2 + BH^2 < \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4}$$

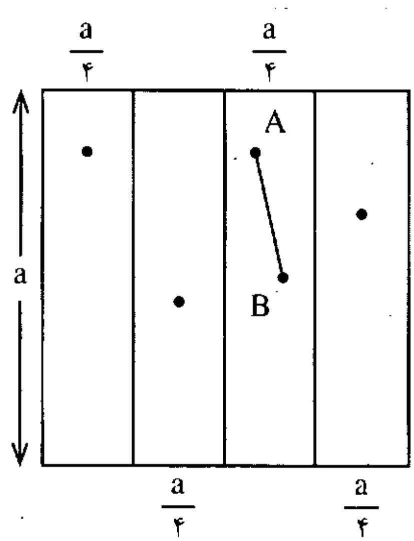
در مثلث ΔABH طبق قضیه‌ی فیثاغورس، داریم $AB^2 = AH^2 + BH^2$؛ بنابراین:

$$AH^2 + BH^2 < \frac{2a^2}{4} \Rightarrow AB^2 < \frac{a^2}{2} \Rightarrow AB < \frac{\sqrt{2}}{2}a$$

اکنون این سؤال پیش می‌آید که چرا مربع به ضلع a را به این صورت تقسیم‌بندی کردیم، و چرا این مربع را به صورت شکل‌های زیر تقسیم‌بندی نکردیم؟



(الف)



(ب)

پاسخ آن است که در حل یک مسئله، انتخاب روش‌های مجاز و منطقی با توجه به اصول و فرض‌های مسئله با ما است و هر راهی که به نظرمان می‌رسد، می‌توانیم انتخاب کنیم، اما با تقسیم‌بندی مانند شکل الف به حکم مسئله نمی‌رسیم. بدیهی است که با استفاده



از اصل لانه کبوتری، می‌توانیم نتیجه بگیریم که حداقل ۲ نقطه یا بیش‌تر داخل یکی از مثلث‌های قائم‌الزاویه شکل الف قرار خواهند داشت ولی در این صورت فاصله‌ی حداقل ۲ نقطه کمتر از عدد a می‌شود.

چون در مثلث قائم‌الزاویه فاصله‌ی بین هر دو نقطه از وتر کوچکتر است، پس AB<a. یعنی حداقل ۲ نقطه یا بیش‌تر وجود دارند که فاصله‌ی آن‌ها کمتر از a است و این نتیجه نیز صحیح است ولی معادل با حکم مثال ۲ نیست.

در تقسیم‌بندی شکل ب به این نتیجه می‌رسیم که حداقل ۲ نقطه یا بیش‌تر یافت می‌شوند که فاصله‌ی آن‌ها کمتر از قطر مستطیل است، یعنی $AB < \frac{\sqrt{15}}{4}a$ و این نیز نتیجه‌ای صحیح است ولی معادل با حکم مثال ۲ نیست.

اگر سؤال این باشد که از کجا فهمیدیم باید مربع را به صورت شکل ۱ تقسیم‌بندی کنیم تا به حکم مسئله برسیم، در جواب می‌توان گفت که این بستگی به تجربه، خلاقیت و ابتکار فراوان در زمینه‌ی حل مسائل اصل لانه کبوتری دارد.

پرسش ۱: اگر ۵ نقطه را داخل مربعی به ضلع ۱۰ در نظر بگیریم، آن‌گاه حداقل دو نقطه وجود دارد که فاصله‌ی آن‌ها کم‌تر از یکی از عددهای زیر است؛ آن عدد کدام است؟

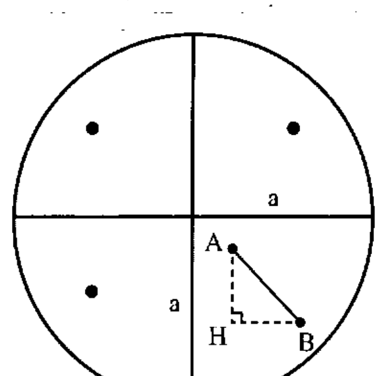
۱) $5\sqrt{2}$ ۲) $\frac{5\sqrt{2}}{2}$

۳) $10\sqrt{2}$ ۴) $2\sqrt{5}$

حل: گزینه‌ی ۱ صحیح است، زیرا طبق مسئله‌ی قبل، با فرض a=۱۰ داریم:

$$AB < \frac{\sqrt{2}}{2}a,\ a = 10 \Rightarrow AB < 5\sqrt{2}$$

مثال ۳: ۵ نقطه را داخل دایره‌ای به شعاع a در نظر می‌گیریم. ثابت کنید که حداقل فاصله‌ی دو نقطه، کم‌تر از $a\sqrt{2}$ است.



حل: ابتدا دو قطر عمود برهم رسم می‌کنیم و دایره را به چهار قسمت برابر تقسیم می‌کنیم، سپس هر یک از این قسمت‌ها را به عنوان یک لانه تصور می‌کنیم. اکنون اگر ۵ نقطه را ۵ کبوتر در نظر بگیریم که می‌خواهند لانه‌ها را اشغال کنند، آن‌گاه طبق اصل لانه کبوتری، حداقل یک لانه وجود دارد که در آن دو یا بیش‌تر کبوتر قرار دارند. بنابراین داریم:

$$\begin{cases} AH < a \Rightarrow AH^2 < a^2 \\ BH < a \Rightarrow BH^2 < a^2 \end{cases} \Rightarrow AH^2 + BH^2 < 2a^2$$

$$\Rightarrow AB^2 < 2a^2 \quad \Rightarrow AB < a\sqrt{2}$$

پرسش ۲: ۵ نقطه را داخل دایره‌ای به قطر ۸ درنظر می‌گیریم، حداقل دو نقطه وجود دارد که فاصله‌ی آن‌ها کم‌تر از یکی از عددهای زیر است، آن عدد کدام است؟

۱) $\sqrt{2}$ ۲) $2\sqrt{2}$

۳) $4\sqrt{2}$ ۴) $8\sqrt{2}$

حل: گزینه‌ی ۳ صحیح است، زیرا شعاع دایره ۴ است و طبق مسئله‌ی قبل داریم:

$$AB < a\sqrt{2} \text{ و } a = 4 \Rightarrow AB < 4\sqrt{2}$$

مثال ۴: داخل جعبه‌ای، ۷ مهره به رنگ‌های سبز، سفید و آبی وجود دارد. این مهره‌ها را در دو جعبه قرار می‌دهیم. ثابت کنید که یکی از این دو جعبه، حداقل دارای دو مهره‌ی هم‌رنگ است.

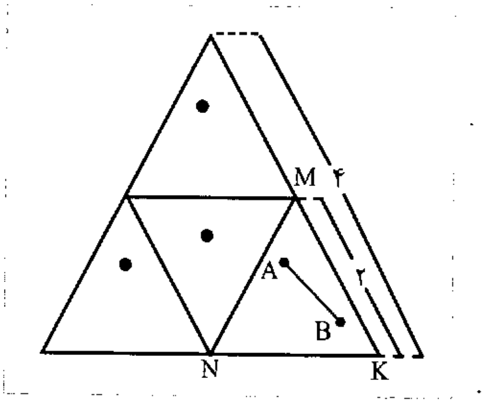
حل: طبق جدول ذیل، می‌توان مهره‌ها را داخل دو جعبه قرار داد. در صورتی که از مرحله‌ی اول تا مرحله‌ی سوم از اصل لانه کبوتری برای جعبه‌ی دوم استفاده کنیم و از مرحله‌ی چهارم تا مرحله‌ی آخر از اصل لانه کبوتری برای جعبه‌ی اول استفاده کنیم، حکم مسئله برقرار است.

در هر مرحله، سه رنگ را به عنوان ۳ لانه و تعداد مهره‌ها را به عنوان کبوترها در نظر می‌گیریم. برای مرحله‌ی اول، ۳ لانه و ۶ کبوتر در جعبه‌ی دوم داریم. اکنون اگر کبوترها داخل لانه‌ها قرار گیرند، حداقل یک لانه وجود دارد که در آن، بیش از یک کبوتر است؛ یعنی در جعبه‌ی دوم، حداقل دو مهره‌ی هم‌رنگ وجود دارد.

مرحله	جعبه‌ی اول	جعبه‌ی دوم
۱	۱	۶
۲	۲	۵
۳	۳	۴
۴	۴	۳
۵	۵	۲
۶	۶	۱

مثـال ۵: ۵ نقطه داخل مثلث متســاوی‌الاضلاع به ضلع ۴ در نظر بگیرید. ثابت کنید حداقل فاصله‌ی دو نقطه، کم‌تر از ۲ است.

حل: ابتدا مثلث را مانند شـکل زیر به چهار قسـمت برابر تقسیم می‌کنیم. سپس هر قسمت را به عنوان یک لانه در نظر می‌گیریم. اگر ۵ نقطه را به عنوان ۵ کبوتر تصور کنیم که لانه‌ها را اشـغال می‌کنند، آن‌گاه طبق اصل لانه کبوتری، حداقل یک لانه وجود دارد که در آن، دو یـا بیش‌تر کبوتر قرار دارد. فرض کنیـم دو نقطه‌ی B و A داخل مثلث ΔMNK قرار داشـته باشـد. چون در مثلث متساوی‌الاضلاع، فاصلـه‌ی بین هـر دو نقطه کم‌تر از طول ضلع این مثلث اسـت، پس $AB<۲$.



مثال ۶: اگر در یک مهمانی n نفر حضور داشته باشند، ثابت کنید حداقل دو نفر وجود دارند که تعداد دوسـتان آن‌ها باهم برابر اسـت (اگر A با B دوست باشد، B هم با A دوست است).

حل: کسـی که کم‌ترین دوست را دارد، تعداد دوستانش برابر صفر است و کسی که بیش‌ترین دوست را دارد، تعداد دوستانش برابر $n-۲$ اسـت (زیرا او به‌جز خودش و کسـی که دوست ندارد، با بقیه دوست اسـت)؛ بنابراین، تعداد دوستان یک شـخص، می‌تواند یکی از اعداد $۰,۱,۲,...,n-۲$ باشد. اگر لانه‌ها را به‌صورت زیر در نظر بگیریم:
(F: به‌منظور تعداد دوست است.)

F=۰   F=۱   F=۲   ...   F=n-۲

ملاحظـه می‌کنیم که $n-۱$ لانـه و n کبوتر داریم. پس طبق اصل لانه‌ی کبوتری، حداقل یک لانه وجود دارد که با دو یا بیش‌تر کبوتر اشـغال می‌شود، یعنی دو نفر وجود دارند که تعداد دوستان آن‌ها باهم برابر است.

مثـال ۷: ثابت کنید که هر مجموعه‌ی nعضـوی از اعداد طبیعی مانند A، حداقل دارای یک زیرمجموعه است که حاصل جمع اعضای آن بر n بخش‌پذیر است.

اثبات با برهان خلف: اگر $A=\{a_۱,a_۲,...,a_n\}$، در این صورت فرض می‌کنیم هیچ‌یـک از ۲^n زیرمجموعه‌ی A دارای خاصیت فوق نباشـند، یعنی حاصل جمع اعضایشان بر n بخش‌پذیر نباشد، به‌ویژه هر یک از مجموعه‌های:

$$A_۱=\{a_۱\},A_۲=\{a_۱,a_۲\},A_۳=\{a_۱,a_۲,a_۳\},...,A_n=\{a_۱,a_۲,...,a_n\}$$

نیز مجموع اعضایشـان مضرب n نیسـت. پس اعداد زیر هیچ‌یک بر n بخش‌پذیر نیستند:

$$S_۱=a_۱,S_۲=a_۱+a_۲,S_۳=a_۱+a_۲+a_۳,...,S_n=a_۱+a_۲+...+a_n$$

از طرفی می‌دانیم که باقی‌مانده‌ی تقسـیم این n عدد طبیعی بر n یکی از اعداد ۱ تا $n-۱$ اسـت (صفر جزء باقی‌مانده‌ها نیست، زیرا بر n بخش‌پذیر نیست). لذا چون n عدد موجود است و $n-۱$ باقی‌مانده داریم (از ۱ تا $n-۱$) طبق اصل لانه‌ی کبوتری، لااقل ۲ عدد از این n عدد باقی‌مانده‌ی تقسیمشـان بر n باهم برابر می‌شود. فرض می‌کنیم S_i و S_j در تقسیم بر n هم باقی‌مانده باشند که $j>i$ پس:

$$S_j-S_i=kn,\ S_j-S_i=a_{i+۱}+...+a_j$$

و واضح اسـت که $a_{i+۱},...,a_j$ اعضای A هسـتند و اگر قرار دهیم $B=\{a_{i+۱},...,a_j\}$ همـواره $B\subset A$ و دیدیم که مجموع اعضای B مضرب n اسـت و این با فرض خلف تناقـض دارد. پس حکم ثابت می‌شود.

پرسش ۳: ۵ نقطه‌ی متمایز از محیط دایره‌ی مثلثاتی مفروض‌اند. در این صورت کدام درست است؟

۱) حداقل دو نقطه، دارای نسبت‌های مثلثاتی برابر هستند.
۲) حداقل دو نقطه، تانژانت‌های برابر دارند.
۳) حداقل دو نقطه، سینوس‌های برابر دارند.
۴) حداقل دو نقطه، نسبت‌های مثلثاتی هم‌علامت دارند.

حل: گزینه‌ی ۴ صحیح اسـت، زیرا اگر هر ربع دایره‌ی مثلثاتی را یـک لانه در نظر بگیریم و هریک از آن ۵ نقطه را کبوتر فرض کنیم، چون تعداد کبوترها از لانه‌ها بیش‌تر است، طبق اصل لانه‌ی کبوتری، حداقل ۲ نقطه از این ۵ نقطه در یک ربع دایره واقع می‌شوند. بنابراین، نسبت‌های مثلثاتی آن‌ها هم‌علامت خواهد بود.

مثال: نشان دهید که هر زیرمجموعه‌ی شش‌عضوی از مجموعه‌ی $S=\{۱,۲,۳,...,۹\}$ حداقـل دو عضو دارد کـه مجموع آن‌ها برابر ۱۰ است.

حل: هر لانه را برای دو عددی از مجموعه‌ی S در نظر می‌گیریم که مجموعشان برابر با ۱۰ است. بنابراین داریم:

۱,۹   ۲,۸   ۳,۷   ۴,۶   ۵

ملاحظـه می‌کنیم کـه تعداد لانه‌ها ۵ تاسـت. هـرگاه ۶ عضو زیرمجموعه‌ای از S را به‌عنوان ۶ کبوتر در نظر بگیریم و قرار باشد که کبوترها لانه‌ها را اشـغال کنند، آن‌گاه طبق اصل لانه‌ی کبوتری، لانه‌ای باید باشـد که در آن حداقل دو کبوتر قرار گیرد، پس در آن

لانه دو عدد وجود دارد که مجموعشان برابر با ۱۰ است.

تعمیم‌یافته‌ی اصل لانه‌ی کبوتری

تا این‌جا معمولاً با مسائلی روبه‌رو شدیم که در آن‌ها تعداد کبوترها یکی بیش‌تر از تعداد لانه‌ها بود، یعنی k لانه و k+1 کبوتر داشتیم که طبق اصل لانه‌ی کبوتری حداقل در یکی از لانه‌ها دو کبوتر یا بیش‌تر قرار دارد.

اما بدیهی است که اگر تعداد کبوترها از چند برابر تعداد لانه‌ها بیش‌تر باشد، آن‌گاه نتیجه بیش از این است که «حداقل دو کبوتر یا بیش‌تر در یکی از لانه‌ها وجود دارد». برای مثال، فرض کنید ۳ لانه و ۱۰ کبوتر داریم. اگر قرار باشد کبوترها لانه‌ها را اشغال کنند، درحالتی‌که کبوترها در تمام لانه‌ها پخش باشند، به‌طور شهودی ملاحظه می‌کنیم که وقتی ۹ کبوتر لانه‌ها را اشغال کرده باشند، در هر لانه ۳ کبوتر قرار دارد. چنان‌چه کبوتر دهم در هر لانه قرار بگیرد، حداقل در یکی از لانه‌ها ۴ کبوتر یا بیش‌تر قرار خواهند داشت و این تعمیم‌یافته‌ی اصل لانه‌ی کبوتری است.

××× ×××× ×××

می‌توان تعمیم‌یافته‌ی اصل لانه‌ی کبوتری را به این صورت بیان کرد:

هرگاه m کبوتر وارد n لانه شوند (m>n)، آن‌گاه حداقل $\left[\frac{m-1}{n}\right]+1$ کبوتر وارد یک لانه می‌شوند.

مثال ۹: در کلاسی ۲۵ نفر دانش‌آموز حضور دارند. ثابت کنید که حداقل ۳ نفر آن‌ها در یک ماه از سال به‌دنیا آمده‌اند.

حل: ۱۲ ماه سال را به‌عنوان n=۱۲ لانه و m=۲۵ را تعداد کبوترها در نظر می‌گیریم. در این صورت داریم:

$$\left[\frac{m-1}{n}\right]+1=\left[\frac{25-1}{12}\right]+1=3$$

بنابراین حداقل ۳ نفر آن‌ها در یک ماه از سال به‌دنیا آمده‌اند.

مثال ۱۰: ۲۶ نفر از دانش‌آموزان یک مدرسه با ۷ خودرو به سمت منزلشان حرکت می‌کنند. ثابت کنید که در هر خودرو حداقل ۴ نفر دانش‌آموز قرار دارند.

حل: ۷ خودرو را به‌عنوان n=۷ لانه و m=۲۶ نفر را به‌عنوان کبوترها در نظر می‌گیریم، در این صورت داریم:

$$\left[\frac{m-1}{n}\right]+1=\left[\frac{26-1}{7}\right]+1=4$$

بنابراین، حداقل ۴ دانش‌آموز در یک خودرو قرار دارند.

مثال ۱۱: در کشوی کمد لباس‌ها چند جفت جوراب قرمز، آبی و سفید وجود دارد. چند لنگه جوراب (بدون آن‌که به رنگ آن‌ها نگاه کنیم) باید از کشو بیرون بیاوریم تا مطمئن شویم که حداقل ۳ جفت جوراب یک‌رنگ برداشته‌ایم؟

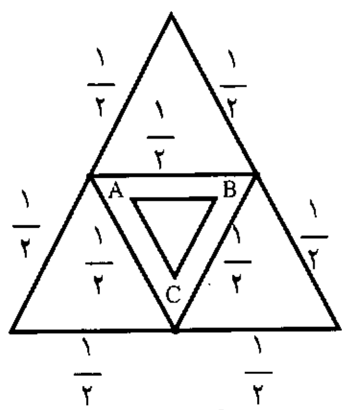
حل: هر رنگ را به‌عنوان یک لانه در نظر می‌گیریم، در این صورت n=۳. از طرفی می‌خواهیم حداقل در یک لانه ۳ جفت جوراب هم‌رنگ یا ۶ لنگه جوراب هم‌رنگ داشته باشیم. بنابراین داریم:

$$\left[\frac{m-1}{n}\right]+1=6 \text{ و } n=3 \Rightarrow \left[\frac{m-1}{3}\right]=5$$

$$\Rightarrow 5\le\frac{m-1}{3}<6 \Rightarrow 15\le m-1<18 \Rightarrow 16\le m<19$$

درنتیجه، حداقل باید ۱۶ لنگه جوراب از کشو برداریم.

مثال ۱۲: در یک مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع واحد، ۱۰ نقطه به‌طور تصادفی انتخاب می‌کنیم. ثابت کنید سه تا از این نقاط، رؤوس مثلثی با محیط کم‌تر از ۱/۵ واحد هستند.



حل: مطابق شکل، مثلث را به چهار لانه تفکیک می‌کنیم. چنان‌چه ۱۰ نقطه، لانه‌ها را اشغال کنند، آن‌گاه در یک لانه حداقل $\left[\frac{10-1}{4}\right]+1=3$ نقطه وجود دارد. چنان‌چه این سه نقطه را به‌هم وصل کنیم، مثلث ABC به‌وجود می‌آید که طول هریک از اضلاع آن کوچک‌تر از $\frac{1}{2}$ است. بنابراین داریم:

$$\begin{cases} AB<\frac{1}{2} \\ AC<\frac{1}{2} \Rightarrow AB+AC+BC<\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2} \\ \qquad \Rightarrow P=AB+AC+BC<1/5 \\ BC<\frac{1}{2} \end{cases}$$

مثال ۱۳: هرگاه S یک زیرمجموعه‌ی ۷۰ عضوی از اعداد طبیعی باشد، چنان‌چه اعضای S را بر ۲۰ تقسیم کنیم، ثابت کنید حداقل ۴ عضو دارای باقی‌مانده‌ی یکسان هستند.

حل: در صورتی که هر عدد طبیعی را بر ۲۰ تقسیم کنیم، باقی‌مانده‌ی تقسیم آن عدد بر ۲۰ یکی از عددهای زیر خواهند بود.

۱۹ و ... و ۲ و ۱ و ۰ خواهد بود.

چنان‌چه این باقی‌مانده‌ها را، که تعدادشـــان n=۲۰ است، به‌عنوان لانه‌ها و m=۷۰ را تعداد کبوترها در نظر بگیریم، خواهیم داشت:

$$\left[\frac{m-1}{n}\right]+1=\left[\frac{70-1}{20}\right]+1=4$$

درنتیجه، حداقل ۴ عدد در تقســیم بر ۲۰، باقی‌مانده‌های یکسان دارند.

مثـال ۱۴: هفده نفر بـا نام‌های حمزه، محمود، حســن و رضا و نام‌های خانوادگی مشیری، احمدی، بصیری و ابوالحسنی در جلســه‌ای حاضر شــدند. نشــان دهید که حداقل ۲ نفر وجود دارند که نام و نام خانوادگی آن‌ها باهم یکسان است.

راه‌حـل اول: چنان‌چه ۱۷ نفــر را به‌عنوان ۱۷ کبوتر و ۴ خانه با نام‌های زیر را به‌عنوان ۴ لانه در نظر بگیریم، خواهیم داشت:

حمزه	محمود	حسن	رضا
××××	×××××	××××	××××

$$m=17 \text{ و } n=4 \Rightarrow \left[\frac{m-1}{n}\right]+1=\left[\frac{17-1}{4}\right]+1=5$$

در نتیجه حداقل ۵ نفر وجود دارند که نام‌های آن‌ها یکسان است. اکنــون چنان‌چه ۴ خانه با عنوان‌های زیــر را به‌عنوان ۴ لانه در نظر بگیریم و قرار باشد حداقل ۵ نفر بالا آن‌ها را اشغال کنند، آن‌گاه طبق اصل لانه‌ی کبوتری داریم:

مشیری	احمدی	بصیری	ابوالحسنی
×	×	××	×

در نتیجــه حداقل ۲ نفر یافت می‌شــوند که یک خانه را پر کنند، یعنی حداقل دو نفر که نام‌های یکســـان دارند، نام خانوادگی آن‌ها نیز یکسان خواهد شد.

راه‌حـل دوم: می‌توان از ابتــدا، ۱۶ لانه با عنوان‌های زیر در نظر گرفت، چنان‌چه ۱۷ نفر به عنوان ۱۷ کبوتر، بخواهند آن‌ها را اشــغال کننــد، آن‌گاه حداقل یک لانه وجــود دارد که در آن حداقل ۲ کبوتر قرار خواهد داشت.

حمزه ابوالحسنی	حمزه بصیری	حمزه احمدی	حمزه مشیری
×	×	×	×
محمود ابوالحسنی	محمود بصیری	محمود احمدی	محمود مشیری
×	×	×	×
حسن ابوالحسنی	حسن بصیری	حسن احمدی	حسن مشیری
×	×	××	×
رضا ابوالحسنی	رضا بصیری	رضا احمدی	رضا مشیری
×	×	×	×



پی‌نوشت

1. Peter Gustav Lejenue Dirichleh
2. Düren
3. Breslau
4. Gottingen

ادامه‌ی مطلب صفحه‌ی ۹

چند رادیکال مسلسل

$$2+\sqrt{2}=\sqrt{2+2\sqrt{2^2+2^{\frac{3}{2}}\sqrt{2^3+2^2\sqrt{2^4+2^{\frac{5}{2}}\sqrt{2^5+\cdots}}}}},$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}(3+\sqrt{13})=\sqrt{3+3\sqrt{3^2+3^{\frac{3}{2}}\sqrt{3^3+3^2\sqrt{3^4+3^{\frac{5}{2}}\sqrt{3^5+\cdots}}}}},$$

$$\frac{\sqrt{2}}{8}(1+\sqrt{17})=\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^{\frac{3}{2}}}\sqrt{\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^2}\sqrt{\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^{\frac{5}{2}}}\sqrt{\frac{1}{2^5}+\cdots}}}}},$$

$$\frac{5}{4}=\sqrt{1+\frac{1}{2}\sqrt{1+\frac{1}{4}\sqrt{1+\frac{1}{8}\sqrt{1+\frac{1}{16}\sqrt{1+\cdots}}}}},$$

$$\frac{5}{2\sqrt{2}}=\sqrt{2+\frac{1}{2}\sqrt{4+\frac{1}{2^{\frac{3}{2}}}\sqrt{8+\frac{1}{4}\sqrt{16+\frac{1}{2^{\frac{5}{2}}}\sqrt{32+\cdots}}}}},$$

$$\frac{33}{256}=\frac{1}{4}\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{16}\sqrt{\frac{1}{16}+\frac{1}{64}\sqrt{\frac{1}{64}+\frac{1}{256}\sqrt{\frac{1}{256}+\cdots}}}},$$

$$3=\sqrt{4+\sqrt{4^2+\sqrt{4^3+\sqrt{4^4+\sqrt{4^5+\cdots}}}}},$$

$$24=2\sqrt{16+2^2\sqrt{16^2+2^3\sqrt{16^3+2^4\sqrt{16^4+\cdots}}}},$$

$$288=4\sqrt{64+4^2\sqrt{64^2+4^3\sqrt{64^3+4^4\sqrt{64^4+\cdots}}}},$$

$$4224=8\sqrt{256+8^2\sqrt{256^2+8^3\sqrt{256^3+8^4\sqrt{256^4+\cdots}}}}.$$

پی‌نوشت

1. Math. Spectrum
2. Yasar Atas

المپیادهای ریاضی لنینگراد ۲

هوشنگ شرقی



مسائل

۱. آیا پنج عدد طبیعی مختلف وجود دارد به گونه‌ای که حاصل‌ضرب دو عدد بزرگ‌تر با مجموع هر پنج عدد برابر باشد؟

۲. عددی چهار رقمی را از وسط به دو عدد دو رقمی تفکیک کرده‌ایم. معلوم شد عدد چهار رقمی بر مجموع دو عدد دو رقمی بخش‌پذیر است. آیا ممکن است مجموع این اعداد برابر ۹۴ باشد؟

۳. نقطه‌ی M وسط ضلع BC چهارضلعی کوژ ABCD قرار دارد و می‌دانیم مقدار زاویه‌ی $A\hat{M}D$ ۱۲۰ درجه است. ثابت کنید:

$$AB+\frac{1}{2}BC+CD\geq DA$$

۴. نقطه‌های D, E, F را روی ضلع‌های AC و AB و BC از مثلث متساوی الساقین ABC (AB = BC) طوری در نظر گرفته‌ایم که طول پاره‌خط‌های راست DE و DF و دو زاویه‌ی $B\hat{A}C$ و $F\hat{D}E$ برابر باشند. ثابت کنید:

$$AE+FC=AC$$

۵. نقطه‌های D و E و F را روی ضلع‌های AC و AB و BC از مثلث متساوی‌الساقین ABC (AB = BC) طوری در نظر گرفته‌ایم که داشته باشیم:

$AE+FC=AC$ و $DE=DF$

ثابت کنید دو زاویه‌ی BAC و FDE برابرند.

اشاره

در برهان شماره‌ی ۶۷ درباره‌ی تاریخچه‌ی المپیاد ریاضی لنینگراد و مسائل آن نوشتیم. در این‌جا سؤالات دیگری از این المپیادها را همراه با راه‌حل آن‌ها ارائه می‌دهیم. این مسائل از المپیاد سال ۱۹۹۳ انتخاب شده‌اند.

۶. ثابت کنید تابع تعریف شده‌ی $f(x)$ در بازه‌ی $[0, +\infty)$ وجود دارد به نحوی که داشته باشیم:

$$f(f(\dots f(x)\dots)) = \frac{x}{x+1}$$

(از نماد f، ۲۳۹ بار استفاده شده است).

۷. ثابت کنید تابع معین $f(x)$ در بازه‌ی $[0, +\infty)$ وجود دارد به‌گونه‌ای که داریم:

$$f(f(\dots f(x)\dots)) = 1 + x + 2\sqrt{x}$$

(از نماد f، ۴۵ بار استفاده شده است).

پاسخ‌ها

۱. عددهای مزبور را به ترتیب از بزرگ به کوچک، x_1 و x_2 و x_3 و x_4 و x_5 فرض می‌کنیم و با توجه به فرض مسئله داریم: $x_1 > x_2 > x_3 > x_4 > x_5$ بنابراین:

$$x_1 \ge x_2 + 1, \quad x_2 \ge x_3 + 1, \quad x_3 \ge x_4 + 1, \quad x_4 \ge x_5 + 1$$

حال اگر داشته باشیم: $x_1x_2 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5$

نتیجه می‌شود:

$$x_1x_2 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5$$
$$\Rightarrow x_1x_2 - x_1 - x_2 + 1 = 1 + x_3 + x_4 + x_5$$
$$\Rightarrow (x_1 - 1)(x_2 - 1) = 1 + x_3 + x_4 + x_5$$
$$(x_1 - 1)(x_2 - 1) \ge x_2x_3$$

و چون $x_1 \ge x_2 + 1$ و $x_2 \ge x_3 + 1$ پس:

$$(x_1 - 1)(x_2 - 1) \ge x_2x_3$$

در نتیجه داریم:

$$1 + x_3 + x_4 + x_5 \ge x_2x_3$$
$$\Rightarrow 1 + x_4 + x_5 \ge x_3(x_2 - 1), \; x_2 \ge x_3 + 1$$
$$\Rightarrow x_3(x_2 - 1) \ge x_3^2 \Rightarrow 1 + x_4 + x_5 \ge x_3^2 \ge (x_4 + 1)(x_5 + 2)$$
$$\Rightarrow 1 + x_4 + x_5 \ge x_4x_5 + 2x_4 + x_5 + 2$$
$$\Rightarrow x_4x_5 + x_4 + 1 \le 0$$

که این نتیجه غیرممکن است.

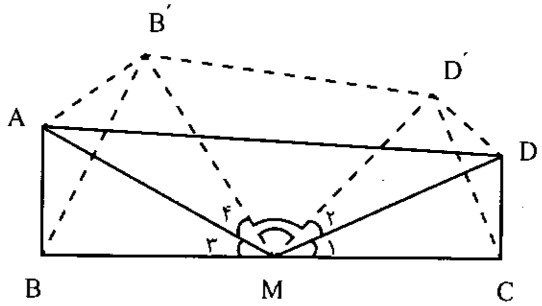
۲. مطابق فرض مسئله داریم: $\overline{ab} + \overline{cd} \mid \overline{abcd}$

و با فرض $\overline{ab} = x$ و $\overline{cd} = y$ خواهیم داشت:

$$\overline{abcd} = d + 10c + 100b + 1000a = (d + 10c) + 100(b + 10a)$$
$$= \overline{cd} + 100\,\overline{ab} = y + 100x \Rightarrow x + y \mid y + 100x$$
$$\Rightarrow (x + y) \mid (x + y) + 99x \Rightarrow x + y \mid 99x$$

و با فرض $x + y = 94$ نتیجه می‌شود: $94 \mid 99x$ و چون $(94, 99) = 1$ پس $94 \mid x$ و در نتیجه $x = 94$ و $y = 0$؛ که این نیز غیرممکن است.

۳. مطابق شکل، داریم. $A\hat{M}D = 120^\circ$ بازتاب (قرینه‌ی) C نسبت به MD (C') و قرینه‌ی B نسبت به AM (B') را رسم و C' و B' را به A و D و M وصل می‌کنیم.



بدیهی است که مثلث‌های MCD و $MC'D$ با یکدیگر و مثلث‌های MAB و MAB' نیز با یکدیگر هم‌نهشت‌اند و در نتیجه:

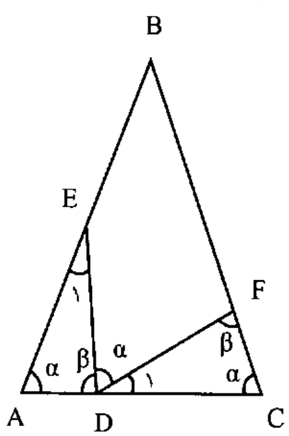
$$MC = MD' = MB = MB' = \frac{1}{2}BC, \; \hat{M}_1 = \hat{M}_2, \; \hat{M}_3 = \hat{M}_4$$
$$\Rightarrow \hat{M}_1 + \hat{M}_3 = \hat{M}_2 + \hat{M}_4 = 60^\circ, \; B'\hat{M}C' = 60^\circ$$

بنابراین مثلث $B'MD'$ متساوی الاضلاع است و $B'D' = MB' = \frac{BC}{2}$. هم‌چنین مطابق اصل حمار می‌توان نوشت:

$$DD' + D'B' + AB' \ge AD \Rightarrow DC + \frac{BC}{2} + AB \ge AD$$

۴. مطابق شکل، چون $AB = AC$ و $B\hat{A}C = F\hat{D}E$، پس می‌توان فرض کرد که:

$$B\hat{A}C = B\hat{C}A = F\hat{D}E = \alpha$$



بنابراین:

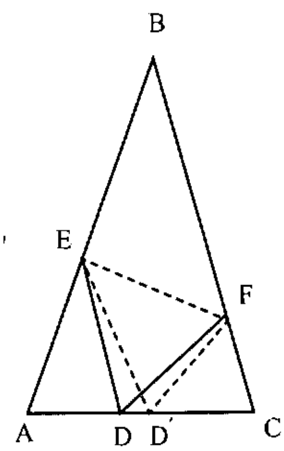
$$F\hat{D}A = A\hat{C}F + D\hat{F}C$$
$$\Rightarrow \alpha + E\hat{D}A = \alpha + D\hat{F}C \Rightarrow E\hat{D}A = D\hat{F}C = \beta$$

و در نتیجه دو مثلث DFC و AED دو زاویه‌ی برابر دارند

و لذا زاویه‌ی سوم آن‌ها نیز برابر است، یعنی: $\hat{D}_1 = \hat{E}_1$ و چون $DF = DE$، پس دو مثلث DFC و ADE و به حالت دو زاویه و ضلع بین هم‌نهشت‌اند و از آن‌جا:

$$DC = AE, FC = AD$$
$$AD + DC = AE + FC \Rightarrow AC = AE + FC$$

۵. این مسئله در واقع عکس مسئله‌ی ۴ است، یعنی در همان شکل و این بار با فرض $AE+FC=AC$ می‌خواهیم ثابت کنیم: $B\hat{A}C = F\hat{D}E$. برای این منظور، نقطه‌ی D' را روی AC طوری در نظر می‌گیریم که $D'C = AE$ و با توجه به فرض $AE + FC = AC = AD' + D'C$ نتیجه می‌شود که $AD' = FC$ و چون $\hat{A} = \hat{C}$، پس مثلث‌های $D'FC$ و $D'AE$ به حالت دو ضلع و زاویه‌ی بین هم‌نهشت‌اند.



پس $D'F = D'E$، یعنی D' از E و F به یک فاصله است و بنابراین روی عمودمنصف EF است. پس D' نقطه‌ی برخورد عمود منصف EF و ضلع AC است و از آن‌جا که طبق فرض DE=DF پس با استدلالی مشابه، D نیز همین نقطه است، یعنی D و D' بر هم منطبق‌اند و AD=FC و DC=AE.

مثلث‌های ADE و CFD هم‌نهشت‌اند و $A\hat{D}E = D\hat{F}C$ و $D\hat{E}A = F\hat{D}C$، بنابراین:

$$F\hat{D}E = 180^\circ - (F\hat{D}C + A\hat{D}E)$$
$$= 180^\circ - (D\hat{E}A + D\hat{F}C) = 180^\circ - (D\hat{E}A + E\hat{D}A) = B\hat{A}C$$

۶. با فرض $f(x) = \frac{ax}{a+x}$ نتیجه می‌شود:

$$f(f(x)) = \frac{a\frac{ax}{a+x}}{a+\frac{ax}{a+x}} = \frac{a^2x}{a^2+2ax} = \frac{ax}{a+2x}$$

$$f(f(f(x))) = f(\frac{ax}{a+2x}) = \frac{a\frac{ax}{a+2x}}{a+\frac{ax}{a+2x}} = \frac{a^2x}{a^2+3ax}$$

$$\Rightarrow \quad f(f(f(x))) = \frac{ax}{a+3x}$$

و به صورت استقرایی می‌توان حدس زد:

$$\underbrace{f(f(f(\ldots(f(x))\ldots)}_{n} = \frac{ax}{a+nx}$$

(درستی این حدس را به کمک قضیه‌ی استقرای ریاضی اثبات کنید.)

حال اگر داشته باشیم $f(f(\ldots f(x)\ldots) = \frac{x}{x+1}$ نتیجه می‌شود:

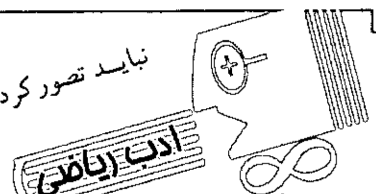
$$\frac{ax}{a+nx} = \frac{x}{x+1} \Rightarrow ax^2 + ax = ax + nx^2$$

$$\Rightarrow ax^2 = nx^2 \Rightarrow a = n$$

یعنی کافی است که $a = n = 239$ فرض شود، یعنی: $f(x) = \frac{239x}{239+x}$ و با این فرض خواهیم داشت:

$$\underbrace{f(f(\ldots f(x)\ldots)}_{239} = \frac{x}{x+1}$$

۷. این مسئله مشابه مسئله‌ی قبلی است که برای دانش‌آموزان پایه‌ای دیگر طرح شده بود. راه‌حل آن نیز مشابه مسئله‌ی قبلی است و به‌عنوان تمرین به دانش‌آموزان واگذار می‌شود. برای راهنمایی می‌گوییم که $f(x) = (\sqrt{x} + \frac{1}{a})^2$ فرض شود.



نباید تصور کرد که یگانه عمل ریاضیات که آن را «خادم علوم» نامیده‌اند خدمت به علوم دیگر و تلاش در پیشرفت آن‌هاست؛ بر این دانش نام «ملکه‌ی علوم» نیز اطلاق شده است. اگر در مواردی این ملکه از خواهران ثروتمندتر خود تقاضای کمک می‌کند و انتظار خدماتی دارد، در عوض صاحب کبریا و مناعت عظیمی است و هرگز از هیچ‌کس کمک بی‌اجر و زحمت بی‌مزد نمی‌خواهد و در انتظار لطف و احسان دیگران نیست و آن‌چه را که دریافت می‌کند به‌طور افزون‌تر خواهد پرداخت.

اریک تمپل‌بل



اشاره

در قسمت قبل با مقدمه‌ای از رمزنگاری‌های متعارف در قرون گذشته به‌صورت توصیفی آشنا شدید. در این قسمت و قسمت‌های بعدی با اصول رمزنگاری و رمزگشایی‌های «تک‌الفبایی حاصل از الفبای متعارف مستقیم»، «رمزهای تک‌الفبایی مبتنی بر تبدیل‌های خطی» و «سیستم‌های چندحرفی» و... آشنا خواهید شد. در این قسمت به رمزهای تک‌الفبایی حاصل از الفبای متعارف مستقیم (رمز جای‌گذاری) می‌پردازیم. در آخر نیز برای آزمودن یافته‌ها، چند تمرین خواهیم آورد.

هم‌نهشتی و کاربردهای آن
رمزنگاری و رمزگشایی (۱۲)

سید محمدرضا هاشمی موسوی

hashemi_moosavi@yahoo.com

کلیدواژه‌ها: پیام رمز، رمز جای‌گذاری، دنباله‌ی صریح، دنباله‌ی رمزی، رمزهای تک‌الفبایی، الفبای جای‌گذاری، عدد کلیدی، کلید رمز، فراوانی حروف.

رمزهای تک‌الفبایی حاصل از الفبای متعارف مستقیم (رمز جای‌گذاری)

رمز سزاری

یکی از قدیمی‌ترین سیستم‌های رمزنگاری که می‌شناسیم، سیستمی است که ژول سزار به کار برده و به همین مناسبت به

رمزنگاری ســزاری موســوم است. در این روش رمزنگاری به جای هر حرف از پیام، حرف سوم بعد از آن از حروف الفبای معمولی قرار داده می‌شد. البته سزار الفبای رومی را به‌کار می‌برد، ولی ما شیوه‌ی او را با الفبای امروزی (انگلیسی) شرح خواهیم داد.

فرض کنید بخواهیم پیام زیر را به رمز درآوریم:

«I CAME I SAW I CONQUERED»

ابتدا زیر هر حرف از پیام، حرفی را می‌نویسیم که در حرف‌های الفبا به‌ترتیب معمول، سه حرف پس از آن قرار گرفته است، یعنی به جای I حرف L قرار می‌گیرد، به جای C حرف F، به جای A حرف D و غیره. نتیجه‌ی کار چنین است:

متن اصلی:	I	C	A	M	E	I	S	A	W	I	C	O	N	Q	U	E	R	E	D
	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
پیام رمزی:	L	F	D	P	H	L	V	D	Z	L	F	R	Q	T	X	H	U	H	G

بنابراین، پیام رمزی چنین است:

«L FDPH L VDZ L FRQTXHUHG»

نتیجه کاملاً نامفهوم به‌نظر می‌رســد. برای فردی که آن را بررســی می‌کند و از چگونگی تهیه‌ی آن اطلاعی ندارد، ممکن اســت تلاش برای کشــف آن کاملاً بی‌ثمر باشــد. از طرف دیگر برای کســی که رمز را می‌داند، معنای پیام به ســرعت معلوم می‌شود. فقط کافی است به جای هر حرف از پیام رمزی، حرفی را که در حرف‌های الفبا به‌ترتیب معمولی ســه حرف پیش از آن قرار گرفته اســت جایگزین کنیم تا مطلب اصلی فاش شود.

این مثالی از نوعی رمز به نام «**رمز جای‌گذاری**» اســت که در آن به جای هر حرف از پیام اصلی حرف دیگری گذاشــته می‌شــود. راهی مناســب برای نمایش دادن به این جای‌گذاری اســتفاده از «**الفبای جای‌گذاری**» است که نشان می‌دهد چه حرفی به جای چه حرف دیگر قرار می‌گیرد. روش ســاختن الفبای جای‌گذاری در رمز ســزاری، عبارت از نوشــتن دنباله‌ی الفبای معمولی در یک سطر و سپس بازنویسی آن در سطر دوم، منتها با شروع از D به جای A است. وقتی که در سطر دوم به حرف آخر الفبا رسیدیم، بعد از حرف Z به‌ترتیب حرف‌های A، B و C را می‌نویسیم، درواقع دنباله‌ی الفبا را به‌صورت چرخه‌ای در نظر می‌گیریم که به‌طور متوالی تکرار می‌شود:

۱) دنباله‌ی صریح:	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	R	....	X	Y	Z
	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
۲) دنباله‌ی رمزی:	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	....	A	B	C

سطر اول را دنباله‌ی صریح و سطر دوم را دنباله‌ی رمزی می‌خوانیم. به این ترتیب، عمل به رمز درآوردن را می‌توانیم به این صورت انجام دهیم که به جای هر حرف از پیام صریح، حرف زیرین آن در الفبای جای‌گذاری را قرار دهیم. برای رمزگشایی می‌توانیم به جای هر حرف از پیام رمزی، حرف بالایی آن در الفبای جای‌گذاری را بگذاریم (به بیان ریاضی می‌گوییم عمل از رمز درآوردن معکوس عمل به‌رمز درآوردن اســت). فرایند رمزنگاری در رمز ســزاری را می‌توان به‌صورت عددی نیز انجام داد. فرض کنید به هر حرف، عددی اختصاص دهیم که مکان آن را در دنباله‌ی معمولی الفبا (شکل صریح) نشان دهد. در این صورت تناظر زیر را خواهیم داشت:

دنباله‌ی صریح:	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	....	X	Y	Z
	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
دنباله‌ی رمزی:	۱	۲	۳	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠	١١	١٢	١٣	....	٢٤	٢٥	٢٦

حال برای به رمز درآوردن پیام مورد نظر، به طریق زیر، مرحله به مرحله، عمل می‌کنیم:

۱) به جای هر حرف، عدد متناظر با آن را قرار می‌دهیم.

۲) به هریک از این اعداد ۳ واحد اضافه می‌کنیم.

۳) به جای اعداد حاصل، حروف متناظرشان را می‌گذاریم.

(مرحله‌ی ۱):	I	C	A	M	E	I	S	A	W	I	C	O	N	Q	U	E	R	E	D
	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
	۹	۳	۱	۱۳	۵	۹	۱۹	۱	۲۳	۹	۳	۱۵	۱۴	۱۷	۲۱	۵	۱۸	۵	۴
(مرحله‌ی ۲):	۱۲	۶	۴	۱۶	۸	۱۲	۲۲	۴	۲۶	۱۲	۶	۱۸	۱۷	۲۰	۲۴	۸	۲۱	۸	۷
	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
(مرحله‌ی ۳):	L	F	D	P	H	L	V	D	Z	L	F	R	Q	T	X	H	U	H	G

همان‌طور که انتظار داشتیم، نتیجه همان پیام رمزی است که از پیش به‌دست آمده بود.

تمرین. پیام زیر را که با رمز سزاری به رمز درآمده است، از رمز درآورید.

۱. FRZDUGV GLH PDQB WLPHV EHIRUH WKHLU GHDWKV

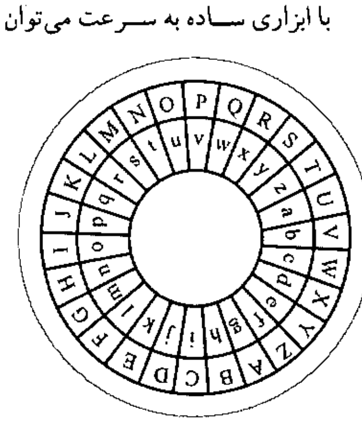
الفبای متعارف مستقیم

نمی‌دانیم چرا سزار عدد ۳ را به‌عنوان میزان انتقال دنباله‌ی رمزی نسبت به دنباله‌ی صریح انتخاب کرد. او می‌توانست هر عددی را برای این منظور به‌کار ببرد، فقط کافی بود که از پیش با طرف مکاتبه‌ی خود درباره‌ی چگونگی به رمز درآوردن، قراری گذاشته باشد. درواقع، به فرض یک قرارداد مناسب، میزان انتقال می‌تواند در هر پیام با پیام دیگر فرق داشته باشد. برای مثال، می‌توان قرار گذاشت که طبق طرحی، به هر پیام یک عدد نسبت داده شود و باقی‌مانده‌ی این عدد به یک عدد ثابت مانند ۲۶ (تعداد حروف الفبای لاتین)، میزان انتقال یعنی مقدار تغییر مکان گرفته شود. برای مثال، چنین عددی ممکن است به یکی از این ویژگی‌ها مختص شود: به تعداد کلمات هر پیام، شماره‌ی پیام و تاریخ ماهی که پیام فرستاده می‌شود، عددی که از یک فرایند به‌دست می‌آید که اصلاً ربطی به آن مکاتبه ندارد.

در هر صورت با داشتن این عدد، الفبای جایگزین می‌تواند ساخته شود و هم در به رمز درآوردن و هم در از رمز درآوردن به کار رود. یک الفبای جای‌گذاری که در آن هم دنباله‌ی صریح و هم دنباله‌ی رمزی از الفبای معمولی گرفته شده باشد (به این ترتیب که دنباله‌ی رمزی پس از مقدار مشخصی تغییر مکان به دست آمده باشد). «الفبای متعارف مستقیم» خوانده می‌شود.

در فرایند عددی معادل می‌توان گفت: C=P+K؛ که در آن K، مقدار تغییر مکان، عددی است که باید به P، معادل عددی هر حرف زبان صریح، اضافه شود تا C، جانشین رمزی آن، به‌دست آید. اگر مقدار تغییر مکان K باشد، آن‌گاه حرف A از دنباله‌ی صریح مقابل حرفی از دنباله‌ی رمزی واقع است که متناظر با (K+۱) است.

با ابزاری ساده به سرعت می‌توان الفبای متعارف مستقیم را تشکیل داد. این ابزار از دو دایره‌ی هم‌مرکز ساخته می‌شود که در پیرامون هریک از آن‌ها، حرف‌های الفبا به‌ترتیب نوشته شده‌اند (مطابق شکل ۱).



شکل ۱

حلقه‌ی بیرونی دنباله‌ی صریح و حلقه‌ی درونی که قابل چرخیدن است، دنباله‌ی رمزی است. اگر مقابل A از حلقه‌ی بیرونی، حرف متناظر (K+۱) از حلقه‌ی درونی را قرار دهیم، الفبای جای‌گذاری را که میزان انتقال آن K باشد، خواهیم داشت (شکل (۱) برای حالت K=۶ رسم شده است). جالب توجه است که سال‌ها پیش، ارتش آمریکا ابزار مشابهی را به‌کار می‌برد. الفبایی که این ابزار تولید می‌کرد، با الفبای متعارف مستقیم این تفاوت را داشت که دنباله‌ی رمزی در آن به‌ترتیب وارونه نوشته شده بود. چنین دنباله‌ای «دنباله‌ی متعارف وارونه» و الفبایی که این دنباله با قرار گرفتن در مقابل دنباله‌ی صریح معمولی تولید می‌کند «الفبای متعارف وارونه» نامیده می‌شود.

اگر از دایره برای ساختن الفبای متعارف مستقیم استفاده کنیم، آن‌گاه انتخاب هریک از ۲۶

الفبای متعارف مستقیم با قرار دادن دایره‌ی درونی در وضع مناسب امکان‌پذیر می‌شود. چنین امکانی را «ویژنر»[1] رمزنگار فرانسوی به طریقی دیگر فراهم آورد. او در یک مربع حرف‌های الفبا را نوشت. به این طریق که در بالاترین سطر، دنباله‌ی معمولی الفبا را نوشت و در هر سطر متعاقب آن، دنباله‌ای را نوشت که از انتقال دنباله‌ی قبلی به اندازه‌ی یک حرف به سمت چپ به دست می‌آمد. با قرار دادن الفبای معمولی به‌عنوان دنباله‌ی صریح در بالای مربع، هر الفبای متعارف مستقیم از ترکیب دنباله‌ی صریح با یک سطر مناسب در مربع، قابل حصول بود. هریک از این الفباها به‌راحتی با اولین حرف دنباله‌ی رمزی آن معین می‌شد (شکل ۲).

صریح	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
رمزی	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A
	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B
	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C
	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D
	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E
	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F
	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G
	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H
	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I
	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P
	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q
	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R
	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S
	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T
	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U
	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V
	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W
	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X
	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y

توجه: این مربع اساس سیستم‌هایی است که هریک از آن‌ها را بیان خواهیم کرد.

درباره‌ی قراری که برای تعیین میزان انتقال گذاشته می‌شود، نکته‌ای را باید متذکر شویم. واضح است که اگر طبق قرار ما عدد تعیین‌کننده‌ی کلید رمز پیام بتواند مضربی از ۲۶ باشد، مرتکب اشتباه شده‌ایم، زیرا چنین عددی در تقسیم بر ۲۶ باقی‌مانده‌ای برابر صفر خواهد داشت و درنتیجه پیام باید به زبان معمولی نوشته شود. بنابراین، قرار ما باید به گونه‌ای باشد که طبق آن نتوان عدد ۲۶ (یا هر مضربی از آن) را به‌عنوان میزان انتقال به‌کار برد؛ اگر از فرایندی که قرار است طبق آن میزان انتقال معلوم شود چنین عددی به‌دست آید، باید در این قرار مشخص شده باشد که چه عددی جانشین آن شود.

هر سیستم رمزنگاری دو اصل اساسی دارد: سیستم کلی و کلید ویژه.

«فرایند کلی مورد استفاده و جزئیات نحوه‌ی استفاده از آن فرایند کلی را سیستم کلی و مشخص‌کننده‌ی جزئیات نحوه‌ی استفاده از این فرایند را کلید ویژه می‌نامند.» برای مثال در رمزنگاری سزاری از یک الفبای متعارف مستقیم با کلید ویژه‌ی ۳ استفاده می‌شود. از آن‌جا که در این سیستم تنها یک الفبای جای‌گذاری به‌کار می‌رود، نتیجه را «رمز تک‌الفبایی» می‌نامند.

تمرین

۱) یک الفبای متعارف مستقیم با میزان انتقال ۷ بسازید و پیام زیر را به رمز درآورید:

THE FAULT DEAR BRUTUS IS NOT IN OUR STARS BUT IN OURSELVES.

۲) پیام رمزی زیر را با دانستن آن که الفبای متعارف مستقیم آن با میزان انتقال ۱۱ است، از رمز درآورید.

ESPCP TD LETOP TY ESP LQQLTCD ZQ XPY HSTNS ELVPY LE ESP QWZZO WPLOD ZY EZ QZCEFYP.

پاسخ‌ها

۱) AOL MHBSA KLHY IYBABZ PZ UVA PU VBY ZAHYZ IBA PU VBYZLSCLZ.

۲) THERE IS A TIDE IN THE AFFAIRS OF MEN WHICH TAKEN AT THE FLOOD LEADS ON THE FORTUNE.

پی‌نوشت

۱. Vigenére

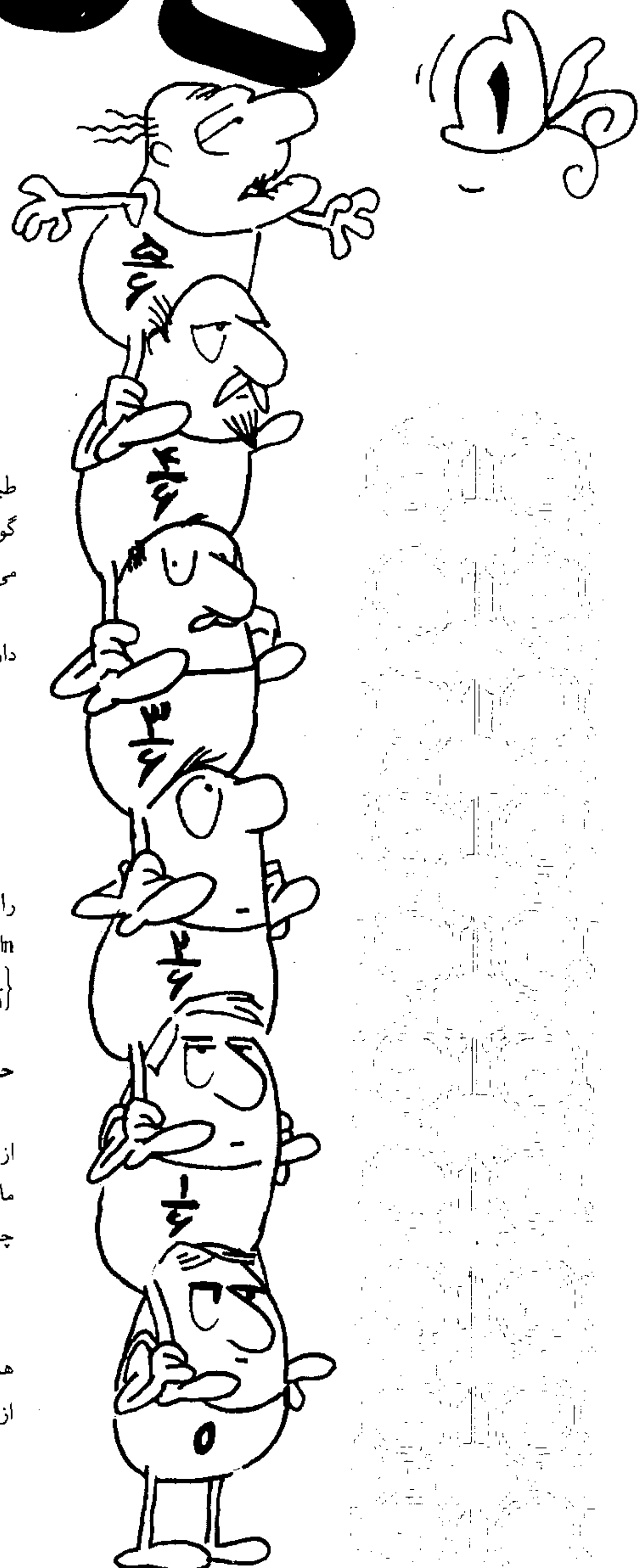
این چند سطر مربوط به انتهای مقاله‌ی قسمت (۱۱) در مجله‌ی رشد برهان شماره‌ی ۶۸ است که به علل اشکالات چاپی، حذف شده بود:

«فارغ‌التحصیلان ریاضیات پیشرفته در ارتش‌ها و دستگاه‌های اطلاعاتی؛ کارطراحی سیستم‌های رمزی، و شکستن رمزهای حریف به‌کارگیری انواع دستگاه‌های رمزنگار رایانه‌ای، و طراحی سیستم‌های کدنیگ مشغول‌اند.

امروزه رمزهای دستی و قراردادی، جای خود را به سیستم‌های پیچیده‌ی دیجیتالی و نوآوری‌هایی در زمینه‌های رمزهای مخابراتی و ارتباطی داده‌اند.»

دنباله

احمد قندهاری



یک دنباله، تابعی است که دامنه‌ی آن مجموعه‌ی اعداد طبیعی باشد و به هریک از مقادیر برد آن، یک جمله‌ی دنباله گویند. در واقع، مقادیر برد چنین تابعی، جمله‌های دنباله را تولید می‌کند.

برای مثال، تابع $\underset{N\to\mathbb{R}}{f(x)}=\frac{n}{n+1}$ یک دنباله است. در این دنباله داریم:

$$f(1)=\frac{1}{2},\ f(2)=\frac{2}{3},\ f(3)=\frac{3}{4},\ \dots,\ f(n)=\frac{n}{n+1},\ \dots$$

پس جمله‌های این دنباله عبارت است از:

$$\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\dots,\frac{n}{n+1},\dots$$

جمله‌ی اول دنباله را با a_1 و جمله‌ی دوم را با a_2 و جمله‌ی سوم را با a_3 و ... و جمله‌ی nام دنباله‌دار را با a_n نشان می‌دهیم. به جمله‌ی nام، جمله‌ی عمومی دنباله هم می‌گوییم. و خود دنباله‌ها را با $\{a_n\}$ یا $\left\{a_n=\frac{n}{n+1}\right\}$ یا $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$ نشان می‌دهیم.

حدّ دنباله و دنباله‌ی همگرا

می‌گوییم دنباله‌ی $\{a_n\}$ دارای حدّ L است $(L\in\mathbb{R})$ هرگاه به ازای هر $\varepsilon>0$ عدد طبیعی M وجود داشته باشد، به طوری‌که از مرتبه‌ی مانند $n\geq M$ داشته باشیم $|a_n-L|<\varepsilon$. این گفته را با نمادهای ریاضی چنین نشان می‌دهیم.

$$\forall\varepsilon>0\ \exists M\in N: n\geq M\Rightarrow |a_n-L|<\varepsilon$$

در این صورت می‌گوییم دنباله همگراست یا دنباله به عدد L همگراست و می‌نویسیم $\lim_{n\to\infty}a_n=L$ برای یافتن عدد طبیعی M، باید از نامساوی $|a_n-L|<\varepsilon$ شروع کرد تا به نامساوی $n\geq M$ رسید. عمل

رسیدن از $|a_n-L|<\varepsilon$ به $n \ge M$ یک جست‌وجو و بررسی است و پس از یافتن M باید بتوان از $n \ge M$ به نامساوی $|a_n-L|<\varepsilon$ رسید. در واقع، روابط حل باید برگشت‌پذیر باشد.

مسئله‌ی ۱: با استفاده از تعریف حدّ دنباله ثابت کنید که حدّ دنباله‌ی $\left\{\frac{n+2}{n}\right\}$ عدد ۱ است.

یعنی: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+2}{n}=1$

حل: برای این کار باید ثابت کنیم:

$$\forall \varepsilon>0,\ \exists M \in N: n \ge M \Rightarrow \left|\frac{n+2}{n}-1\right|<\varepsilon$$

$$\left|\frac{n+2}{n}-1\right|<\varepsilon \Rightarrow \left|\frac{n+2-n}{n}\right|<\varepsilon \Rightarrow \left|\frac{2}{n}\right|<\varepsilon \Rightarrow \frac{2}{n}<\varepsilon \Rightarrow \frac{n}{2}>\frac{1}{\varepsilon}$$

$$\Rightarrow n>\frac{2}{\varepsilon}$$

چون $(\varepsilon>0)$ عدد مثبتی است پس $\frac{2}{\varepsilon}$ هم مثبت است، ولی ممکن است $\frac{2}{\varepsilon}$ عدد طبیعی نباشد، در حالی‌که $\left[\frac{2}{\varepsilon}\right]$ حتماً عدد طبیعی است، اما ممکن است از $\frac{2}{\varepsilon}$ کمتر باشد، لذا $M=\left[\frac{2}{\varepsilon}\right]+1$ را در نظر می‌گیریم.

حال که عدد طبیعی M را پیدا کردیم باید بتوانیم از $n \ge M$ به نامساوی $\left|\frac{n+2}{n}-1\right|<\varepsilon$ برسیم. اگرچه این قسمت از حل ضروری نیست، ولی برای درک بهتر، آن را می‌نویسیم.

$$n \ge M=\left[\frac{2}{\varepsilon}\right]+1 \Rightarrow n \ge \left[\frac{2}{\varepsilon}\right]+1 \Rightarrow n>\frac{2}{\varepsilon} \Rightarrow \frac{1}{n}<\frac{\varepsilon}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{n}<\varepsilon \Rightarrow \left|\frac{2}{n}\right|<\varepsilon \Rightarrow \left|\frac{n+2-n}{n}\right|<\varepsilon \Rightarrow \left|\frac{n+2}{n}-1\right|<\varepsilon$$

این اعمال را برگشت‌پذیری می‌گوییم. چنان‌چه در یافتن M درست عمل کنیم نیازی به حل برگشت‌پذیری وجود ندارد.

قضیه: اگر دنباله‌ی $\{a_n\}$ همگرا باشد، حدّ آن یکتاست.

دنباله‌ی واگرا

اگر دنباله‌ی $\{a_n\}$ به عدد حقیقی L همگرا نباشد، دنباله را واگرا گوییم. مثلاً دنباله‌های $\{(-1)^n\}$ و $\{\sqrt{n}\}$ و $\{n^2\}$ و $\{\sin n\}$ واگرا هستند. اگر بخواهیم ثابت کنیم یک دنباله واگراست، کافی است ثابت کنیم حدّ دنباله نمی‌تواند یک عدد حقیقی مانند L باشد.

مسئله‌ی ۲: ثابت کنید دنباله‌ی $\{\sqrt{n+1}\}$ واگراست.

حل: فرض می‌کنیم این دنباله به عدد حقیقی L همگرا باشد، یعنی $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n+1}=L$ آن‌گاه به تناقض می‌رسیم. برای اثبات این حدّ باید بگوییم:

$$\forall \varepsilon>0,\ \exists M \in N: n \ge M \Rightarrow |\sqrt{n+1}-L|<\varepsilon$$

$$|\sqrt{n+1}-L|<\varepsilon \Rightarrow -\varepsilon<\sqrt{n+1}-L<\varepsilon \Rightarrow L-\varepsilon<\sqrt{n+1}<L+\varepsilon$$

$$\sqrt{n+1}<L+\varepsilon \Rightarrow n+1<(L+\varepsilon)^2 \Rightarrow n<(L+\varepsilon)^2-1$$

معنای نامساوی $n<(L+\varepsilon)^2-1$ این است که وقتی $n\to\infty$، n از عددحقیقی $(L+\varepsilon)^2-1$ کوچک‌تر است، یعنی اعداد طبیعی از بالا کران‌دارند که غیر ممکن است. بنابراین، حدّ دنباله‌ی این مسئله نمی‌تواند عدد حقیقی L باشد، پس دنباله واگراست.

اعمال اصلی روی دنباله‌ها

قضیه: اگر در دو دنباله‌ی $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ داشته باشیم $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=L_1$ و $\lim\limits_{n\to\infty} b_n=L_2$، آن‌گاه داریم:

۱) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \pm b_n)=L_1 \pm L_2$

۲) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n . b_n)=L_1 . L_2$

۳) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\frac{L_1}{L_2} \quad L_2 \neq 0$

دنباله‌ی کران‌دار

۱. دنباله $\{a_n\}$ را از بالا کران‌دار گوییم هرگاه عدد حقیقی M_2 وجود داشته باشد به طوری‌که برای هر $n \in N$ داشته باشیم:

$a_n \le M_2$

۲. دنباله‌ی $\{a_n\}$ را از پایین کران‌دار گوییم، هرگاه عدد حقیقی M_1 وجود داشته باشد، به طوری‌که برای هر $n \in N$ داشته باشیم:

$a_n \ge M_1$

اگر دنباله‌ای هم کران بالا داشته باشد و هم کران پایین، دنباله را کران‌دار گوییم. برای مثال دنباله‌ی $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ کران‌دار است، زیرا کران بالای آن ۱ و کران پایین آن صفر است. یا مثلاً دنباله‌ی $\{\sin n+\cos n\}$ کران‌دار است، زیرا کران بالای آن $\sqrt{2}$ و کران پایین آن $-\sqrt{2}$ است.

دنباله‌ی صعودی

اگر در دنباله‌ی $\{a_n\}$ برای هر $n \in N$ داشته باشیم $a_{n+1} \ge a_n$، دنباله را صعودی گوییم. برای مثال دنباله‌ی $\{\sqrt{n+2}\}$ صعودی است.

دنباله‌ی نزولی

اگر در دنباله $\{a_n\}$ برای هر $n \in N$ داشته باشیم $a_{n+1} \le a_n$، آن‌گاه دنباله را نزولی گوییم، مانند دنباله‌ی $\{-n+5\}$.

مثال: نشان دهید که دنباله‌ی $\left\{\frac{n}{n+4}\right\}$ صعودی است.

حل: باید ثابت کنیم که برای هر $n \in N$. داریم: $a_{n+1} \ge a_n$

$$a_{n+1} \ge a_n \Rightarrow \frac{n+1}{n+5} \ge \frac{n}{n+4}$$

دو طرف نامساوی را در مقدار مثبت $(n+4)(n+5)$ ضرب می‌کنیم.

$$(n+4)(n+1) \ge n(n+5) \Rightarrow n^2+5n+4 > n^2+5n \Rightarrow 4>0$$

همواره درست است.

قضیه: هر دنباله‌ی همگرا کران‌دار است، ولی عکس این قضیه همواره درست نیست.

قضیه: دنباله‌ی $\{f(n)\}$ را در نظر می‌گیریم. اگر تابع با ضابطه‌ی $f(x)$ به ازای $x \geq 1$ مشتق‌پذیر باشد، در این صورت داریم:

الف) اگر $f'(x) \geq 0$، آن‌گاه دنباله‌ی $\{f(a_n)\}$ صعودی است.

ب) اگر $f'(x) \leq 0$، آن‌گاه دنباله‌ی $\{f(a_n)\}$ نزولی است.

مثال: نشان دهید که دنباله‌ی $\left\{\frac{-n+2}{2n+3}\right\}$ نزولی است.

حل:

$$x = n \geq 1,\ f(x) = \frac{-n+2}{2n+3} \Rightarrow f'(x) = \frac{-7}{(2n+3)^2} < 0$$

درنتیجه دنباله نزولی است.

نکات دنباله

۱- اگر بخواهیم که بدانیم عدد m چندمین جمله‌ی دنباله‌ی $\{a_n\}$ است، باید معادله‌ی $a_n = m$ را با توجه به اینکه $n \in N$ است، حل کنیم.

۲- اگر بخواهیم که بدانیم دنباله‌ی $\{a_n\}$ چند جمله‌ی منفی یا چند جمله‌ی مثبت دارد، باید نامعادله‌های $a_n < 0$ یا $a_n > 0$ را حل کنیم. با تعیین علامت، محدوده‌ی جواب با توجه به اینکه $n \in N$ است، به دست می‌آید.

مثال: دنباله‌ی $\{n^2 - 6n - 187\}$ چند جمله‌ی منفی دارد؟

حل:

$$n^2 - 6n - 187 < 0,\ n^2 - 6n - 187 = 0 \Rightarrow n = 3 \pm \sqrt{9+187}$$

$$n = 3 \pm 14 \Rightarrow \begin{cases} n = -11 \\ n = 17 \end{cases} \xrightarrow{\text{با توجه به تعیین علامت}} -11 < n < 17,\ n \in N$$

$\Rightarrow 1 \leq n \leq 16 \Rightarrow$ این دنباله ۱۶ جمله‌ی منفی دارد.

۳- قضیه‌ی فشار: اگر در سه دنباله‌ی $\{a_n\},\{b_n\},\{c_n\}$ برای nای به بعد داشته باشیم $a_n \leq c_n \leq b_n$ و $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = L$ آن‌گاه $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = L$

مسئله‌ی ۳: به کمک قضیه‌ی فشار، حدّ دنباله‌ای $\left\{\frac{2^n}{n!}\right\}$ را وقتی $n \to \infty$ بیابید.

حل:

$$a_n = \frac{2^n}{n!} \quad n \in N,\ a_n > 0$$

$$0 \leq a_n = \frac{2^n}{n!} = \frac{\overbrace{2\times2\times2\times\ldots\times2}^{n}}{1\times2\times3\times\ldots\times n} \leq 2\times1\times1\times\ldots\times\frac{2}{n} = \frac{4}{n}$$

$$0 \leq a_n \leq \frac{4}{n},\ \lim_{n\to\infty}(0) \leq \lim_{n\to\infty} a_n \leq \lim_{n\to\infty}\frac{4}{n}$$

$$\Rightarrow 0 \leq \lim_{n\to\infty} a_n \leq 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

۴- اگر $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = L$ و برای هر عدد صحیح مثبت x تابع f تعریف شده باشد، آن‌گاه $\lim\limits_{n\to\infty} f(n) = L$.

۵- به کمک حدّ بعضی از توابع می‌توان حدّ بعضی از دنباله‌ها را پیدا کرد.

مسئله‌ی ۴: حدّ دنباله‌ی $\left\{\frac{2n^4+n+1}{2n^3+n^4}\right\}$ را وقتی $n \to \infty$ بیابید.

حل: اگر $x \geq 1$ و $f(x) = \frac{2x^4+x+1}{2x^3+x^4}$ را در نظر بگیریم، وقتی $x \to +\infty$، داریم:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^4+x+1}{2x^3+x^4} \sim \lim_{x\to+\infty}\frac{2x^4}{x^4} = 2 \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{2n^4+n+1}{2n^3+n^4} = 2$$

نکته:

$$n \to \infty,\ n \in N: \log n < n < n^p < k^n < n! < n^n,\ P > 0,\ k > 1$$

مثال:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^4}{3^n} = 0,\ \lim_{n\to\infty}\frac{3^n}{n!} = 0,\ \lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n} = 0$$

آزمون ۱: دنباله‌ی $\left\{\sqrt[3]{2n-n^2}\right\}$ کدام ویژگی را دارد؟

۱) نزولی و همگراست   ۲) صعودی و همگراست

۳) صعودی و واگراست   ۴) نزولی و واگراست

حل: گزینه‌ی ۴.

زیرا:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[3]{2n-n^2} = -\infty,\ a_1 = 1,\ \forall n \in N,\ a_n \leq 1$$

آزمون ۲: کدام یک از دنباله‌های زیر یکنوا و بی‌کران است؟

۱) $\{\sin n + \cos n\}$ ۲) $\left\{\cos\frac{n\pi}{2}\right\}$

۳) $\left\{\sqrt[5]{n^5+5n}\right\}$ ۴) $\left\{\sqrt[3]{n^3-27n}\right\}$

حل: گزینه‌ی ۳؛ گزینه‌های ۱ و ۲ کران دارند. گزینه‌ی ۱ یکنوا نیست.

دنباله یکنوا است.

$$x = n \geq 1,\ f(x) = \sqrt[5]{x^5+5x} \Rightarrow f'(x) = \frac{5x^4+5}{5\sqrt[5]{(x^5+5x)^4}} > 0$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[4]{n^5+5n}=\infty$$

دنباله بی‌کران است.

آزمون ۳: چندمین دنباله‌ی $\{n^3+n\}$ برابر ۲۲۲ است؟

۱) جمله‌ی نهم ۲) جمله‌ی هشتم

۳) جمله‌ی هفتم ۴) جمله‌ی ششم

حل: گزینه‌ی ۴؛

$$n^3+n=222\Rightarrow n^3+n-222=0\Rightarrow \underbrace{n^3-216}+n-6=0$$

$$(n-6)(n^2+6n+36)+(n-6)=0\Rightarrow (n-6)(\underbrace{n^2+6n+37}_{\Delta<0,\,a>0})=0$$

$$n-6=0\Rightarrow n=6$$

آزمون ۴: دنباله‌ی $\left\{\sqrt{n^2-n}+\sqrt{n^2-1}-2n+\frac{5}{2}\right\}$ همگرا به کدام عدد است؟

۱) ۲ ۲) $\frac{5}{2}$ ۳) ۳ ۴) $\frac{7}{2}$

حل: گزینه‌ی ۱؛

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2-n}+\sqrt{n^2-1}-2n+\tfrac{5}{2})\sim\lim_{n\to\infty}(n-\tfrac{1}{2}+n-2n+\tfrac{5}{2})$$

$$=-\frac{1}{2}+\frac{5}{2}=2$$

آزمون ۵: $t_1=1$ و $t_2=3$ و $t_{n+2}=t_n+t_{n+1}$ مفروض است. $\lim_{n\to\infty}\frac{t_n}{t_{n+1}}$ کدام است؟

۱) $\sqrt{3}+1$ ۲) $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$

۳) $\frac{\sqrt{5}+1}{4}$ ۴) $\frac{\sqrt{5}-1}{4}$

حل: گزینه‌ی ۲؛

$$\lim_{n\to\infty}\frac{t_n}{t_{n+1}}=k\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\frac{t_{n+1}}{t_n}=\frac{1}{k},\ k>0$$

$$\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\frac{t_{n+2}}{t_{n+1}}=\frac{1}{k}$$

$$\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\frac{t_{n+1}+t_n}{t_{n+1}}=\lim_{n\to\infty}(1+\frac{t_n}{t_{n+1}})=1+\lim_{n\to\infty}\frac{t_n}{t_{n+1}}$$

$$=1+k=\frac{1}{k}\Rightarrow k^2+k-1=0\Rightarrow k=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

آزمون ۶: دنباله‌ی $\left\{\cot(n\sin\frac{\pi}{2n})\right\}$ همگرا به کدام عدد است؟

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) $\frac{\pi}{2}$ ۴) π

حل: گزینه‌ی ۱؛

$$n\to\infty\Rightarrow\sin\frac{\pi}{2n}\sim\frac{\pi}{2n}$$

$$\lim_{n\to\infty}\cot(n\sin\frac{\pi}{2n})=\lim_{n\to\infty}\cot(n\times\frac{\pi}{2n})=\lim_{n\to\infty}\cot\frac{\pi}{2}=0$$

آزمون ۷: در دنباله‌ی a_n داریم $a_n=\frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\dots}{4+2+1+\dots}$، $\lim_{n\to\infty}a_n$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{1}{4}$ ۳) ۱ ۴) ۴

حل: گزینه‌ی ۲: صورت و مخرج هردو تصاعد هندسی با قدر نسبت $r=\frac{1}{2}$ هستند.

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\frac{\frac{a_1}{1-r}}{\frac{a_1'}{1-r}}=\frac{\frac{1}{1-\frac{1}{2}}}{\frac{4}{1-\frac{1}{2}}}=\frac{\frac{1}{\frac{1}{2}}}{\frac{4}{\frac{1}{2}}}=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$$

آزمون ۸: دنباله‌ی همگرای a_n به صورت $a_n=2\sqrt{3+2\sqrt{3+2\sqrt{3\dots}}}$ است. این دنباله همگرا به کدام عدد است؟

۱) ۶ ۲) ۵ ۳) ۴ ۴) ۳

حل: گزینه‌ی ۱؛ فرض می‌کنیم $\lim_{n\to\infty}a_n=L$ ، در این صورت می‌توان نوشت

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}2\sqrt{3+a_n}=2\sqrt{3+\lim_{n\to\infty}a_n}$$

$$\Rightarrow L=2\sqrt{3+L}\Rightarrow L^2=4(3+L)\Rightarrow L^2-4L-12=0$$

$$(L-6)(\underbrace{L+2}_{+})=0\Rightarrow L-6=0\Rightarrow L=6$$

آزمون ۹: چند جمله از دنباله‌ی $\left\{\frac{2n-1}{n}\right\}$ در خارج بازه‌ی $(2-\frac{1}{10},2+\frac{1}{10})$ قرار دارد؟

۱) ۵ ۲) ۹ ۳) ۱۰ ۴) ۲۰

حل: گزینه‌ی ۳؛

$$\left|\frac{2n-1}{n}-2\right|\geq\frac{1}{10}\Rightarrow\left|\frac{2n-1-2n}{n}\right|\geq\frac{1}{10}$$

$$\Rightarrow\left|\frac{-1}{n}\right|\geq\frac{1}{10}\Rightarrow\frac{1}{n}\geq\frac{1}{10}\Rightarrow n\leq 10$$

آزمون ۱۰: برای دنباله‌ی $\left\{\frac{2n}{n-1}\right\}$ داریم: برای هر $\varepsilon>0$، وجود دارد $M\in N$ که: $(n>1), n\geq M\Rightarrow\left|\frac{2n}{n-1}-2\right|<\varepsilon$ در این صورت مقدار M کدام است؟

۱) $\left|\frac{2}{\varepsilon}\right|+2$ ۲) $\left|\frac{2}{\varepsilon}\right|+1$

۳) $\left|\frac{2}{\varepsilon}\right|$ ۴) $\frac{2}{\varepsilon}-1$

حل: گزینه‌ی ۱؛

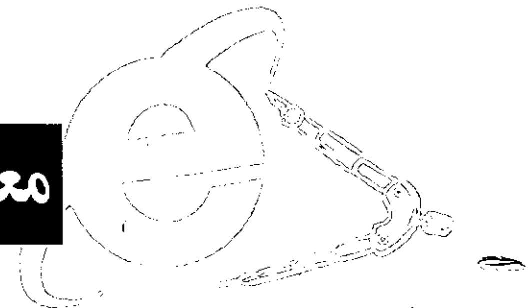
$$\left|\frac{2n}{n-1}-2\right|<\varepsilon\Rightarrow\left|\frac{2n-2n+2}{n-1}\right|<\varepsilon\Rightarrow\left|\frac{2}{n-1}\right|<\varepsilon, n>1$$

$$\Rightarrow\frac{2}{n-1}<\varepsilon\Rightarrow\frac{n-1}{2}>\frac{1}{\varepsilon}\Rightarrow n-1>\frac{2}{\varepsilon}\Rightarrow n>\frac{2}{\varepsilon}+1$$

$$\Rightarrow M=\left\lfloor\frac{2}{\varepsilon}\right\rfloor+2$$

معرفی سایت‌های ریاضی جهان

احسان یارمحمدی



نشانی پایگاه اینترنتی: bymath.com

صفحه‌ی اصلی سایت شامل عنوان‌های زیر است. هر یک از این عنوان‌ها دربرگیرنده‌ی زیرعنوان‌هایی است که به تفصیل موضوع‌های ریاضی را شرح داده‌اند.

■ برنامه‌ی دروس (Program of Lessons)

○ دروس (Lessons)

■ راهنمای مطالعه (Study Guide)

○حساب (Arithmetic)

○جبر (Algebra)

○هندسه (Geometry)

○مثلثات (Trigonometry)

○ توابع و نمودارها (Functions & Graph)

○اصول آنالیز (Principles of Analysis)

○ مجموعه‌ها (Sets)

○احتمال (Probability)

○ هندسه‌ی تحلیلی (Analytic Geometry)

■مسائل (Problems)

○ دروس (Select Topic)

■ آزمون و امتحانات (Test & Exams)

○ دروس (Select Test)

■ پرداخت شهریه (Tuition Payment)

○قواعد (Rules)

○ لیست قیمت (Price list)

○ ثبت‌نام (Registration)

نشانی پایگاه اینترنتی: ilovemaths.com

سایت I Love Maths برای دانش‌آموزان دوره‌های راهنمایی و متوسطه شامل لطیفه‌ها، معماها و مقالات ریاضی است. صفحه‌ی اصلی این سایت موتور جست‌وجوگری دارد که به کاربر امکان می‌دهد تا بتواند مطلب موردنظر خود را در شبکه‌ی اینترنت یا در این سایت مورد بررسی قرار دهد. در ضمن، صفحه‌ی اصلی این سایت دربرگیرنده‌ی عنوان‌های زیر است که هر یک از آن‌ها حاوی موضوعات متنوعی است.

■ باشگاه ریاضی (Math Clubs)

در این باشگاه ریاضی به زیرعنوان:

(Test your Math Quetient)

برمی‌خوریم که شامل یک پرسش‌نامه‌ی کوچک برای سنجش و آزمایش دانش ریاضی شماست. به یاد داشته باشید که اگر در پاسخ‌گویی به این پرسش‌نامه شکست خوردید، مأیوس و ناامید نشوید.

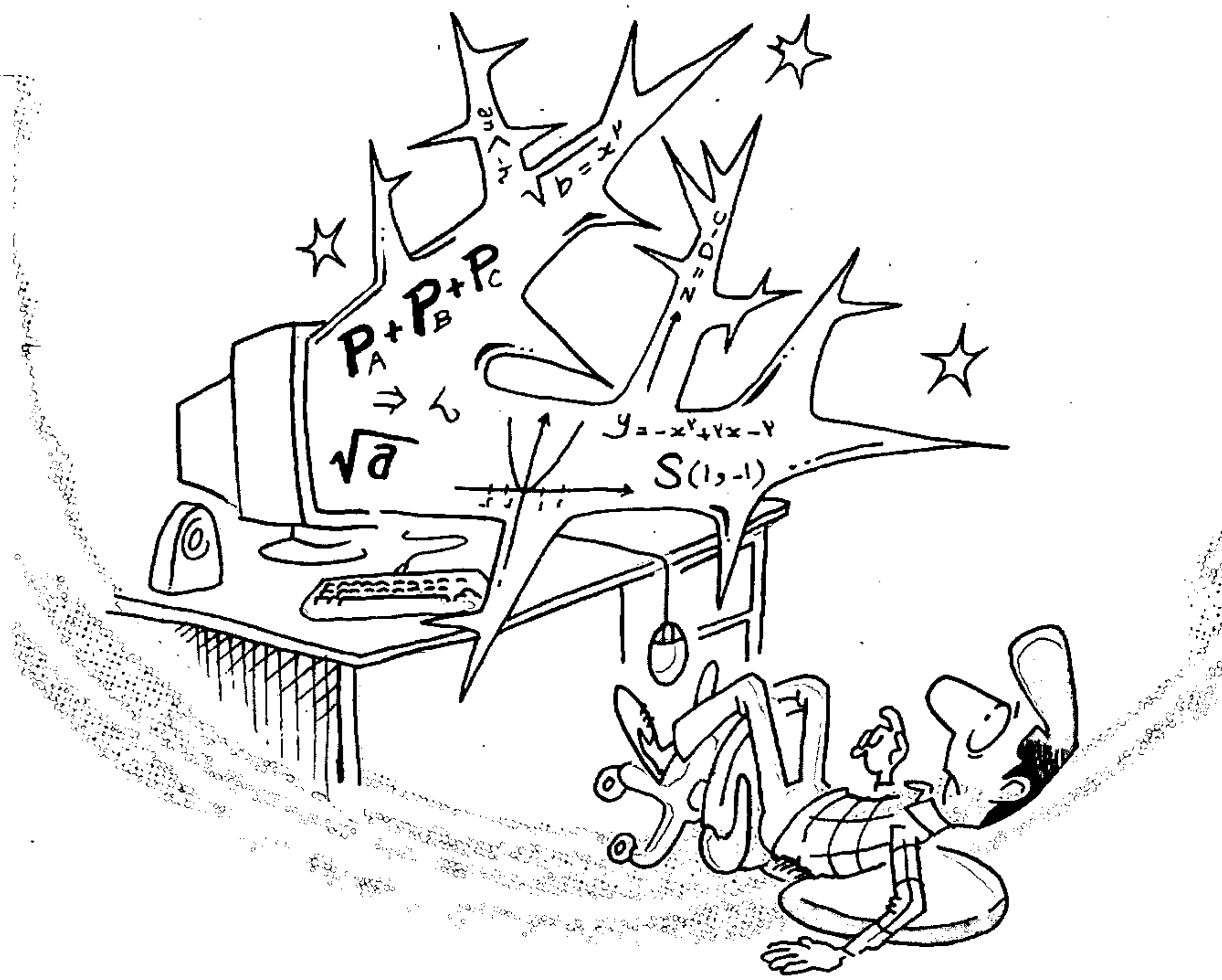
■ کلاس‌ها (Classes)

■ پروفسور تتا (Prof. Theta)

■ تماس با ما (Contact Us)

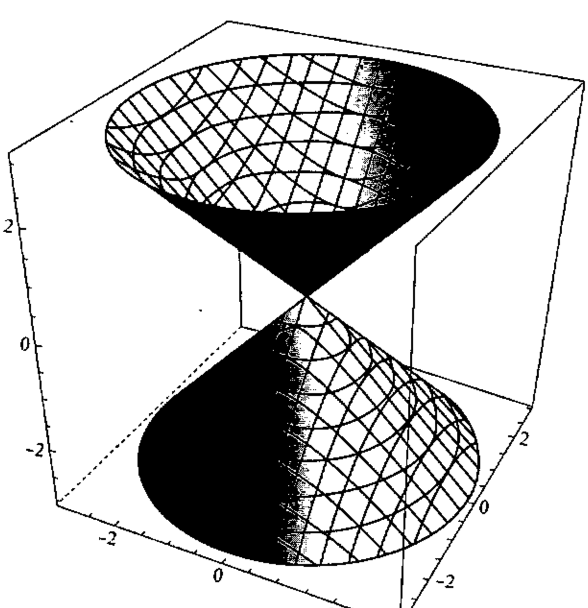
■ کتاب‌های APC (APC Books)

■ کتاب‌های تألیفی ام.ال. آگاروال (Books by M.L. Aggarwal)



آشنایی با بسته‌ی نرم‌افزاری مَتِمَتیکا ۳

Mathematica



مقدمه

یکی از مباحث مهم در درس ریاضیات دوره‌ی دبیرستان، موضوع توابع، اعمال روی توابع و رسم نمودار آن‌هاست. بسته‌ی نرم‌افزاری متمتیکا این قابلیت را دارد که به‌راحتی محاسبات روی توابع را انجام دهد و منحنی یک تابع در یک بازه‌ی مفروض را رسم کند. در این قسمت چگونگی تعریف یک تابع و تعدادی از دستورالعمل‌های رایج برای رسم یک تابع در محیط بسته‌ی نرم‌افزاری متمتیکا با ارائه‌ی مثال‌های مختلف معرفی می‌شوند. باز هم یادآوری می‌کنیم برای اجرای هریک از دستورالعمل‌ها باید دکمه‌های Shift+Enter به‌طور هم‌زمان فشار داده شوند.

معرفی توابع در متمتیکا

فرض کنیم f تابعی برحسب متغیر x باشد. به‌منظور تعریف ضابطه‌ی این تابع در متمتیکا یکی از دو صورت کلی زیر استفاده می‌شود:

f[x_]=..... یا f[x_]:=.....

در طرف دوم تعریفی باید مطرح شود که مطابق آن مقدار تابع f در مقدار مفروض x محاسبه می‌شود. گفتنی است که xیک متغیر ظاهری است و می‌تواند با هر متغیر یا عبارت دیگری جایگزین شود.

مثال ۱: در این مثال دو تابع f و g با ضابطه‌های $f(x)=x^۲$ و $g(x)=۲x^۳$ در محیط متمتیکا تعریف و مقادیر f(۳)، g(−۳) و f(۱)+g(−۲) محاسبه شده‌اند. همچنین تابع f با ضابطه‌ی $f(a)=۳a^۳+۲a-۵$ تعریف و مقدار f(۲)+f(−۲) به‌دست آمده است.

f[x_]:=x^۲

f[۳]

۹

g[x_]:=۲x^۳

g[−۳]

−۵۴

f[۱] + g[−۲]

−۱۵

f[a_]:=۳a^۳+۲a−۵

f[۲] + f[−۲]

−۱۰

مثال ۲: در این مثال ابتدا تابع f با ضابطه‌ی $f(x)=x^۲+x^۳$ تعریف شده است و به‌دنبال آن f(۲)، f(۲x)، $f(e^x)$ و f(λ) مشخص شده‌اند. توجه کنید که ExP[x] به معنای e^x است.

f[x_]=x^۲+x^۳;

f[۲]

۱۲

f[۲x]

$۴x^۲+۸x^۳$

f[Exp[x]]

$e^{۲x}+e^{۳x}$

f[λ]

$λ^۲+λ^۳$

توابع چندضابطه‌ای نیز در متمتیکا قابل تعریف‌اند. برای این‌کار ضابطه‌ی تابع را به‌همراه شرط مورد نظر به‌صورت زیر منظور می‌کنیم:

f[x_]: = عبارت /; شرط

در این حالت حتماً باید از نماد = : استفاده کرد و پس از معرفی ضابطه‌ی تابع، شرط مورد نظر را بعد از نماد ;/ قرار دارد.

مثال ۳: در زیر تابع f با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases} x^۲ & x\le ۲ \\ ۸-۲x & x>۲ \end{cases}$ تعریف شده است:

f[x_]:=x^۲/;x≤۲

f[x_]:=۸−۲x/;x>۲

f[−۴]

۱۶

f[۴]

۰

ملاحظه می‌شود که مقدار f(−۴) از ضابطه‌ی اول و مقدار f(۴) از ضابطه‌ی دوم به‌ترتیب ۱۶ و ۰ به‌دست آمده‌اند.

اعمال روی توابع

اگر f و g دو تابع مفروض باشند، اعمال جمع، تفریق، ضرب و تقسیم این توابع در محیط متمتیکا قابل انجام است. می‌دانیم این اعمال بین f و g به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

$(f\pm g)(x)=f(x)\pm g(x),\ x\in D$

$(f\times g)(x)=f(x).g(x),\ x\in D$

$(f/g)(x)=f(x)/g(x),\ x\in D-\{x|g(x)=۰\}$

که در آن‌ها $D=D_f\cap D_g$.

مثال ۴: در زیر چهار عمل اصلی روی توابع f و g با ضابطه‌های $f(x)=\sqrt{x}$ و $g(x)=x^۲+۲x+۳$ محاسبه شده‌اند:

f[x_] = $\sqrt{x}$;

g[x_]=x^۲+۲x+۳;

h۱[x_]=f[x]+g[x]

$۳+\sqrt{x}+۲x+x^۲$

h۲[x_]=f[x]−g[x]

$-۳+\sqrt{x}-۲x-x^۲$

h۳[x_]=f[x]-g[x]

$\sqrt{x}(۳+۲x+x^۲)$

h۴[x_]=f[x]/g[x]

$\frac{\sqrt{x}}{۳+۲x+x^۲}$

مثال ۵: فرض کنیم $f(x)=x^۲-۱$ و $g(x)=۳x^۲+۴x-۷$. در این صورت f+g، f−g، f×g و f/g به‌صورت زیر قابل محاسبه‌اند. در این حالت از دستورهای Factor و Simplify نیز استفاده شده است.

f[x_]:=x^۲−۱

g[x_]:=۳x^۲+۴x−۷

f[x]+g[x]

f[x]-g[x]

Factor[f[x]*g[x]]

Simplify[f[x]/g[x]]

$-۸+۴x+۴x^{۲}$

$۶-۴x-۲x^{۲}$

$(-۱+x)^{۲}(۱+x)(۷+۳x)$

$\frac{۱+x}{۷+۳x}$

هم‌چنین می‌توان ترکیب دو تابع مفروض f و g را نیز در متمتیکا محاسبه کرد. می‌دانیم اگر x عددی در دامنه‌ی g و g(x) مقداری در دامنه‌ی f باشد، آن‌گاه داریم:

$(fog)_{(x)}=f(g(x))$

مثال ۶: در مثال ۴، ترکیب دو تابع f و g به‌صورت زیر حاصل می‌شود:

h۵[x_]=f[g[x]]

$\sqrt{۳+۲x+x^{۲}}$

h۶[x_]=g[f[x]]

$۳+۲\sqrt{x}+x$

به‌منظور محاسبه‌ی ترکیب دو تابع f و g می‌توان از دستور -Com position به‌صورت زیر استفاده کرد:

I) Composition[f,g]

II) Composition[g,f]

دستور اول همان fog و دستور دوم همان gof را مشخص می‌کند.

مثال ۷: در دستورالعمل‌های زیر دو تابع f و g با ضابطه‌های $f(x)=\sqrt{x}$ و $g(x)=x^{۲}+۲x+۳$ تعریف شده و سپس fog و gof با به‌کارگیری دستور Composition به‌دست آمده‌اند.

$f[x_]=\sqrt{x}$;

g[x_]=x^۲+۲x+۳;

h۱=Composition[f,g];

h۱[x]

$\sqrt{۳+۲x+x^{۲}}$

h۲=Composition[g,f];

h۲[x]

$۳+۲\sqrt{x}+x$

با استفاده از دستور ترکیب توابع می‌توان ترکیب یک تابع با خودش را به هر تعداد بار که مورد نظر باشد محاسبه کرد. برای این کار از دستورالعمل Nest یا Nest List به‌صورت زیر استفاده می‌شود:

Nest [f, عبارت , n]

Nest List [f, عبارت , n]

دستور Nest، n بار متوالی تابع f را تحت ضابطه‌ی مشخص‌شده در عبارت داخل کروشه با خودش ترکیب می‌کند. دستور Nest List همین کار را انجام می‌دهد، ولی تمام محاسبات میانی را از ابتدا تا بار nام فهرست می‌کند.

مثال ۸: در زیر تابع f با ضابطه‌ی $f(x)=x^{۲}$، ۵ بار با خودش ترکیب شده است.

f[x_]:=x^۲;

Nest[f,x,۵]

$x^{۳۲}$

Nest List[f,x,۵]

$\{x,x^{۲},x^{۴},x^{۸},x^{۱۶},x^{۳۲}\}$

مثال ۹: در زیر تابع f با ضابطه‌ی $f(x)=\sqrt{x+۱}$ تعریف شده و حاصل fofofofof (یعنی ترکیب f با خودش تا ۵ بار) به‌دست آمده است. با مقدار دهی به x می‌توان مقدار این ترکیب را به‌ازای آن مقدار خاص پیدا کرد.

$f[x_]=\sqrt{۱+x}$;

Nest[f,x,۵]

$\sqrt{۱+\sqrt{۱+\sqrt{۱+\sqrt{۱+\sqrt{۱+x}}}}}$

رسم نمودار توابع در متمتیکا

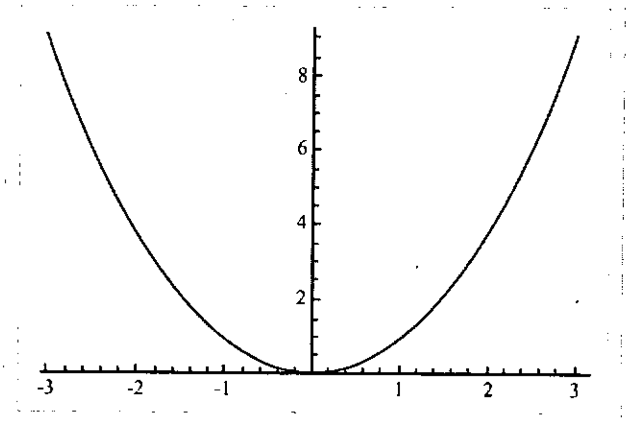
در ادامه، دستورالعمل رسم منحنی یک تابع در محیط متمتیکا معرفی می‌شود. دستور اصلی برای رسم نمودار یک تابع مفروض Plot است که به شکل کلی زیر تعریف می‌شود:

Plot [f[x],{x, x_{min}, x_{max}}]

دستور فوق برای رسم نمودار دو بعدی تابع f در بازه‌ی $x\in[x_{min}, x_{max}]$ به کار می‌رود.

مثال ۱۰: دستور زیر نمودار تابع f با ضابطه‌ی $f(x)=x^{۲}$ را در [۳,۳-] رسم می‌کند.

Plot [x^۲,{x, -۳, ۳}]

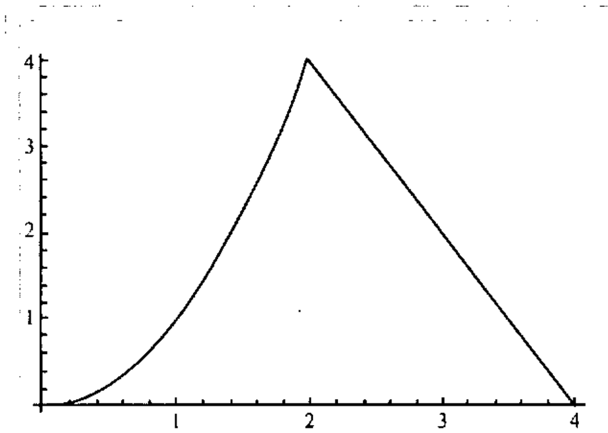


مثال ۱۱: دستور زیر نمودار تابع مثال ۳ را رسم می‌کند:

f[x_]: = $x^{۲}$/ ; x≤۲

f[x_]: = ۸−۲x/ ; x>۲

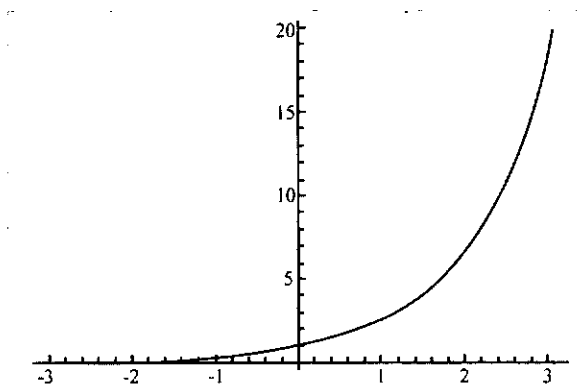
Plot [f[x],{x, ۰, ۴}]



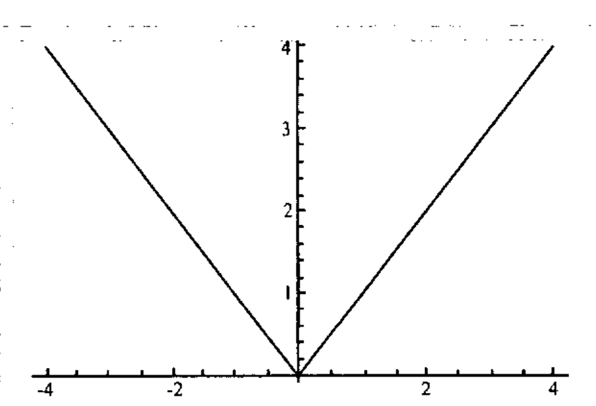
مثال ۱۲: دستورهای زیر نمودارهای توابع با ضابطه‌های $y=e^x$ در بازه‌ی [−۳,۳]، y=|x| در بازه‌ی [−۴,۴] و y=||x|−۱| را در بازه‌ی [−۳,۳] رسم می‌کند. توجه شود که Abs [x] به معنای قدرمطلق x است.

f[x_] = Exp [x];

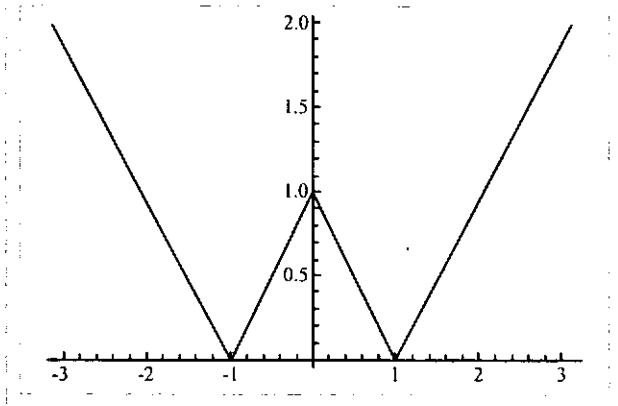
Plot [f[x],{x, −۳, ۳}]



Plot [Abs[x],{x, −۴, ۴}]

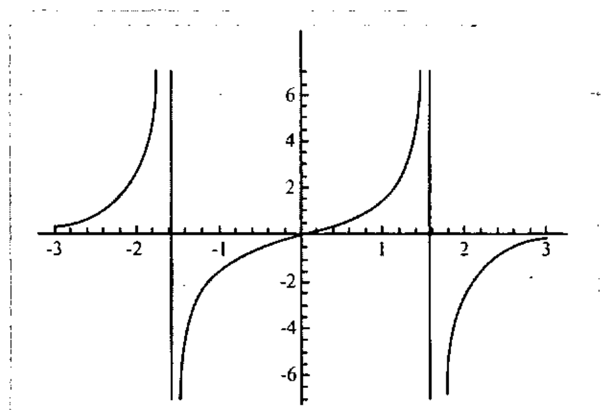


Plot [Abs [Abs[x] −۱],{x, −۳, ۳}]



مثال ۱۳: به منظور رسم نمودار تابع با ضابطه‌ی y=tanx به ازای −۳≤x≤۳ دستور زیر را اجرا می‌کنیم:

Plot [Tan[x],{x, −۳, ۳}]



می‌توان نمودار دو تابع را به‌طور هم‌زمان در صفحه‌ی مختصات با رنگ‌های متفاوت رسم کرد. به این منظور از دستور زیر استفاده می‌کنیم:

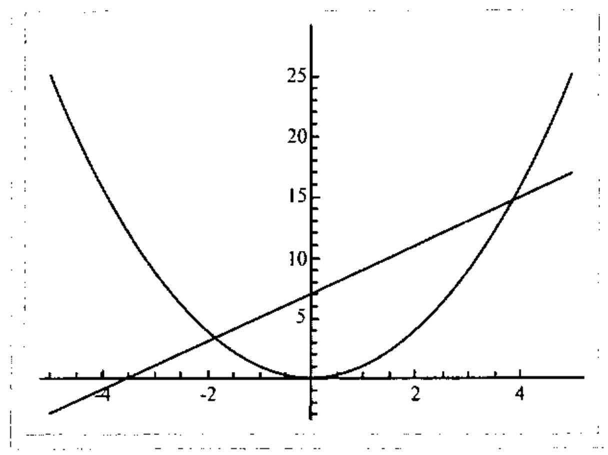
Plot [{f[X], g[x]}, {x, x_{min}, x_{max}}]

این دستور نمودارهای توابع f و g را در محدوده‌ی x_{min} تا x_{max} در یک صفحه‌ی مختصات رسم می‌کنیم. این دستور قابل تعمیم برای رسم سه یا بیش از سه تابع به صورت کلی زیر است:

Plot [{$f_۱$, $f_۲$, ...}, {x, x_{min}, x_{max}}]

مثال ۱۴: به منظور رسم هم‌زمان نمودارهای دو تابع f و g با ضابطه‌های $f(x)=x^۲$ و g(x)=۲x+۷ در [−۵,۵] به صورت زیر عمل می‌کنیم:

Plot [{$x^۲$, ۲x+۷},{x, −۵, ۵}]



به‌منظور رسم هم‌زمان نمودار چند تابع در یک صفحه‌ی مختصات از دستور Show نیز می‌توان استفاده کرد. در این حالت چون دامنه‌های توابع متفاوت‌اند، با به‌کارگیری یکی از موارد زیر، کاربر می‌تواند تنظیمات موردنظر برای رسم این نمودارها را تغییر دهد. برای تایپ کاراکترهایی چون → می‌توانیم روی گزینه‌ی Insert کلیک و پس از انتخاب special character گزینه‌ی → را در صفحه درج کنیم یا این کاراکتر را از پنجره‌ی Basic Math Input برگزینیم.

۱) PlotRange → Automatic

۲) PlotRange → All

۳) PlotRange → {y_{min}, y_{max}}

۴) PlotRange → {{x_{mix}, x_{max}}, {y_{min}, y_{max}}}

با در نظر گرفتن دستور انتخابی ۱، خود متمتیکا به صورت خودکار تنظیمات مبنایی را برای رسم توابع برمی‌گزیند و آن دسته از نقاطی را که مختص عمودی آن‌ها خیلی بزرگ باشد، در نمودارها حذف می‌کند. دستور ۲ متمتیکا را وادار می‌کند که تمام نقاط نمودارها را در محدوده‌های وارد شده رسم کند. دستور ۳ تنها نقاطی از نمودارها را رسم می‌کند که مختص عمودی آن‌ها در محدوده‌ی بین y_{min} و y_{max} باشد. دستور ۴ نیز تنها نقاطی از نمودارها را رسم می‌کند که مختص افقی آن‌ها بین x_{min} و x_{max} و مختص عمودی آن‌ها بین y_{min} و y_{max} باشند. به این ترتیب از دستور Show به شکل کلی زیر برای رسم هم‌زمان چند تابع می‌توان استفاده کرد.

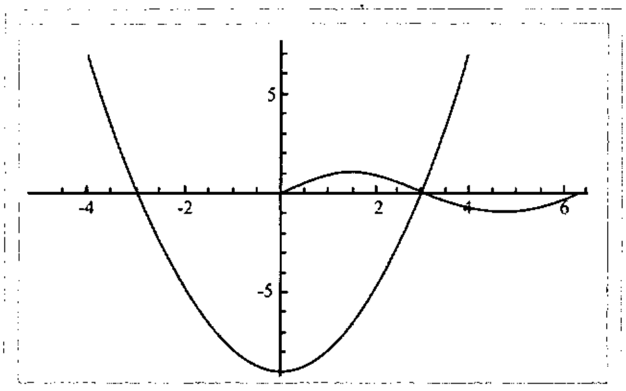
Show [$g_۱$, $g_۲$, ..., PlotRange → ...]

مثال ۱۵: در مثال ذیل، دو تابع با ضابطه‌های $y=x^۲-۹$ و y=sinx رسم شده‌اند. با استفاده از دستور Show به دو صورت زیر آن‌ها را در یک صفحه‌ی مختصات با به‌کارگیری PlotRange رسم می‌کنیم.

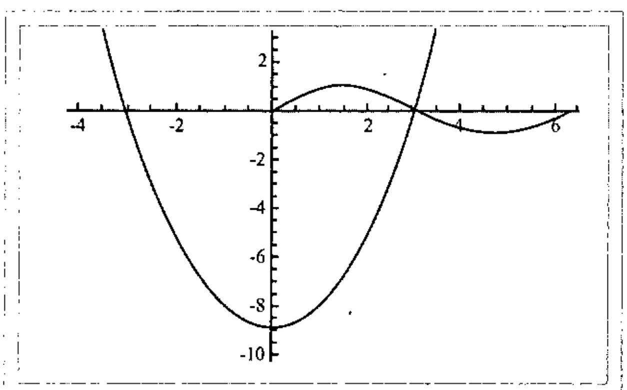
$g_۱$= Plot[$x^۲$ −۹, {x, −۴, ۴}];

$g_۲$= Plot[sin[x], {x, ۰, ۲π}];

Show [$g_۱$, $g_۲$, PlotRange → All]



Show [$g_۱$, $g_۲$, PlotRange → {−۱۰, ۳}]

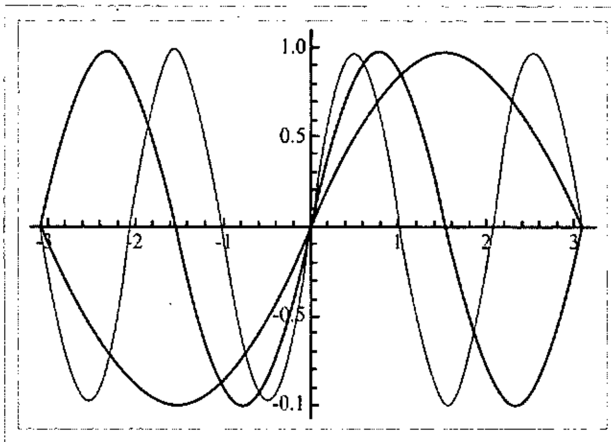


زمانی‌که چند نمودار به‌طور هم‌زمان رسم می‌شوند، متمتیکا این قابلیت را دارد که برای تشخیص نمودارها آن‌ها را با رنگ‌ها و اندازه‌های مختلف یا با برچسب‌گذاری و به‌کارگیری خط‌چین‌های گوناگون رسم کند. برای مثال می‌توان با به‌کارگیری دستور PlotStyle نوع ترسیم موردنظر را اعلام کرد. یکی از انواع رایج GrayLevel[x] است که در آن x عددی بین صفر و یک است. هر قدر x به یک نزدیک‌تر باشد شکل پررنگ‌تر و هر قدر به صفر نزدیک‌تر باشد کم‌رنگ‌تر رسم می‌شود. به مثال زیر توجه کنید.

مثال ۱۶: دستور زیر سه منحنی y=sinx، y=sin۲x و y=sin۳x را به ازای $-\pi \leq x \leq \pi$ با سه سطح رنگ مختلف رسم می‌کند.

Plot [{sin[x], sin [2x], sin [3x]}, {x, −Pi, Pi}]

PlotStyle → {GrayLevel [۰/۲], GrayLevel [۰/۵], GrayLevel [۰/۸]}]

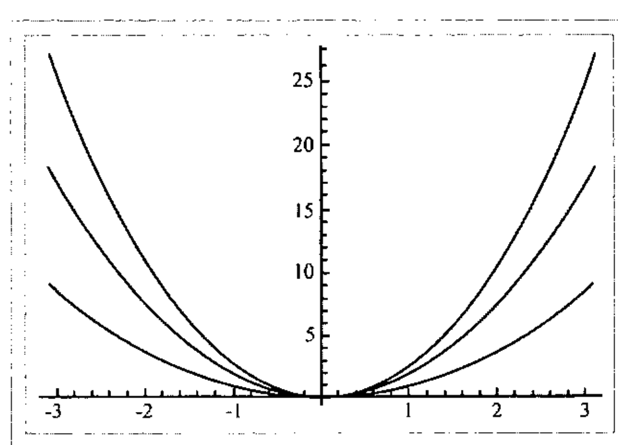


همچنین می‌توان نام رنگ انتخابی برای رسم هر یک از نمودارها را اعلام کرد. به مثال زیر توجه کنید:

مثال ۱۷: دستور زیر منحنی توابع $y=x^2$، $y=2x^2$ و $y=3x^2$ را به ازای $-3\le x\le 3$، به ترتیب با نوع ترسیم قرمز، سبز و آبی رسم می‌کند. شما در مانیتور رایانه‌ی خود می‌توانید نمودارها را با این رنگ‌ها مشاهده کنید. البته رنگ‌های دیگری چون Pink، Gray، Brown، Yellow و... را نیز می‌توان انتخاب کرد. دوباره متذکر می‌شویم که حرف اول نام هر یک از دستورالعمل‌ها و انتخاب‌ها در متمتیکا باید بزرگ و سایر حروف باید کوچک تایپ شوند. البته این قانون برای دستورالعمل‌های دو کلمه‌ای نیز باید رعایت شود. برای مثال در واژه‌ی PlotStyle باید حروف P و S بزرگ و سایر حروف کوچک تایپ شوند. یا برای مثال اگر بخواهیم رنگ یک منحنی قرمز کم‌رنگ باشد باید تایپ کنیم: Light Red

برای انتخاب ساده‌ی رنگ‌ها در صفحه‌ی اصلی متمتیکا روی Insert کلیک و گزینه‌ی Color را انتخاب می‌کنیم، سپس در صفحه‌ی رنگ‌ها رنگ موردنظر را برمی‌گزینیم.

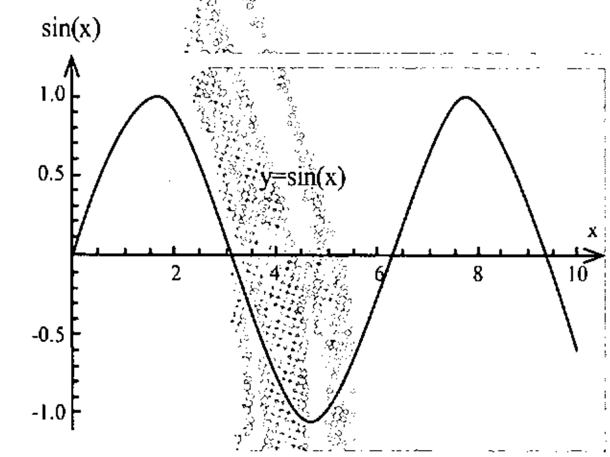
```
Plot [{x^۲, ۲x^۲, ۳x^۲}, {x, −۳, ۳}, PlotStyle → {Red, Green, Blue}]
```



* گفتنی است که اگر نوع رنگ‌ها مشخص نشود، خود نرم‌افزار به شکل خودکار رنگ‌های مختلفی را انتخاب می‌کند. همچنین می‌توان با برچسب‌گذاری روی نمودار تابع یا محورهای مختصات، اطلاعات موردنظر را روی شکل منظور کرد. برای این کار از دستور PlotLabel برای برچسب‌گذاری نمودار تابع و AxesLabel برای برچسب‌گذاری محورهای مختصات استفاده می‌کنیم. به مثال زیر توجه کنید.

مثال ۱۸: در دستور زیر منحنی تابع با ضابطه‌ی y=sinx در بازه‌ی [۰, ۱۰] با برچسب y=sin(x) برای منحنی تابع و برچسب‌های x و sin(x) برای محورهای مختصات رسم شده‌اند.

```
Plot [sin[x], {x, ۰, ۱۰}, PlotLabel → y== sin[x], AxesLabel → {x, sin [x]}]
```

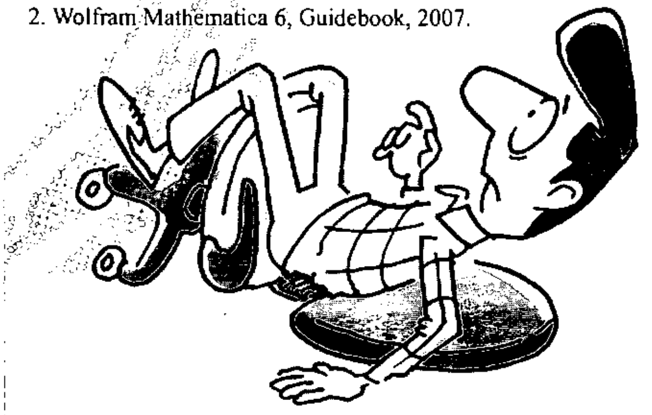


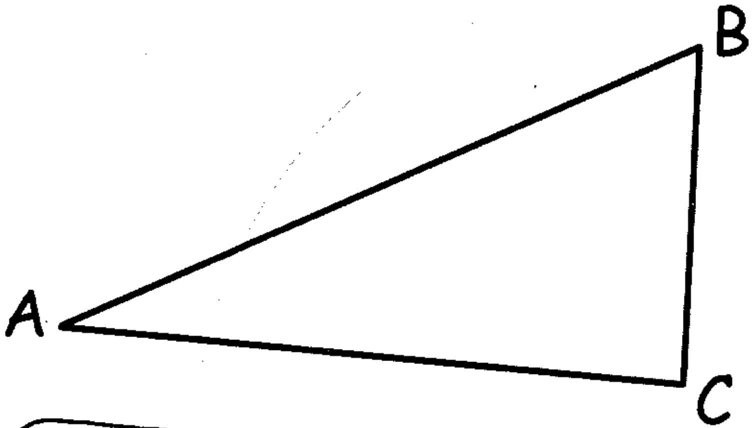
در قسمت بعد دستورالعمل‌های دیگری از بسته‌ی نرم‌افزاری متمتیکا معرفی خواهند شد.

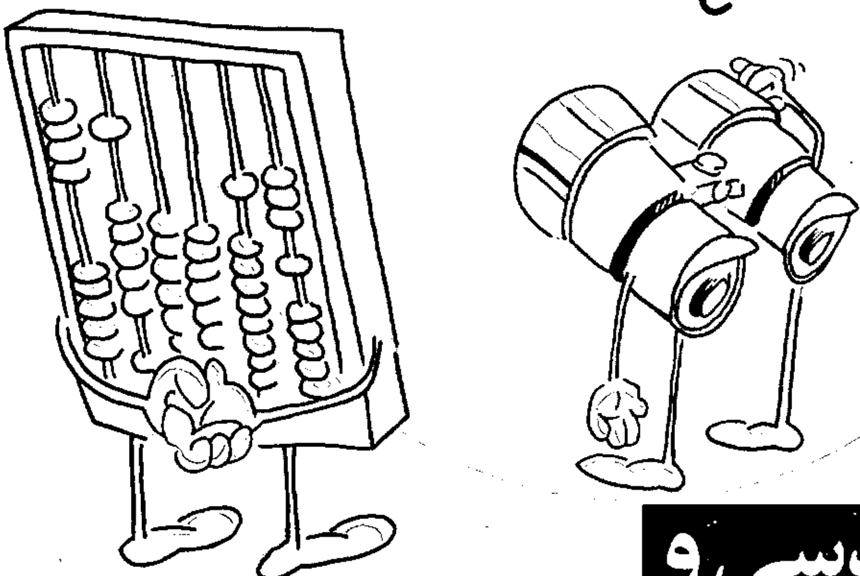
منابع

1. Mathematica, Eugene Don, Schaum's outline series, second edition, McGraw Hill Companies, 2009.

2. Wolfram Mathematica 6, Guidebook, 2007.







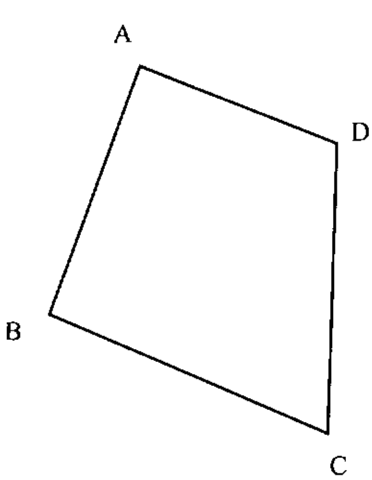
اشاره

به‌منظور استفاده بیشتر دانش‌آموزان از این مقاله، از چند شماره‌ی قبل به حل مسئله‌های هندسه در صفحه (هندسه‌ی مسطحه) پرداختیم. در این شماره ادامه‌ی این مطالب را پی‌می‌گیریم.

رویکرد هندسی و رویکرد جبری در آموزش هندسه ۱۴

محمدهاشم رستمی

مسئله‌ی ۷. چهار نقطه‌ی غیرهمخط A، B، C و D در یک صفحه داده شده‌اند. آیا نقطه‌ای در صفحه‌ی گذرنده بر این چهار نقطه وجود دارد که از این چهار نقطه به یک فاصله باشد؟ در صورتی که چنین نقطه‌ای وجود دارد، شرط وجودش چیست؟

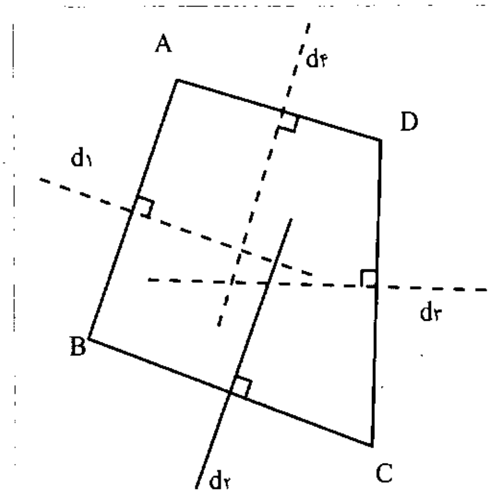


الف) حل به روش هندسی

پاره‌خط‌های AB، BC، CD و DA را رسم می‌کنیم، یعنی در واقع چهار ضلعی ABCD را می‌سازیم. عمود منصف‌های پاره‌خط‌های AB، BC، CD و DA را رسم می‌کنیم و به ترتیب d_1، d_2، d_3 و d_4 می‌نامیم.

در صورتی که این چهارخط همرس باشند، نقطه‌ی همرسی آن‌ها که آن را M می‌نامیم از چهار نقطه‌ی A، B، C و D به یک فاصله است، یعنی داریم:

MA= MB= MC= MD

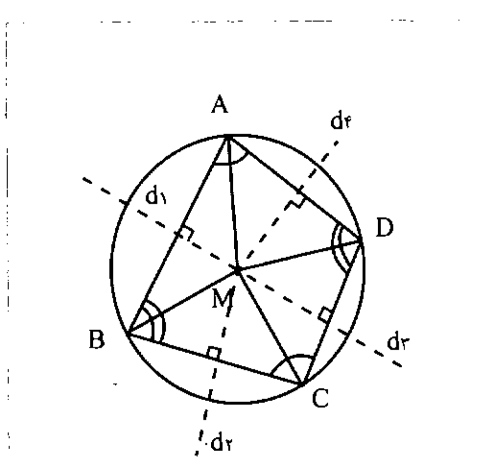


اما در چه صورتی خط‌های d_1، d_2، d_3 و d_4 هم‌رس‌اند؟ در هندسه‌ی ۲، کتاب درسی سال سوم دبیرستان رشته‌ی ریاضی و فیزیک داریم:

قضیه: در هر چهار ضلعی محاطی مجموع هر دو زاویه‌ی روبه‌رو ۱۸۰° است:

$\hat{A}+\hat{C}=\hat{B}+\hat{D}=۱۸۰^\circ$

نکته: چهار ضلعی را محاطی می‌نامند در صورتی که بر چهار



رأس آن یک دایره بگذرد، یعنی نقطه‌ای مانند M وجود داشته باشد که از چهار رأس آن چهارضلعی به یک فاصله باشد (این نقطه را مرکز دایره‌ی محیطی چهارضلعی می‌نامند و آن را با M، یا O یا هر حرف دیگری نشان می‌دهند).

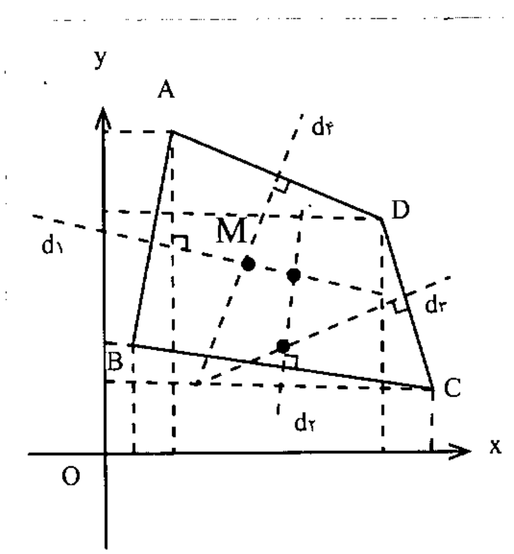
عکس قضیه: هر چهارضلعی که مجموع دو زاویه‌ی روبه‌روی آن ۱۸۰° باشد، محاطی است، یعنی دایره‌ای وجود دارد که از چهار رأس آن می‌گذرد. مرکز این دایره همان نقطه‌ی M، یعنی محل برخورد (نقطه‌ی همرسی) خط‌های d_1، d_2، d_3 و d_4 است.

اثبات این دو قضیه به روش هندسی در کتاب هندسه‌ی ۲ آمده است، بنابراین از اثبات آن صرف‌نظر می‌کنیم. پس می‌توانیم بگوییم شرط لازم و کافی برای آن که چهارضلعی ABCD محاطی باشد، یا به عبارت دیگر نقطه‌ای مانند M وجود داشته باشد که از چهار نقطه‌ی A، B، C و D به یک فاصله باشد (MA= MB= MC= MD) آن است که مجموع هر دو زاویه‌ی روبه‌روی آن ۱۸۰° باشد، یا به بیان دیگر، هر دو زاویه‌ی روبه‌روی آن مکمل یکدیگر باشند.

مربع، مستطیل و ذوزنقه‌ی متساوی‌الساقین از چهارضلعی‌های خاصی هستند که این ویژگی را دارند، یعنی بر چهار رأس آن‌ها یک دایره می‌گذرد. چرا؟ اما متوازی‌الاضلاع و لوزی از چهار ضلعی‌های خاصی هستند که این ویژگی را ندارند، یعنی بر چهار رأس آن‌ها یک دایره نمی‌گذرد. چرا؟

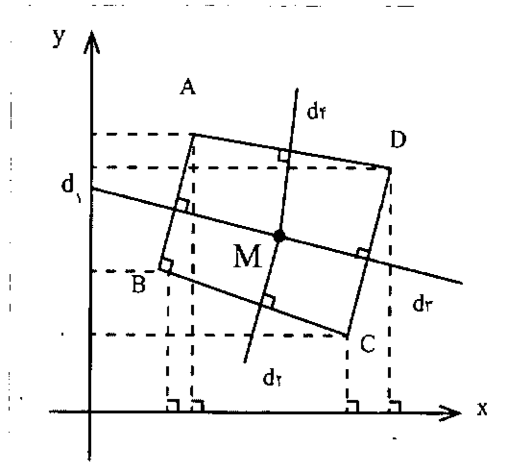
ب) اثبات به روش جبری ـ مختصاتی

دستگاه مختصات قائم xoy را در صفحه‌ی گذرنده بر چهار نقطه‌ی A، B، C و D در نظر می‌گیریم و مختصات این نقطه‌ها در این دستگاه مختصات در حالت کلی را $A=(x_1, y_1)$، $B=(x_2, y_2)$، $C=(x_3, y_3)$ و $D=(x_4, y_4)$ می‌نامیم. پاره‌خط‌های AB، BC، CD و DA را رسم می‌کنیم (در واقع چهارضلعی ABCD



را می‌سازیم) و عمود منصف‌های این پاره‌خط‌ها را به ترتیب d_1، d_2، d_3 و d_4 می‌نامیم. معادله‌ی این عمودمنصف‌ها را می‌نویسیم و همرس

بودن یا نبودن آن‌ها را بررسی می‌کنیم.

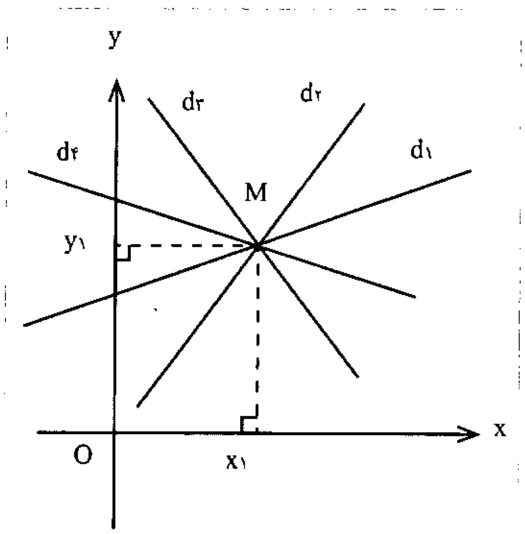


در صورتی که این چهار خط همرس باشند، نقطه‌ای مانند M وجود دارد که از چهار نقطه‌ی A، B، C و D به یک فاصله است، یا به عبارت دیگر، چهارضلعی ABCD محاطی است و در صورتی که چهارخط d_1، d_2، d_3 و d_4 همرس نباشند، نقطه‌ای در صفحه‌ی گذرنده بر چهار نقطه‌ی A، B، C و D وجود ندارد که از این چهار نقطه به یک فاصله باشد یا به بیانی دیگر، چهارضلعی ABCD محاطی نیست.

برای این‌که همرس بودن یا نبودن خط‌های d_1، d_2، d_3 و d_4 را که همان عمودمنصف‌های پاره‌خط‌های AB، BC، CD و DA هستند بررسی کنیم، نخست معادله‌ی این خط‌ها را می‌نویسیم، سپس مختصات نقطه‌ی برخورد دو خط از این چهار خط را به دست می‌آوریم (با حل یک دستگاه دو معادله‌ی دو مجهولی)؛ آن‌گاه مختصات این نقطه‌ی برخورد را در معادله‌ی دو خط دیگر قرار می‌دهیم. اگر مختصات این نقطه در معادله‌ی دو خط دیگر صدق کند، بدان معناست که دو خط دیگر هم از این نقطه می‌گذرند، یعنی چهارخط همرس‌اند و نقطه‌ی همرسی آن‌ها که آن را M می‌نامیم، جواب مسئله است، یعنی از چهار نقطه‌ی A، B، C و D به یک فاصله است یا به عبارت دیگر، چهارضلعی ABCD است.

در صورتی که مختصات این نقطه در معادله‌ی دو خط دیگر صدق نکند مسئله جواب ندارد، یعنی نقطه‌ای در صفحه‌ی گذرنده بر این چهار نقطه وجود ندارد که از چهار نقطه‌ی A، B، C و D به یک فاصله باشد یا به بیان دیگر، چهارضلعی ABCD محاطی نیست.

نکته‌ی مهم: برای بررسی همرس بودن یا نبودن هر چندخط (۳ خط، ۴ خط، ۵ خط، ۶ خط یا بیشتر) می‌توانیم از روش بالا استفاده کنیم، یعنی با داشتن معادله‌ی آن‌ها، مختصات نقطه‌ی برخورد دو خط از این خط‌ها را به دست می‌آوریم و آن‌گاه مختصات این نقطه را در معادله‌ی خط‌های دیگر قرار می‌دهیم. اگر مختصات این نقطه در معادله‌ی خط‌های دیگر صدق کند، این خط‌ها همرسند و اگر صدق نکند، همرس نیستند.



از این ویژگی برای بررسی محاطی بودن یا نبودن یک چند ضلعی می‌توانیم استفاده کنیم، بدین ترتیب که معادله‌ی عمودمنصف‌های ضلع‌های آن را بنویسیم و همرس بودن یا نبودن آن‌ها را بررسی کنیم. اگر این عمودمنصف‌ها همرس باشند، چندضلعی محاطی است و اگر همرس نباشند، چندضلعی محاطی نیست. محاطی‌بودن چندضلعی به معنای آن است که در صفحه‌ی آن چندضلعی، نقطه‌ای وجود دارد که از تمام رأس‌های آن چندضلعی به یک فاصله است و محاطی نبودن چندضلعی به معنای نبودن چنین نقطه‌ای است.

مثال ۱: ثابت کنید که در صفحه‌ی هر مستطیل نقطه‌ای وجود دارد که از چهار رأس آن به یک فاصله است. به عبارت دیگر، دایره‌ای وجود دارد که بر چهار رأس یک مستطیل می‌گذرد یا به بیان دیگر، هر مستطیلی می‌تواند در یک دایره محاط شود.

الف) اثبات به روش هندسی

روش اول ـ مسئله را حل شده در نظر می‌گیریم، یعنی فرض می‌کنیم نقطه‌ی M جواب مسئله باشد، یعنی نقطه‌ای باشد که از چهار نقطه‌ی A، B، C و D به یک فاصله است، یعنی داشته باشیم:

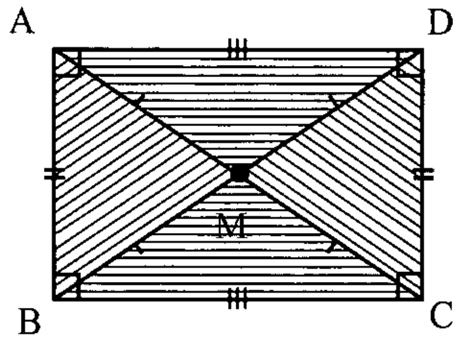
$$MA = MB = MC = MD$$

با توجه به این‌که AB=CD و BC=AD و $\hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = \hat{D} = 90^\circ$ است، دو مثلث MAB و MCD و هم‌چنین دو مثلث MBC و MAD هم‌نهشت‌اند (به حالت ض‌ض‌ض) زیرا:

MA = MB = MC = MD و AB = CD ⇒ ΔMAB ≅ ΔMCD

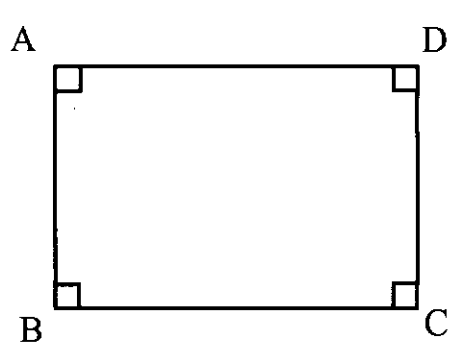
MA = MB = MC = MD و BC = AD ⇒ ΔMBC ≅ ΔMAD

از هم‌نهشتی این مثلث‌ها نتیجه می‌شود که $\hat{M}_1 = \hat{M}_3$ و $\hat{M}_2 = \hat{M}_4$، اما $\hat{M}_1 + \hat{M}_2 + \hat{M}_3 + \hat{M}_4 = 360°$ است، پس $2M_1 + 2M_2 = 360°$



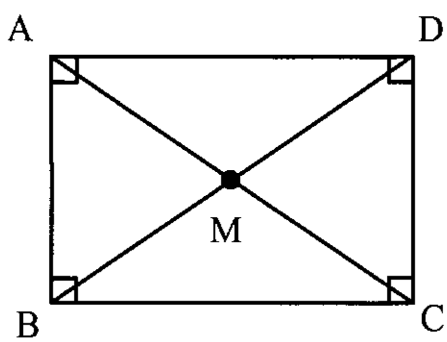
در نتیجه $\hat{M}_1 + \hat{M}_2 = 180°$ و $\hat{M}_1 + \hat{M}_4 = 180°$. پس AMC و BMD خط‌های راست هستند، یعنی AMC و BMD قطرهای مستطیل ABCD هستند. بنابراین نقطه‌ی M وجود دارد و این نقطه محل برخورد قطرهای AC و BC از مستطیل ABCD است.

روش دوم ـ چون در مستطیل ABCD $\hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = \hat{D} = 90°$ است، پس $\hat{A} + \hat{C} = 180°$ و $\hat{B} + \hat{D} = 180°$ است، یعنی هر دو زاویه‌ی روبه‌روی آن مکمل یکدیگرند، بنابراین مستطیل ABCD محاطی است، یعنی بر چهار رأس آن یک دایره می‌گذرد. اگر مرکز این دایره را M بنامیم، M جواب مسئله است، یعنی نقطه‌ای است که از چهار رأس این مستطیل یک فاصله است، یعنی داریم MA= MB= MC= MD (این دایره به قطر AC یا BD است).



روش سوم ـ قطرهای AC و BD از مستطیل ABCD را رسم می‌کنیم و نقطه‌ی برخورد آن‌ها را M می‌نامیم. چون قطرهای مستطیل با هم مساوی‌اند و یکدیگر را نصف می‌کنند، پس داریم:

MA= MB= MC= MD

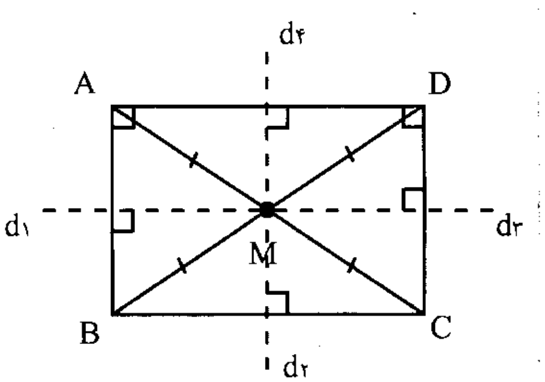


بنابراین، نقطه‌ی M محل برخورد قطرهای مستطیل ABCD جواب مسئله است.

روش چهارم ـ عمودمنصف‌های ضلع‌های مستطیل، یعنی عمودمنصف‌های پاره‌خط‌های AB، BC، CD و DA را رسم می‌کنیم و به ترتیب d_1، d_2، d_3 و d_4 می‌نامیم. d_1 و d_3 بر هم منطبق‌اند، زیرا در واقع خطی که وسط‌های ضلع‌های AB و CD از این مستطیل را به هم وصل می‌کند بر هر دو ضلع AB و CD عمود است، یعنی هم عمودمنصف AB است و هم عمودمنصف CD؛ چرا؟ هم‌چنین خط‌های d_2 و d_4 نیز برهم منطبق‌اند.

اگر نقطه‌ی برخورد d_1 و d_3 با خط‌های d_2 و d_4 را M بنامیم، این نقطه جواب مسئله است، یعنی داریم:

MA= MB= MC= MD



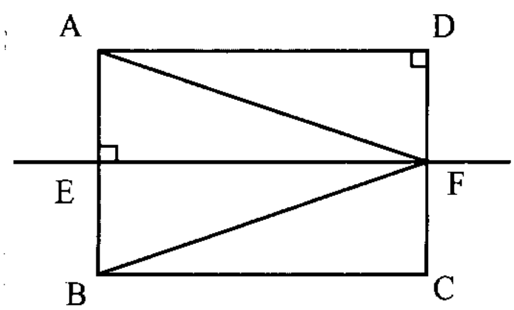
زیرا:

$$M \in d_1 \Rightarrow MA = MB,\ M \in d_2 \Rightarrow MC = MD$$
$$M \in d_3 \Rightarrow MB = MC,\ M \in d_4 \Rightarrow MA = MD$$
$$\Rightarrow MA = MB = MC = MD$$

نکته: از این‌که M هم روی d_1 و هم روی d_2 است، به‌طور مستقیم می‌توان نتیجه گرفت که MA= MB= MC= MD است، زیرا:

$$M \in d_1 \Rightarrow MA = MB,\ M \in d_2 \Rightarrow MC = MD$$
$$\Rightarrow MA = MB = MC = MD$$

پاسخ چرا در حل مسئله: اگر وسط ضلع AB را E و وسط ضلع CD را F بنامیم و از E به F وصل کنیم، خط EF بر دو ضلع AB و CD عمود است، زیرا اگر از F به A و B وصل کنیم دو مثلث قائم‌الزاویه‌ی ADF و BCF به دلیل برابری ضلع‌های مجاور به زاویه‌های قائمه نشان هم‌نهشت‌اند (AD= BC و FC= FD و $\hat{D} = \hat{C} = 90^\circ$). بنابراین FA= FB است، یعنی نقطه‌ی F روی عمودمنصف پاره‌خط AB است و چون پای این عمودمنصف نقطه‌ی E است، پس EF هم عمودمنصف پاره‌خط AB و هم عمودمنصف پاره‌خط CD است، یعنی d_1 و d_2 برهم منطبق‌اند. به دلیل مشابه، خط‌های d_3 و d_4 که به ترتیب عمودمنصف‌های پاره‌خط‌های BC و AD هستند. نیز، برهم منطبق‌اند.



ب) اثبات به روش جبری ـ مختصاتی

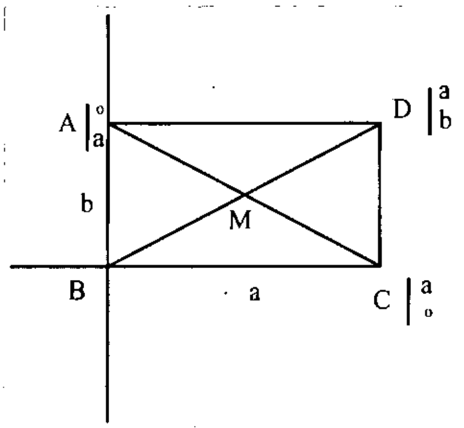
روش اول ـ اندازه‌ی ضلع‌های مستطیل ABCD را a و b در نظر می‌گیریم، یعنی فرض می‌کنیم AB= CD = a و BC = AD= d.

دستگاه مختصات قائم xoy را چنان اختیار می‌کنیم که محور xها روی BC و محور yها روی BA باشد. رأس B را مبدأ مختصات در نظر می‌گیریم، یعنی $B = (0,0)$.

در این دستگاه مختصات $A = (0,b)$، $D = (a,b)$ و $C = (a,0)$ است. وسط قطر AC که آن را M می‌نامیم، محل برخورد قطرهای آن است و داریم:

$$\begin{cases} x_M = \dfrac{x_A + x_C}{2} = \dfrac{0+a}{2} = \dfrac{a}{2} \\ y_M = \dfrac{y_A + y_C}{2} = \dfrac{b+0}{2} = \dfrac{b}{2} \end{cases}$$

اکنون فاصله‌ی نقطه‌ی M تا چهار رأس مستطیل را به دست می‌آوریم.

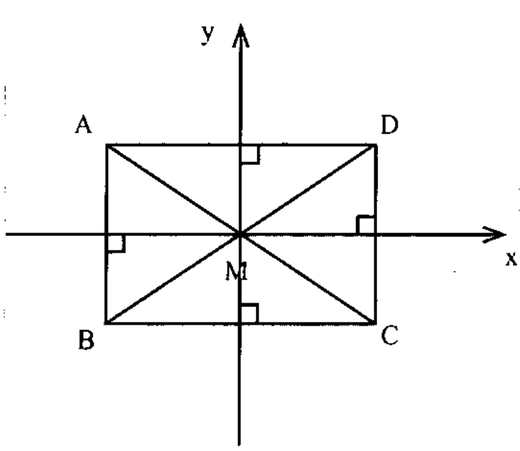


$$MA = \sqrt{(0-\frac{a}{2})^2 + (b-\frac{b}{2})^2} = \frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2}$$
$$MB = \sqrt{(0-\frac{a}{2})^2 + (0-\frac{b}{2})^2} = \frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2}$$
$$MC = \sqrt{(a-\frac{a}{2})^2 + (0-\frac{b}{2})^2} = \frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2}$$
$$MD = \sqrt{(a-\frac{a}{2})^2 + (b-\frac{b}{2})^2} = \frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2}$$

$$\Rightarrow MA = MB = MC = MD = \frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2}$$

پس نقطه‌ی M جواب مسئله است. این نقطه مرکز تقارن مستطیل نیز هست که همان نقطه‌ی برخورد قطرهای مستطیل است.

روش دوم ـ طول ضلع‌های مستطیل را a و b در نظر می‌گیریم. قطرهای آن را رسم می‌کنیم و نقطه‌ی برخورد آن‌ها را M می‌نامیم.



دستگاه مختصات قائم xMy را چنان اختیار می‌کنیم که M مبدأ مختصات، محور xها موازی راستای AB و محور yها موازی راستای BC باشد. در این دستگاه مختصات رأس‌های مستطیل $A=(\frac{-a}{2},\frac{b}{2})$ ، $B=(\frac{-a}{2},\frac{-b}{2})$ ، $C=(\frac{a}{2},\frac{-b}{2})$ و $D=(\frac{+a}{2},\frac{+b}{2})$ است. فاصله‌ی نقطه‌ی M مبدأ مختصات و محل برخورد قطرهای مستطیل از چهار نقطه‌ی A، B، C و D را به دست می‌آوریم. داریم:

$$MA=\sqrt{(-\frac{a}{2})^2+(\frac{b}{2})^2}=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2}$$

$$MB=\sqrt{(\frac{-a}{2})^2+(\frac{-b}{2})^2}=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2}$$

$$MC=\sqrt{(\frac{a}{2})^2+(\frac{+b}{2})^2}=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2}$$

$$MD=\sqrt{(\frac{+a}{2})^2+(\frac{+b}{2})^2}=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2}$$

$$\Rightarrow MA=MB=MC=MD=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2}$$

بنابراین، نقطه‌ی M محل برخورد قطرهای مستطیل و جواب مسئله است، یعنی نقطه‌ای است که از چهار رأس مستطیل به یک فاصله خواهد بود.

نکته‌ی مهم: این سؤال پیش می‌آید که چرا در راه‌حل‌های جبری- مختصاتی ارائه شده، حدس زدیم که نقطه‌ی برخورد قطرهای مستطیل جواب مسئله است و سپس درست بودن این حدس را ثابت کردیم. این حدس زدن می‌تواند از راه‌حل هندسی مسئله نشأت بگیرد، اما بدون حدس زدن، مستقیماً می‌توانیم مختصات نقطه‌ی جواب مسئله را پیدا کنیم و متوجه شویم که این نقطه همان محل برخورد قطرهای مستطیل است. برای مثال در روش آخر راه‌حل جبری ـ مختصاتی که مختصات رأس‌های مستطیل ABCD به صورت $A=(\frac{-a}{2},\frac{b}{2})$ ، $B=(\frac{-a}{2},\frac{-b}{2})$ ، $C=(\frac{a}{2},\frac{-b}{2})$ و $D=(\frac{+a}{2},\frac{+b}{2})$ است، فرض می‌کنیم جواب مسئله نقطه‌ی $M=(\alpha,\beta)$ باشد. یعنی M نقطه‌ای باشد که از چهار رأس مستطیل به یک فاصله است. در این صورت داریم:

$$MA=\sqrt{(-\frac{a}{2}-\alpha)^2+(\frac{b}{2}-\beta)^2}$$

$$MB=\sqrt{(\frac{-a}{2}-\alpha)^2+(\frac{-b}{2}-\beta)^2}$$

$$MC=\sqrt{(\frac{a}{2}-\alpha)^2+(\frac{-b}{2}-\beta)^2}$$

$$MD=\sqrt{(\frac{+a}{2}-\alpha)^2+(\frac{+b}{2}-\beta)^2}$$

$$MA=MB=MC=MD\Rightarrow MA^2=MB^2=MC^2=MD^2$$

$$\Rightarrow(-\frac{a}{2}-\alpha)^2+(\frac{b}{2}-\beta)^2=(\frac{-a}{2}-\alpha)^2+(\frac{-b}{2}-\beta)^2$$

$$\Rightarrow\frac{a^2}{4}+\cancel{\alpha^2}+a\alpha+\frac{b^2}{4}+\cancel{\beta^2}-b\beta$$

$$=\frac{a^2}{4}+\cancel{\alpha^2}+a\alpha+\frac{b^2}{4}+\cancel{\beta^2}+b\beta$$

$$\Rightarrow 2b\beta=0, b\neq 0\Rightarrow\beta=0\quad(1)$$

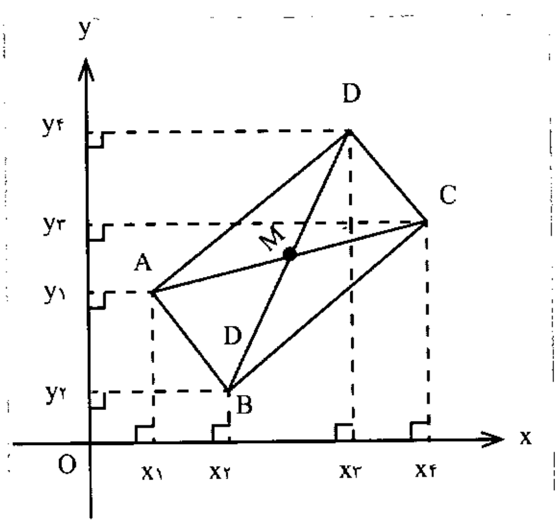
$$(\frac{a}{2}-\alpha)^2+(\frac{-b}{2}-\beta)^2=(\frac{a}{2}-\alpha)^2+(+\frac{b}{2}-\beta)$$

$$\Rightarrow 2a\alpha=0, a\neq 0$$

$$\Rightarrow\alpha=0\quad(2)$$

از (۱) و (۲) نتیجه می‌شود $M(0,0)$. پس جواب مسئله، نقطه‌ی M، محل برخورد قطرهای مستطیل است که در این دستگاه مختصات به عنوان مبدأ مختصات انتخاب شده است.

روش سوم ـ اگر دستگاه مختصات قائم xoy را به صورت دلخواه انتخاب کنیم، مختصات رأس‌های مستطیل $A=(x_1,y_1)$ ، $B=(x_2,y_2)$ ، $C=(x_3,y_3)$ و $D=(x_4,y_4)$ خواهد بود. در این صورت نیز می‌توانیم مختصات نقطه‌ی M جواب مسئله را همانند روش ارائه شده در قسمت قبل به دست آوریم، یعنی فرض کنیم $M=(\alpha,\beta)$ جواب این مسئله است و از رابطه‌های MA= MB= MC= MD اندازه‌های α و β را به دست آوریم. نتیجه‌ی کار چنین خواهد بود:



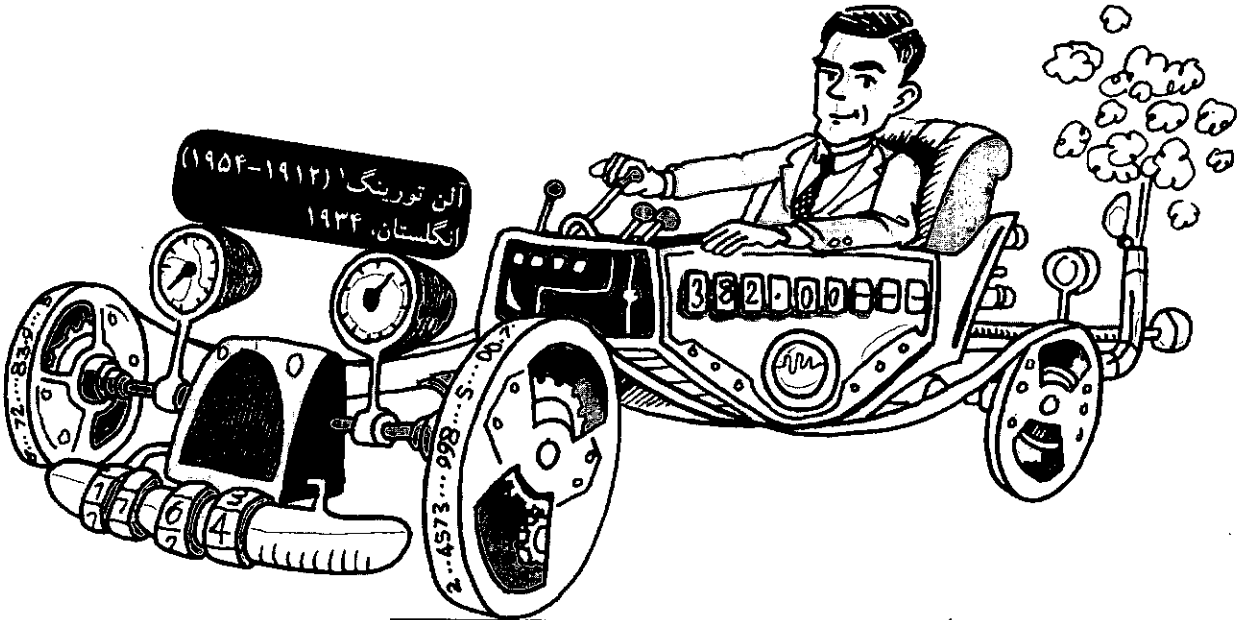
$$M=(\frac{x_1+x_3}{2},\frac{y_1+y_3}{2})\ \text{یا}\ M=(\frac{x_2+x_4}{2},\frac{y_2+y_4}{2})$$

که این نقطه، محل برخورد قطرهای مستطیل است.

نکته: چون نقطه‌ی M وسط قطر AC و وسط قطر BD نیز هست، پس تساوی‌های $\frac{x_1+x_3}{2}=\frac{x_2+x_4}{2}$ و $\frac{y_1+y_3}{2}=\frac{y_2+y_4}{2}$ برقرارند.

توجه: چگونگی تعیین α و β برحسب مختصات رأس‌های مستطیل را برای ما بنویسید و به نشانی مجله ارسال کنید. به بهترین پاسخ‌ها جوایزی اهدا خواهد شد.

ادامه دارد



ماشین‌های تورینگ

دکتر رابرت سالمون[2]
ترجمه: غلامرضا یاسی‌پور

آلن تورینگ، ماشین‌هایی را توصیف کرد که بیان می‌کنند برحسب محاسبه، چه چیز ممکن است و چه چیز ناممکن است.

ماشین‌های تورینگ[3]، رایانه‌ای است که غیر از لوازم اصلی، عاری از ملزومات دیگر است. وسیله‌ای است که به جای فلز و پلاستیک بودن، ایده‌ای مجرد از یک ماشین است. کار این ماشین بررسی نواری با طول نامتناهی است که با 0S و 1S علامت‌گذاری شده است. این نوار، از زیر هدی می‌گذرد که عدد موردنظر را می‌خواند، و آن‌گاه دو کار انجام می‌دهد: یکی روی عدد مورد بحث و دیگری روی نوار:

۱- ۱ را به ۰ یا ۰ را به ۱ تغییر می‌دهد، یا عدد را دست‌نخورده باقی می‌گذارد.

۲- نوار را یک مرحله جلو می‌برد، یک مرحله عقب می‌برد یا دست‌نخورده باقی می‌گذارد.

ماشین تورینگ را می‌توان طوری طراحی کرد که جمع، تفریق یا هر عمل اساسی حساب را انجام دهد. در واقع می‌تواند هر عمل حسابی پیچیده را انجام دهد. با یک مرحله جلوتر رفتن، هر عمل محاسبه می‌تواند با ماشین تورینگ انجام گیرد.

به‌نظر می‌رسد که باید برای هر عمل، ماشین تورینگی جداگانه موجود باشد. اما در اقدامی شگفت‌انگیز، تورینگ نشان داد که برای هر عمل، به ماشینی جداگانه نیاز نداریم. در عوض، یک ماشین تورینگ عمومی موجود است که می‌تواند مانند هر ماشین تورینگ دیگر عمل کند. پس این ماشین عمومی می‌تواند هر عمل محاسبه‌پذیر را به انجام برساند. این مطلب به کمال تورینگی موسوم است.

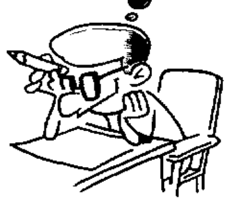
دستاورد مهم دیگر، مسئله‌ی ایست است. با در دست داشتن یک ماشین تورینگ، همواره نمی‌توان تشخیص داد که توقف می‌کند یا محاسبه را تا ابد ادامه می‌دهد. این موضوع، محاسبه‌ای هم‌ارز قضیه‌ی گودل است (در شماره‌ی آینده مجله، قضیه گودل را ملاحظه خواهید کرد.)

در دوران جنگ جهانی دوم، آلن تورینگ، کارهای پرارزشی در حوزه‌ی رمزگشایی انجام داد.

پی‌نوشت

1. Alan Turing
2. Dr. Robert Solomon
3. Turing Machines

مسائل برای حل



ریاضیات ۱

فرخ فرشیان

۱. حاصل عبارت

$$\frac{3^5+3^7+\cdots+3^{17}+3^{19}}{3^{21}-3^5}$$

را به‌دست آورید.

۲. اگر $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1$ باشد، ثابت کنید

$$\sqrt[3]{\frac{ab}{c^2}}+\sqrt[3]{\frac{ac}{b^2}}+\sqrt[3]{\frac{bc}{a^2}}=\sqrt[3]{abc}$$

۳. درجه‌ی چندجمله‌ای

$$x(x+x^2)(2x^2+2x^3)(3x^3+3x^4)\cdots(100x^{100}+100x^{101})$$

را به‌دست آورید.

۴. حاصل را به کمک اتحاد به‌دست آورید.

الف) $(\sqrt{7}+\sqrt{2})(9-\sqrt{14})(7\sqrt{7}-2\sqrt{2})$

ب) $\frac{x^n(x^{\frac{5n}{2}}-x^{\frac{n}{2}})(x^{4n}+x^{2n}+1)}{(x^{\frac{15n}{2}}+x^{\frac{3n}{2}})}$

۵. عبارات زیر را تجزیه کنید.

الف) $x^{16}-14x^4+49x^2-36$

ب) $(x+a)(x+b)-(y+a)(y+b)$

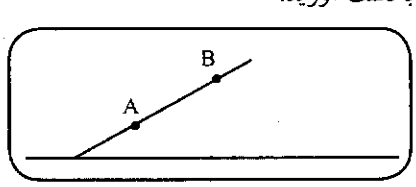
۶. نقاط $B=(0,1)$ و $C=(-1,0)$ رأس‌های مثلث متساوی‌الساقین به رأس A هستند. درصورتی‌که طول ساق مثلث $\sqrt{5}$ باشد، مختصات رأس A را به‌دست آورید. مسئله چند جواب دارد؟

۷. علی ۵۰۰ تومان پس‌انداز دارد و هر روز ۲۰۰ تومان به آن اضافه می‌کند. حسن ۲۰۰۰ تومان پس‌انداز دارد و هر روز ۲۰۰ تومان آن را خرج می‌کند.

الف) اگر x تعداد روزهای گذشته و y پس‌انداز علی باشد، رابطه‌ی بین x و y را به‌دست آورید.

ب) اگر x تعداد روزهای گذشته و z پولی باشد که حسن خرج می‌کند، رابطه‌ی بین x و z را به‌دست آورید.

۸. در یک جاده‌ی شیب‌دار، اگر ۵۰۰ متر حرکت کنیم از A به B می‌رسیم. اگر ارتفاع دو نقطه‌ی A و B از سطح دریا به‌ترتیب ۱۰۰۰ و ۱۳۰۰ متر باشد، شیب این جاده را به‌دست آورید.



سطح دریا

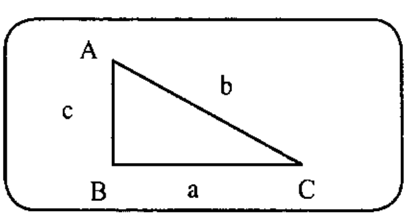
۹. اگر $x-2y=0$ و $x-2y=-15$ معادلات دو ضلع یک مستطیل و $7x+y=15$ معادله‌ی یکی از قطرهای مستطیل باشد، مختصات رأس‌های مستطیل را تعیین کنید.

۱۰. حاصل عبارت

$$\frac{\sin^2 20+\sin^2 70}{\frac{\sin 26}{\cos 64}+\frac{\sin 28}{\cos 62}}+\frac{\sin 30-\tan 45}{\cos^2-\tan 45}$$

را به‌دست آورید.

۱۱. در مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABC و $\tan C=\frac{3}{\sqrt{3}}$ و b=۴ است. اندازه‌ی ضلع C را به‌دست آورید.



۱۲. حاصل عبارت زیر را به‌دست آورید.

الف) $\left(\frac{x+3}{2x-9}-\frac{x-3}{2x+9}-\frac{12}{x^2-9}\right)\div\left(\frac{2x+3}{x+3}-1\right)$

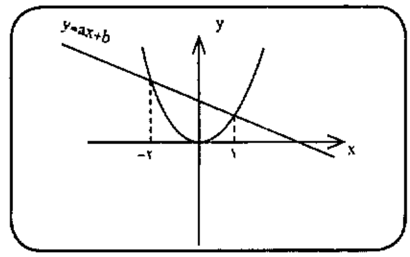
ب) $\frac{1}{1+x^{a-b}+x^{a-c}}+\frac{1}{1+x^{b-c}+x^{b-a}}+\frac{1}{1+x^{c-a}+x^{c-b}}$

۱۳. a و b و c را طوری تعیین کنید که باقی‌مانده‌ی تقسیم x^4+ax^2+bx+c بر عبارت x^4+3x^2-4x+1 برابر $3x^2-4x+1$ باشد.

۱۴. مخرج کسر $\frac{8\sqrt{21}}{2\sqrt{3}+\sqrt{19}+\sqrt{7}}$ را گویا کنید.

۱۵. خط زیر دارای معادله‌ی y=ax+b

است. مقادیر a و b را با توجه به شکل به‌دست آورید.



۱۶. معادلات زیر را حل کنید.

الف) $x^2-(2\sqrt{2}+1)x+4+\sqrt{2}=0$

ب) $x^2+\frac{1}{x^2}-4x-\frac{4}{x}=-6$

۱۷. مجموع ارقام یک عدد دو رقمی ۱۰ است. رقم دهگان آن ۲ واحد کم‌تر از مربع رقم یکان آن است. این عدد را پیدا کنید.

۱۸. مجموعه جواب نامعادله‌ی $\frac{4-x}{8}+a>\frac{x+8}{16}$ به‌صورت $x>-\frac{16}{3}$ است. مقدار a را به‌دست آورید.

ریاضیات ۲

میرشهرام صدر

۱. نشان دهید که اگر زاویه‌های یک مثلث را از کوچک به بزرگ (یا از بزرگ به کوچک) مرتب کنیم و تشکیل یک دنباله‌ی حسابی بدهند، آن‌گاه همواره زاویه‌ی وسطی برابر با 60° خواهد بود.

۲. اگر اضلاع مثلث قائم‌الزاویه‌ای دنباله‌ی هندسی بسازند، قدر نسبت این دنباله را بیابید.

۳. اگر نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x)=x^2-3x+k$ بر محور xها مماس باشد، مقدار k را محاسبه کنید.

۴. تابع با ضابطه‌ی زیر مفروض است، در این صورت مقدار عددی $f(f(f(1)))$ را بیابید.

$$f(x)=\begin{cases}-x^2 & x>0\\ -2x^3 & x\le 0\end{cases}$$

۵. تابع با ضابطه‌ی زیر به نام تابع علامت معروف است. مطلوب است محاسبه‌ی $s(x^2)-s(x)$.

$$s(x)=\begin{cases}1 & x>0\\ 0 & x=0\\ -1 & x<0\end{cases}$$

۶. دامنه‌ی تابع با ضابطه‌ی زیر را به‌دست آورید.

$$f(x)=\sqrt{\frac{x+2}{x+1}-\frac{2-x}{1-x}}$$

۷. الف) اگر $a>0$ ثابت کنید $a+\frac{1}{a}\ge 2$.

ب) بیشترین مقدار کسر $A=\frac{x}{1+x^2}$ را برای هر عدد حقیقی $x>0$ پیدا کنید.

۸. حدود m را چنان تعیین کنید که نابرابری زیر همواره برقرار باشد.

$$(m^2+m-2)x^2+2(m-1)x-2<0$$

۹. با استفاده از تعریف لگاریتم، دستگاه زیر را حل کنید.

$$\begin{cases}2^{3x-y}=32\\ 3^{x+2y}=3\end{cases}$$

۱۰. بدون استفاده از ماشین‌حساب، حاصل عبارت زیر را محاسبه کنید.

$$A=\frac{\log_2^{24}}{\log_{96}^{2}}-\frac{\log_2^{192}}{\log_{12}^{2}}$$

۱۱. معادله‌ی زیر را حل کنید.

$$1+\log_2^{(x-1)}=\log_{(x-1)}^{4}$$

۱۲. بیشترین و کمترین مقدار عددی عبارت زیر را محاسبه کنید.

$A=\sin^2x-2\sin x+5$

۱۳. مقدار عددی عبارت زیر را محاسبه کنید.

$$A=\frac{\sin\frac{2\pi}{3}\cos\frac{2\pi}{3}+\sin\frac{4\pi}{3}\cos\frac{4\pi}{3}}{\cos\frac{5\pi}{3}\cos\frac{3\pi}{4}+\sin\frac{5\pi}{4}\sin\frac{7\pi}{4}}$$

۱۴. جواب‌های معادله‌ی زیر را بیابید.

$$\begin{bmatrix}x & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 2 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ 2x\end{bmatrix}=0$$

۱۵. اگر $A=\begin{bmatrix}3 & 2\\ 7 & 5\end{bmatrix}$ در این صورت حاصل $(A-2A^{-1})$ را پیدا کنید.

۱۶. با ارقام ۰ و ۱ و ۲ و ۳ و ۴ و ۵ چند عدد چهاررقمی می‌توان ساخت؛ به شرطی که تکرار مجاز نباشد و عدد حاصل از ۴۰۰۰ بزرگ‌تر باشد.

۱۷. به چند طریق می‌توان از بین ۱۰ نفر دانش‌آموز که ۳ نفر آن‌ها عضو تیم فوتبال مدرسه هستند، هیأتی سه‌نفری انتخاب کرد، به شرط آن‌که:

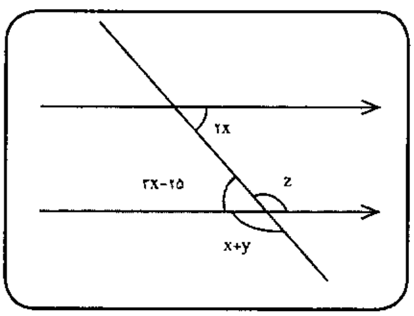
الف) رئیس هیأت عضو تیم فوتبال باشد.

ب) یک نفر آن‌ها عضو تیم فوتبال و ۲ نفر دیگر عضو تیم فوتبال نباشند.

هندسه‌ی ۱

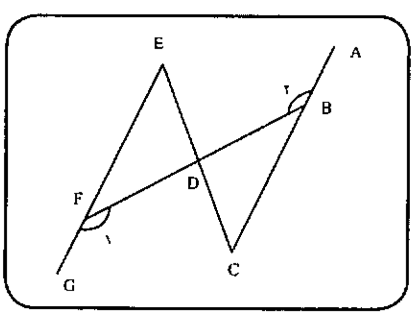
محمدهاشم رستمی

۱. با توجه به شکل، اندازه‌ی x، y و z را تعیین کنید. خط‌های موازی، با پیکان‌های هم‌جهت مشخص شده‌اند.



۲. در شکل روبه‌رو:

الف) اگر $\hat{1}=\hat{2}$ و CE پاره‌خط BF را نصف کرده باشد، ثابت کنید که $\hat{C}=\hat{E}$.



ب) اگر BF و CE یکدیگر را نصف کرده باشند، ثابت کنید:

BC=EF

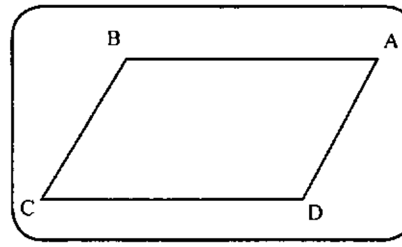
۳. با استفاده از چهار پاره‌خط، خمی

رسم کنید که:

الف) ساده و بسته باشد.

ب) ساده باشد ولی بسته نباشد.

۴. چهارضلعی ABCD متوازی‌الاضلاع است. (اندازه‌ی x و y را درهریک از حالت‌های زیر تعیین کنید:



الف) $AD = 5x$ ، $AB = 2x$ ، $CD = y$

و محیط متوازی‌الاضلاع مساوی ۸۴.

ب) $AB = 2x$ ، $BC = 3y + 8°$ ،

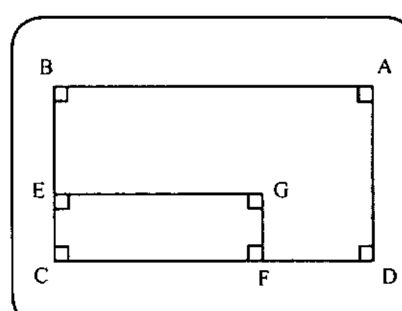
$CD = 7x - 25°$ و $AD = 5y - 10°$.

پ) $\hat{A} = 4y - 60°$ ، $\hat{C} = 2y$ و $\hat{D} = x$

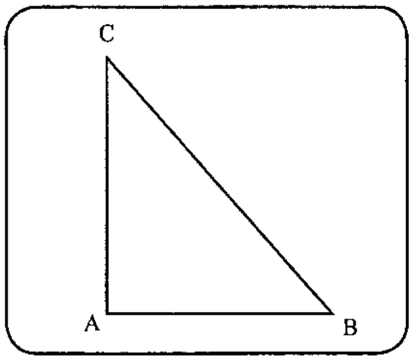
ت) $\hat{A} = 3x$ ، $\hat{B} = 10x - 15°$ و

$\hat{C} = y$.

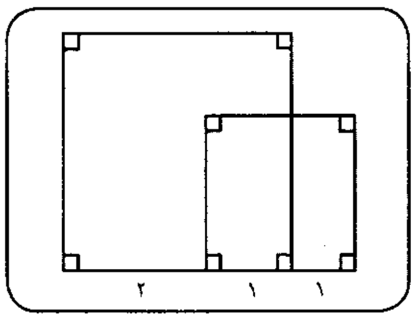
۵. چهارضلعی ABCD مستطیل است. نقطه‌های E و F روی ضلع‌های BC و CD چنان اختیار شده‌اند که $CE = \frac{5}{14}BC$ و $\frac{CF}{CD} = \frac{7}{10}$ است. مستطیل CEGF را می‌سازیم. اگر مساحت مستطیل CEGF مساوی ۷۰ سانتی‌متر مربع باشد، اندازه‌ی مساحت مستطیل ABCD را تعیین کنید.



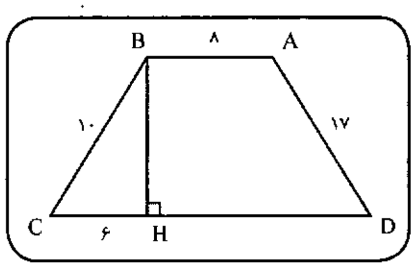
۶. اندازه‌ی مساحت مثلث قائم‌الزاویه‌ی متساوی‌الساقین $ABC(\hat{A} = 90°, AB = AC)$ ۳۲ سانتی‌متر مربع است. اندازه‌ی وتر و ساق‌های این مثلث را تعیین کنید.



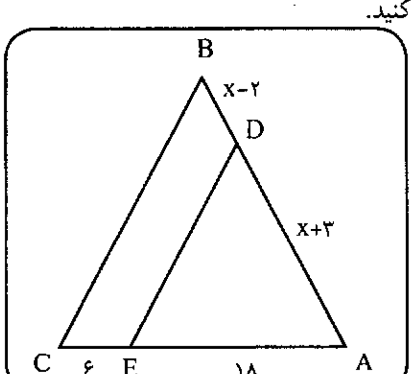
۷. با توجه به شکل، مساحت قسمت مشترک دو مربع را به‌دست آورید.



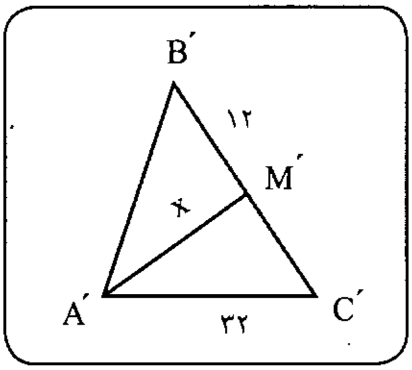
۸. چهارضلعی ABCD ذوزنقه است. با توجه به شکل، اندازه‌ی مساحت این ذوزنقه را تعیین کنید.

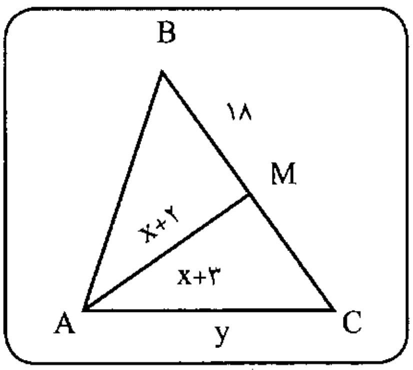


۹. در مثلث ABC، DE موازی BC است. با توجه به شکل، اندازه‌ی x را تعیین کنید.

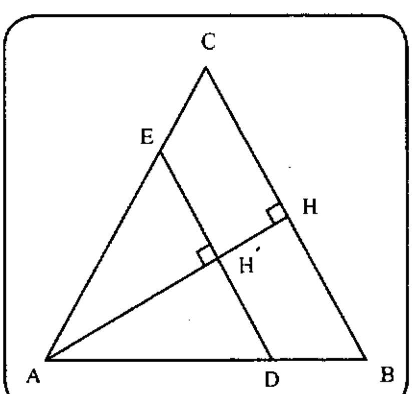


۱۰. دو مثلث ABC و A′B′C′ متشابه و AM و A′M′ میانه‌های نظیر از این دو مثلث‌اند. اندازه‌ی x و y را به‌دست آورید.

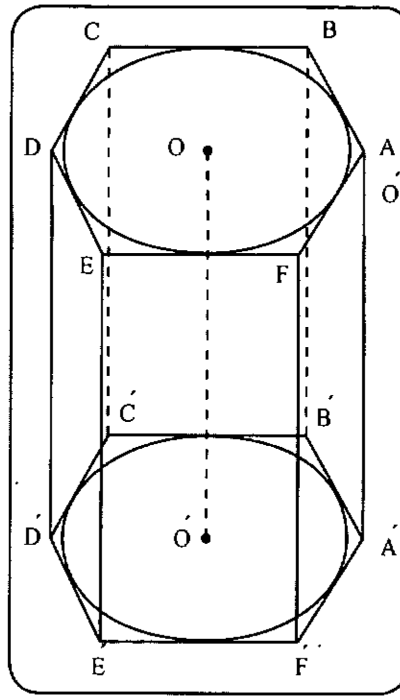




۱۱. در شکل AH ارتفاع نظیر رأس A از مثلث ABC و DE موازی ضلع BC است که ارتفاع AH را در H′ قطع کرده است. اگر AH=۴۰ و H′H = ۱۲ باشد، نسبت مساحت‌های دو مثلث ABC و ADE را به‌دست آورید.



۱۲. منشور منتظم شش‌پهلوی ABCDEFF′A′B′C′D′E′ به ضلع قاعده‌ی ۱۲ سانتی‌متر و ارتفاع ۳۰ سانتی‌متر داده شده است. استوانه‌ای را که قاعده‌هایش محاط در قاعده‌های این منشور هستند در نظر می‌گیریم.

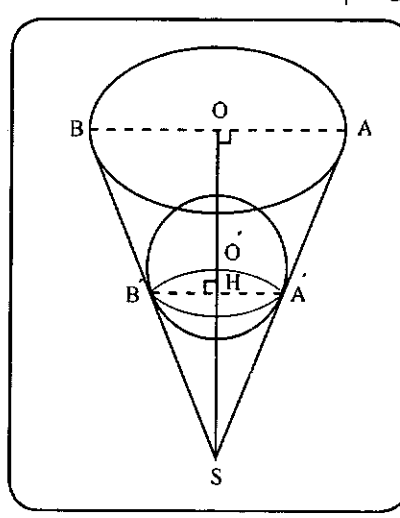


الف) حجم منشور منتظم داده شده را تعیین کنید.

ب) حجم فضای بین منشور منتظم و استوانه را به‌دست آورید.

۱۳. مکعب مستطیلی به قطر $10\sqrt{29}$ سانتی‌متر را در نظر بگیرید که ابعاد آن متناسب با عددهای ۲ و ۳ و ۴ است. حجم این مکعب‌مستطیل را بیابید.

۱۴. مخروطی به شعاع قاعده‌ی ۸ سانتی‌متر و ارتفاع ۲۱ سانتی‌متر داده شده است (شکل). کره‌ای به سطح کل 36π سانتی‌متر مربع را درون این مخروط قرار می‌دهیم. تعیین کنید:



الف) آیا این کره به‌طور کامل درون این مخروط جای می‌گیرد؟ بحث کنید.

ب) در صورتی که کره به طور کامل درون مخروط قرار بگیرد، حجم فضای بین مخروط و کره را تعیین کنید.

حسابان

مجتبی رفیعی

۱. محیط یک دایره به شعاع «۱» را به شش قسمت مساوی تقسیم می‌کنیم و با نقاط به دست آمده یک شش ضلعی منتظم می‌سازیم. سپس وسط‌های این شش ضلعی را به هم وصل می‌کنیم و یک شش ضلعی دیگر می‌سازیم و این کار را تا بی‌نهایت مرحله ادامه می‌دهیم. حد مجموع مساحت‌ها و محیط‌های این شش ضلعی‌ها را بیابید.

۲. معادله‌ی زیر چند جواب حقیقی دارد؟

$$(x+1)^{1383}+(x+1)^{1382}(x-2)+(x+1)^{1381}(x-2)^2+\dots+(x+1)(x-2)^{1382}+(x-2)^{1383}=0$$

۳. در بسط $(x+2y)^8$ مطلوب است:

الف) تعداد جملات

ب) مجموع ضرایب

پ) جمله‌ی پنجم بسط

۴. به چند صورت می‌توان یک چند جمله‌ای از درجه‌ی پنج ساخت که ضرایب آن با ترتیبی دلخواه، اعداد ۱ و ۲ و ۳ و... و ۶ و بر چند جمله‌ای $1+x+x^2$ بخش‌پذیر باشد.

۵. تعداد ریشه‌های معادله‌ی $\sin x=\frac{2x}{5\pi}$ را به روش هندسی به دست آورید.

۶. اگر دو مجموعه‌ی $A=\{a_1,a_2,\dots,a_n\}$ و $B=\{b_1,b_2,\dots,b_n\}$ را داشته باشیم و $f:A\to B$، آن‌گاه:

الف) به‌طور کلی چند تابع f موجود است؟

ب) چند تابع f موجود است که در آن‌ها $f(a_1)=b_1$ باشد؟

پ) چند تابع ثابت موجود است؟

ت) چند تابع موجود است که $f(a_1)\neq b_1$ باشد؟

۷. اگر دو تابع با ضابطه‌های

$$f(x)=\frac{1}{3x+\sqrt{9x^2+1}}$$

و

$$g(x)=\sqrt{ax^2+1}-bx^2$$

برابر باشند، a و b را تعیین کنید.

۸. چند تابع $f:\mathbb{W}\to\mathbb{W}$ وجود دارد که برای هر x متعلق به اعداد حسابی داشته باشیم:

$$f(f(n))+f(n)=2n+3$$

۹. فرض کنید $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ دارای این خاصیت است که $f(x)-3x$ و $f(x)-x^3$ صعودی هستند. نشان دهید که $f(x)-x^2-x$ نیز صعودی است.

۱۰. نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌ی 15° را به دست آورید.

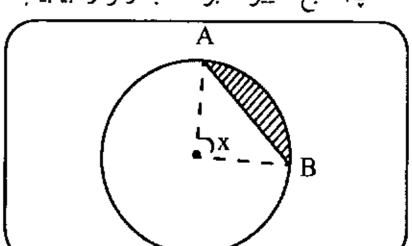
۱۱. معادله‌ی $\frac{\sin 7x-\sin x}{\sin 3x}=2$ را حل کنید.

۱۲. وتر AB مطابق شکل مقابل به سمت مرکز دایره در حال حرکت است.

الف) تابعی بسازید که مساحت قطاع دایره را برحسب زاویه‌ی x نمایش دهد.

ب) تابع تغییرات وتر برحسب x را بسازید.

پ) تابع تغییر x برحسب وتر را بیابید.



۱۳. مجموعه جواب نامعادله‌ی زیر را به صورت یک همسایگی محذوف بنویسید.

$$\frac{x^2-2x}{\sqrt{x^2-x+1}}<0$$

۱۴. a را طوری بیابید که

$$f(x)=\begin{cases} ax[\frac{1}{x}] & x \geq \frac{1}{2} \\ \cos\frac{\pi}{2}x & x < \frac{1}{2} \end{cases}$$

در $x=\frac{1}{2}$ حد داشته باشد.

۱۵. حاصل حدهای زیر را در صورت وجود بیابید.

الف) $\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos 3x}{x\tan x}$

ب) $\lim_{x\to \frac{\pi}{3}}\frac{1-2\cos x}{3x-\pi}$

۱۶. تانژانت زاویه‌ی بین دو نیم‌مماس تابع $f(x)=\sqrt{1-\sqrt{\cos ax}}$ در مبدأ مختصات برابر $\frac{4}{3}$ است. چند مقدار برای a وجود دارد؟

۱۷. برای تصفیه‌ی یک محلول از یک ظرف مخروطی که در رأس آن سوراخ بسیار ریزی تعبیه شده است، استفاده می‌کنیم. با فرض این که ارتفاع مخروط ۱۶cm و شعاع آن ۴cm باشد و محلول با سرعت ثابت $2\,cm^3/s$ از ظرف خارج شود، هنگامی که ارتفاع محلول ۸cm است، سرعت کاهش ارتفاع محلول در ظرف چه‌قدر است؟

۱۸. مشتق تابع زیر را بگیرید.

$$\frac{x+8}{16}+a>\frac{4-x}{8}$$

۱۹. تابع $x>-\frac{16}{3}$ را در نظر بگیرید. اگر از هر نقطه روی تابع خطی به مبدأ مختصات وصل کنیم و شیب آن را m بنامیم، تغییرات زاویه‌ی خط با محور xها (α) را نسبت به تغییرات x به دست آورید.

جبر و احتمال

هوشنگ شرقی

۱. با استفاده از استقرای ریاضی ثابت کنید:

$$(1+\frac{1}{1})(1+\frac{1}{2})(1+\frac{1}{3})....(1+\frac{1}{n})=n+1$$

۲. به کمک استدلال استنتاجی ثابت کنید که مکعب هر عدد فرد، عددی فرد است.

۳. می‌دانیم $\sqrt{5}$ عددی گنگ است. ثابت کنید $\sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$ نیز عددی گنگ است.

۴. برای هر دو عدد حقیقی x و y ثابت کنید:

$$1+x^2+2y^2\geq 2y(x+1)$$

۵. در یک فروشگاه لباس، لباس‌های بچه‌گانه، زنانه و مردانه در سه اندازه‌ی کوچک و بزرگ و متوسط فروخته می‌شود. شخصی از این فروشگاه ده دست لباس خرید. ثابت کنید دست کم دو تا از لباس‌های او از یک نوع و یک اندازه بوده‌اند.

۶. با استفاده از جبر مجموعه‌ها ثابت کنید:

$$(A\cap B)\cup C=A\cap(B\cup C)\Leftrightarrow C\subset A$$

۷. اگر $A=\{x|x\in\mathbb{Z}\ ,\ |2x-1|\leq 2\}$ و $B=\{x|x\in\mathbb{Z}\ ,\ n\leq\sqrt{x}\}$ مجموعه‌ی $A'-A\times B$ را تشکیل دهید.

۸. رابطه‌ی زیر روی $(IR-\{-1\})^2$ به صورت زیر تعریف شده است:

$$(x,y)R(z,t)\Leftrightarrow x+t+xt=y+z+yz$$

ثابت کنید R یک رابطه‌ی هم‌ارزی است و سپس کلاس هم‌ارزی (۲- و ۱) را به‌دست آورید.

۹. تاسی را پرتاب می‌کنیم. اگر زوج بیاید، یک سکه را پرتاب می‌کنیم و اگر فرد بیاید، سکه را دو بار پرتاب می‌کنیم. مطلوب است:

الف) فضای نمونه‌ی این پیشامد.

ب) پیشامد A که در آن سکه دست کم یک بار پشت بیاید.

ج) پیشامد B که در آن تاس مضرب ۳ بیاید.

د) پیشامد $A\cap B'$.

۱۰. در یک کیسه شامل ۵ مهره‌ی قرمز و ۳ مهره‌ی سفید و تعدادی مهره‌ی آبی دو مهره به تصادف خارج می‌کنیم. اگر احتمال هم‌رنگ بودن دو مهره مساوی $\frac{12}{45}$ باشد، تعداد مهره‌های آبی را به‌دست آورید.

۱۱. تاسی به گونه‌ای ساخته شده است که احتمال وقوع هر عدد اول در پرتاب آن ۳ برابر احتمال وقوع عدد غیر اول است. اگر در یک بار پرتاب این تاس، Aپیشامد وقوع عددی کوچک‌تر از ۴ باشد، P(A) را به‌دست آورید.

۱۲. از بین مستطیل‌هایی که ابعاد آن‌ها کوچک‌تر از ۴ واحد است، یکی را به تصادف انتخاب کرده‌ایم. احتمال انتخاب مستطیل‌هایی با محیط بزرگ‌تر از ۶ را به‌دست آورید.

۱۳. احتمال قبولی نرگس و مردودی مژده در امتحان جبر و احتمال ۰/۳ است، ولی شانس قبولی یکی از آن‌ها در این امتحان ۰/۷ است. احتمال قبولی مژده در این امتحان را به‌دست آورید.

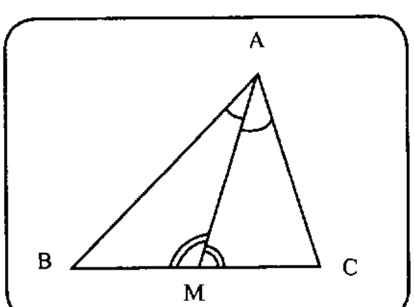
مسائل هندسه‌ی ۲

محمدهاشم رستمی

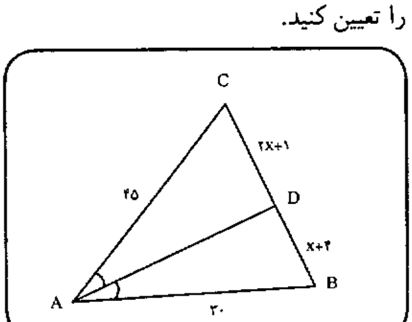
۱. در مثلث ABC میانه‌ی AM را رسم کرده‌ایم. اگر AB>AC باشد، ثابت کنید:

الف) $M\hat{A}B < M\hat{A}C$

ب) $A\hat{M}B < A\hat{M}C$



۲. در شکل، AD نیمساز زاویه‌ی درونی A از مثلث ABC است. اندازه‌ی ضلع BC را تعیین کنید.



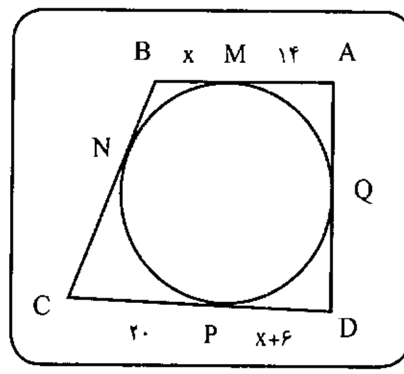
۳. مثلث ABC به ضلع‌های $AB=AC=10$ و $BC=12$ داده شده است. اگر M نقطه‌ای واقع بر قاعده‌ی BC از این مثلث باشد، مجموع فاصله‌ی آن از دو ضلع AB و AC را تعیین کنید.

۴. مکان هندسی مرکز دایره‌هایی به شعاع R' را بیابید که بر دایره‌ی ثابت $C(O,R)$ مماس برون باشند.

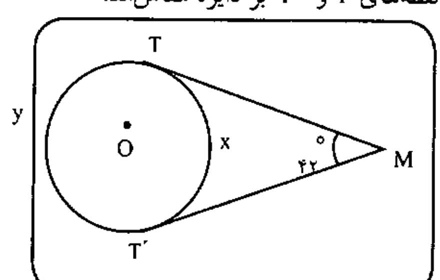
۵. مثلث ABC را با معلوم بودن ضلع $BC=a$، زاویه‌ی $\hat{A}=\alpha$ و ارتفاع $AH=h_a$ رسم کنید.

۶. در دایره‌ی $C(O,10)$، مکان هندسی وسط وترهایی از این دایره را تعیین کنید که طولشان مساوی ۱۶ باشد.

۷. چهارضلعی $ABCD$ در نقطه‌های M، N، P و Q بر دایره‌ای به مرکز O مماس است. اگر محیط این چهارضلعی محیطی ۱۲۰ باشد، اندازه‌ی x را تعیین کنید.



۸. اندازه‌ی x و y را با توجه به شکل داده شده تعیین کنید. MT و MT' در نقطه‌های T و T' بر دایره مماس‌اند.

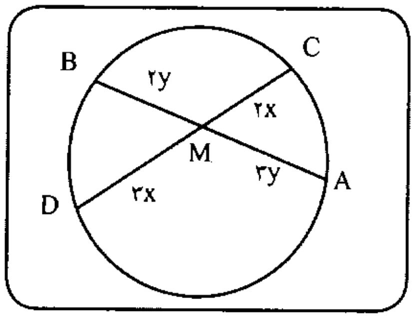


۹. کمان درخور زاویه‌ی $60°$ روبه‌رو به پاره‌خط AB به طول $4\sqrt{3}$ را رسم کرده‌ایم.

الف) اندازه‌ی شعاع دایره‌ای را که این کمان درخور بخشی از آن است، بیابید.

ب) فاصله‌ی مرکز این دایره از وتر AB را تعیین کنید.

۱۰. AB و CD دو وتر از دایره‌ی (C) هستند که در نقطه‌ی M یکدیگر را قطع کرده‌اند. با توجه به شکل، اندازه‌ی وترهای AB و CD را به‌دست آورید، در صورتی که $AB=2CD-10$ باشد.



۱۱. در تبدیل $T(x,y)=(2x+5,y-3)$، نقطه‌ی $M'=(3,1)$ تصویر چه نقطه‌ای است؟

۱۲. تحت یک بازتاب محوری، تصویر خط $D: 3x-4y-1=0$، خط $D': 4x+3y+7=0$ است. معادله‌ی محور این بازتاب را تعیین کنید.

۱۳. تصاویر نقطه‌های $A=(2,0)$، $B=(0,4)$ و $C=(4,5)$ تحت تبدیل $T(x,y)=(2x,2y)$ را به‌ترتیب A'، B' و C' می‌نامیم.

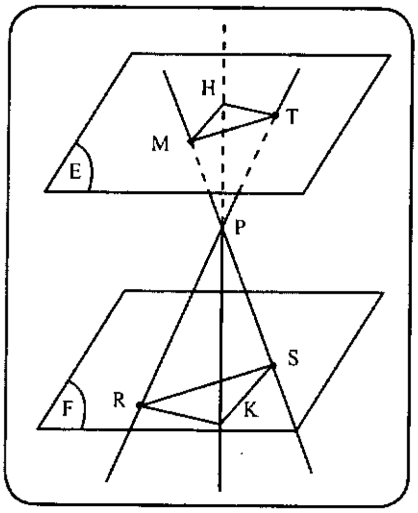
الف) مختصات نقطه‌های A'، B' و C' را به‌دست آورید.

ب) شیب خط‌های AB، BC، CA، $A'B'$، $B'C'$ و $C'A'$ را به‌دست آورید و شیب خط‌های متناظر را با هم مقایسه کنید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

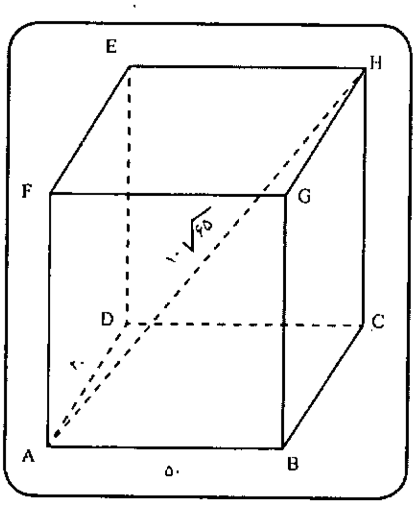
پ) طول ضلع‌های دو مثلث ABC و $A'B'C'$ را محاسبه و ضلع‌های متناظر آن‌ها را با هم مقایسه کنید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟ این تبدیل چیست؟

۱۴. دو خط متمایز d و d' با خط δ از صفحه‌ی P موازی‌اند. صفحه‌ی P' را بر دو خط d و d' می‌گذرانیم. در وضع این صفحه با صفحه‌ی P بحث کنید.

۱۵. دو صفحه‌ی (E) و (F) با هم موازی‌اند. از نقطه‌ی P غیرواقع بر این دو صفحه، سه خط همرس در نقطه‌ی P رسم می‌کنیم تا دو صفحه‌ی (E) و (F) را در نقطه‌های P، K، S، M، T و H قطع کنند. مثلث‌های RKS و MHT را رسم می‌کنیم. آیا این دو مثلث با هم متشابه‌اند؟ دلیل بیاورید.



۱۶. مکعب‌مستطیل $ABCDEFGH$ داده شده است. اگر $AB=50$، $AD=20$ و قطر $AH=10\sqrt{65}$ باشد:



الف) اندازه‌ی ضلع AF از این مکعب‌مستطیل را تعیین کنید.

ب) طول عمود مشترک دو خط متنافر EF و BG را تعیین کنید.



حلّ تشریحی مسائل شماره‌ی قبل

حل مسائل ریاضی سال اوّل

فرخ فرشیان

۱. دو ضلع زاویه‌ی قائمه را a و b می‌گیریم. پس $a^{۲}+b^{۲}=(۵\sqrt{۲})^{۲}$؛ در نتیجه $a^{۲}+b^{۲}=۵۰$.

چون a و $b\in N$ فرض شده‌اند جواب‌های ممکن این معادله $\begin{cases}a=۵\\b=۵\end{cases}$، $\begin{cases}a=۷\\b=۱\end{cases}$، $\begin{cases}a=۱\\b=۷\end{cases}$ هستند که در حالت $\begin{cases}a=۷\\b=۱\end{cases}$، $\begin{cases}a=۱\\b=۷\end{cases}$ محیط مثلث کمتر است.

۲. اگر کسری کوچک‌تر از واحد باشد، وقتی عددی را هم به صورت و هم به مخرج اضافه کنیم کسر بزرگ‌تر می‌شود، یعنی:

$$(\frac{a}{b}<۱\Rightarrow \frac{a}{b}<\frac{a+k}{b+k}<\frac{c}{d}<۱)$$

اثبات: می‌دانیم اگر $\frac{a}{b}<\frac{c}{d}$ باشد خواهیم داشت $\frac{a}{b}<\frac{a+c}{b+d}<\frac{c}{d}$. بنابراین:

$$\frac{a}{b}<۱=\frac{k}{k}\Rightarrow \frac{a}{b}<\frac{a+k}{b+k}<\frac{k}{k}=۱$$

$$\Rightarrow \frac{a}{b}<\frac{a+k}{b+k}<۱$$

اگر به صورت و مخرج کسر $\frac{۱۰۰۱}{۱۰۰۰۱}$، ۹ واحد اضافه کنیم برابر $\frac{۱۰۱۰}{۱۰۰۱۰}$ می‌شود که از مقدار اولیه‌ی کسر بزرگ‌تر است؛ یعنی:

$$\frac{۱۰۰۱}{۱۰۰۰۱}<\frac{۱۰۱۰}{۱۰۰۱۰}=\frac{۱۰۱}{۱۰۰۱}\times\frac{۱۰}{۱۰}$$

پس: $\frac{۱۰۰۱}{۱۰۰۰۱}<\frac{۱۰۱}{۱۰۰۱}$

۳. صورت و مخرج هر دو کسر را ۱۰۱ برابر می‌کنیم.

$$\frac{۴۱}{۴۳}\times\frac{۱۰۱}{۱۰۱}=\frac{۴۱۴۱}{۴۳۴۳},$$

$$\frac{۴۲}{۴۳}\times\frac{۱۰۱}{۱۰۱}=\frac{۴۲۴۲}{۴۳۴۳}$$

بین دو عدد ۴۱۴۱ و ۴۲۴۲ صد عدد صحیح وجود دارد.

$$\frac{۴۱۴۲}{۴۳۴۳},\frac{۴۱۴۳}{۴۳۴۳},\dots,\frac{۴۲۴۰}{۴۳۴۳},\frac{۴۲۴۱}{۴۳۴۳}$$

۴.

$$|\sqrt{۳}-\sqrt{۵}|=-(\sqrt{۳}-\sqrt{۵})=-\sqrt{۳}+\sqrt{۵}$$

$$|\sqrt{۵}-۲|=\sqrt{۵}-۲$$

$$|-۲\times(۳-۴)|=|-۲\times(-۱)|=|۲|=۲$$

$$|\sqrt{۳}-۲|=-(\sqrt{۳}-۲)=-\sqrt{۳}+۲$$

$$|-\sqrt{۳}|=-(-\sqrt{۳})=\sqrt{۳}$$

$$\frac{\left||\sqrt{۳}-\sqrt{۵}|-|\sqrt{۵}-۲|-|-۲\times(۳-۴)|\right|}{\left||\sqrt{۳}-۲|-|-\sqrt{۳}|\right|+۲}$$

$$=\frac{|-\sqrt{۳}+\sqrt{۵}-\sqrt{۵}+۲-۲|}{|-\sqrt{۳}+۲-\sqrt{۳}|+۲}$$

$$=\frac{|-\sqrt{۳}|}{|۲-۲\sqrt{۳}|+۲}=\frac{\sqrt{۳}}{-(۲-۲\sqrt{۳})+۲}$$

$$=\frac{\sqrt{۳}}{-۲+۲\sqrt{۳}+۲}=\frac{\sqrt{۳}}{۲\sqrt{۳}}=\frac{۱}{۲}$$

۵.

الف) $A=\left\{\frac{۲^{x}+۱}{۲^{x}-۱}\middle| x\in Z,-۳\le x<۰\right\}$

مقادیر x را مشخص و در عبارت $\frac{۲^{x}+۱}{۲^{x}-۱}$ به جای آن می‌گذاریم. اکنون داریم:

$$-۳\le x<۰, x\in Z$$

$$\Rightarrow x=-۳,-۲,-۱$$

$$x=-۳\Rightarrow \frac{۲^{-۳}+۱}{۲^{-۳}-۱}=\frac{\frac{۱}{۲^{۳}}+۱}{\frac{۱}{۲^{۳}}-۱}$$

$$=\frac{\frac{۱}{۸}+۱}{\frac{۱}{۸}-۱}=\frac{\frac{۹}{۸}}{\frac{-۷}{۸}}=\frac{-۹}{۷}$$

$$x=-۲\Rightarrow \frac{۲^{-۲}+۱}{۲^{-۲}-۱}=\frac{\frac{۱}{۲^{۲}}+۱}{\frac{۱}{۲^{۲}}-۱}$$

$$=\frac{\frac{۱}{۴}+۱}{\frac{۱}{۴}-۱}=\frac{\frac{۵}{۴}}{\frac{-۳}{۴}}=-\frac{۵}{۳}$$

$$x=-۱\Rightarrow \frac{۲^{-۱}+۱}{۲^{-۱}-۱}=\frac{\frac{۱}{۲}+۱}{\frac{۱}{۲}-۱}$$

$$=\frac{\frac{3}{2}}{\frac{-1}{2}}=-3$$

$$A=\left\{\frac{-9}{7},\frac{-5}{3},-3\right\}$$

ب) $B=\left\{2^x-3^y \mid x,y\in Z, xy=4\right\}$

در این‌جا عبارت جبری داده شده شامل دو متغیر x و y است. به دنبال دو عدد صحیح هستیم که حاصل ضرب آن‌ها ۴ شود. بنابراین حالت‌های زیر اتفاق می‌افتد.

$$\begin{cases}x=1\\y=4\end{cases}\ 2^x-3^y=2-3^4$$
$$=2-81=-79$$

$$\begin{cases}x=4\\y=1\end{cases}\ 2^x-3^y=2^4-3$$
$$=16-3=13$$

$$\begin{cases}x=-1\\y=-4\end{cases}\ 2^x-3^y=2^{-1}-3^{-4}$$
$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{81}=\frac{729}{162}$$

$$\begin{cases}x=-4\\y=-1\end{cases}\ 2^x-3^y=2^{-4}-3^{-1}=\frac{1}{2^4}-\frac{1}{3}$$
$$=\frac{1}{16}-\frac{1}{3}=\frac{-13}{48}$$

$$\begin{cases}x=2\\y=2\end{cases}\ 2^x-3^y=2^2-3^2$$
$$=4-9=-5$$

$$\begin{cases}x=-2\\y=-2\end{cases}\ 2^x-3^y=2^{-2}-3^{-2}$$
$$=\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}=\frac{1}{4}-\frac{1}{9}=\frac{5}{36}$$

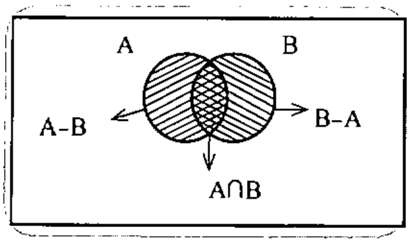
$$B=\left\{-79,13,\frac{729}{162},-\frac{13}{48},-5,\frac{5}{36}\right\}$$

۶. با استفاده از نمودار مجموعه‌ای (ون) داریم:

$$(A-B)\cup(A\cap B)\cup(B-A)$$

در این صورت:

$$A\cup B=\{1,2,3,4,5,6\}$$



۷. در رابطه‌ی $\{3\}\subset X\subset\{1,2,3\}$.

مجموعه‌ی X باید عضو مجموعه‌ی $\{3\}$ را شامل باشد. همین‌طور X می‌تواند اعضای مجموعه‌ی $\{1,2,3\}$ را اختیار کند، یعنی $X_1=\{3\}$ و $X_2=\{3,1\}$ و $X_3=\{3,2\}$ و $X_4=\{3,2,1\}$. بنابراین، همان‌طور که مشاهده می‌شود، تعداد مجموعه‌هایی مانند X که در رابطه‌ی مذکور صدق می‌کنند برابر تعداد زیرمجموعه‌های مجموعه‌ی $\{1,2\}$ خواهد بود که در آن $4=2^2$ است.

۸. با فرض $n^n=a$ داریم:

$$n^{n^{n+1}}=n^{n^n\times n^1}\xrightarrow{n^n=a}n^{a\times n}$$
$$=n^{n\times a}=(n^n)^a=a^n$$

۹.

الف) $\underbrace{11^{13}+11^{13}+\ldots+11^{13}}_{\text{۱۱ تا}}$

$+\underbrace{11^{14}+11^{14}+\ldots+11^{14}}_{\text{۱۲۰ تا}}$

$+\underbrace{11^{15}+11^{15}+\ldots+11^{15}}_{\text{۱۳۲۰ تا}}$

$$=11\times11^{13}+120\times11^{14}+1320\times11^{15}$$
$$=11^{14}+120\times11^{14}+1320\times11^{15}$$
$$=121\times11^{14}+1320\times11^{15}$$
$$=11^2\times11^{14}+11\times120\times11^{15}$$
$$=11^{16}+120\times11^{16}=121\times11^{16}$$
$$=11^2\times11^{16}=11^{18}$$

ب) $\left[(\frac{1}{7})^{(\frac{1}{7})^{(\frac{1}{7})}}\times(-\frac{1}{7})^{(\frac{1}{7})^{(\frac{1}{7})}}\right]^{(\frac{1}{7})^{(-\frac{1}{7})}}$

$$\left[(\frac{-1}{49})^{(\frac{1}{7})^{(\frac{1}{7})}}\right]^{(\frac{1}{7})^{(\frac{-1}{7})}}=(\frac{-1}{49})^{\left[(\frac{1}{7})^{(\frac{1}{7})}\times(\frac{1}{7})^{(\frac{-1}{7})}\right]}$$

$$=(\frac{-1}{49})^{\left[(\frac{1}{7})^{\frac{1}{7}+(\frac{-1}{7})}\right]}=(-\frac{1}{49})^{(\frac{1}{7})^0}$$

$$=(\frac{-1}{49})^1=\frac{-1}{49}$$

۱۰. می‌دانیم که زیر رادیکال باید همواره عددی مثبت باشد.

$$-xy^2\geq0\xrightarrow{y^2\geq0}-x\geq0$$
$\Rightarrow$ x عدد منفی است $\Rightarrow|x|=-x$

$$-x^2y\geq0\xrightarrow{x^2\geq0}-y\geq0$$
$\Rightarrow$ y عدد منفی است $\Rightarrow|y|=-y$

$$-\sqrt{-xy^2}-\sqrt{-yx^2}$$
$$=-\sqrt{-x}\times\sqrt{y^2}-\sqrt{-y}\times\sqrt{x^2}$$
$$=-\sqrt{-x}\times|y|-\sqrt{-y}\times|x|$$
$$=-\sqrt{-x}(-y)-\sqrt{-y}(-x)$$
$$=y\sqrt{-x}+x\sqrt{-y}$$

۱۱.

$$\frac{1}{\sqrt[4]{3^4\times5}+8\sqrt[8]{5^2}+7\sqrt[16]{5^4}-16\sqrt[4]{5}}$$
$$=\frac{1}{3\sqrt[4]{5}+8\sqrt[4]{5}+7\sqrt[4]{5}-16\sqrt[4]{5}}$$
$$=\frac{1}{2\sqrt[4]{5}}=\frac{1}{2\sqrt[4]{5}}\times\frac{\sqrt[4]{5^3}}{\sqrt[4]{5^3}}=\frac{\sqrt[4]{125}}{10}$$

۱۲.

$$-x\left\{-x[-3x+x^2-2]-5\right\}$$
$$+1-x^4+3x^3+2x^2$$
$$=-x\left\{3x^2-x^3+2x-5\right\}$$
$$+1-x^4+3x^3+2x^2$$
$$=-3x^3+x^4-2x^2+5x+1$$
$$-x^4+3x^3+2x^2=5x+1$$

۱۳.

$$A=4x^2+12-(2x-4)(2x-3)$$
$$=4x^2+12-[(2x)^2+(-4-3)(2x)+(-4)(-3)]$$
$$=4x^2+12-(4x^2-14x+12)$$
$$=4x^2+12-4x^2+14x-12=14x$$

$$B=2\times7(2x-\frac{1}{7})(7x+\frac{1}{2})$$
$$=(14x-1)(14x+1)$$
$$=(14x^2)-(1)^2=196x^2-1$$

$(B-A^2)^{2010} = (196x^2-1-196x^2)^{2010}$
$= (-1)^{2010} = 1$

۱۴.

الف) $[a\underbrace{(b-1)(b+1)}_{b^2-1}(b^2+1)\times\frac{1}{a}]^2$
$= [(b^2-1)(b^2+1)]^2 = (b^4-1)^2$
$= b^8-2b^4+1$

ب) $1\times(19^2+19\times18+18^2)+18^3$
$\underbrace{(19-18)}_{1}(19^2\times19\times18+18^2)+18^3$
$\xrightarrow[(19-18)(19^2+19\times18+18^2)]{(a-b)(a^2+ab+b^2)}$
$19^3-18^3+18^3=19^3$

۱۵. $x+\frac{1}{x}=3\Rightarrow\frac{x^2+1}{x}=3$
$\Rightarrow x^2+1=3x$ یا $x^2-3x=-1$ (۱)
$(\frac{x^2+1}{2x})^2-2(x^2-3x)$
$\xrightarrow{(1)}(\frac{3x}{2x})^2-2(-1)$
$=\frac{9}{4}+2=\frac{17}{4}$

۱۶.

الف) $x^2(a^6-729x^6)$
$= x^2(a^3-27x^3)(a^3+27x^3)$
$= x^2(a-3x)(a^2+3ax+9x^2)$
$\times(a+3x)(a^2-3ax+9x^2$

ب) $(\underbrace{a+b}_{A})^2-2(\underbrace{a+b}_{A})+1$
$\xrightarrow{a+b=A} A^2-2A+1=(A-1)^2$
$\xrightarrow{a+b=A}(a+b-1)^2$

ج) $x^2+x(2y-2)+y^2-2y+1$
$= x^2+x(\underbrace{2y-2}_{+})+\underbrace{(y-1)^2}_{\times}$

در اینجا x یک جمله‌ی مشترک است که باید ضرب دو جمله‌ی غیرمشترک آن $(y-1)^2$ و جمع آن‌ها $2y-2$ باشد. بنابراین:

$(x+y-1)(x+y-1)=(x+y-1)^2$

د) $3x^3-3x^2-4x^2+4$
$= 3x^2(x-1)-4(x^2-1)$
$= 3x^2(x-1)-4(x-1)(x+1)$
$= (x-1)(3x^2-4x-4)$
$= (x-1)(x-2)(3x+2)$

باید $3x^2-4x-4$ را تجزیه کنیم:
$A=3x^2-4x-4$
$3A=(3x)^2-4(3x)-12$
$3A=(3x-6)(3x+2)$
$3A=3(x-2)(3x+2)$
$A=(x-2)(3x+2)$

۱۷. اگر فاصله‌ی دو شهر را x بگیریم، خواهیم داشت:
$x=10+\frac{1}{3}x\Rightarrow x-\frac{1}{3}x=10$
$\Rightarrow\frac{2}{3}x=10\Rightarrow 2x=30\Rightarrow x=15$

۱۸. هر نقطه مانند A روی محور طول‌ها، عرضش صفر است، یعنی $A(\alpha,0)$
$AB=AC\Rightarrow\sqrt{(\alpha-4)^2+(0-1)^2}$
$=\sqrt{(\alpha-2)^2+(0-1)^2}$
$\Rightarrow(\alpha-4)^2+1=(\alpha-2)^2+1$
$\Rightarrow\alpha^2-8\alpha+16=\alpha^2-4\alpha+4$
$\Rightarrow-4\alpha=-12\Rightarrow\alpha=3$

بنابراین مختصات A (۳,۰) است.

حل مسائل ریاضی سال دوم

میرشهرام صدر

۱. فرض کنیم b ضلع وسطی و d قدر نسبت این تصاعد باشد، بنابراین داریم:

c , b , a
↓ ↓ ↓
b−d , b , b+d

از طرفی طبق رابطه‌ی فیثاغورس داریم:
$a^2=b^2+c^2$
$\Rightarrow(b+d)^2=b^2+(b-d)^2$
$\Rightarrow b^2+2bd+d^2$
$=b^2+b^2-2bd+d^2$
$\Rightarrow b^2=4bd\Rightarrow b=4d$

۲. فرض کنیم a و d به ترتیب جمله‌ی اول و قدر نسبت دنباله‌های حسابی باشند، در این صورت دنباله‌های هندسی به‌صورت زیر است:

$a+2d, a+5d, a+11d$ (۱)

در دنباله‌های هندسی، مربع جمله‌ی وسط برابر با حاصل‌ضرب دو جمله‌ی دیگر است. در نتیجه داریم:

$(a+5d)^2=(a+2d)(a+11d)$
$\Rightarrow a^2+25d^2+10ad$
$=a^2+14ad+33d^2\Rightarrow 4ad+8d^2=0$
$\Rightarrow 4d(a+2d)=0\xrightarrow{d\neq0}a=-2d$

با قرار دادن $a=-2d$ در دنباله‌ی (۱) ملاحظه می‌کنیم که:

$d, 3d, 9d$

و این یک دنباله‌ی هندسی با قدر نسبت ۳ است.

۳. چون f=g و دو زوج مرتب $(1,a+3b)$ و $(1,2a+b)$ مؤلفه‌های اول برابر دارند، پس مؤلفه‌های دوم آن‌ها با هم برابرند، یعنی داریم:

$a+3b=2a+b\Rightarrow a=2b$

اکنون باید زوج‌های باقی‌مانده از f و g با یکدیگر برابر باشند، پس داریم:

$(2,4b+c)=(a,3)\Rightarrow\begin{cases}a=2\\4b+c=3\end{cases}$

بنابراین:

$a=2, a=2b\Rightarrow 2=2b\Rightarrow b=1$
$4b+c=3\Rightarrow 4+c=3\Rightarrow c=-1$

در نتیجه:
$5a+2b+c=5(2)+2(1)+(-1)=11$

۴.

$x_A=y_B\Rightarrow 2n+2m=\frac{n}{3}+1$
$\Rightarrow\frac{5}{3}n+2m=1\Rightarrow 5n+6m=3$

$y_A = x_B \Rightarrow n-m = 2n-1$

$\Rightarrow n+m=1$

$$-5\times\begin{cases}5n+6m=3\\ n+m=1\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}5n+6m=3\\ -5n-5m=-5\end{cases}$$

$m=-2$

$n+(-2)=1 \Rightarrow n=3$

۵. با توجه به تابع f داریم:

$f(1)=-3$

$f(f(1))=f(-3)=2$

$f(f(f(1)))=f(2)=5$

۶. حجم مخروط به شعاع قاعده‌ی ۵ و ارتفاع h برابر با $\frac{1}{3}$ حجم استوانه به همان شعاع قاعده و ارتفاع است. در صورتی که حجم استوانه را V در نظر بگیریم، حجم هر یک از مخروط‌ها $\frac{1}{3}V$ و در نتیجه حجم منبع و حجم استوانه برابر است با:

$V_{\text{حجم منبع}} = \frac{1}{3}V + V + \frac{1}{3}V = \frac{5}{3}V$

$V_{\text{حجم استوانه}} = \pi r^2 h = 25\pi h$

در نتیجه داریم:

$V_{\text{حجم منبع}} = \frac{5}{3}V = \frac{5}{3}\times 25\pi h = \frac{125}{3}\pi h$

۷. برای محاسبه‌ی $f(k-1)$ کافی است در تابع $f(x)$ به جای xها قرار دهیم $(k-1)$، در این صورت:

$$f(k-1)=\begin{cases}2(k-1) & k-1>2\\ 4 & k-1=2\\ (k-1)^2+1 & k-1<2\end{cases}$$

$$\Rightarrow f(k-1)=\begin{cases}2k-2 & k>3\\ 4 & k=3\\ k^2-2k+2 & k<3\end{cases}$$

۸.

$p=2x^2+3x+2=0$

$\Delta = 9-16=-7<0$

چون $\Delta<0$ و $a=2>0$، پس سه جمله‌ای $2x^2+3x+2$ به ازای جمیع مقادیر x مثبت است. بنابراین مخرج کسر همواره مثبت است، پس برای این که کسر مثبت باشد باید صورت کسر همواره مثبت باشد، یعنی باید داشته باشیم:

$ax^2+2x+(a-2)>0$

برای این منظور باید دستگاه نامعادله‌های $\begin{cases}\Delta<0\\ a>0\end{cases}$ را حل کنیم.

$$\begin{cases}\Delta=(2)^2-4(a)(a-2)<0\\ a>0\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}-4a^2+8a+4<0\\ a>0\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}a<1-\sqrt{2}, a>1+\sqrt{2}\\ a>0\end{cases}$$

$\Rightarrow a>1+\sqrt{2}$

۹. این تابع وقتی با معناست که دو شرط زیر برقرار باشد:

$$\begin{cases}1)\ 16-x^2\geq 0\\ 2)\ -x^2-x+30>0\end{cases}$$

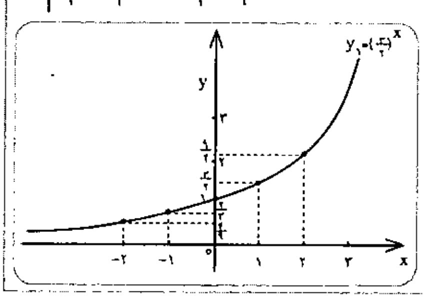
$$\Rightarrow\begin{cases}x^2\leq 16\\ x^2+x-30<0\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}-4\leq x\leq 4 \Rightarrow D_1=[-4,4]\\ (x+6)(x-5)<0\Rightarrow D_2=(-6,5)\end{cases}$$

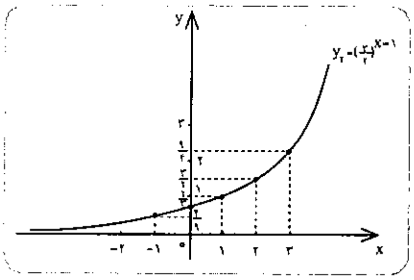
$D=D_1\cap D_2=[-4,4]\cap(-6,5)=[-4,4]$

۱۰. ابتدا به کمک نقطه‌یابی نمودار، تابع با ضابطه‌ی $y_1=(\frac{3}{2})^x$ را رسم می‌کنیم، سپس با انتقال، نمودار تابع $f(x)$ را رسم خواهیم کرد.

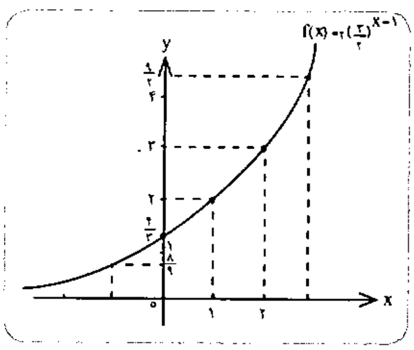
x	-2	-1	0	1	2
y	$\frac{4}{9}$	$\frac{2}{3}$	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{9}{4}$



اکنون با انتقال نمودار $y_1=(\frac{3}{2})^x$ به اندازه‌ی یک واحد به سمت راست، نمودار تابع با ضابطه‌ی $y_2=(\frac{3}{2})^{x-1}$ را خواهیم داشت.



در مرحله‌ی آخر با دو برابر کردن عرض هر نقطه روی نمودار تابع $y_2=(\frac{3}{2})^{x-1}$، نمودار تابع $f(x)$ را به صورت زیر رسم می‌کنیم.



حل مسائل هندسه‌ی ۱

محمدهاشم موسوی

۱. سه پاره خط a، b و c روی یک خط راست هستند.

۲. یک زاویه را α درجه فرض می‌کنیم. زاویه‌ی دیگر $3\alpha-6^\circ$ خواهد بود و چون این دو زاویه متمم یکدیگرند، پس داریم:

$\alpha+(3\alpha-6^\circ)=90^\circ \Rightarrow 4\alpha-6^\circ=90^\circ$

$\Rightarrow 4\alpha=96^\circ \Rightarrow \alpha=24^\circ$

$\Rightarrow 3\alpha-6^\circ=72^\circ-6=66^\circ$

پس دو زاویه یکی °۲۴ و دیگری °۶۶ است.

۳. الف) مثلث‌های I و III به حالت «زضز» یعنی برابری دو زاویه‌ی متناظر و تساوی ضلع بین این دو زاویه، هم‌نهشت‌اند

(زاویه‌ی سوم این دو مثلث ۷۰° است).

ب) مثلث‌های II و III به حالت «ض‌زض»، یعنی برابری دو ضلع متناظر هم‌نهشت‌اند.

پ) مثلث‌های II و III به حالت «ض‌زض»، یعنی برابری دو ضلع نظیر و زاویه‌ی بین این دو ضلع هم‌نهشت‌اند.

ت) مثلث‌های قائم‌الزاویه‌ی I و III به دلیل برابری وتر و یک ضلع هم‌نهشت‌اند.

۴. این سه مثلث به حالت «زض‌ز» هم‌نهشتند، زیرا داریم:

$AB = BC = AC,$
$A\hat{B}F = B\hat{C}D = C\hat{A}E,$
$B\hat{A}F = C\hat{B}D = A\hat{C}E$
$= ۱۸۰^\circ - ۶۰^\circ = ۱۲۰^\circ$

۵. تعداد قطرهای ۱۷ ضلعی محدب را به دست می‌آوریم. داریم:

$\text{تعداد قطرهای n ضلعی محدب} = \frac{n(n-۳)}{۲},$

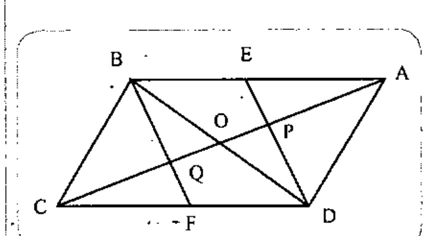
$n = ۱۷$

$\text{تعداد قطرها} = \frac{۱۷(۱۷-۳)}{۲} = ۱۱۹$

درنتیجه اختلاف تعداد قطرها و تعداد ضلع‌های ۱۷ ضلعی محدب برابر است با:

$۱۱۹ - ۱۷ = ۱۰۲$

۶. قطر BD از متوازی‌الاضلاع را رسم می‌کنیم و نقطه‌ی برخورد آن با قطر AC را O می‌نامیم. می‌دانیم که قطرهای AC و BD یکدیگر را نصف کرده‌اند، بنابراین با توجه به این که E وسط AB و F وسط CD است، نقطه‌ی P محل برخورد میانه‌های مثلث ABD و نقطه‌ی Q محل برخورد میانه‌های مثلث BCD است. پس در مثلث‌های ABD و BCD داریم:



$AP = \frac{۲}{۳}AO = \frac{۲}{۳} \times \frac{۱}{۲}AC = \frac{۱}{۳}AC,$

$OP = \frac{۱}{C} \times \frac{۱}{۲}AC = \frac{۱}{۶}AC$

$CQ = \frac{۲}{۳}CO = \frac{۲}{۳} \times \frac{۱}{۲}AC = \frac{۱}{۳}AC,$

$OQ = \frac{۱}{۳}OC = \frac{۱}{۳} \times \frac{۱}{۲}AC = \frac{۱}{۶}AC$

$PQ = OP + OQ = \frac{۱}{۶}AC + \frac{۱}{۶}AC$

$= \frac{۱}{۳}AC \Rightarrow AP = PQ = QC = \frac{۱}{۳}AC$

پس حکم مسئله ثابت شد.

۷. الف) مساحت مستطیل را S، محیط آن را ۲P، قطر آن را d و دو ضلع آن را a و b می‌نامیم. بنابر داده‌های مسئله داریم:

$$\text{(الف)} \begin{cases} ۲P = ۲(a+b) = ۶۸ \\ \frac{b}{a} = \frac{۸}{۹} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a+b = ۳۴ \\ b = \frac{۸}{۹}a \end{cases} \Rightarrow a + \frac{۸}{۹}a = ۳۴$$

$$\Rightarrow \frac{۱۷a}{۹} = ۳۴ \Rightarrow a = ۱۸$$

$$\Rightarrow b = \frac{۸}{۹} \times ۱۸ = ۱۶$$

پس طول و عرض یا در واقع دو ضلع مجاور این مستطیل ۱۸ و ۱۶ است.

ب) اگر نقطه‌ی برخورد قطرهای مستطیل را O بنامیم، مثلث‌های AOD و BCO متساوی‌الاضلاع هستند، زیرا مثلث‌های متساوی‌الساقینی هستند که زاویه‌ی رأس آن‌ها ۶۰° است، پس داریم:

$$\begin{cases} d = \sqrt{a^۲ + b^۲} \\ b = \frac{d}{۲} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۵۰ = \sqrt{a^۲ + b^۲} \\ b = \frac{۵۰}{۲} = ۲۵ \end{cases}$$

$$\Rightarrow ۵۰ = \sqrt{a^۲ + ۶۲۵} \Rightarrow ۲۵۰۰ = a^۲ + ۶۲۵$$
$$\Rightarrow a^۲ = ۱۸۷۵ \Rightarrow a = ۲۵\sqrt{۳}$$

۸. مساحت متوازی‌الاضلاع را S و ضلع و ارتفاع نظیر آن از این متوازی‌الاضلاع را به ترتیب a و h_a می‌نامیم. داریم:

$S = ۵۷۶, a = ۲۴, S = a.h_a$

$\Rightarrow ۵۷۶ = ۲۴ \times h_a \Rightarrow h_a = ۲۴$

$S = ۴۸۰, \frac{h_a}{a} = \frac{۵}{۶}, S = a.h_a$

$\Rightarrow a = \frac{h_a}{\frac{۵}{۶}} = \frac{۶}{۵}h_a$

$\Rightarrow ۴۸۰ = \frac{۶}{۵}h_a \times h_a$

$\Rightarrow ۴۸۰ = \frac{۶}{۵} \times h_a^۲ \Rightarrow h_a^۲ = ۴۰۰ \Rightarrow h_a = ۲۰$

ب) $S = ۱۱۷, a = h_a + ۴, S = a.h_a$

$\Rightarrow ۱۱۷ = (h_a + ۴)h_a$

$\Rightarrow ۱۱۷ = h_a^۲ + ۴h_a$

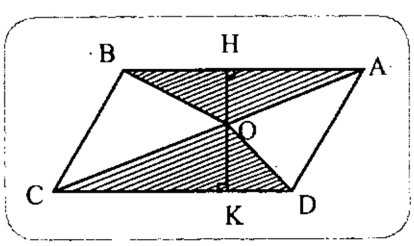
$\Rightarrow h_a^۲ + ۴h_a - ۱۱۷ = ۰$

$\Rightarrow h_a = \frac{-۲ \pm \sqrt{۴ + ۱۱۷}}{۱}$

$= -۲ \pm ۱۱ \Rightarrow h_a = -۱۳, h_a = ۹$

پس جواب قابل قبول $h_a=۹$ است.

۹. از O خطی عمود بر ضلع‌های AB و CD رسم می‌کنیم تا این دو ضلع را به‌ترتیب در H و K قطع کند. OH ارتفاع رأس O از مثلث OAB و OK ارتفاع رأس O از مثلث OCD و HO+OK=HK ارتفاع متوازی‌الاضلاع است. با توجه به این که AB=CD است، داریم:



$S_{OAB} = \frac{۱}{۲}OH.AB$

$S_{OCD} = \frac{۱}{۲}OK.CD = \frac{۱}{۲}OK.AB$

$\Rightarrow S_{OAB} + S_{OCD} = \frac{۱}{۲}OH.AB$

$+ \frac{۱}{۲}OK.AB - \frac{۱}{۲}AB(OH + OK)$

$\Rightarrow S_{OAB} + S_{OCD} = \frac{۱}{۲}AB(HK)$

$\Rightarrow S_{OAB} + S_{OCD} = \frac{۱}{۲}S_{ABCD}$

۱۰. داریم:

$$\frac{3\sqrt{3}a^2}{2}=54\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow a^2=36\Rightarrow a=6$$

اندازه‌ی ضلع شش‌ضلعی منتظم

سهم شش‌ضلعی منتظم $=\frac{a\sqrt{3}}{2}=\frac{6\sqrt{3}}{2}=3\sqrt{3}$

۱۱. داریم:

$$AO=\frac{AC}{2}=\frac{12}{2}=6,\quad DO=\frac{DB}{2}=\frac{16}{2}=8$$

$$\Rightarrow AD=\sqrt{AO^2+DO^2}$$

$$\Rightarrow AD=\sqrt{6^2+8^2}=10$$ اندازه‌ی ضلع لوزی

از طرفی می‌دانیم که:

مساحت لوزی $=\frac{1}{2}AC.BD=AD.CE$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\times 12\times 16=10\times CE$$

$$\Rightarrow CE=CF=9/6$$

$$AC^2=CE^2+AE^2$$

$$\Rightarrow 12^2=9/6^2+AE^2$$

$$\Rightarrow AE=7/2$$

$$S_{ACE}=\frac{1}{2}AE.EC=\frac{1}{2}\times 7/2\times 9/6=34/56$$

$$S_{CEAF}=2S_{ACE}$$

$$\Rightarrow S_{CEAF}=2\times 34/56=69/12$$

حل مسائل حسابان

مجتبی رفیعی

۱. دونده، مرتبه‌ی اول ۴ متر، مرتبه‌ی دوم ۸ متر، مرتبه‌ی سوم ۱۲ متر و ... را طی می‌کنند. مجموع جملات تصاعد ..., ۴،۸،۱۲ برابر ۴۸۰ است. پس:

$$480=\frac{n}{2}(2\times 4+(n-1)\times 4)=n(2+2n)\Rightarrow n^2+n-240=0$$

$$\Rightarrow n=15$$

۲. فرض کنید $q=\frac{b}{a}$ پس $b=aq$، $c=aq^2$ و $d=aq^3$.

سمت چپ: $(b-c)^2=(aq-aq^2)^2=a^2q(1-q)^2$

سمت راست: $ac+bd-2ad$

$$=a(aq^2)+(aq)(aq^3)-2a(aq^3)$$

$$=a^2q^2+a^2q^4-2a^2q^3$$

$$=a^2q(1+q^2-2q)$$

سمت چپ $=a^2q^2(1-q)^2$

۳. این مسئله چهار حالت دارد که بررسی می‌کنیم:

حالت اول) تقسیم x^n-a^n بر $x-a$:

$$R=f(a)=a^n-a^n=0$$

درنتیجه x^n-a^n همواره بر $x-a$ بخش‌پذیر است.

$$x^n-a^n=(x-a)(x^{n-1}+ax^{n-2}+\cdots+a^{n-2}x+a^{n-1})$$

$$\Rightarrow Q(x)=x^{n-1}+ax^{n-2}+\cdots+a^{n-1}$$

حالت دوم) تقسیم x^n+a^n بر $x+a$:

$$P=f(-a)=(-a)^n+a^n=\begin{cases}0 & n \text{ زوج}\\ -2a^n & n \text{ فرد}\end{cases}$$

یعنی x^n+a^n وقتی بر $x+a$ بخش‌پذیر است که n فرد باشد. حال خارج قسمت را در هر حالت تعیین می‌کنیم:

الف) $n=2k+1$:

$$x^n+a^n=(x+a)(\underbrace{x^{n-1}-ax^{n-2}+\cdots-a^{n-2}x+a^{n-1}}_{\text{خارج قسمت}})$$

ب) $n=2k$:

$$x^n+a^n=(x+a)Q(x)+2a^n$$

$$\Rightarrow Q(x)=\frac{x^n-a^n}{x+a}=\frac{x^{2k}-a^{2k}}{x+a}$$

$$=\frac{(x^2)^k-(a^2)^k}{x+a}$$

$$=\frac{(x^2-a^2)(x^{2k-2}+a^2x^{2k-4}+\cdots+a^{2k-2})}{x+a}$$

$$=(x-a)(x^{n-2}+a^2x^{n-4}+\cdots+a^{n-2})$$

حالت سوم) x^n-a^n بر $x+a$:

$$R=f(-a)=(-a)^n-a^n=\begin{cases}0 & n \text{ زوج}\\ -2a^n & n \text{ فرد}\end{cases}$$

الف) $n=2k$:

$$x^n-a^n=(x+a)Q(x)+0$$

$$\Rightarrow Q(x)=\frac{x^{2k}-a^{2k}}{x+a}$$

$$=(x-a)(x^{n-2}+a^2x^{n-4}+\cdots+a^{n-2})$$

(مانند ب در حالت دوم)

ب) $n=2k+1$:

$$x^n-a^n=(x+a)Q(x)-2a^n$$

$$\Rightarrow Q(x)=\frac{x^n+a^n}{x+a}$$

$$=x^{n-1}-ax^{n-2}+a^2x^{n-3}-\cdots+a^{n-1}$$

حالت چهارم) x^8-a^8 بر $x-a$:

$$R=f(a)=a^n+a^n=2a^n$$

$$x^n+a^n=(x-a)Q(x)+2a^n$$

$$\Rightarrow Q(x)=\frac{x^n-a^n}{x-a}$$

$$=x^{n-1}+x^{n-2}a+\cdots+a^{n-1}$$

۴. یادآوری: در بسط $(a+b)^n$ اگر n زوج، جمله‌ی $\frac{n}{2}+1$ و اگر n فرد باشد، جملات $\frac{n+1}{2}$ و $\frac{n+1}{2}+1$ دارای بیش‌ترین ضریب هستند. پس:

$2m+1$ زوج باشد $2m+1\Rightarrow \frac{2m+1}{2}+1=9$

$$\Rightarrow 2m+1=16\Rightarrow m=5$$

۵.

$$2(x_1^5+x_2^5)=11(x_1^3+x_2^3)$$

$$\Rightarrow 2(x_1+x_2)(x_1^4-x_1^3x_2+x_1^2x_2^2-x_1x_2^3+x_2^4)$$

$$=11(x_1+x_2)(x_1^2-x_1x_2+x_2^2)$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x_1+x_2=0\xrightarrow{x_1^2+x_2^2=5}x_1x_2=\frac{-5}{2}\\ 2\left((x_1^2+x_2^2)^2-x_1^2x_2^2-x_1x_2(x_1^2+x_2^2)\right)\\ =11(x_1^2+x_2^2-x_1x_2)\end{cases}$$

$$\xrightarrow{x_1+x_2=t} 3(25-t^2-5t)$$

$$=11(5-t)\Rightarrow 3t^2+4t-20=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t=2\Rightarrow x_1x_2=2\Rightarrow \begin{cases} x_1+x_2=3 \\ x_1+x_2=-3 \end{cases} \\ t=\frac{-10}{3}\Rightarrow x_1x_2=\frac{-10}{3} \text{ غ‌ق} \end{cases}$$

(زیرا فرض $x_1^2+x_2^2=5$ را نقض می‌کند)

$$\begin{cases} x^2-3x+2=0 \\ x^2+3x+2=0 \end{cases}$$ دو جواب دیگر.

.۶

$$\frac{\frac{b+c+a}{a(b+c)}}{\frac{b+c-a}{a(b+c)}}\times\frac{2bc+b^2+c^2-a^2}{(2bc)}$$

$$\times\frac{2bc}{a+b+c}=\frac{b+c+a}{b+c-a}\times\frac{(b+c)^2-a^2}{a+b+c}$$

$$=\frac{(b+c+a)(b+c-a)}{b+c-a}=b+c+a$$

.۷

$$D_{f_1}: x\ge\frac{-1}{5}\Rightarrow(2x+3)+(5x+1)$$

$$+2\sqrt{(2x+3)(5x+1)}=12x+13$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{(2x+3)(5x+1)}=5x+9$$

$$\Rightarrow D_{f_2}:(x\ge\frac{-1}{5})\cup(x\le\frac{-3}{2})$$

$$\Rightarrow D_{f\ \text{نهایی}}: x\ge\frac{-1}{5}$$

$$\Rightarrow 4(2x+3)(5x+1)=25x^2+90x+81$$

$$\Rightarrow 15x^2-22x-69=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x'=3 \\ x''=\frac{-23}{15} \end{cases}$$

.۸

$$f(x)=(x^2+2x)(x^2+2x+2)$$

$$x^2+2x=t\Rightarrow y=t(t+2)$$

$$\Rightarrow y=t^2+2t=(t+1)^2-1,$$

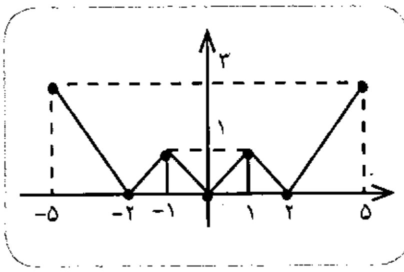
$$t\ge\frac{-9}{4}$$

$$t+1\ge\frac{-5}{4}\Rightarrow(t+1)^2\ge 0$$

$$\Rightarrow(t+1)^2-1\ge -1$$

$$\Rightarrow R_f=[-1,+\infty)$$

.۹



چون نمودار نسبت به محور عرض‌ها متقارن است، پس تابع زوج است.

ب) بله. برای مثال

.۱۰ $\forall x_2$ و $x_1\in D_{f+g}: x_2>x_1$

$$\Rightarrow\begin{cases} f(x_2)>f(x_1) \\ g(x_2)>g(x_1) \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x_2)+g(x_2)>f(x_1)+g(x_1)$$

$$\Rightarrow(f+g)(x_2)>(f+g)(x_1)$$

درنتیجه f+g اکیداً صعودی است.

ب) بلـه. بـرای مثـال g(x)=+3x و f(x)=2x، پس: f(x)-g(x)=-x اکیداً نزولی است.

.۱۱

$$y=f(x)\Rightarrow x=f^{-1}(y)$$

$$f \text{ فرد}\Rightarrow f(-x)=-f(x)$$

$$\Rightarrow f(-x)=-y\Rightarrow f^{-1}(-y)=-x$$

$$=-f^{-1}(y)\Rightarrow f^{-1} \text{ فرد است}$$

.۱۲

$$f(x_1)=f(x_2)$$

$$\Rightarrow x_1+[x_1]=x_2+[x_2]$$

$$\Rightarrow x_1-x_2=[x_2]-[x_1]$$

با فرض $[x_2]-[x_1]=k\in Z$ داریم:

$$x_1=x_2+k$$

$$\Rightarrow x_2+k+[x_2+k]=x_2+[x_2]$$

$$\Rightarrow x_2+[x_2]+2k=x_2+[x_2]$$

$$\Rightarrow k=0\Rightarrow x_1-x_2=0$$

$\Rightarrow x_1=x_2\Rightarrow$ f یک به یک است.

$$y=x+[x]$$

$$\Rightarrow[y]=[x+[x]]=2[x]$$

$$\Rightarrow[x]=\frac{[y]}{2}$$

$$\begin{cases} y=x+[x] \\ [y]=2[x] \end{cases}\Rightarrow y-[y]=x-[x]$$

$$\Rightarrow x-[x]=y-[y]$$

$$\Rightarrow(x-[x])+[x]=y-[y]+\frac{[y]}{2}$$

$$\Rightarrow x=y-\frac{[y]}{2}\Rightarrow f^{-1}(x)=x-\frac{[x]}{2}$$

.۱۳

$$0\le x\le 10\Rightarrow 0\le[x]\le 10$$

$$\Rightarrow\frac{1}{3}\le\frac{[x]+1}{3}\le\frac{11}{3}$$

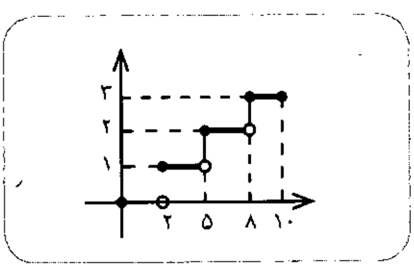
$$\Rightarrow\left[\frac{[x]+1}{3}\right]\in\{0,1,2,3\}$$

$$\left[\frac{[x]+1}{3}\right]=0\Rightarrow 0\le x<2$$

$$\left[\frac{[x]+1}{3}\right]=1\Rightarrow 2\le x<5$$

$$\left[\frac{[x]+1}{3}\right]=2\Rightarrow 5\le x<8$$

$$\left[\frac{[x]+1}{3}\right]=3\Rightarrow 8\le x<10$$



.۱۴

$$[\sin^2 x]=\begin{cases} 1 & x=(2k+1)\frac{\pi}{2} \\ 0 & x\neq(2k+1)\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$x=(۲k+۱)\frac{\pi}{۲}\Rightarrow ۱+\left[\frac{x}{۲}\right]=-۱$$

$$\Rightarrow \left[\frac{x}{۲}\right]=-۲$$

$$\left.\begin{array}{l}\Rightarrow -۲\le \frac{x}{۲}<-۱\Rightarrow -۴\le x<-۲\\ x=(۲k+۱)\frac{\pi}{۲}\end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow D=\varnothing$$

$$x\ne (۲k+۱)\frac{\pi}{۲}\Rightarrow ۰+\left[\frac{x}{۲}\right]=-۱$$

$$\left.\begin{array}{l}\Rightarrow -۱\le \frac{x}{۲}<۰\Rightarrow -۲\le x<۰\\ x\ne (۲k+۱)\frac{\pi}{۲}\end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow x\in[-۲,۰)-\left\{\frac{-\pi}{۲}\right\}$$

.۱۵

$$۲\sin x\cos x-۲\cos x-\sqrt{۳}\sin x+\sqrt{۳}=۰$$

$$\Rightarrow ۲\cos x(\sin x-۱)-\sqrt{۳}(\sin x-۱)=۰$$

$$\Rightarrow (\sin x-۱)(۲\cos x-\sqrt{۳})=۰$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\sin x=۱\Rightarrow x=۲k\pi+\frac{\pi}{۲}\\ \cos x=\frac{\sqrt{۳}}{۲}\Rightarrow x=۲k\pi\pm\frac{\pi}{۶}\end{cases}$$

.۱۶

$$tg(۲Arctg\frac{۱}{۲})=\frac{۲(\frac{۱}{۲})}{(۱-\frac{۱}{۴})}=\frac{۴}{۳}$$

$$\alpha=۲Arctg\frac{۱}{۲}+Arctg\frac{۱}{۳}$$

$$tg\alpha=\frac{tg(۲Arctg\frac{۱}{۲})+tg(Arctg\frac{۱}{۳})}{۱-tg(۲Arctg\frac{۱}{۲}).tg(Arctg\frac{۱}{۳})}$$

$$=\frac{\frac{۴}{۳}+\frac{۱}{۳}}{۱-(\frac{۴}{۳})(\frac{۱}{۳})}=\frac{\frac{۵}{۳}}{\frac{۵}{۹}}=۳\Rightarrow tg\alpha=۳$$

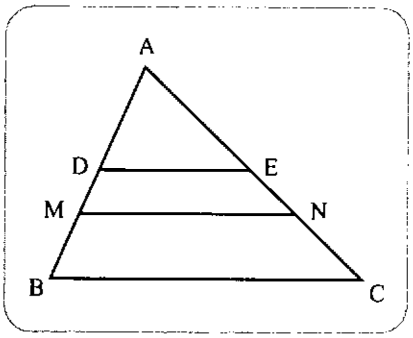
$$\Rightarrow \alpha=Arctg۳$$

حل مسائل هندسه‌ی ۲

محمدهاشم رستمی

۱. الف) پاره‌خط‌های AD، DB، AE و EC را با دقت به کمک خط‌کش مدرج اندازه می‌گیریم. داریم:

$$AD=۱/۵, DB=۱/۷,$$
$$AE=۲/۱, EC=۲/۴$$



ب) نسبت‌های $\frac{AD}{DB}$ و $\frac{AE}{EC}$ را محاسبه می‌کنیم. داریم:

$$\frac{AD}{DB}=\frac{۱/۵}{۱/۷}\simeq ۰/۸, \frac{AE}{EC}=\frac{۲/۱}{۲/۴}\simeq ۰/۸$$

$$\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}\simeq ۰/۸$$

پ) پاره‌خط‌های AM، MB، AN و NC را با دقت به کمک خط‌کش اندازه می‌گیریم. داریم:

$$AM=۲/۱, MB=۱, AN=۳,$$
$$NC=۱/۴$$

ت) نسبت‌های $\frac{AM}{MB}$ و $\frac{AN}{NC}$ را به دست می‌آوریم. داریم:

$$\frac{AM}{MB}=\frac{۲/۱}{۱}=۲/۱, \frac{AN}{NC}=\frac{۳}{۱/۴}\simeq ۲/۱$$

$$\Rightarrow \frac{AM}{MB}=\frac{AN}{NC}$$

ث) از انجام مراحل بالا به این حدس می‌رسیم که اگر در مثلثی یک خط موازی یک ضلع رسم شود، دو ضلع دیگر مثلث را به یک نسبت تقسیم می‌کنند.

۲. الف) درست است.

ب) نادرست است، زیرا BC=۹>AC=۸ نتیجه می‌شود که $\hat{A}>\hat{C}$ است.

پ) همواره درست نیست، زیرا اگر ضلع‌های مثلث متساوی‌الساقین ABC (AB=AC) را امتداد دهیم، چهار زاویه‌ی حاده و چهار زاویه‌ی منفرجه‌ی مساوی ایجاد می‌شود، اما AB و AC موازی نیستند. در واقع خط BC دو خط AB و AC را قطع کرده است به قسمی که چهار زاویه‌ی حاده‌ی مساوی چهار زاویه‌ی منفرجه‌ی مساوی به وجود می‌آید، اما دو خط AB و AC موازی نیستند.

۳. داریم:

محیط مثلث = x+(x−۱)+(۲x−۳)

=۴x−۴

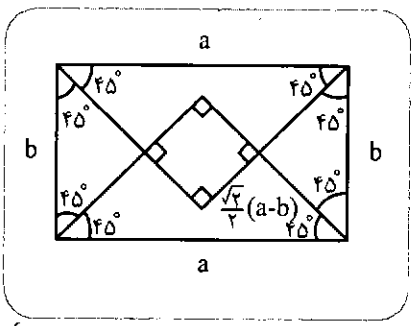
$$\Rightarrow ۴۰=۴x-۴\Rightarrow x=۱۱$$

x−۱=۱۱−۱=۱۰،

۲x−۳=۲۲−۳=۱۹

پس اندازه‌ی ضلع‌های این مثلث ۱۱، ۱۰ و ۱۹ است.

۴. می‌دانیم که اندازه‌ی ضلع مربعی که از برخورد نیمسازهای زاویه‌های درونی مستطیلی به ابعاد a و b (a>b) پدید می‌آید، برابر $\frac{\sqrt{۲}}{۲}(a-b)$ است. بنابراین داریم:



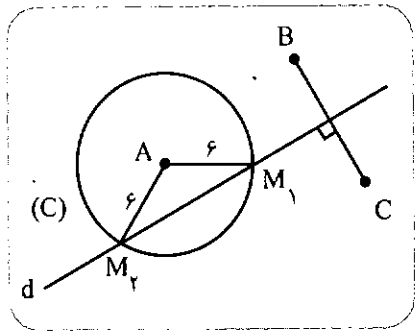
$$\begin{cases}a=۲b\\ \frac{\sqrt{۲}}{۲}(a-b)=۸\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=۲b\\ a-b=۸\sqrt{۲}\end{cases}$$

$$\Rightarrow ۲b-b=۸\sqrt{۲}$$

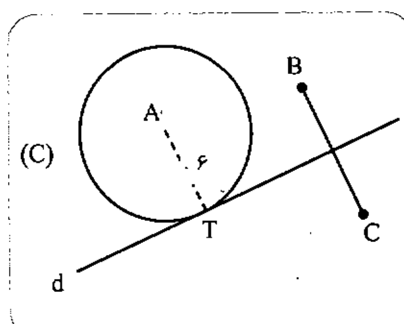
$\Rightarrow b=۸\sqrt{۲}$ اندازه‌ی عرض مستطیل

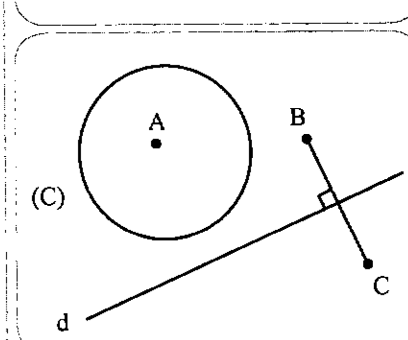
$\Rightarrow a=۲b=۱۶\sqrt{۲}$ اندازه‌ی طول مستطیل

۵. می‌دانیم مکان هندسی نقطه‌ای که از صفحه‌ی گذرنده بر سه نقطه‌ی A، B و C که از دو نقطه‌ی B و C به یک فاصله باشد، عمود منصف پاره خط BC است. این عمود منصف را رسم می‌کنیم و خط d می‌نامیم. از طرفی مکان هندسی نقطه‌ای از صفحه‌ی ABC که از نقطه‌ی A به فاصله‌ی ۶ قرار دارد دایره‌ای به مرکز A و به شعاع ۶ است. این دایره را نیز رسم می‌کنیم و آن را دایره‌ی (C) می‌نامیم.



نقطه‌ی برخورد خط d و دایره‌ی (C) جواب مسئله است و به تعداد نقطه‌های برخورد، مسئله دارای جواب است، به این معنی اگر خط d دایره‌ی (C) را در دو نقطه قطع کند مسئله دو جواب دارد (نقطه‌های M_1 و M_2) و اگر خط d بر دایره‌ی (C) مماس باشد، نقطه‌ی تماس T جواب مسئله خواهد بود و اگر خط d دایره‌ی (C) را قطع نکند مسئله جواب ندارد.

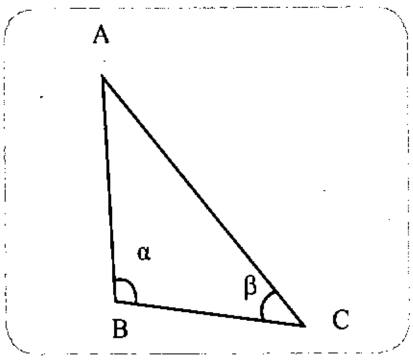




۶. فرض می‌کنیم مسئله حل شده و مثلث ABC جواب آن است، یعنی مثلثی باشد که محیط آن مساوی ۲P، اندازه‌ی زاویه‌های $\hat{B}$ و $\hat{C}$ از آن به ترتیب مساوی α و β باشند ($\hat{B}=\alpha$ و $\hat{C}=B$). ضلع BC از این مثلث را از طرف B به اندازه‌ی BE=AB و از طرف C به اندازه‌ی CF=AC امتداد می‌دهیم و از A به E و F وصل می‌کنیم. اولاً EF=۲P، یعنی برابر محیط مثلث است، زیرا داریم:

EF=EB+BC+CF

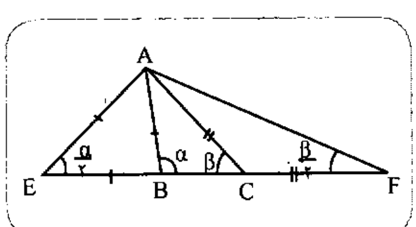
=AB+BC+AC=۲P محیط مثلث



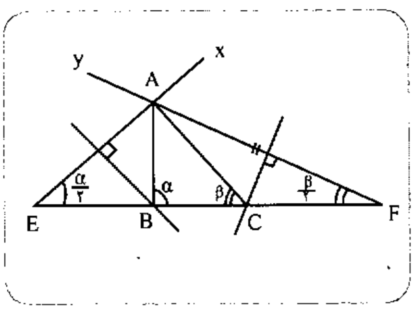
ثانیاً زاویه‌های $A\hat{E}B=\frac{\alpha}{۲}$ و $A\hat{F}C=\frac{B}{۲}$ است، زیرا مثلث‌های AEB و AFC متساوی‌الساقین‌اند و زاویه‌های $\hat{B}=\alpha$ و $\hat{C}=\beta$ زاویه‌های خارجی نظیر تماس‌های B و C در این دو مثلث‌اند، یعنی

$$\hat{B}=۲\hat{E}\Rightarrow\alpha=۲\hat{E}\Rightarrow E=\frac{\alpha}{۲}$$

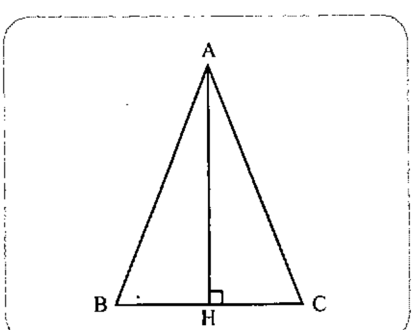
$$\hat{C}=۲\hat{F}\Rightarrow\beta=۲\hat{F}\Rightarrow F\Rightarrow\frac{\beta}{۲}$$



در نتیجه، مثلث AEF به دلیل معلوم بودن ضلع EF=۲P و زاویه‌های $\hat{E}=\frac{\alpha}{۲}$ و $\hat{F}=\frac{\beta}{۲}$ قابل رسم است. بنابراین برای رسم مثلث ABC، نخست مثلث AEF را با معلوم بودن ER=۲P، $\hat{E}=\frac{\alpha}{۲}$ و $\hat{F}=\frac{\beta}{۲}$ رسم می‌کنیم (پاره خط EF را به طول ۲P رسم می‌کنیم. از E خطی چنان رسم می‌کنیم که با EF زاویه‌ی $\hat{E}=\frac{\alpha}{۲}$ را بسازد (خط Ex) و از F خطی چنان رسم می‌کنیم که با EF زاویه‌ی $\hat{F}=\frac{\beta}{۲}$ را بسازد (خط Fy). این دو خط در یک طرف EF واقعند. نقطه‌ی برخورد Ex و Fy رأس A از مثلث ABC است. عمودمنصف ضلع AE را رسم می‌کنیم تا EF را در نقطه‌ی B قطع کند و عمود منصف ضلع AF را نیز رسم می‌کنیم تا EF را در نقطه‌ی C قطع کند از A به B و C وصل می‌کنیم. مثلث ABC جواب مسئله است.



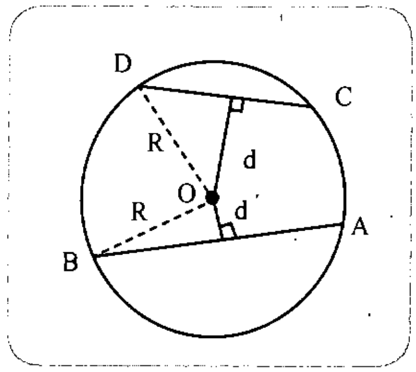
نکته: چون مثلث‌های AEB و AFC در رأس‌های B و C متساوی‌الساقین‌اند، یعنی AB=BE و AC=CF است، پس عمودمنصف‌های قاعده‌های AE و AF به ترتیب از B و C می‌گذرند، زیرا می‌دانیم که در هر مثلث متساوی‌الساقین عمود منصف قاعده‌ی مثلث از رأس آن مثلث می‌گذرد. در شکل، مثلث ABC در رأس A متساوی‌الساقین است (AB=AC) و عمودمنصف قاعده‌ی BC از رأس A می‌گذرد.



۷. با توجه به این که اندازه‌ی هر زاویه‌ی مرکزی دایره مساوی مقدار کمان روبه‌روی آن و AOB قطر دایره است، یعنی محیط دایره را به دو کمان مساوی ۱۸۰° تقسیم می‌کند، داریم:

$$x=\widehat{AD}=۴۰^\circ$$
$$\widehat{BD}=z=۱۸۰^\circ-۴۰^\circ=۱۴۰^\circ$$
$$\Rightarrow y=z=۱۴۰^\circ$$

۸. می‌دانیم که d فاصله‌ی وتری به طول L در دایره‌ای به شعاع R از مرکز آن دایره از دستور $d=\sqrt{R^۲-\frac{l^۲}{۴}}$ محاسبه می‌شود. با توجه به این مطلب، فاصله‌ی وترهای AB و CD از مرکز دایره را به ترتیب d و d' می‌نامیم. برای محاسبه‌ی d و d' داریم:



$$R=۱۰, AB=۱۲, AC=۱۶$$
$$\Rightarrow d=\sqrt{۱۰^۲-\frac{۱۲^۲}{۴}}=۸$$
$$d'=\sqrt{۱۰^۲-\frac{۱۶^۲}{۴}}=\sqrt{۳۶}=۶$$
$$\Rightarrow d=۸>d'=۶$$

بنابراین، وتر CD به مرکز دایره نزدیک‌تر است.

این مسئله مصداقی برای این قضیه است که:

در یک دایره (یا دو دایره‌ی مساوی) از دو وتر، آن که بزرگ‌تر است، به مرکز دایره نزدیک‌تر است.

۹. می‌دانیم که در هر چهارضلعی محیطی مجموع دو ضلع روبه‌رو با هم برابرند، یعنی در چهارضلعی ABCD داریم: AB+CD=AD+BC و از آن‌جا داریم:

محیط چهارضلعی $=۲(AB+CD)$
$=۲(BT+AT+DM+MC),$
$AT=AS$
$\Rightarrow$ محیط چهارضلعی $=۲(BT+AS+DM+MC)$
$$\Rightarrow ۱۲۰=۲(x+۱+x+۱۶+۱۳)$$
$$\Rightarrow ۶۰=۲x+۳۰\Rightarrow ۲x=۳۰$$
$$\Rightarrow x=۱۵$$

نکته. طول مماس‌های رسم شده از هر نقطه واقع در خارج یک دایره به آن دایره با هم برابر است و به همین دلیل AT=AS است. همچنین BT=BN، CN=CM و CM=DS است.

۱۰. الف) چون OM نیمساز زاویه‌ی TMT' است، پس $O\hat{M}T=O\hat{M}T'=\frac{۶۰^\circ}{۲}=۳۰^\circ$ است. در مثلث قائم‌الزاویه‌ی OMT: $O\hat{T}M=۹۰^\circ$ و TH ارتفاع وارد بر وتر است، زیرا OM عمودمنصف وتر TT' است. از طرفی می‌دانیم که ضلع مقابل به زاویه‌ی ۳۰° در مثلث قائم‌الزاویه نصف وتر مثلث است، پس داریم:

$$OT=\frac{OM}{۲}\Rightarrow ۱۵=\frac{OM}{۲}$$

فاصله‌ی M از مرکز دایره $OM=۳۰$

$$\Rightarrow MT=\sqrt{OM^۲-OT^۲}=\sqrt{۳۰^۲-۱۵^۲}$$
$$=\sqrt{۶۷۵}=۱۵\sqrt{۳}$$

از طرفی داریم:

$$TH.OM=OT.MT=۲S_{OMT}$$
$$\Rightarrow TH\times ۳۰=۱۵\times ۱۵\sqrt{۳}$$
$$\Rightarrow TH=\frac{۱۵\sqrt{۳}}{۲}$$

برای محاسبه‌ی MH در مثلث قائم‌الزاویه‌ی MTH، $\hat{H}=۹۰^\circ$ داریم:

$$MH^۲=MT^۲-TH^۲$$
$$=(۱۵\sqrt{۳})^۲-(\frac{۱۵\sqrt{۳}}{۲})^۲$$
$$=۶۷۵-\frac{۶۷۵}{۴}=\frac{۲۰۲۵}{۴}\Rightarrow MH=\frac{۴۵}{۲}$$

ب) در مثلث قائم‌الزاویه‌ی OMT، TH ارتفاع وارد بر وتر OM است. پس داریم:

$$TH^۲=OH.MH, TH=۱۵,$$
$$OH=OM-MH=۳۰-MH$$
$$\Rightarrow ۱۵^۲=(۳۰-MH).MH$$
$$\Rightarrow ۲۲۵=۳۰MH-MH^۲$$
$$\Rightarrow MH^۲-۳۰MH+۲۲۵=۰$$
$$\Rightarrow MH=۱۵$$
$$OH=OM-MH=۳۰-۱۵$$
$$TT'=۲TH=۲\times ۱۵=۳۰$$
$$MT=\sqrt{MH^۲+TH^۲}=\sqrt{۱۵^۲+۱۵^۲}$$
$$=۱۵\sqrt{۲}$$
$$OT=\sqrt{OM^۲-MT^۲}$$
$$=\sqrt{۳۰^۲-(۱۵\sqrt{۲})^۲}=\sqrt{۴۵۰}=۱۵\sqrt{۲}$$

حل مسائل جبر و احتمال

هوشنگ شرقی

۱.

$$n=۱:\frac{۱}{۱^۲}\leq ۲-\frac{۱}{۱}\Rightarrow ۱\leq ۱$$

فرض استقرا:

$$n=k:\frac{۱}{۱^۲}+\frac{۱}{۲^۲}+\cdots+\frac{۱}{k^۲}\leq ۲-\frac{۱}{k}$$

حکم استقرا:

$$n=k+۱:\frac{۱}{۱^۲}+\frac{۱}{۲^۲}+\cdots+\frac{۱}{k^۲}+\frac{۱}{(k+۱)^۲}\leq ۲-\frac{۱}{k+۱}$$

به طرفین فرض، $\frac{۱}{(k+۱)^۲}$ را اضافه می‌کنیم:

$$\frac{۱}{۱^۲}+\frac{۱}{۲^۲}+\cdots+\frac{۱}{k^۲}+\frac{۱}{(k+۱)^۲}\leq ۲-\frac{۱}{k}+\frac{۱}{(k+۱)^۲}$$

و از مقایسه‌ی نتیجه‌ی اخیر با حکم استقرا، نتیجه می‌گیریم که برای اثبات حکم، کافی است ثابت کنیم:

$$2-\frac{1}{k}+\frac{1}{(k+1)^2}\le 2-\frac{1}{k+1}$$

و به کمک استدلال بازگشتی داریم:

$$\frac{1}{(k+1)^2}\le \frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}=\frac{k+1-k}{k(k+1)}$$

$$=\frac{1}{k(k+1)}\Rightarrow \frac{1}{(k+1)^2}\le \frac{1}{k}$$

$$\Rightarrow (k+1)^2\ge k\Rightarrow k^2+2k+1\ge k$$

$$\Rightarrow k^2+k+1\ge 0$$

که درستی نابرابری اخیر به ازای هر عدد طبیعی k واضح است و چون همه‌ی مراحل برگشت پذیرند، پس درستی حکم استقرا اثبات می‌شود.

۲. می‌دانیم هر عدد طبیعی در تقسیم بر ۳ یکی از باقی‌مانده‌های ۰، ۱، ۲ را دارد، یعنی به یکی از سه فرم ۳k، ۳k+۱ یا ۳k+۲ است. بنابراین اگر عددی طبیعی بر سه بخش‌پذیر نباشد، به یکی از صورت‌های ۳k+۱ یا ۳k+۲ است و در این حالت‌ها داریم:

$$a=3k+1\Rightarrow a^2=9k^2+6k+1$$
$$=3\underbrace{(3k^2+2k)}_{k'}+1=3k'+1$$

$$a=3k+2\Rightarrow a^2=9k^2+12k+4$$
$$=3\underbrace{(3k^2+4k+1)}_{k''}+1=3k''+1$$

پس در هر دو حالت، باقی‌مانده‌ی a^2 بر ۳ مساوی ۱ است.

۳. فرض می‌کنیم این عدد گنگ نباشد، پس گویاست:

$$\sqrt{\sqrt{5}-\sqrt[3]{2}}=\frac{a}{b}\,;a,b\in\mathbb{Z},b\neq 0$$

$$\Rightarrow \sqrt{5}-\sqrt[3]{2}=\frac{a^2}{b^2}$$

$$\Rightarrow \sqrt[3]{2}=-\frac{a^2}{b^2}+\sqrt{5}$$

$$\Rightarrow 2=(\sqrt{5}-\frac{a^2}{b^2})^3$$

$$\Rightarrow 2=5\sqrt{5}-15\frac{a^2}{b^2}+3\sqrt{5}\frac{a^4}{b^4}-\frac{a^6}{b^6}$$

$$\overset{b^6\neq 0}{\Rightarrow} 2b^6=5\sqrt{5}b^6-15a^2b^4+3\sqrt{5}a^4b^2-a^6$$

$$\Rightarrow 2b^6+15a^2b^4+a^6=\sqrt{5}(5a^6+3a^4b^2)$$

$$\Rightarrow \sqrt{5}=\frac{2b^6+15a^2b^4+a^6}{5a^6+3a^4b^2}=\frac{m}{n}$$

و چون $b\in\mathbb{Z}$ و a پس $m,n\in\mathbb{Z}$ لذا $\sqrt{5}$ مساوی عددی گویاست و این خلاف فرض‌ها خواهد بود ($\sqrt{5}$ عددی گنگ است).

۴.

$$\frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{a}\ge a^2+b^2$$

$$\Rightarrow \frac{a^4+b^4}{ab}\ge a^2+b^2$$

$$\Rightarrow a^4+b^4\ge a^3b+ab^3$$

$$\Rightarrow a^4-a^3b+b^4-ab^3\ge 0$$

$$\Rightarrow a^3(a-b)-b^3(a-b)\ge 0$$

$$\Rightarrow (a-b)(a^3-b^3)\ge 0$$

$$\Rightarrow (a-b)(a-b)(a^2+ab+b^2)\ge 0$$

$$\Rightarrow (a-b)^2(a^2+ab+b^2)\ge 0$$

و درستی نابرابری فوق واضح است، زیرا $(a-b)^2\ge 0$ و چون a و b مثبت هستند پس $a^2+ab+b^2\ge 0$، همه‌ی مراحل نیز برگشت‌پذیرند.

۵. الف) نادرست است. مثال نقض: $\sqrt[3]{5}$ عددی گنگ و $(\sqrt[3]{5})^3=5$ نیز عددی گویا است.

ب) نادرست است زیرا (مثال نقض) $\sqrt{5}$ عددی گنگ و $5\sqrt{5}=(\sqrt{5})^3$ نیز عددی گنگ است.

ج) درست است. اثبات:

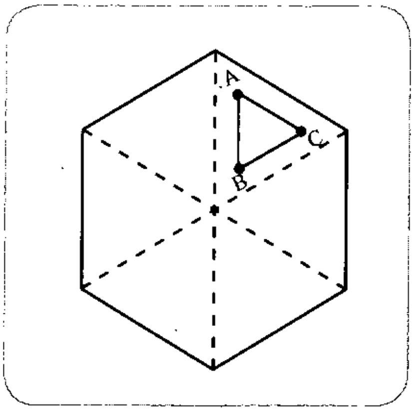
$$a=\frac{p}{q},p,q\in\mathbb{Z},q\neq 0$$

$$\Rightarrow a^3=\frac{p^3}{q^3}=\frac{p'}{q'},p'=p^3\in\mathbb{Z},$$

$$q'=q^3\in\mathbb{Z},q\neq 0$$

$$\Rightarrow q^3=q'\neq 0\Rightarrow a^3\in Q$$

۶. به صورت زیر، با وصل کردن رئوس شش ضلعی به مرکز آن، شش ضلعی را به شش مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع واحد تقسیم می‌کنیم (توجه کنید که هر زاویه‌ی داخلی شش ضلعی منتظم مساوی 120° است و لذا هر یک از زاویه‌های داخلی این مثلث‌ها مساوی 60° و در نتیجه همگی آن‌ها متساوی‌الاضلاع و همنهشت‌اند). حال چون پانزده نقطه درون شش ضلعی در نظر گرفته‌ایم، بنابراین طبق تعمیم یافته‌ی اصل لانه کبوتری، دست‌کم سه نقطه از آن‌ها در یک مثلث قرار می‌گیرند (مانند نقاط A و B و C در شکل). پس مساحت مثلث ABC از مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع a از دستور $S=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$ به دست می‌آید. پس خواهیم داشت:



$$S_{ABC}<\frac{\sqrt{3}}{4}(1)^2=\frac{\sqrt{3}}{4}$$

۷. برای تشکیل A، ابتدا نامعادله‌ی $x(x-1)\le 2$ را حل می‌کنیم.

$$x^2-x\le 2\Rightarrow x^2-x-2\le 0$$
$$\Rightarrow (x-2)(x+1)\le 0$$
$$\Rightarrow -1\le x\le 2$$
$\Rightarrow x=-1$ یا ۰ یا ۱ یا ۲
$$\Rightarrow A=\{-1,0,1,2\}$$

و درباره‌ی B نیز روشن است که عددهای حسابی که فاکتوریل آن‌ها کم‌تر یا مساوی ۳۰ است، ۴،۳،۲،۱،۰ هستند.

$$B=\{0,1,2,3,4\}$$

$$\Rightarrow A-B=\{-1\},B-A=\{3,4\}$$
$$\Rightarrow A\Delta B=(A-B)\cup(B-A)$$
$$=\{-1,3,4\}$$

.۸

$$A=\left\{\frac{(-1)^{n+1}}{n(n+1)}\middle|x\in\mathbb{N}\right\}$$
$$B=x_1=\frac{1}{2},x_2=\frac{1}{5}$$
$$\Rightarrow S=x_1+x_2=\frac{1}{2}+\frac{1}{5}=\frac{7}{10}$$
$$p=x_1.x_2=\frac{1}{2}\times\frac{1}{5}=\frac{1}{10}$$
$$\Rightarrow x^2-\frac{7}{10}x+\frac{1}{10}=0$$
$$\Rightarrow 10x^2-7x+1=0$$
$$\Rightarrow B=\{x|10x^2-7x+1=0\}$$

۹. الف)

$$A-(B-C)$$
$$=A-(B\cap C')=A\cap(B\cap C')'$$
$$=A\cap(B'\cup C)=(A\cap B')\cup(A\cap C)$$
$$=(A-B)\cup(A\cap C)$$

ب)

$$\left.\begin{array}{l}A\subset B\Rightarrow A\cup B=B\\ A'\subset B\Rightarrow A'\cup B=B\end{array}\right\}$$
$$\Rightarrow(A\cup B)\cup(A'\cup B)=B\cup B$$
$$\Rightarrow(A\cup A')\cup(B\cup B)=B$$
$$\Rightarrow U\cup B=B\Rightarrow B=U$$

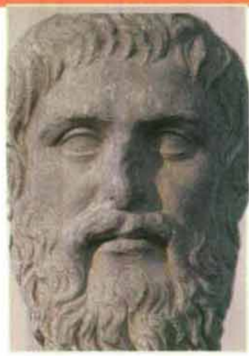
ج)

$$A-B=A$$
$$\Rightarrow A\cap B'=A\Rightarrow(A\cap B')'=A'$$
$$\Rightarrow A'\cup B=A'$$
$$\Rightarrow B\cap(A'\cup B)=B\cap A'$$

جذب

$$\Rightarrow B=B\cap A'$$
$$\Rightarrow B=B-A$$





مطالعه‌ی ریاضیات، دستگاه ذهنی را توسعه می‌دهد و به‌کار می‌اندازد که ارزش آن از هزار چشم بیشتر است. زیرا درک حقیقت فقط از راه ریاضی میسر است. جهان اندیشه، مهمتر از جهان مادی حواس است چرا که این جهان سایه‌ی جهان اولی است. جهان مادی غاری است ناروشن که بر روی دیوارهای آن تنها سایه‌های جهان واقعی خارج را که به نور خورشید روشن شده است، می‌بینیم. خطاهای حواس باید از راه تمرکز فکر اصلاح شوند و این تمرکز از راه مطالعه‌ی ریاضیات بهتر میسر خواهد شد.

افلاطون



من از هیچ دنیای تازه و شگفت‌انگیزی (هندسه‌ی نااقلیدوسی) آفریده‌ام.

یانوش بویویی



به نظر من مصلحت آن است که اگر در کشف هندسه‌ی نااقلیدسی توفیق یافته‌ای در انتشار آن شتاب کنی؛ نخست بدین علت که افکار به آسانی و خیلی زود از یکی به دیگری که ممکن است آن‌ها را منتشر سازد منتقل می‌شوند. ثانیاً بدین‌خاطر که بسیاری از چیزها همان‌گونه که همیشه بوده است دورانی دارند که همزمان در چند جا کشف شده‌اند نظیر گل‌های بنفشه که در بهاران همه‌جا پدید می‌آیند.

فورکش بویویی
(در نامه‌ای به پسرش یانوش)

منبع:
زبان حال ریاضی‌دانان
به روایت دکتر علی‌اکبر عالم‌زاده
مؤسسه نشر علوم نوین ۱۳۷٤